P R E F A Ţ A

Primul volum, în care-au fost expuse ***funcţiile supermatematice de variabilă excentrică*** [cu excepţia funcţiilor *cosinus excentric* (cex), *sinus excentric* (sex), *amplitudine şi beta excentrice*,în editia 1-a], a facilitat familiarizarea (celor interesaţi) cu teme expuse în cadrul unor cursuri universitare, de-a lungul anilor 1986-2003, la Facultatea de Mecanică din Timişoara, la Asociatia *Astra Română* Timişoara, la cursul de MECATRONICĂ (susţinut de autor pentru studenţii TCM din anii IV şi V) etc. etc.

Apărut fără corectură, întâiul volum are, evident, destule greşeli, pe care şi le asumă, la paritate, autorul şi editura. Chiar şi în aceste condiţii, volumul s-a *epuizat* cvasiinstantaneu, *la succesul de public (avizat)* contribuind în egală măsură conţinutul ştiinţific interesantissim (de care se face *vinovat* autorul), cât şi grafica de excepţie (pentru care se cuvin aprecieri superlative d-lui prof.dr.ing.**Sabin Ionel**, senior editor la Editura POLITEHNICA din Timişoara).

Dacă, în volumul anterior, pentru familiarizarea cititorului cu o *problematică* atât de insolită, autorul găseşte necesar să insereze o PREFAŢĂ de 11 pagini (!) şi capitolul INTRODUCERE de 29 pagini (!), in volumul de faţă, consacrat ***funcţiilor supermatematice de variabilă centrică***, "inventariaza" nu mai puţin de 163 ABREVIERI şi NOTAŢII !

Fiecare capitol "se deschide" cu câte un MOTTO inspirat, "semnat", deopotrivă, de matematicieni (Bezikovici, Jacobi, Klein, Weierstrass etc.), fizicieni (Einstein, Heisenberg ş.a.), scriitori - filosofi (Nichita Stănescu, Ayn Rand) şi chiar de politicieni (Charles Wilson)..!

Încântat de o asemenea bogată *secreţie aforistică*, nici subsemnatul nu rezistă tentaţiei citării. Astfel, nu pot omite confesiunea lui Ion Barbu, potrivit căreia "***Poezia este o prelungire a geometriei***", iar, prin extensie, aş zice că, mai abitir, **SUPERMATEMATICA** incită la *atitudine lirică* (chiar şi) în cercetarea ştiinţifică.

Dacă renumitul compozitor francez, Claude Debussy, şi-a "botezat" una dintre compoziţiile pentru pian *"**Terasa de audienţă a clarului de lună**"*, să nu ne mirăm când dl. prof. M.E.Şelariu, sub presiunea inflexiunilor şi faldurilor gândului, reuneşte cuvinte care n-au mai stat alături de la întemeierea lumii, precum *"**cerc al amortizărilor vâscoase liniare**"*, *"**funcţii elevate**"*, ***funcţii exotice**"*, *"**dreapta definită ca degenerată a strâmbei**"* ş.a.m.d...!

Capitolul prim din volumul doi [marcat cu 9 (9 fiind ultimul capitol, neterminat, al vol.I), pentru a da continuitate şi unitate lucrării în ansamblu], tratează excepţiile menţionate în primul paragraf. Impresionează acurateţea, claritatea, combinaţiile coloristice ale nenumăratelor reprezentări grafice, încât se poate afirma, fără exagerare, că "**figurile**" respective sunt "**fructe**" ale unui ***rasfăţ metaforic***, care ***tronează suveran*** asupra formelor şi cromaticii [căci, la o lucrare de genul acesta, ni se confirmă extinderea noţiunii de metaforă (şi în afara domeniului strict literar)] !

EXCENTRICELE – CURBE SUPERMATEMATICE fac obiectul capitolului 10. După un documentat periplu istoric, aflăm ca "fiecărei **centrice** îi corespund o

infinitate de **excentrice**, pe când, numai într-un singur caz (al excentricităţii nule), printre infinitatea de excentrice se află şi câte o singură centrică”. Facem cunoştinţa cu ***excentricele circulare***, ***eliptice,*** ***hiperbolice***, ***parabolice***, ***evolventice***, ***spirale***, ***cicloidale*** etc., cu *familii de* ***excentrice dexoidale*** sau ***rexoidale***, cu *suprafeţe derivate din ecuaţiile* ***profilului Jukowsky***, cu *SSM de forma unor* ***vaze de flori***, ori chiar de forma unei statui *stilizate a lui Budha*..! Toate in “veşmânt” grafic de excepţie !

În continuare (cap.11), este sondat *SISTEMUL OSCILAŢIILOR EXCENTRICE*, respectiv se trece la *REZOLVAREA UNOR ECUAŢII DIFERENŢIALE cu funcţiile cosinus şi sinus excentrice*, într-un amplu şi doct expozeu. Autorul face *paradă (neostentativă)* de erudiţie, mişcându-se dezinvolt într-un domeniu interdisciplinar (matematică-fizică-inginerie) şi învederând, dacă mai era nevoie, *multiplele faţete ale poliedricei sale personalităţi* !

Ca să-l cităm pe însuşi autorul, “pentru a reduce cât mai mult petele albe ale matematicii, e necesară introducerea secţiunii *INTEGRALE ŞI FUNCŢII ELIPTICE EXCENTRICE* “(cap.12), întrezărindu-le un “viitor luminos”, întrucât “e normal ca şi **SUPERMATEMATICA** să se extindă nedefinit, deoarece ***numai infinitul este locul unde se produce ceea ce nu se poate întâmpla***” !

Sub genericul *FUNCŢII COMPUSE AUTOINDUSE ŞI FUNCŢII INDUSE* (cap.13), sunt inventariate diverse *FUNCŢII MATEMATICE VECHI ŞI NOI, DERIVATELE FUNCŢIILOR CIRCULARE CENTRICE VOINOIU* etc. şi , între multe altele, se valorifică prilejul pentru *REDEFINIREA FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ.*

Îmi fac o datorie de conştiinţă revenind cu aprecieri superlative pentru construcţiile grafice, între care nu puţine, cu deosebire în ultimele capitole (14 – 20), ***în reprezentare 3D*** !

& & &

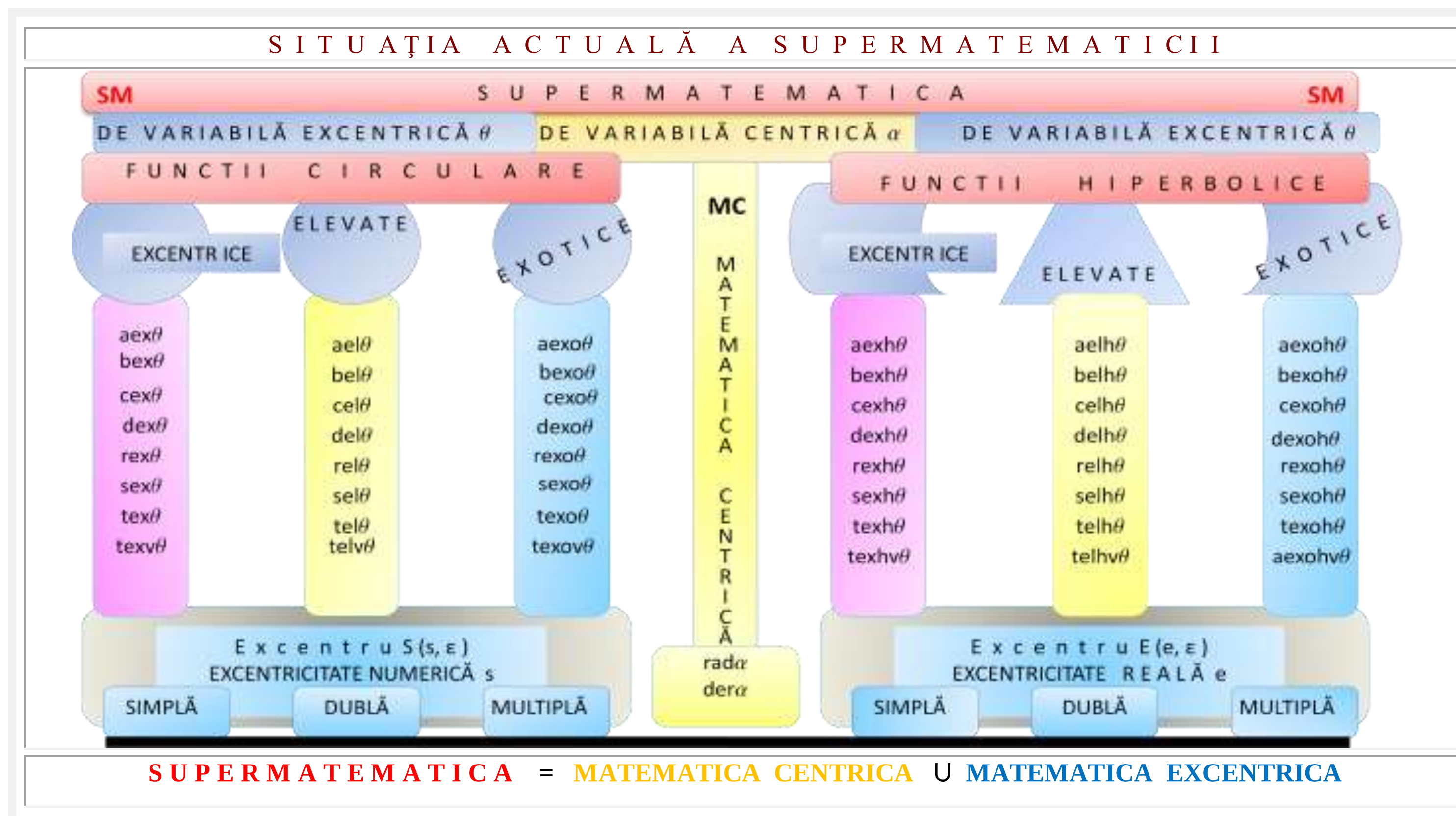
Este greu să rezum, în câteva rânduri, conţinutul atât de dens al unei lucrări, precum cea prezentă. Pot afirma, fără teamă de exagerare, că orice “cititor” de bună credinţă, are de câştigat şi va părăsi lectura cu *mintea şi inima înălţate pe un soclu de certitudine*. Un text cu cea mai mare *acoperire de materie cenuşie pe* cm^2, al unui autor care *se mişcă numai printre repere fundamentate ştiinţific*, nu poate fi decât binevenit în orice bibliotecă personală.

Nu este exclus să apară şi câte un *profesionist al căutării nodului în papură*, care să depisteze vreo virgulă lipsă, ori vreuna prisositoare... În această “materie” este de notorietate cazul pictorului **Apelles**, căruia un cizmar i-a făcut observaţie cu privire la modul în care erau reprezentate legăturile sandalelor într-un tablou...

Cu toată strădania de a-mi *acidula spiritul critic*, n-am găsit nici cel mai mic temei să pot aduce ***acuzaţii*** cu adresă la **op**ul prefaţat. Dimpotrivă, recunosc, şi o afirm cu toată răspunderea: e de ordinea **EVIDENŢEI** că **SUPERMATEMATICA este o VALOARE ...**

...Iar , contra **EVIDENŢEI** probe nu există !

Ing. Ioan Ghiocel


SITUAŢIA ACTUALĂ A SUPERMATEMATICII
SM SUPERMATEMATICA SM
DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ
DE VARIABILĂ CENTRICĂ α
DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ
FUNCTII CIRCULARE
FUNCTII HIPERBOLICE
EXCENTRICE
ELEVATE
EXOTICE
MC
MATEMATICA CENTRICĂ
EXCENTRICE
ELEVATE
EXOTICE
aexθ bexθ cexθ dexθ rexθ sexθ texθ texvθ
aelθ belθ celθ delθ relθ selθ telθ telvθ
aexoθ bexoθ cexoθ dexoθ rexoθ sexoθ texoθ texovθ
radα derα
aexhθ bexhθ cexhθ dexhθ rexhθ sexhθ texhθ texhvθ
aelhθ belhθ celhθ delhθ relhθ selhθ telhθ telhvθ
aexohθ bexohθ cexohθ dexohθ rexohθ sexohθ texohθ aexohvθ
Excentru S(s, ε)
EXCENTRICITATE NUMERICĂ s
SIMPLĂ
DUBLĂ
MULTIPLĂ
Excentru E(e, ε)
EXCENTRICITATE REALĂ e
SIMPLĂ
DUBLĂ
MULTIPLĂ
SUPERMATEMATICA = MATEMATICA CENTRICA U MATEMATICA EXCENTRICA

LISTA NOILOR FUNCŢII MATEMATICE CENTRICE (MC) şi SUPERMATEMATICE (SM) DIN LUCRARE

ÎN **MATEMATICA CENTRICA**		ÎN **MATEMATICA EXCENTRICA**	
Funcţii C E N T R I C E		**Funcţii E X C E N T R I C E**	
DENUMIREA FUNCŢIEI	NOTAREA	DENUMIREA FUNCŢIEI	NOTAREA
F U N C T I I C I R C U L A R E			
	rad	**Radial excentric** de variabilă excentrică θ	rexθ
		Radial excentric de variabilă centrică α	Rexα
Derivată centrică	der	**Derivată excentrică** de variabilă excentrică θ	dexθ
		Derivată excentrică de variabilă centrică α	Dexα
Autoinduse centrice		Autoinduse excentrice de variabila centricâ şi de variabia excentricâ	
Cosinus autoindus	cosai	Cosinus excentric autoindus	Cexaiα, cexaiθ
Sinus autoindus	sinai	Sinus excentric autoindus	Sexaiα, cexaiθ
Tangenta si cotangenta autoinduse	tanai cotai	Tangenta si cotangenta excentrice autoinduse	Texaiα, texaiθ Cexaiα, cexaiθ
Secanta şi cosecanta autoinduse	secai cscai	Secanta şi cosecanta excentrice autoinduse	Secexaiα, secexxaiθ Cscexaiα, cscexaiα
Induse centrice		Induse excentrice	

Cosinus indus	cosi	Cosinus excentric indus	cexi
Sinus indus	sini	Sinus excentric indus	sexi
Tangenta si cotangenta induse	Tani coti	Tangenta si cotangenta excentrice induse	texi cexi
Secanta şi cosecanta	seci	Secanta şi cosecanta excentrice induse	Secexi

induse	csci		cscexi
		Cosinus excentric de θ şi de α	cexθ, Cexα
		Sinus excentric de θ şi de α	sex, Sexα
		Tangenta şi cotangenta excentrice	texθ, Texα; ctexθ, Cαtex
Tangenta şi cotangenta Voinoiu	tav cov	Tangenta si cotangenta excentrice Voinoiu	tavex θ,Tavexα ctavexθ, Ctavexα
		Secanta şi cosecanta excentrice	scexθ, Secexα, cscex, Cscexα
Secanta şi cosecanta Voinoiu	secv cscv	Secanta şi cosecanta excentrice Voinoiu	secvexθ, Secvexα, cscvexθ, Cscvexα
	sev	**ELEVATE**	
	csv	**Cosinus elevat**	**cel**
		Sinus elevat	**sel**
		Tangenta, cotangenta elevate	**tanel, cotel**
		Secanta, cosecanta elevate	**secel, cscel**
		EXOTICE	
		Cosinus exotic	cexo
		Sinus exotic	sexo
		Tangenta şi cotangenta exotice	tanexo, cotexo
		Secanta şi cosecanta exotice	secexo, cscexo
E L I P T I C E S U P E R M A T E M A T I C E (SM)			
Cosinus eliptic **SM**	ce	Cosinus eliptic excentric **SM**	ceex
Sinus eliptic **SM**	se	Sinus eliptic excentric **SM**	seex
Amplitudini eliptice **SM**	aece aese		
Derivate eliptice **SM**	dece dese		
Funcţii eliptice în trepte **Smarandache**	smce smse		
P A R A B O L I C E S M			
Cosinus parabolic **SM**	cp	Cosinus parabolic **SM excentric**	cpex
Sinus parabolic **SM**	sp	Sinus parabolic **SM excentric**	spex
H I P E R B O L I C E S M			
Cosinus hiperbolic **SM**	ch, cosh	Cosinus hiperbolic **SM excerntric**	cexh, chex
Sinus hiperbolic **SM**	Sh, sinh	Sinus hiperbolic **SM excentric**	Sexh, shex

C V A D R I L O B E S M			
Cosinus cvadrilob SM	coq	Cosinus cvadrilob excentric SM	coqex
Sinus cvadrilob SM	siq	Sinus cvadrilob excentric SM	siqex
CVADRILOBE TRANSTRIGONOMETRICE (TT)			
Cosinus cvadrilob TT	ct	Cosinus cvadrilob excentric TT	ctex
Sinus cvadrilob TT	st	Sinus cvadrilob excentric TT	stex
FUNCTII INTRATRIGONOMETRICE			
Cosinus intratrigonometric	cit	Cosinus intratrigonometric excentric	citex
Sinus intratrigonometric	sit	Sinus intratrigonometric excentric	sitex
FUNCTII PE CONICE CU VÂRFUL COMUN			
CENTRICE		EXCENTRICE	
Generală a CONICELOR	coc, sic	Generală excentrice	cocex,sicex
Conice tip ELIPTIC	coce, sice	Conice tip ELIPTIC excentrice	coceex, siceex
Conice tip HIPERBOLIC	coch, sich	Conice tip HIPERBOLIC excentrice	cochex, sichex
Conice eliptice	coe, sie	Conice eliptice excentrice	coeex, sieex
Conice PARABOLICE	cop, sip	Conice PARABOLICE excentrice	copex, sipex
Conice hiperbolice	coh, sih	Conice hiperbolice excentrice	cohex, sihex

- Toate funcţiile noi excentrice introduse în aceasta lucrare sunt de variabilă excentrică θ, dar şi de variabilă cenitrică α;

Motto: “Cercetarea fundamentală este ceia ce faci,
când nu ştii ceia ce ai de gând a face”.
Charles Wilson

Cap. 12 INTEGRALE ŞI FUNCŢII ELIPTICE EXCENTRICE

12.1 GENERALITĂŢI

Istoria confirmă faptul că **Fourier** i-a acuzat pe **Jacobi** şi pe **Abel** ca-şi risipesc/pierd timpul cu **funcţii eliptice**, când sunt atâtea probleme mai utile care ar putea fi rezolvate.

Care erau acele probleme stresante, în acea vreme/dată, ca şi raspunsul lui **Abel** se gasesc pe site-ul ” Zâmbetul ştiinţei”. (V.**Google** → ” Zâmbetul ştiinţei”).

După părerea lui **L. D. Landau** “Ştiinţele matematice, ştiinţele naturale şi ştiinţele umanitare pot fi numite şi, respectiv, ştiinţe supranaturale, ştiinţe naturale şi ştiinţe nenaturale”. Ca urmare, ştiinţele matematice sunt ştiinţe **supra**naturale, iar complementele de matematică, ce se vor prezenta în continuare, aparţin, evident matematicii excentrice (**ME**) şi, prin aceasta, **super**matematicii. Deci, matematica este **supra…** şi va fi (sau este deja ?) **super…** !

Cu siguranţă, există, în acest moment, în lume/univers, probleme mult mai importante, pe care omenirea este chemată să le rezolve, decât studierea integralelor eliptice excentrice (**IEE**) şi a funcţiilor eliptice excentrice (**FEE**) din acest capitol.

Fără hrană oamenii mor, fără funcţii eliptice, fie ele şi excentrice, supravituiesc/trăiesc şi, poate, chiar mai bine.

Dacă omenirea a progresat vertiginos, din momentul adoptării în muncă a principiului diviziunii sociale a muncii, conform căruia, e necesar să-ţi restrângi cât mai mult domeniul de activitate, pentru a realiza lucruri de calitate, în cel mai scurt timp, cu costuri cât mai scăzute. Adică, scopul oricărei activităţi este de-a fi **ratională**: de-a obţine cu minimum de efort uman, fizic şi intelectual, maximum de beneficii (calitate, eficienţă economică, socială, ecologică, ergonomică ş.a.). Numai că, pe lângă şuruburi, cineva trebuie să producă şi piuliţele; fără piuliţe şuruburile nu pot fi intrebuinţate.

Contrar părerilor lui **Fourier**, despre inutilitatea unor studii, **E. P. Wigner** este de părere că *“**Matematica** este ştiinţa manevrării cu regulile şi noţiunile născocite anume în acest scop. Este clar, că **cel mai important** rol aici (în matematică, n. n.) îl are **<u>invenţia unor noţiuni noi</u>**. Rezerva teoremelor interesante ar fi epuizată repede în matematică, dacă ar fi fost nevoie să le formulăm numai cu ajutorul noţiunilor, conţinute în axiome “*.

De aceea, pentru a reduce cât mai mult petele albe ale matematicii, considerăm, totuşi, necesară introducerea acestor integrale şi funcţii eliptice excentrice, pentru a completa domeniul integralelor şi a funcţiilor eliptice, pe care, acum, suntem

obligaţi să le denumim şi **centrice** (**IEC** şi **FEC**). Cu atât mai mult, cu cât se întrezăresc unele aplicaţii interesante şi chiar importante.

Până unde se va extinde supermatematica ? Dacă matematica excentrică multiplică la infinit **toate** entităţile matematice, e normal ca şi supermatematica să se extindă nedefinit, deoarece ”numai infinitul este locul unde se produce ceia ce nu se poate întâmpla ”.

12.2 DEFINIREA INTEGRALELOR ELIPTICE EXCENTRICE (IEE)

Extinderea integralelor şi a funcţiilor eliptice, din domeniul centric în domeniul excentric, se poarte face în mod asemănător cu extinderea funcţiilor circulare centrice în domeniul excentric şi, în general, identic cu multiplicarea la infinit a tuturor entităţilor metematice centrice: prin înlocuirea variabilelor centrice α cu variabila/ (funcţia de variabilă) excentrică θ, utilizând relaţia [v. Vol. I, relaţia (3.70) şi relaţia (3.71) rescrisă în relaţia (12.02)]

(3.70)/(12.01) $$\beta_1 + \beta_2 = \pm\pi,\ s_x = s.\cos\varepsilon \rightarrow \begin{cases} +\ pentru\ s_x > 0 \\ -\ pentru\ s_x < 0 \end{cases}$$

atât pentru e < R sau s < 1 cât şi pentru e > R sau s > 1, iar

(3.71) /(12.02) $$\alpha_{1,2} + \beta_{1,2} = \theta \rightarrow \alpha_{1,2} = \theta - \beta_{1,2} = \theta - \mathrm{bex}_{1,2}(\theta, S(s,\varepsilon)),\quad \forall [e, s \in (-\infty, +\infty)]$$

Funcţia **SM** beta excentrică este

(12.03) $$\mathrm{bex}_{1,2}(\theta, S(s,\varepsilon)) = \begin{cases} \beta_1 = \mathrm{bex}_1\theta = \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] \\ \beta_2 = bex_2\theta = \pi - \beta_1 = \pi - \arcsin[s.sin(\theta-\varepsilon)] \end{cases},$$

iar **FSM-CE** amplitudine excentrică va fi

(12.04) $$\alpha_{1,2} = \mathrm{aex}_{1,2}\theta = \theta - \beta_{1,2} =$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \theta - \arcsin\left(s.\sin(\theta-\varepsilon)\right) = \mathrm{aex}_1\theta \\ \alpha_2 = \theta + \arcsin\left(s.\sin(\theta-\varepsilon)\right) \mp \pi = \mathrm{aex}_2\theta \\ \forall [e, s \in (-\infty, +\infty)] \end{cases}$$

Prin convertirea anterioară sinα → sex[θ, S(s,ε)], rezultă că înlocuirea variabilelor este echivalentă cu înlocuirea **FCC** cu **FCE,** aşa cum v-a rezulta în continuare.

În **figura 12.0**, plecând de la un anumit unghi / variabilă excentrică θ, sunt prezentate mai multe sinusuri **centrice** (sinθ, sinα, sin γ) şi sinusuri **excentrice**: de variabilă excentrică sexθ şi de variabilă centrică Sexα. Se obsrvă că, plecând de la variabila θ, prin transformările cunoscute, date de funcţia amplitudine excentrică de variabilă excentrică şi, respectiv, centrică, se obţin unghiurile / variabilele α şi, respectiv, γ, între ele existând dependenţele $\alpha < \theta < \gamma$, vizibile în **figura 12.0**.

Conform regulii de înlocuire a **FCC** cu **FSM – CE,** pentru a trece din domeniul centric în domeniul excentric, **IEE** vor fi definite prin integralele incompletă şi, respectiv, completă, de prima speţă şi de **variabilă excentrică**, de integralele

(12.05) $$\mathcal{FE}(\varphi, k, S) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\, sex^2(\varphi,\ S)}}$$ şi, pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$, →

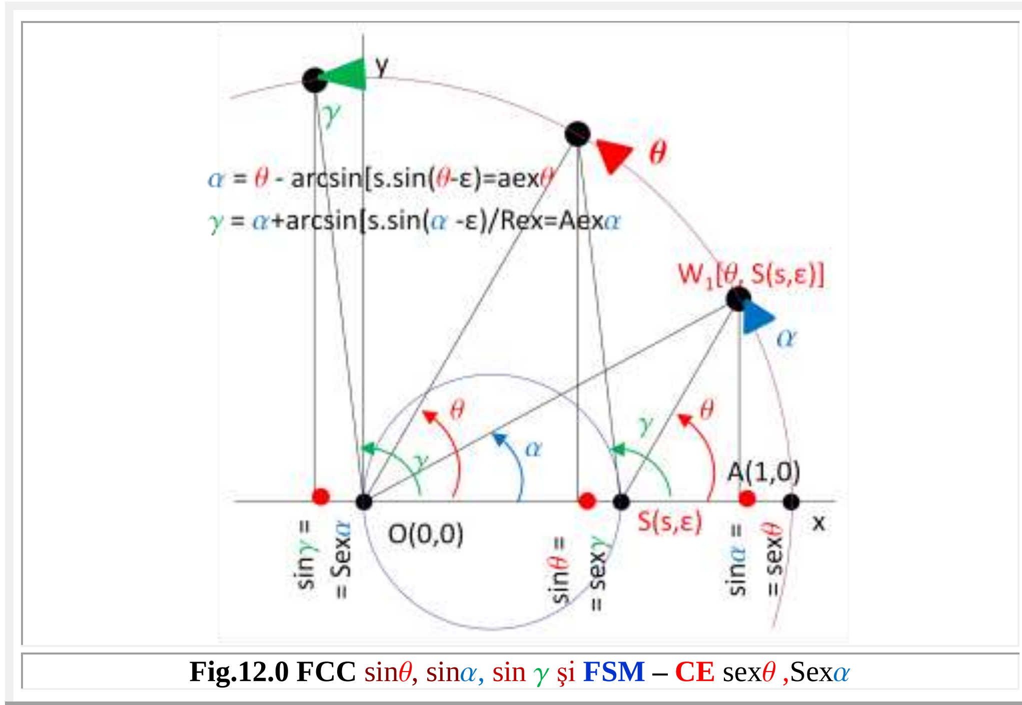


Fig.12.0 FCC sinθ, sinα, sin γ şi **FSM** – **CE** sexθ ,Sexα

(12.06) $$KE(k, S(s,\varepsilon)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\, sex^2(\varphi,\ S)}}$$

iar cele de speţa a doua, incompletă şi, respectiv, completă vor fi

(12.07) $$\mathcal{E}\mathcal{E}(\varphi,\ k, S(s,\varepsilon)) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\, sex^2(\varphi,\ S)}\ d\varphi\ ,\ \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

(12.08) $$E\mathcal{E}(\ k, S) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\, sex^2(\varphi,\ S)}\ d\varphi$$

Şi, pentru ca definirile să fie complete, **IEE** incompletă şi cea completă de a treie speţă vor avea expresiile / (vor fi integralele)

(12.09) $$\Pi\mathcal{E}(n, \varphi \setminus k,\ S =) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{1-n^2 sie(\varphi,S)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 . sex^2(\varphi,S)}}$$

(12.10) $$ⅢE(n, k, S) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-n^2 sex^2(\varphi,\ S)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 . sex^2(\varphi,\ S)}}$$

Integralele eliptice sub forma normală **Legendre**, prin transformarea x = sinφ, se reduc la forma trigonometrică normală.

De exemplu, dacă x = sinφ → $\frac{dx}{d\varphi} = cos\varphi$ → dx = cosφ.dφ, astfel că

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{cos\varphi . d\varphi}{\sqrt{(1-sin^2\varphi)(1-k^2 sin^2\varphi)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}}$$

Acelaşi lucru se întâmplă şi prin substituţia x = sexφ, deoarece sexφ = sexθ = sinα, iar 1- sex^2 θ = cex$^2\theta$, $\frac{dx}{d\varphi} = dex\varphi . cex\varphi$ → dx = dexφ.cexφ.dφ, iar dexφ = $\frac{d\alpha}{d\varphi}$, în acest caz φ ≡ θ, astfel că

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{dex\varphi . cex\varphi . d\varphi}{\sqrt{(1-sex^2\varphi)(1-k^2 sex^2\varphi)}} = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 sex^2\varphi}} = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 sin^2\alpha}}$$

denumirea variabilei, φ sau α, nu modifică valoarea integralei.

Considerând, în integrala anterioară, înlocuirea funcţiei sinφ = sinθ → sexθ, variabila φ → θ şi diferenţiala dφ → dθ, situaţia se schimbă radical, integrala anterioară de prima speţă incompletă devenind integrala eliptică excentrică incompletă de **variabilă excentrică θ**

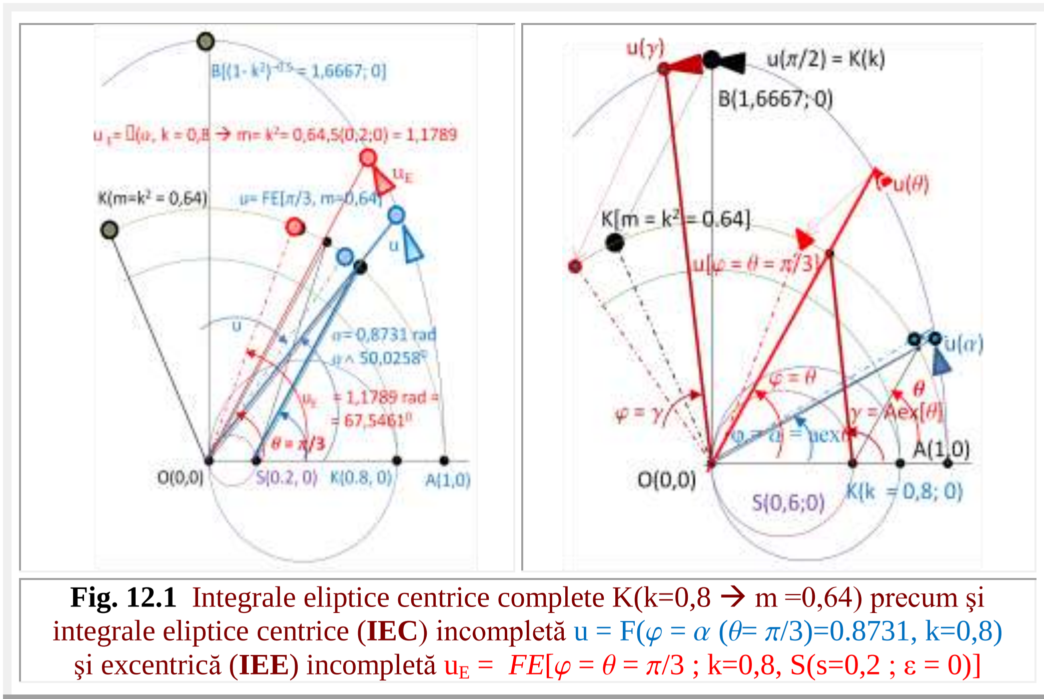


Fig. 12.1 Integrale eliptice centrice complete K(k=0,8 → m =0,64) precum şi integrale eliptice centrice (**IEC**) incompletă u = F($\varphi = \alpha$ ($\theta = \pi/3$)=0.8731, k=0,8) şi excentrică (**IEE**) incompletă u_E = *FE*[$\varphi = \theta = \pi/3$; k=0,8, S(s=0,2 ; ε = 0)]

$$FE[\theta,k,S(s,\varepsilon)] = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 sex^2[\theta,S(s,\varepsilon)]}} = u_E(\theta)$$

Dacă x = sinφ se înlocuieşte cu **FSM-CE** Sexα, sinφ → Sexα şi dφ → dα, atunci integrala eliptică centrică se transformă intr-o integrală eliptică excentrică de **variabilă centrică α**

$$FE[\alpha,k,S(s,\varepsilon)] = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 Sex^2[\alpha,S(s,\varepsilon)]}} = u_E(\alpha)$$

Dacă se face substituţia x = sex α = sexφ prin care variabila x şi φ se înlocuieşte cu x = sexα = sex[θ-arcsin[s.sin(θ - ε)]] = sinα_{Ex} şi, respectiv, cu variabila excentrică θ care, acum, este o funcţie de variabila centrică α prin relaţia cunoscută

$$\theta = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \alpha + arcsin\,\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha} =$$

$$= \alpha + \arctan\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}$$

În **figura 12.1** s-a ales φ = α[$\theta = \frac{\pi}{3}$,S(0,2;0)] = θ -arcsin[s.sin(θ - ε)] = 0,873115 la care corespunde un unghi de α = 50,0258 ^{0}.

Dacă **IEEC** complete au o singură valoare pentru un anumit modul k şi cele incomplete pentru un anumit **modul** k şi o anumită **amplitudine** φ, **IEE** au o infinitate de valori, ce corespund infinităţii de valori ale/date excentricităţii numerice **s** şi, în general, infinităţii poziţiilor excentrului **S(s,ε)** în planul cercului/elipsei unitate.

Bineînţeles că, pentru s = 0, θ = φ, sexφ → sinφ şi **IEE** degenerează în integralele eliptice centrice **IEC** ($\mathcal{F}$, F; Ɛ,E; Ⅲ,Π).

Ceea ce s-a spus despre integrale se poate extinde şi la funcţiile eliptice excentrice (**FEE**). Dacă inversa **IEC** de prima speţă $\mathcal{F}$(φ, k) = u este funcţia amplitudine am(u, k) = φ, pe care, acum, suntem obligaţi s-o denumim şi centrică, inversa **IEE** de prima speţă

(12.11) **$\mathcal{F}$Ɛ (φ = α, k, S) = u_{ex} = amex (u_{ex} , k, S) , (Fig.12.1)**

este funcţia eliptică excentrică (**FEE**) denumită **amplitudine eliptică excentrică amex (u,k,S),** (A nu se confunda cu **FSM-CE** aexθ).

Cu ajutorul **FEE amex(u,k,S)** pot fi definite următoarele funcţii eliptice excentrice (**FEE**)

(12.12) cnex (u, k, S) = cos[amex(u, k, S)]

(12.13) snex (u, k, S) = sin[amex(u, k, S)]

(12.14) dnex (u, k, S) = $\sqrt{1-k^2.sex^2[\varphi,S(s,\varepsilon)]} = \sqrt{1-k^2 snex^2[u,k,S]}$

Mai pot fi definite şi inversele şi combinaţiile acestor funcţii

(12.15)

$$\begin{cases} ncex\,(u,k,S) = \frac{1}{\text{cnex (u,k,S)}},\; nsex\,(u,k,S) = \frac{1}{\text{snex (u,k,S)}},\; ndex\,(\text{u,k,S}) = \frac{1}{\text{dnex (u,S,k)}} \\ csex\,(u,k,S) = \frac{\text{cnex (u,k,S)}}{\text{snex (u,k,S)}},\; scex\,(u,k,S) = \frac{\text{snex (u,k,S)}}{\text{cnex (u,k,S)}},\; dcex\,(\text{u,k,S}) = \frac{\text{dnex (u,S,k)}}{\text{cnex (u,k,S)}} \\ cdex\,(u,k,S) = \frac{\text{cnex (u,k,S)}}{\text{dnex (u,S,k)}},\; sdex(u,k,S) = \frac{\text{snex (u,k,S)}}{\text{dnex (u,S,k)}},\; dsex\,(u,k,S) = \frac{\text{dnex (u,S,k)}}{\text{snex (u,k,S)}} \end{cases}$$

pe care ne limităm doar a le trece în revistă.

12.3 INTEGRALE ELIPTICE EXCENTRICE (IEE)

Au fost definite anterior, prin relaţiile (12.05…12.10) şi notate cu $\mathcal{F}$E(u,k,S(s,ε)) şi cu ƐE(u,k,S(s,ε)) cele incomplete şi cu KE(k, S) şi EE(k, S) ce complete, de prima şi, respectiv, de a doua speţă/tip.

În **figura 12.1,a** sunt prezentate graficele **IEE** complete K(k,S) şi E,(k, S).

Pentru S(s = 0; ε = 0) se obţin **IEC** (IEE → IEC) şi pentru S(s = 0,2; ε = 0) modificările graficelor sunt aproape neobservabile, ca şi pentru valori reduse ale modulelor m = k^2 şi k = $\sqrt{m}$, dar modificările devin pregnante pentru valori ridicate ale acestor module.

Pentru a discerne curbele de parametru m = k^2 de cele de parametru k, trebuie specificat că, pentru m, k ∈]0, 1[, → K(k) (de culoare verde) > K(m) - galben, iar E(k) - roşu < E(m) - albastru (**Fig. 11.51,a**), situaţie care se păstrează şi în cazul **IEE**. Nu şi culorile. Acest lucru este datorat faptului că, pentru o valoare oarecare n ∈]0,1[→ m(n) < k(n) şi dacă n ↗ ⟹ K(k) ↗ şi E(k) ↘. Aşa cum este şi normal, pentru

valorile extreme ale intervalului modulelor, de m = k = 0 şi m = k = 1, **IEE** au aceleşi valori ca cele centrice (**IEC**).

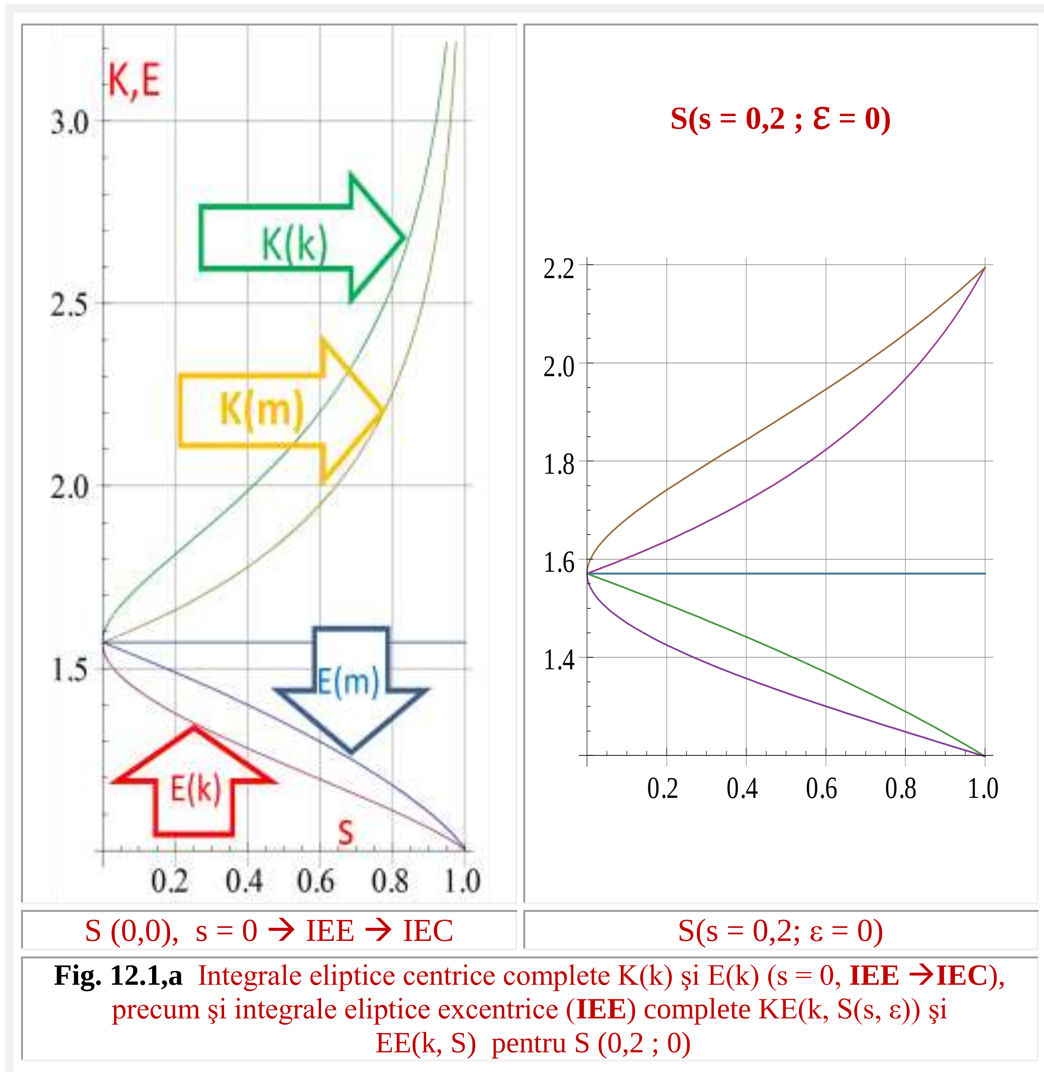
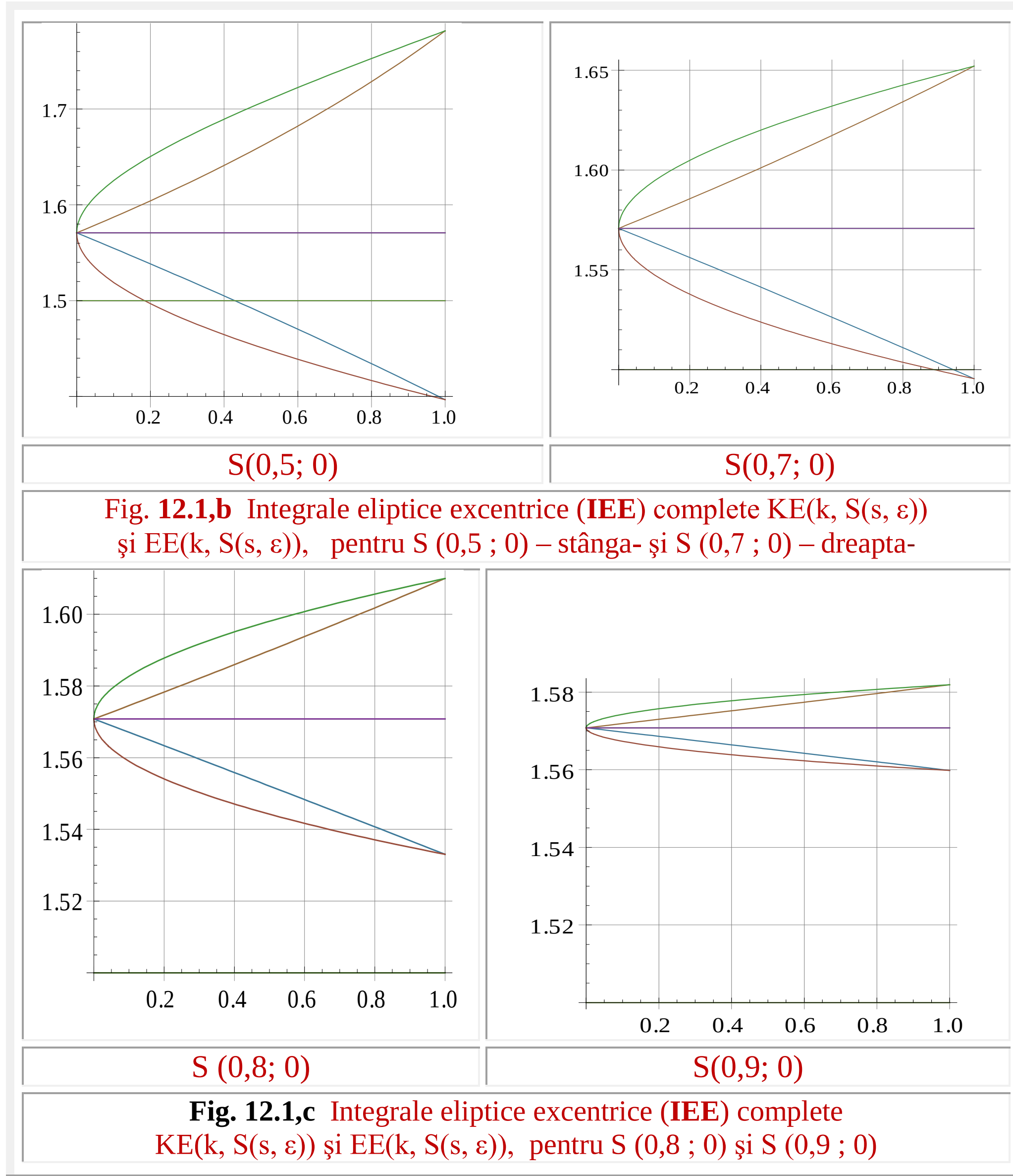


Fig. 12.1,a Integrale eliptice centrice complete K(k) şi E(k) (s = 0, **IEE** →**IEC**), precum şi integrale eliptice excentrice (**IEE**) complete KE(k, S(s, ε)) şi EE(k, S) pentru S (0,2 ; 0)

Figurile următoare, **12.1,b** şi **12.1,c**, urmăresc evoluţiile (curbelor) integralelor eliptice excentrice (**IEE**) odată cu creşterea excentricităţii numerice **s**. Adică, odată cu deplasarea excentrului S(s,0) pe axa absciselor.

Se observă că, pentru acelaşi domeniu de variaţie al modulelor k şi m, domeniul de variaţie al valorilor [0, ∞] se reduce considerabil, ambele limite apropiindu-se / tinzând de/spre valoarea lui π/2 = 1.5708… .Pentru s = 1 → EE[k, S(1,0)] = KE[k,S(1,0)] şi curbele degenereaza într-un segment de linie paralelă cu axa absciselor Ok, respectiv, Om.



S(0,5; 0) S(0,7; 0)

Fig. **12.1,b** Integrale eliptice excentrice (**IEE**) complete KE(k, S(s, ε)) şi EE(k, S(s, ε)), pentru S (0,5 ; 0) – stânga- şi S (0,7 ; 0) – dreapta-

S (0,8; 0) S(0,9; 0)

Fig. 12.1,c Integrale eliptice excentrice (**IEE**) complete KE(k, S(s, ε)) şi EE(k, S(s, ε)), pentru S (0,8 ; 0) şi S (0,9 ; 0)

Acest lucru se explică prin faptul că, pentru s = 1 şi θ ∈ [0, π/2] ca şi în domeniul mai extins θ ∈ [-π/2, π/2], sex(θ, s = 1) = 0, astfel că **IEE**(k, s = 1) sunt egale între ele KE(k, s=1) = EE(k, s=1) şi devin egale, valoric, cu **IEC** (k=0), adică, K(0) = E(0) = π/2, astfel că se poate exprima/scrie, simbolic, că **IEE**(k, s = 1) = **IEC** (k = 0). Graficele **IEE**(s), ca funcţii de excentricitatea numerică s, prezentate în figura **12.1**, pentru ε = 0 şi s ∈ [0, 1] relevă scăderea valorilor **IEE** KE(s) cât şi creşterea

valorii **IEE** EE(s), odată cu creşterea valorii excentricităţii **s** şi egalizarea lor la valoarea π/2, în extremitatea din dreapta, pentru s = 1.

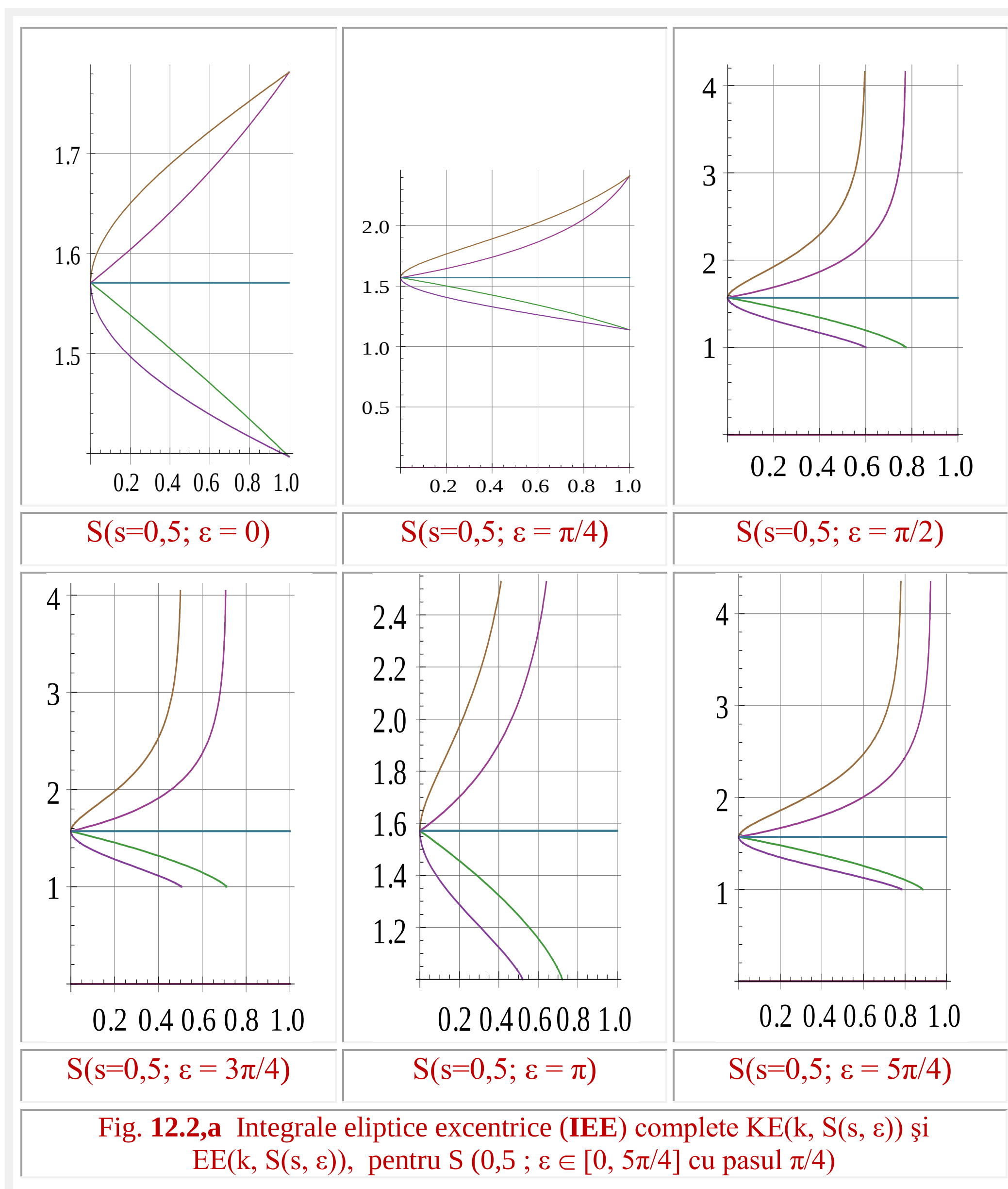


Fig. **12.2,a** Integrale eliptice excentrice (**IEE**) complete KE(k, S(s, ε)) şi EE(k, S(s, ε)), pentru S (0,5 ; ε ∈ [0, 5π/4] cu pasul π/4)

Pentru o valoare oarecare a excentricităţii numerice, aleasă arbitrar de s = 0,5, se va urmării evoluţia **IEE** în funcţie de ε, adică, de rotaţia excentrului S(s,ε) pe cercul C(R, O(0,0)) de raza R = s = 0,5. Rotaţie în sens trigonometric sau sinistrorum / levogin

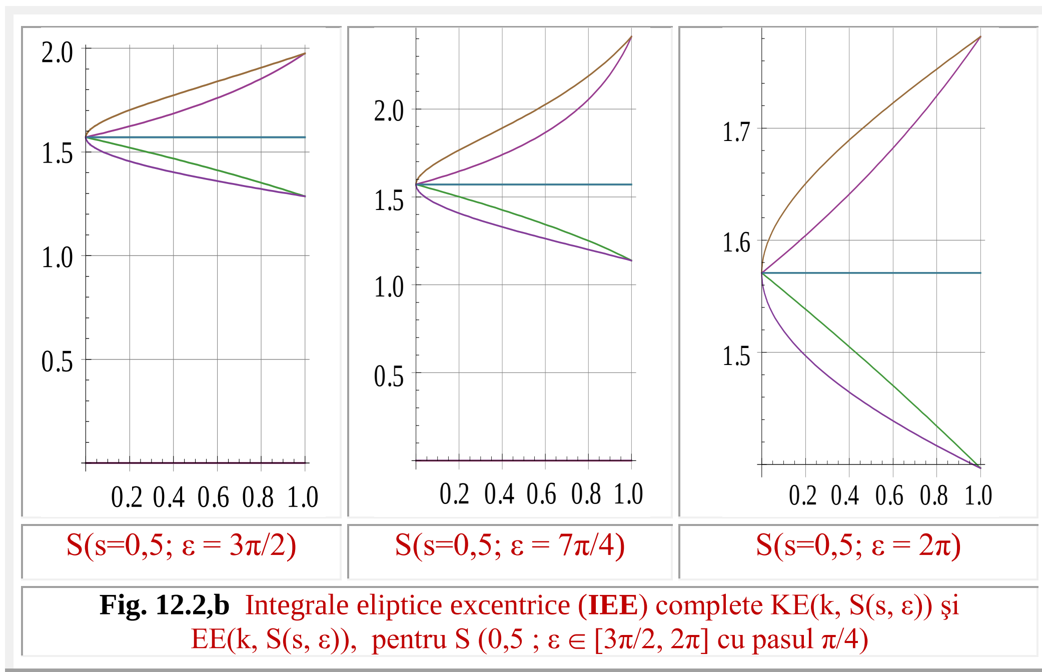
Astfel, în **figura 12.2** sunt prezentate secvenţele acestei acţiuni cu pasul π/4, începând cu ε = 0 şi sfârşind cu ε = 2π, ca rotaţia să fie completă şi caracterul periodic al **IEE,** ca funcţii de ε, să fie cât se poate de evident (v. ε = 0 şi ε = 2π).

În **figura 12.2,a** Ɛ evoluează între 0 şi 5π/4, iar în următoarea figură de la ε = 3π/2 la ε = 2π.

Periodicitatea **IEE** rezultă şi din graficele din **figura 12.4**, în care sunt reprezentate integrale eliptice excentrice (**IEE(ε)**) complete KE(k,S(s,ε)) şi EE(k, S(s, ε)), ca funcţii de ε ∈ [- π, 3π], pentru m, k considerate constante, cu valorile figurate sub fiecare figură.

Figura **12.3** redă evoluţia graficelor **IEE** ca funcţii de excentricitatea numerică s, FE(s) şi EE(s) pentru ε = 0, adică excentrul de coordonate polare S(s,0).

În primele două secvenţe, pentru module de valori mai reduse (k, m = 0,2 şi k, m = 0.4), excentrul S evoluează pe axa absciselor între limitele s ∈ [-1, 1], iar în următoarele două secvenţe numai în intervalul s ∈ [0, 1], deoarece, pentru k, m = 0.8 şi k, m = 1, graficele apar, aproape în exclusivitate, în acest domeniu. Deoarece k = $\sqrt{m}$, pentru m∈ [-1, 0] există doar **IEE**(m) şi nu există **IEE** de modulul k **IEE**(k). De aceea, s-a utilizat, în majoritatea cazurilor, la înregistraea graficelor **IEE**, doar intervalul modulelor m ∈ [0, 1].

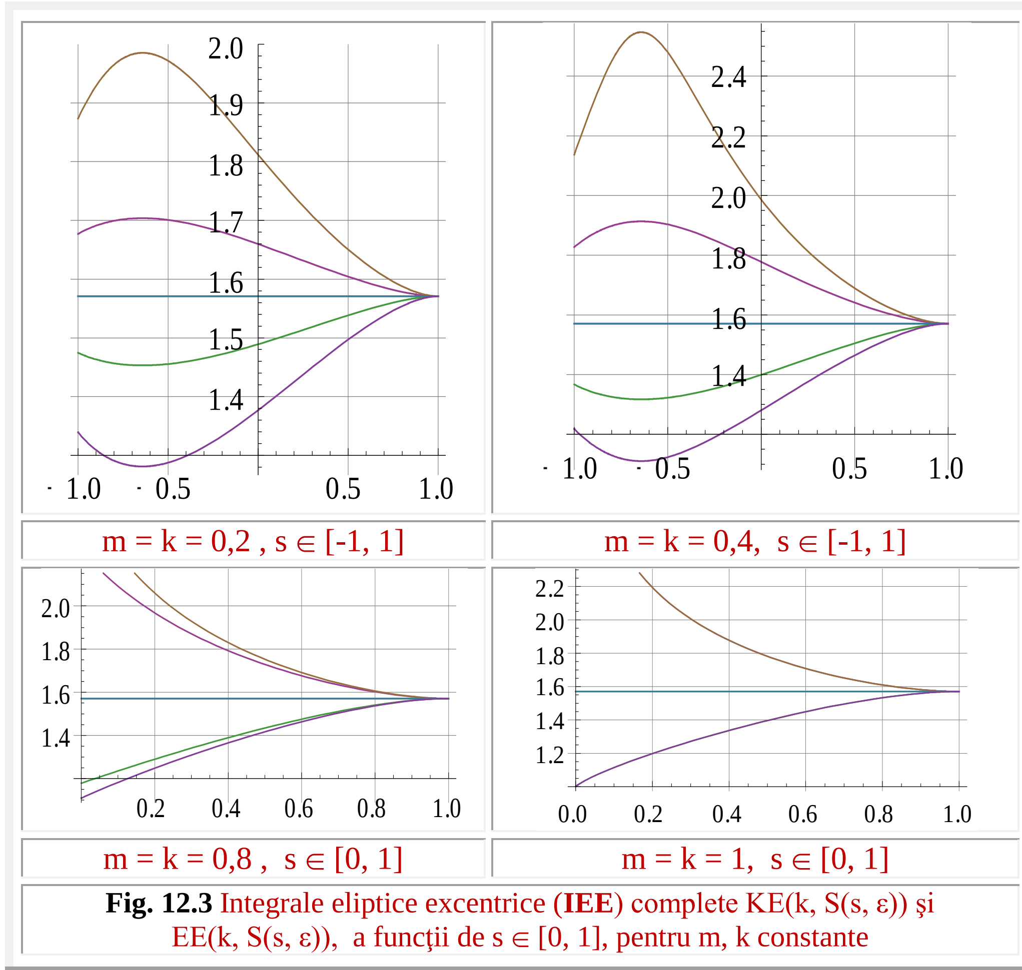


S(s=0,5; ε = 3π/2) | S(s=0,5; ε = 7π/4) | S(s=0,5; ε = 2π)

Fig. 12.2,b Integrale eliptice excentrice (**IEE**) complete KE(k, S(s, ε)) şi EE(k, S(s, ε)), pentru S (0,5 ; ε ∈ [3π/2, 2π] cu pasul π/4)

Pentru reprezentarea grafică a **IEE**, **FSM-CE** sinusurile excentrice de variabilă excentrică θ $sex_{1,2}$ (θ, S(s, ε)) = sin[θ - $\beta_{1,2}$] au fost dezvoltată astfel

(12.16) $$sex_{1,2}(\theta, S(s,\varepsilon)) = -\, s.\cos\theta.\sin(\theta-\varepsilon) \pm sin\theta.\sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta - \varepsilon)}$$



m = k = 0,2 , s ∈ [-1, 1] — m = k = 0,4, s ∈ [-1, 1]

m = k = 0,8 , s ∈ [0, 1] — m = k = 1, s ∈ [0, 1]

Fig. 12.3 Integrale eliptice excentrice (**IEE**) complete KE(k, S(s, ε)) şi EE(k, S(s, ε)), a funcţii de s ∈ [0, 1], pentru m, k constante

şi sunt **FSM-CE** din relaţiile (1.6)… (1.9) - din Vol. I, pag. 29 ediţia I-a 2007- scrise / redactate **acolo** eronat, fără termenul sinθ din faţa radicalului, în cazul lui $sex_{1,2}\ \theta$ şi fără cosθ, în faţa aceluiaşi radical, în cazul funcţiilor $cex_{1,2}\ \theta$.

Glumind, putem afirma, că ştiinţa nu este altceva decât un şir nesfârşit / infinit de greşeli corectate ! Altele decât cele de faţă.

Pentru **IEE** se va folosi doar prima determinare a **FSM-CE** de indice 1.

(12.06’) $$KE(k,S(s,\varepsilon)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sex^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2[\,sin\varphi\,\sqrt{1-s^2 sin^2(\varphi-\varepsilon)}\ - s.cos\varphi.\sin(\varphi-\varepsilon)]^2}}$$

Pentru **IEE** de k şi pentru IEE(m), k^2 se înlocuieste cu m, deoarece $m = k^2$ şi rezultă

(12.06’’) $$KE(m,S(s,\varepsilon)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m.sex^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m[\,sin\varphi\,\sqrt{1-s^2 sin^2(\varphi-\varepsilon)}\ - s.cos\varphi.\sin(\varphi-\varepsilon)]^2}}$$

Pentru **IEE** completă de speţa a doua, sau de tip doi, EE(k) şi, respectiv, EE(m) rezultă

(12.08') $\quad \mathrm{EE}(k,S(s,\varepsilon)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 sex^2(\varphi, S(s,\varepsilon))}\, d\varphi =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2[\, sin\varphi \sqrt{1 - s^2 sin^2\varphi} \; - s.cos\varphi.\sin(\varphi - \varepsilon)]^2}\, d\varphi$$

şi

(12.8'') $\quad \mathrm{EE}(m,S(s,\varepsilon)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m.sex^2(\varphi, S(s,\varepsilon))}\, d\varphi =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m[\, sin\varphi \sqrt{1 - s^2 sin^2(\varphi - \varepsilon)} \; - s.cos\varphi.\sin(\varphi - \varepsilon)]^2}\, d\varphi$$

cu graficele prezentate în figurile anterioare, comune pentru ambele tipuri de integrale excentrice complete (**IEEC**), întrucât, domeniul de variaţie al acestor funcţii ramâne acelaşi ca şi pentru cele centrice, adică E, EE ∈ [0, π/2], iar K, KE ∈ [π/2, ∞].

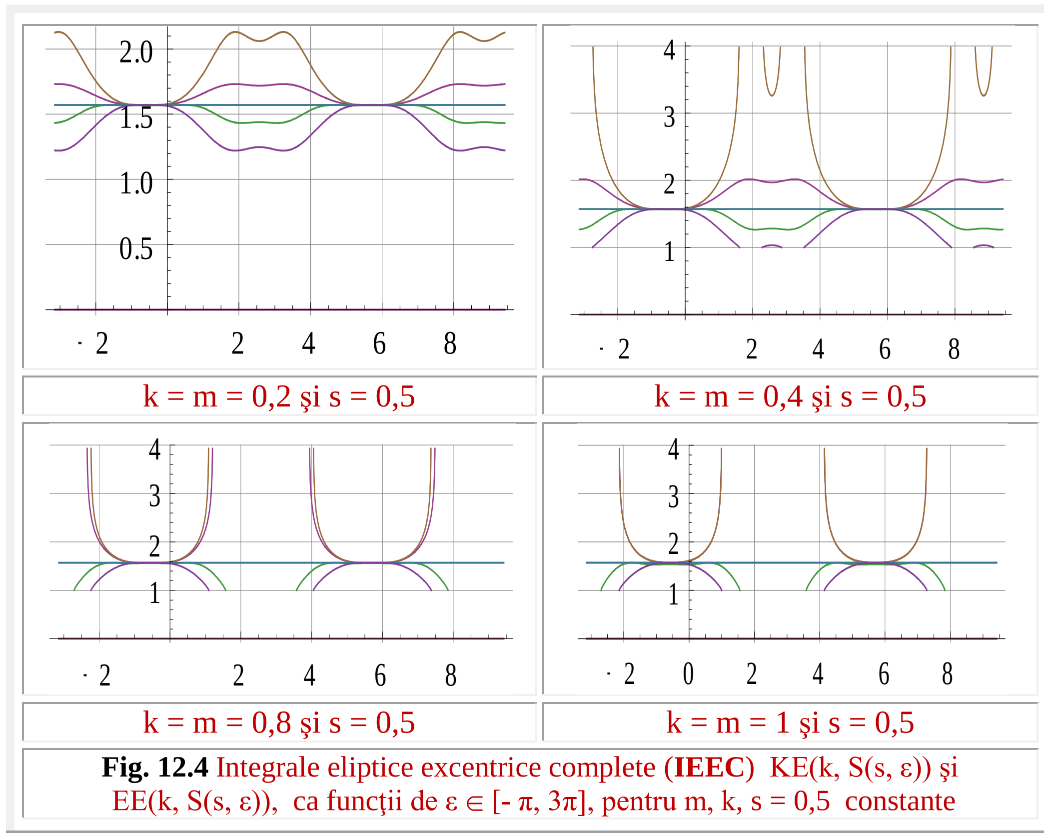


Fig. 12.4 Integrale eliptice excentrice complete (**IEEC**) KE(k, S(s, ε)) şi EE(k, S(s, ε)), ca funcţii de ε ∈ [- π, 3π], pentru m, k, s = 0,5 constante

Pentru înregistrarea graficelor **IEEC** s-a procedat inginereşte: Inginerul, ori de câte ori, într-o relaţie, introduce o valoare greşită, o corectează împărţind cu valoarea greşită (considerată la numărător, la numitor este invers) şi înmulţind cu cea corectă.

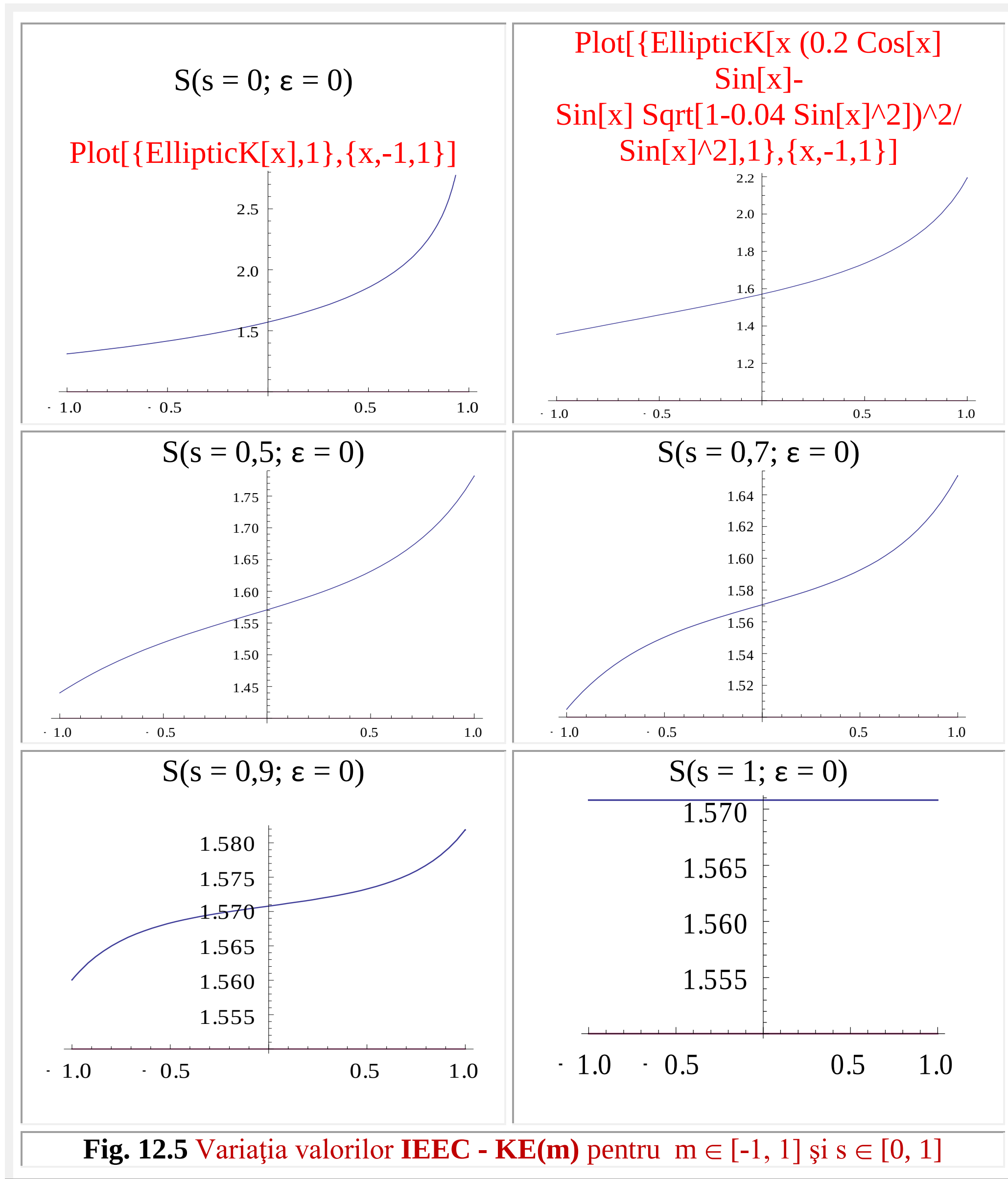


Fig. 12.5 Variaţia valorilor **IEEC - KE(m)** pentru m ∈ [-1, 1] şi s ∈ [0, 1]

Prin împărţire elimină din relaţie valoarea greşită, sau veche şi, prin înmulţire, introduce valoarea nouă sau pe cea corectă. La fel procedează şi în cazul în care are de introdus o succesiune / serie de valori diferite într-o relaţie: împarte cu cea veche / anterioară şi înmulţeşte cu valoarea nouă / următoare.

Pentru a profita de programele matematice existente, de inregistrare a **IEC**, ca de exemplu, în programul lui **Stephan Wolfram** MATHEMATICA 8 în care prin expresiile

Plot[{EllipticK[m],Pi/2},{m,0,1},GridLines→Automatic]
Plot[{EllipticE[m],Pi/2},{m,0,1},GridLines→Automatic]

se înregistrează graficele **IEC,** în functie de m, în mod separat, iar prin expresia

Plot[{EllipticE[m],EllipticE[m^0.5],
EllipticK[m],EllipticK[m^0.5],Pi/2},{m,0,1,}]

se inregistrează simultan ambele grafice, atât ca funcţii de modulul m cât şi ca funcţii de modulul $k = \sqrt{m} = m^{0.5}$ = m^0,5.

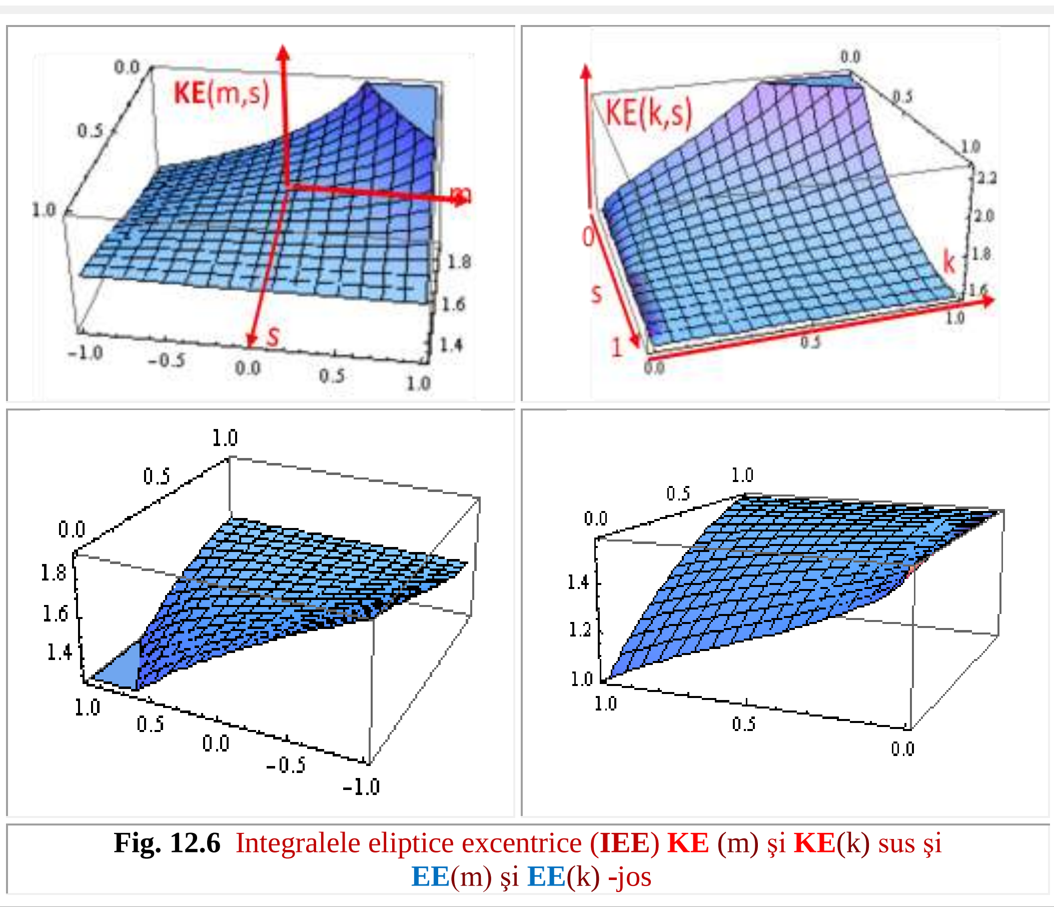


Fig. 12.6 Integralele eliptice excentrice (**IEE**) **KE** (m) şi **KE**(k) sus şi **EE**(m) şi **EE**(k) -jos

Deoarece **IEE** sunt o familie de funcţii pentru s ∈ [-1, 1] şi/sau ε ∈ [0, 2nπ], comenzile se modifică astfel

Plot[Evaluate[Table[{{EllipticK[m(-0.5Cos[x]Sin[x]+Sin[x]Sqrt[1-0.25 Sin[x]^2])^2/Sin[x]^2]},{EllipticK[m^0.5(-0.5Cos[x]Sin[x]+Sin[x]Sqrt[1-0.25 Sin[x]^2])^2/Sin[x]^2]},{EllipticE[m(-0.5Cos[x]Sin[x]+Sin[x]Sqrt[1-0.25 Sin[x]^2])^2/Sin[x]^2]},{Pi/2},{EllipticE[m^0.5(-0.5Cos[x]Sin[x]+Sin[x]Sqrt[1-0.25Sin[x]^2])^2/Sin[x]^2]},{1.5708}},{x,0,Pi/2}],{m,0,1}]

în care se observă înmulţirea modulului m şi/sau k^2 cu $sex^2\ \varphi$ →pentru introducerea expresiei noi, din relaţia (12.06) şi impărţirea lui cu $\sin^2\varphi$, pentru eliminarea expresiei vechi → centrice.

O primă aplicaţie a **IEE** consistă în integrarea integralelor excentrice.

Astfel, utilizând acelaşi program a lui **Stephen Wolfram** Mathematica 8, dacă, de exemplu, pentru m = 0,5 se scriu expresiile din **figura 12.5 -** sus, pentru m ∈ [-1, 1] şi diverse valori date lui s ∈ [0, 1] se pot obţine graficele integralelor eliptice complete excentrice de prima speţă KE(m) şi din graficele pentru un anumit modul k şi excentricitate numerică s se pot obţine şi valorile, cu precizia metodelor grafice, ale acestor integrale. Dar se pot obţine şi valori numerice.

O imagine mai concludentă asupra **IEE** se poate obţine prin reprezentarea lor în 3D (**Fig. 12.6**). Rezultă şi diferenţele dintre **IEE** de modul $m = k^2$ – stânga, faţă de acelea de modul k din dreapta figurii.

În partea superioară a figurii sunt prezentate integralele eliptice excentrice complete (**IEEC**) de speţa / tip întâia / unu **KE**, iar în partea inferioară cele de speţa / tip a doua / doi **EE.** Se observă, şi din reprezentările 3D, că pentru excentricitatea numerică s = 1, toate **IEEC** (k, S(s = 1, ε = 0)) = π/2, atât cele de prima speţă cât şi cele de speţa a doua.

De asemenea, că pentru s = 0 → **IEEC** (k, s = 0) → **IEC**(k).

O a doua modalitatea de reprezentare a **IEE** complete şi incomplete este folosirea seriilor de puteri ale acestor integrale.

Seriile integralelor eliptice complete K de variabila m → K(m) şi, respectiv, k → K(k) sunt

(12.17) $K(m) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}m + \frac{9}{128}\pi m^2 + \frac{25}{512}\pi m^3 + \frac{1225}{32768}\pi m^4 + \frac{3969}{131072}\pi m^5 + \ldots$

(12.18) $K(k) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\pi k^2 + \frac{9}{128}\pi k^4 + \frac{25}{512}\pi k^6 + \frac{1225}{32768}\pi k^8 + \frac{1225}{131072}\pi k^{10} + \ldots$

Iar seriile inegralelor eliptice complete de speţa/tip a doua sunt

(12.19) $E(m) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}m - \frac{3}{512}\pi m^2 - \frac{5}{512}\pi m^3 - \frac{175}{32768}\pi m^4 - \frac{441}{131072}\pi m^5$

(12.20) $E(k) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}k^2 - \frac{3}{512}\pi k^4 - \frac{5}{512}\pi k^6 - \frac{175}{32768}\pi k^8 - \frac{441}{131072}\pi k^{10}$

şi au graficele din **figura 12.7**.

În toate secvenţele din figura **12.8,b**, m ∈ [-1, 1], iar excentrul S(s,ε) evoluează în jurul originii O(0,0) cu ε ∈ [0 2π] cu pasul π/4.

O sinteză a **IEEC,** ca funcţii de m şi k, este vizibilă în **figurile 12.8,c** .

În **figura 12.8,d** sunt prezentate, comparativ, **IEEC KE,** în care, m variază atât în intervalul [-1, 1], cât şi în intervalul lui k ∈ [0,1]. Aceasta, pentru o comparaţie între **IEEC** de m şi de k mai uşor de realizat, cu atât mai mult, cu cât graficele din 3D, ale celor doua tipuri de IEEC, au fost reprezentate separat : în **figura 12.8,d** pentru **KE** şi în **figura 12.8,e** pentru **EE**.

Graficele familiilor **IEEC** sunt prezentate în **figura 12.8**; cele care evoluează în cadranele I şi III aparţin lui KE(m), iar cele din cadranele II şi IV aparţin lui EE(m).

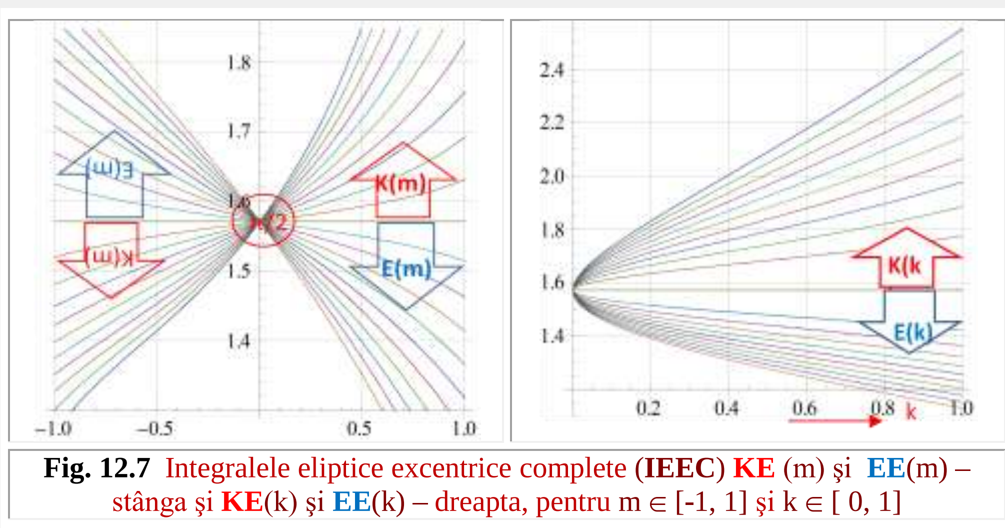


Fig. 12.7 Integralele eliptice excentrice complete (**IEEC**) **KE** (m) şi **EE**(m) – stânga şi **KE**(k) şi **EE**(k) – dreapta, pentru m ∈ [-1, 1] şi k ∈ [0, 1]

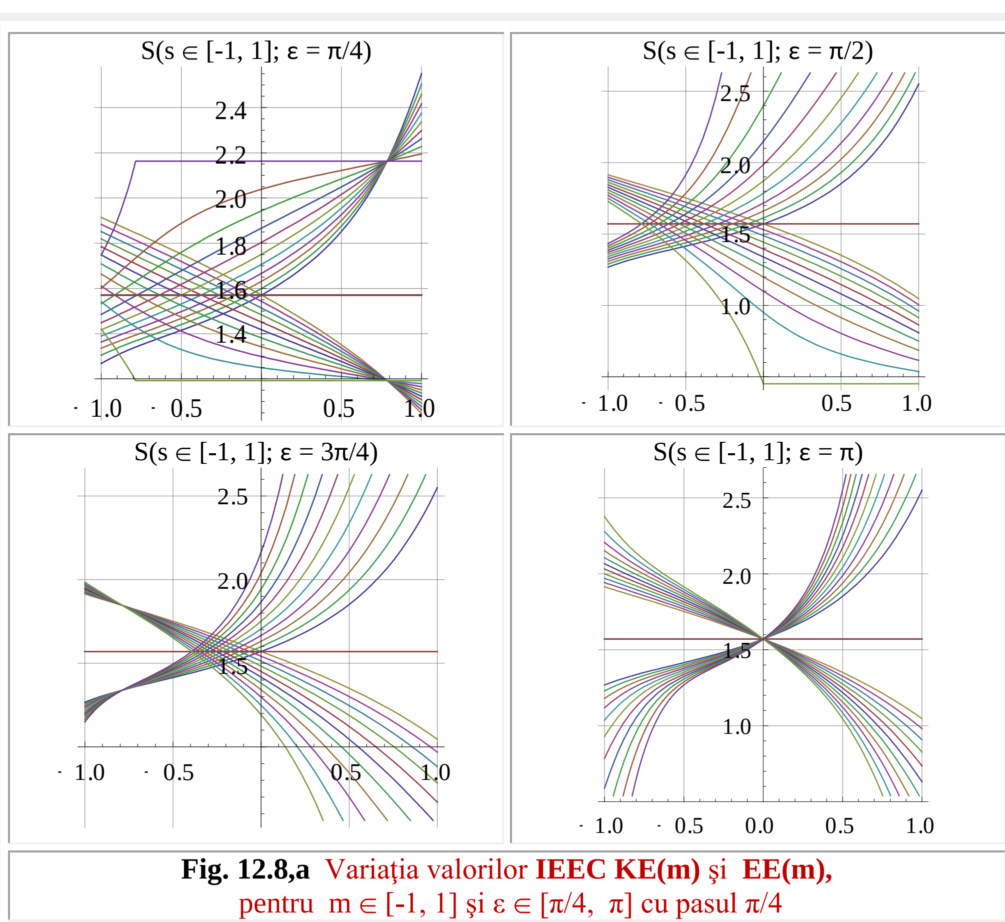


Fig. 12.8,a Variaţia valorilor **IEEC KE(m)** şi **EE(m),** pentru m ∈ [-1, 1] şi ε ∈ [π/4, π] cu pasul π/4

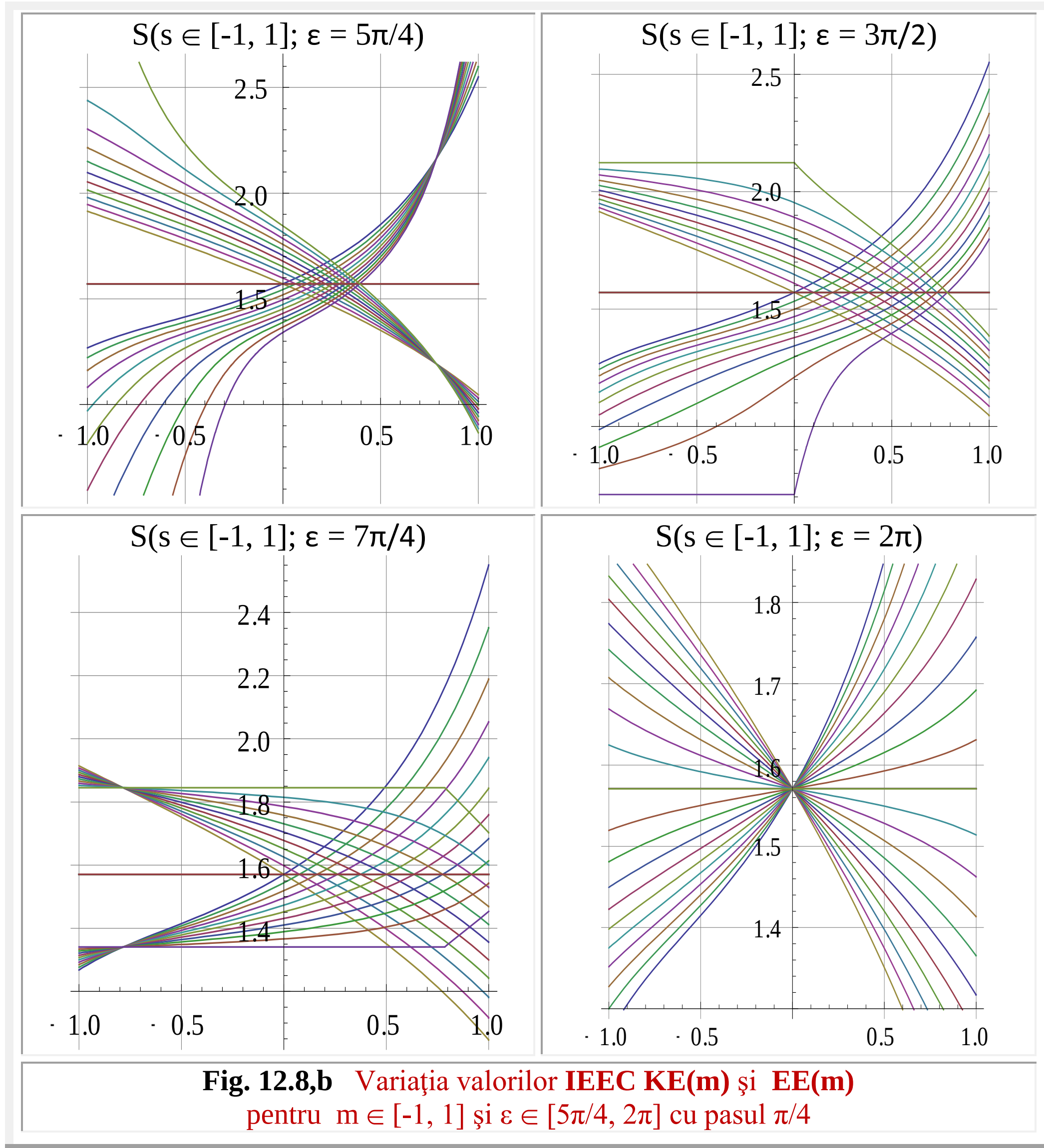


Fig. 12.8,b Variaţia valorilor **IEEC KE(m)** şi **EE(m)** pentru $m \in [-1, 1]$ şi $\varepsilon \in [5\pi/4, 2\pi]$ cu pasul $\pi/4$

IEE de **m** au valori şi pentru m < 0, ceeea ce nu au cele de parametru/ modul k deoarece $k^2 = m$.

Se observă că suprafaţa KE(m) este, **aparent**, concavă, iar suprafaţa KE(k) este, aparent, convexă. La **IEEC** de speţa a doua situaţia este inversă: EE(m) sunt suprafeţe aparent convexe, iar EE(k) sunt suprafeţe aparent concave, într-o primă aproximaţie sau privite la o scară globală. Deoarece, atât K(k) cât şi K(m), deci **IEEC** pentru s = 0, sunt curbe care tind asimptotic spre $y = +\infty$, fiind, deci, concave, cel puţin pentru valorile mai ridicate ale lui m şi/sau k, ceea ce pentru K(k) este mai greu observabil şi pentru K(m) este evident în **figura 12.8,d**.

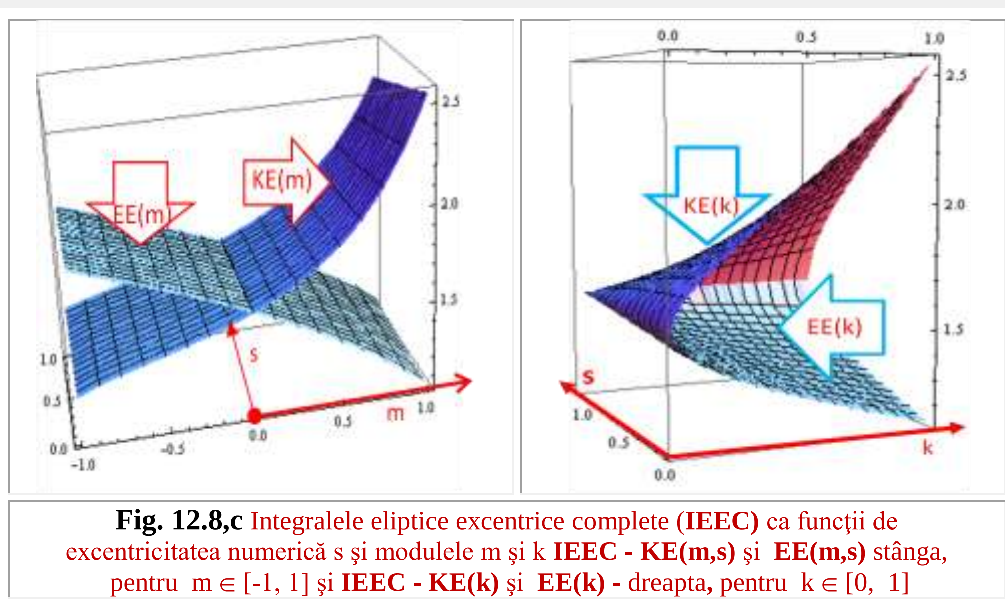


Fig. 12.8,c Integralele eliptice excentrice complete (**IEEC)** ca funcţii de excentricitatea numerică s şi modulele m şi k **IEEC - KE(m,s)** şi **EE(m,s)** stânga, pentru m ∈ [-1, 1] şi **IEEC - KE(k)** şi **EE(k) -** dreapta**,** pentru k ∈ [0, 1]

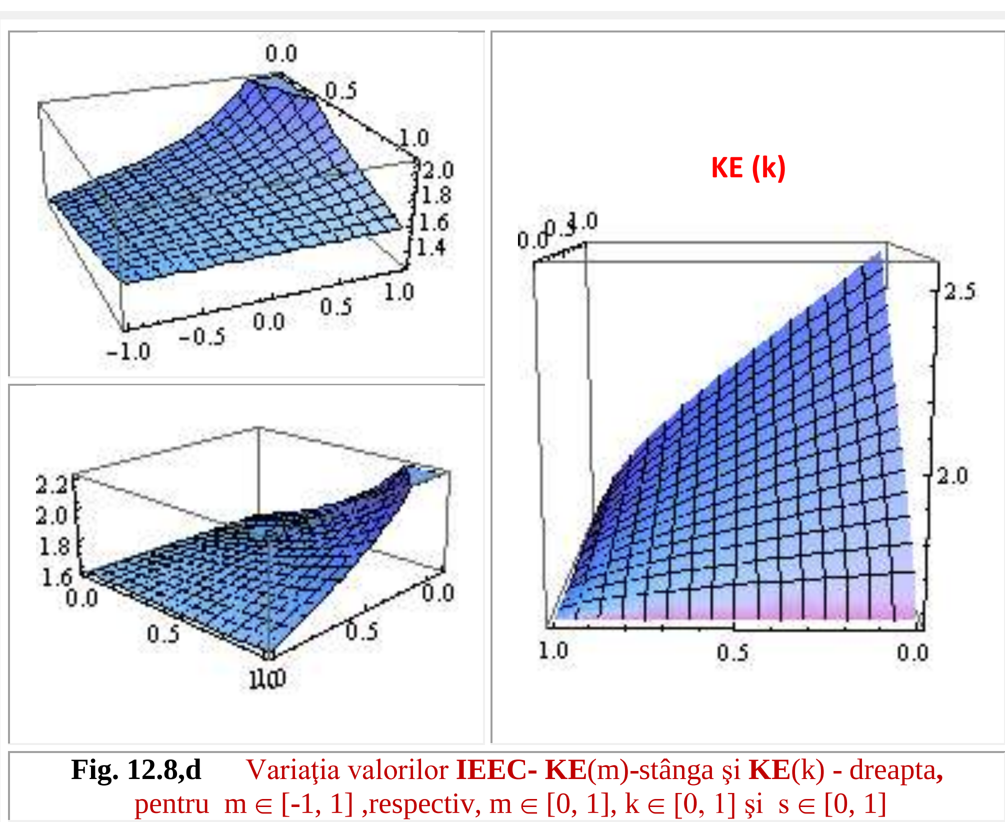


Fig. 12.8,d Variaţia valorilor **IEEC- KE**(m)-stânga şi **KE**(k) - dreapta**,** pentru m ∈ [-1, 1] ,respectiv, m ∈ [0, 1], k ∈ [0, 1] şi s ∈ [0, 1]

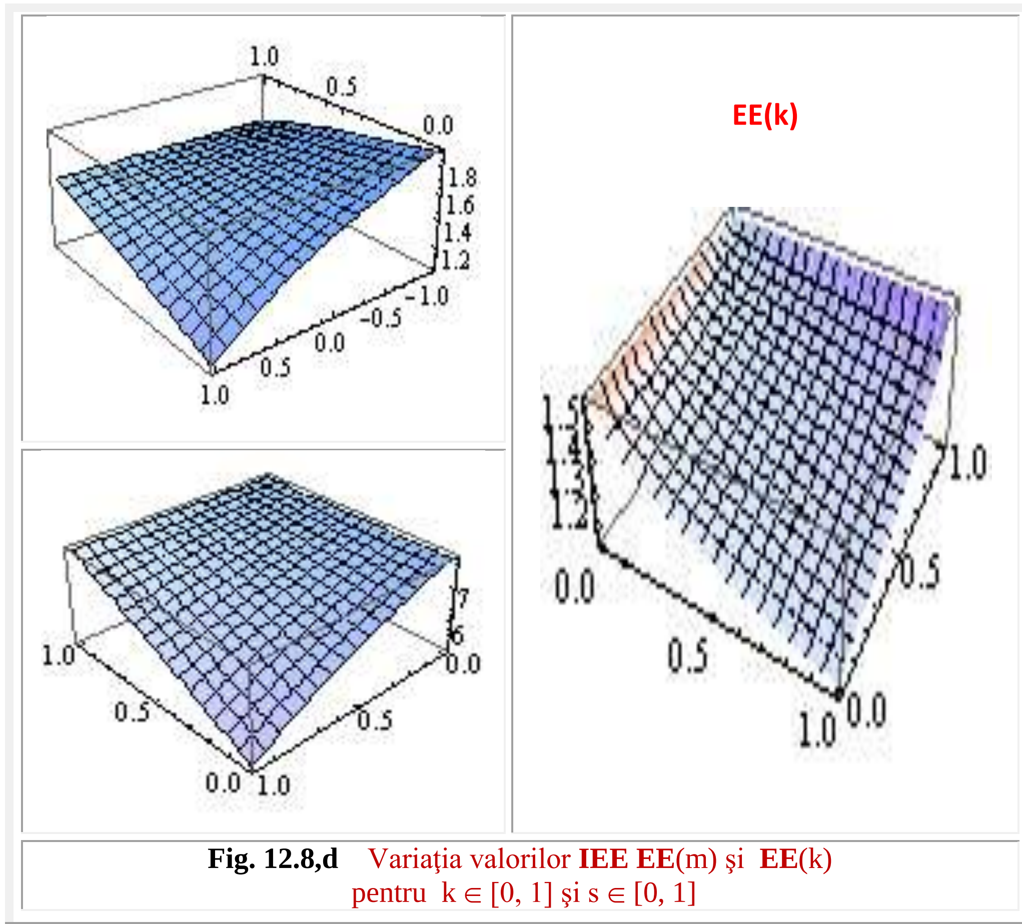


Fig. 12.8,d Variaţia valorilor **IEE EE**(m) şi **EE**(k) pentru k ∈ [0, 1] şi s ∈ [0, 1]

Caracterul convex al curbelor E(m), adică **IEEC** de s = 0, este uşor observabil în **figura 12.8,e**, în timp ce, acelaşi caracter al curbei E(k) este mai greu vizibil. Faptul derivă şi din punctul/unghiul din care este "văzută" suprafaţa de programul matematic.

Aceleaşi **IEEC, în 3D,** privite din alt unghi, pot arăta mult diferit, ca în **figura 12.8, c** –stânga, în care se observă că toate curbele K(m) sunt concave şi E(m) convexe. În aceeaşi figură, în dreapta, se observa mai bine schimbarea caracterului curbelor din familia **IEEC** de k, din cave pentru EE(s = 0), ajungând liniare, pentru s = 1, ca şi KE(k, s = 1).

Este evident că, pentru k = 0, indiferent de valoarea excentricitaţii numerice s, EE = KE = 1 = constant, ceea ce rezultă şi din relaţiile de definire ale acestor **IEE,** cât şi a celor centrice.

Ca şi în cazul **FSM-CE** şi **FSM** care reprezintă **IEE** şi / sau **FEE**, dacă excentrul S(s,ε) este un punct fix în planul excentricei eliptice, atunci s şi ε sunt constante şi suntem în domeniul **IEE** de excentru punct fix, iar dacă, în timp ce k = constant, S(s, ε) se deplasează odată cu modificarea argumentului θ = φ, în plan, după

anumite reguli sau pe anumite curbe, adică, dacă e şi/sau ε sunt variabile, ne situăm în domeniul **IEE** de excentru variabil.

Dacă excentrul S variază după curbe excentrice (excentrice circulare, eliptice, hiperbolice etc.), atunci suntem în domeniul **IEE** de dublă, triplă sau multiplă excentricitate.

Chiar dacă excentricităţiile numerice consecutive s_i şi/sau ε_i sunt valoric diferite. Fiecare excentru **$S_i(s_i,\ \varepsilon_i)$** poate fi fix şi/sau variabil, putând evolua independent.

12.4 SEMNIFICAŢIA INTEGRALELOR ELIPTICE EXCENTRICE

Ce reprezintă **IEE** ? Inainte de a examina care sunt semnificaţiile geometrice ale **IEE** să urmărim care sunt semnificaţiile geometrice ale **IEC**.

Trei cercuri şi trei elipse importante, după părerea noastră, sunt prezentate în **figura 12.9**. $C_1(O, 1)$ este cercul unitate sau trigonometric, $C_2([s/2,0], s/2 = k/2)$ este cercul pe care se află excentrul fix S(s, 0) ≡ K(k, 0) – k excentricitatea liniară numerică a eliposelor- şi pe care evoluează excentrul variabil/mobil $F(x_F = s.\sin^2\theta,\ y_F = s.\cos\theta.\sin\theta)$, iar $C_3(O,s)$ este cercul de rază egală cu excentricitatea numerică şi, totodată, egală cu modulul integralelor eliptice, centrice şi excentrice, (s = k).

Cele trei elipse importante sunt:

- $E_1(O,\ a = 1,\ b = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}})$, **elipsa unitate** (R = a = 1), a cărui punct curent are raza ρ polară, din O(0,0), dată de relaţia care întră şi în expresia **IEC** de prima speţă/tip F(k)

(12.21) $$\rho = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

- $E_2(O,\ a = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}},\ b = 1)$, inversa elipsei E_1, sau, altfel spus elipsa E_1 rotită cu $\frac{\pi}{2}$ şi
- $E_3(O,\ a = 1,\ b = \sqrt{1-k^2}\ )$ a cărei rază polară, din O(0,0), pentru aceleaşi coordonate x, y cu ale punctului M(x = cn u, y = sn u) de pe C_1 este funcţia **dn u** a cărei expresie este aceeaşi cu a integrandului integralei eliptice de speţa a doua E(k) .

Poziţia unui punct curent M(x,y) al elipsei, în coordonate polare, se poate exprima în diverse moduri; trei dintre acestea fiind mai des utilizate:

- cu polul în O(0, 0)

(12.22) $\rho = \frac{a\sqrt{1-k^2.}}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi.}} = \frac{b}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi.}}$, în funcţie de unghiul φ la centrul O(0,0) ;

în care e este excentricitatea liniară a elipsei, aceeaşi cu excentricitatea reală e din domeniul **FSM-CE**, iar $s \equiv k = \frac{e}{R} = \frac{e}{a}$ este excentricitatea numerică pentru R = a;

- cu polul în focarul $F_1(e, 0)$

(12.23) $r_1 = a - e.\cos E = a(1 - k.\cos E)$, în funcţie de anomalia excentrică E;

(12.24) $r_1 = \frac{p}{1+k.\cos v}$, în funcţie de anomalia adevărată/reală v

- cu polul în vârful elipsei V(-a,0)

(12.25) $R = \frac{2b^2 cos\psi}{a(1-k^2cos^2\psi)}$, în funcţie de unghiul din V, $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Dacă $b = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$, atunci din (12.22) rezultă $\rho = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}}$ şi

(12.26) $u = \int_0^{\varphi} \rho(\varphi).d\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.sin^2\varphi}}$

este expresia arcului de elipsă circularizat, notat $\widehat{AB}$ ° şi reprezentat în **figura 12.11** împreună cu diversele relaţii de calcul ale acestor arce.

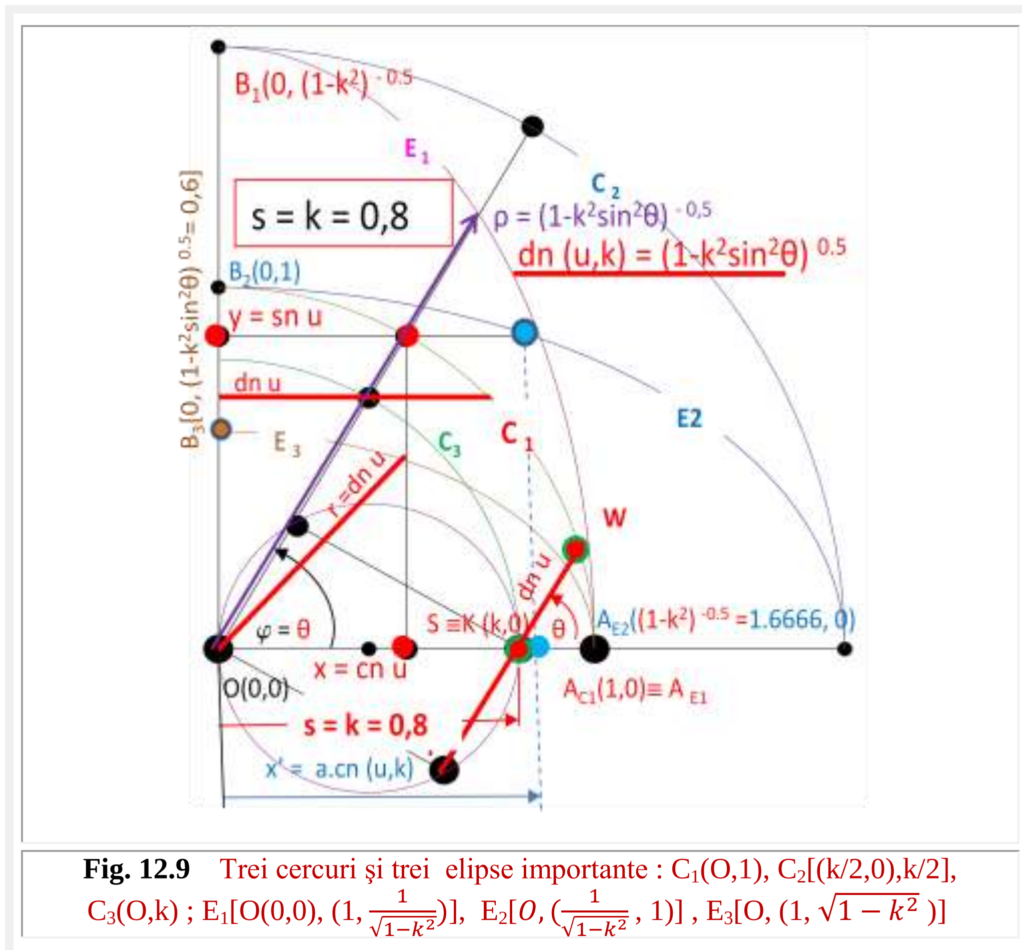


Fig. 12.9 Trei cercuri şi trei elipse importante : $C_1(O,1)$, $C_2[(k/2,0),k/2]$, $C_3(O,k)$; $E_1[O(0,0), (1, \frac{1}{\sqrt{1-k^2}})]$, $E_2[O, (\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}, 1)]$, $E_3[O, (1, \sqrt{1-k^2})]$

Ca urmare, integrala eliptică de prima speţă/tip exprimă lungimea arcului u de pe elipsă E_1, arc corespunzător arcului φ de pe cercul unitate C_1. Deoarece, $\rho \geq R = a$,

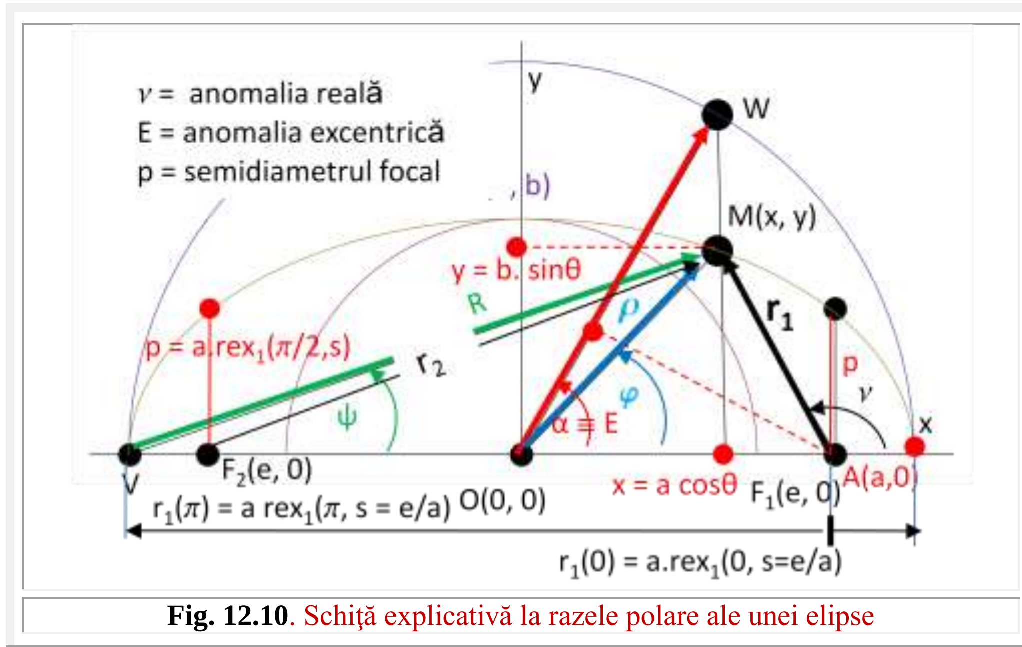


Fig. 12.10. Schiţă explicativă la razele polare ale unei elipse

adică, raza polară a elipsei E_1, pe care se masoară arcul u, este mai mare decât raza R = a =1 a cercului, pe care se măsoară arcul φ, cu două excepţii, φ = 0 şi φ = π, rezultă că u ≥ φ. În dinamica unui punct material greu supus la legături, K(k) exprimă perioada de oscilaţie în vid a pendulului matematic simplu.

În geometria curbelor plane, lungimea unei elipse este dată de E(k), ca şi expresia coeficientului de portanţă al unei aripi delta subţiri cu borduri de atac subsonice (**Richard Şelescu**, Formule analitice închise pentru aproximarea integralei eliptice complete de speta I-a şi aII-a ale lui **Legendre**, V. Google).

Se remarcă faptul că atât ρ cât şi r sunt raze polare din originea O(0,0) ale elipselor : ρ a elipsei E_1 şi r a elipsei E_3, dar pentru unghiuri φ_1 şi, respectiv pentru φ_3 = ψ, aşa cum se observă mai bine în **figura 12.12**.

Raza polară a elipsei E_3 este r(θ) = $\sqrt{cos^2\theta + (1-k^2).sin^2\theta}$ = $\sqrt{1-k^2sin^2\theta}$ = dn u şi elementul de arc al acestei elipse este

(12.27) $ds_3 = r(\theta).d\theta = \sqrt{1-k^2sin^2\theta}\ .d\theta$

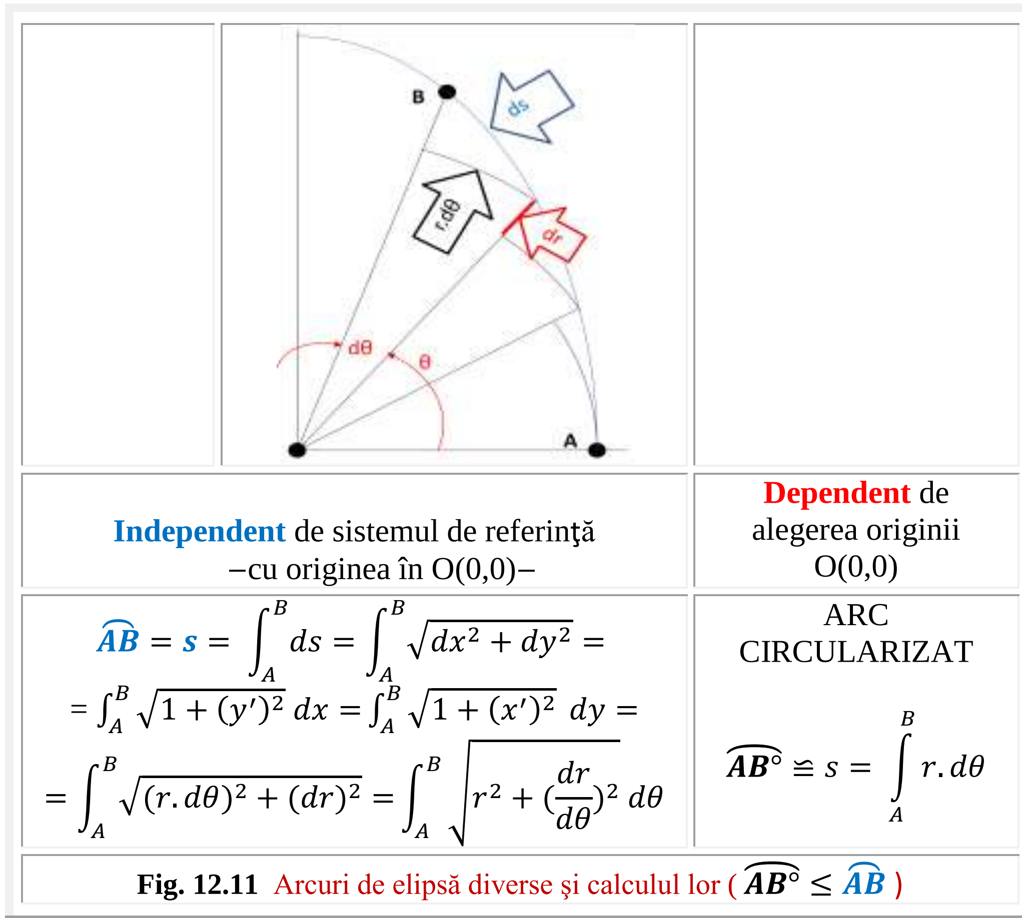
astfel că lungimea arcului s_3 va fi

(12.28) $s_3 = \int_0^{\theta} \sqrt{1-k^2sin^2\theta}\,.d\theta$

Adică, tot un arc de elipsă este dat şi de integrala eliptică de speţa /tipul a doua.

Familiile celor două elipse E_1 şi E_3 sunt prezentate împreună în **figura 12.13**.

Deoarece, în 2D, programul de matematică nu reprezenta şi elipsele (degenerate în drepte) pentru k = 1, s-a recurs şi la reprezentarea lor în 3D, caz în care programul a acceptat şi valoarea k = 1. Aşa cum se poate observa în **figura 12.13,** în 3D – dreapta, E_1 degenerează în două drepte paralele cu axa Oy, ce trec prin vârfurile



Independent de sistemul de referinţă −cu originea în O(0,0)−	**Dependent** de alegerea originii O(0,0)
$\widehat{AB} = s = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} =$ $= \int_A^B \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_A^B \sqrt{1 + (x')^2}\, dy =$ $= \int_A^B \sqrt{(r.d\theta)^2 + (dr)^2} = \int_A^B \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}\, d\theta$	ARC CIRCULARIZAT $\widehat{AB}^{\circ} \cong s = \int_A^B r.d\theta$

Fig. 12.11 Arcuri de elipsă diverse şi calculul lor ($\widehat{AB}^{\circ} \leq \widehat{AB}$)

elipselor $V_{1,2}$ (± 1, 0) = ± A, iar E_3 degenerează în două segmente de drepată care unesc cele două vârfuri ale elipsei E_3 de pe axa Ox, între punctele ± A de abscise $x_{1,2} = \pm a = \pm 1$.

Aşa după cum se ştie, dintr-un capitol anterior şi nu numai, excentrele eliptice, care au excentricitaţile proporţionale cu raportul semiaxelor, adică

(12.29) $\frac{a}{b} = \frac{e_a}{e_b} = \frac{e_x}{e_y} \rightarrow \frac{e_a}{a} = \frac{e_b}{b} \rightarrow s_a = s_b = s$

degenerează în elipse, aşa cum se poate observa în **figura 12.14**. Totuşi, **diferenţe** dintre o elipsă clasică, ordinară sau centrică şi una excentrică **există**, sunt cu atât mai pregnante cu cât excentricitatea este mai mare şi constă în distribuţia punctelor pe arcul de elipsă comun.

Dacă e_a, e_b, s > 0, atunci punctele elipsei, din primul cadran, migrează spre punctul A(a,0) al elipsei. Astfel, punctul M_C (x = a.cosθ, y = b.sinθ) al elipsei E_3 centrice E(s = 0, ε = 0) este la stânga punctului M_{Ex} (X = a. cex(θ,E_x), Y = b sex(θ, E_y)) al elipsei de S(s = 0,4; ε = 0) din **figura 12.14.**

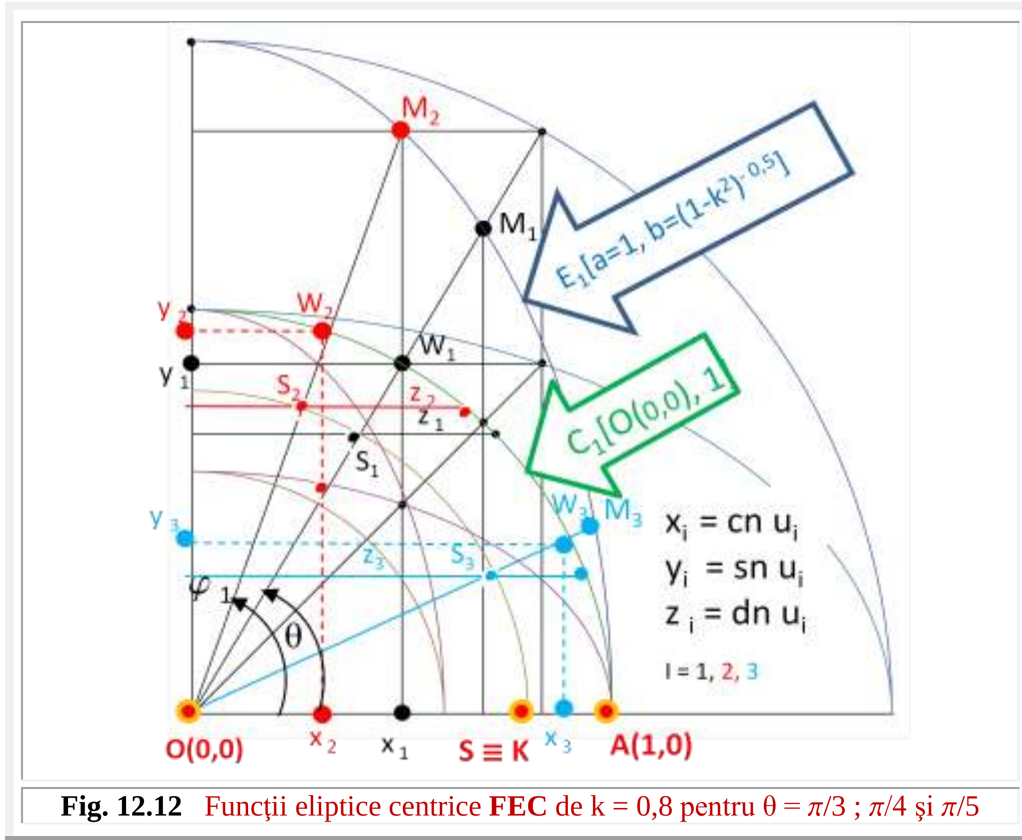


Fig. 12.12 Funcţii eliptice centrice **FEC** de k = 0,8 pentru θ = $\pi/3$; $\pi/4$ şi $\pi/5$

Dacă unghiul polar φ_3, din originea O(0, 0) şi centrul elipsei E_3, marchează poziţia pe elipsă a punctului curent M_C, atunci unghiul φ_{Ex} marchează poziţia, pe aceeaşi elipsă, a punctului M_{Ex}.

Rezultă că

(12.30) $$M_{Ex}\begin{cases} X = a.cex(\theta, Ea) = a.cex(\theta, s_a) = a.cos\alpha_{Ex} \\ Y = b.sex(\theta, Eb) = b.sex(\theta, s_b) = b.sin\alpha_{Ex} \end{cases}$$

Construcţia elipsei s-a făcut prin prima metodă, a centrelor comune $O_a \equiv O_b \equiv$ O(0,0) –ale celor doua cercuri de raze a şi b – şi ale excentrelor distincte – E_a şi E_b, din care, semidreptele de direcţie θ intersectează cele două cercuri C_a şi C_b. Sau $E_x \equiv E_a$ şi $E_y \equiv E_b$ excentre care determină coordonata X şi respectiv Y a excentricei eliptice.

Elementul "excentric → u_{Ex} = v = AM_{CEx}" de arc exprimat prin **FSM-CE** este, pentru elipsa E_3 cu a = 1 şi b = $\sqrt{1-k^2}$

(12.31) $$dS_{Ex} = \sqrt{dX^2 + dY^2} = dex(\theta, s).\sqrt{cex^2\theta + (1-k^2).sex^2\theta}\, d\theta = $$
$$= dex\theta.\sqrt{1-k^2 sex^2\theta}\, d\theta$$

în care diferenţialele sunt

(12.32) $$\begin{cases} dX = X'd\theta = -dex\theta.sex\theta.d\theta \\ dY = Y'd\theta = \sqrt{1-k^2}dex\theta.cex\theta.d\theta \end{cases}$$

şi se ştie că **FSM-CE** derivată excentrică de variabila excentrică θ **dexθ** este, printre altele, şi raportul

(12.33) $\text{dex}\theta = \frac{d\alpha}{d\theta} = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} = \frac{rex\theta}{del\theta} = \frac{rex\theta}{\Delta\theta}$

Întroducând în (12.31) expresia lui **dexθ** rezultă

(12.34) $dS_{Ex} = \sqrt{1-k^2sex^2\theta}\,.d\alpha = \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\; d\alpha$

astfel că expresia **EEI** de speţa/tip a doua devine

(12.35) $\mathcal{E}E = \int_0^{\theta}\sqrt{1-k^2sex^2\theta}\; d\theta = \int_0^{\theta}\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\; d\alpha$, $\alpha \equiv \alpha_{Ex}$

şi pe baza dependenţei dintre unghiul la excentru θ şi unghiul la centru α

(12.36) $$\begin{cases} \alpha(\theta) = \theta - \beta(\theta) = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] \\ \theta(\alpha) = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha} = \alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \\ = \alpha + \arctan\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\sin n\alpha \end{cases}$$

IEE devine

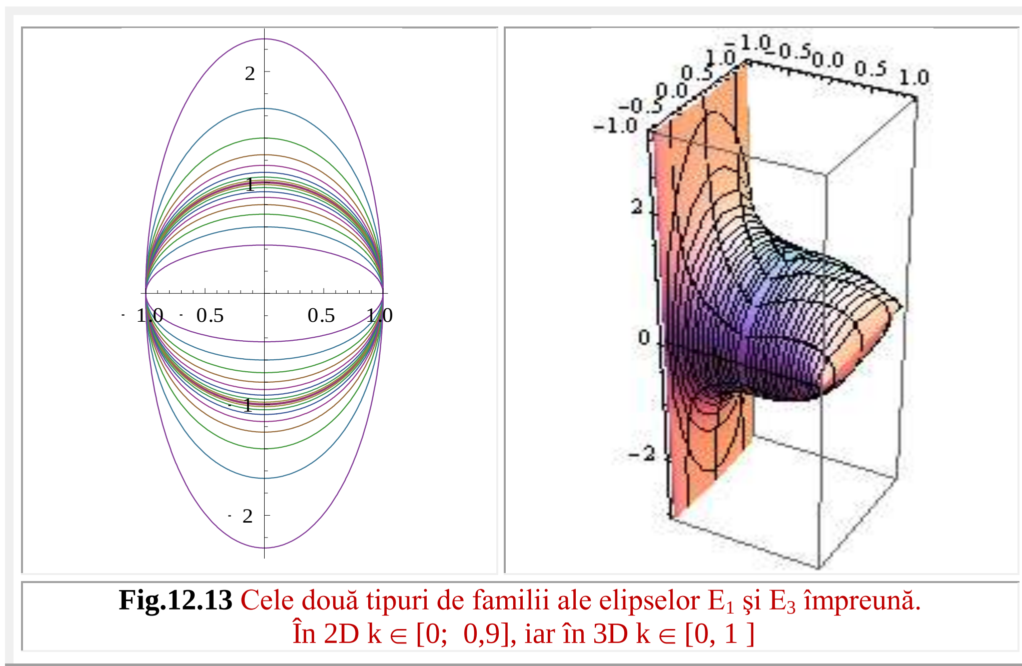


Fig.12.13 Cele două tipuri de familii ale elipselor E_1 şi E_3 împreună.
În 2D k ∈ [0; 0,9], iar în 3D k ∈ [0, 1]

(12.37) $\mathcal{E}E = \int_0^{\alpha+\arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha}}\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\; d\alpha.$

Soluţia se poate gasi şi mai simplu şi mai direct. Raza polară centrică a punctului M_C al elipsei E_3, din **figura 12.14,a**, este r = OM_C şi direcţia ei φ_3 este defazată în urmă faţă de direcţia θ a semidreptei care generează punctele Ma şi Mb şi care, în final, determină punctul M_C al elipsei.

Raza polară excentrică r_{Ex} a punctului M_{Ex} al elipsei E_3, din originea O(0, 0), transformatul excentric al punctului M_C al aceleiaşi elipse din **figura 12.14,a** este

(12.38) $r_{Ex} = \sqrt{X^2 + y^2} = \sqrt{cos^2 \propto +(1-k^2)sin^2 \propto} = \sqrt{1 - k^2 sin^2 \propto}$

şi este şi ea defazată în urmă faţă de direcţia semidreptei α care generează punctele Ma_{Ex} şi Mb_{Ex} şi, apoi, pe M_{Ex}.

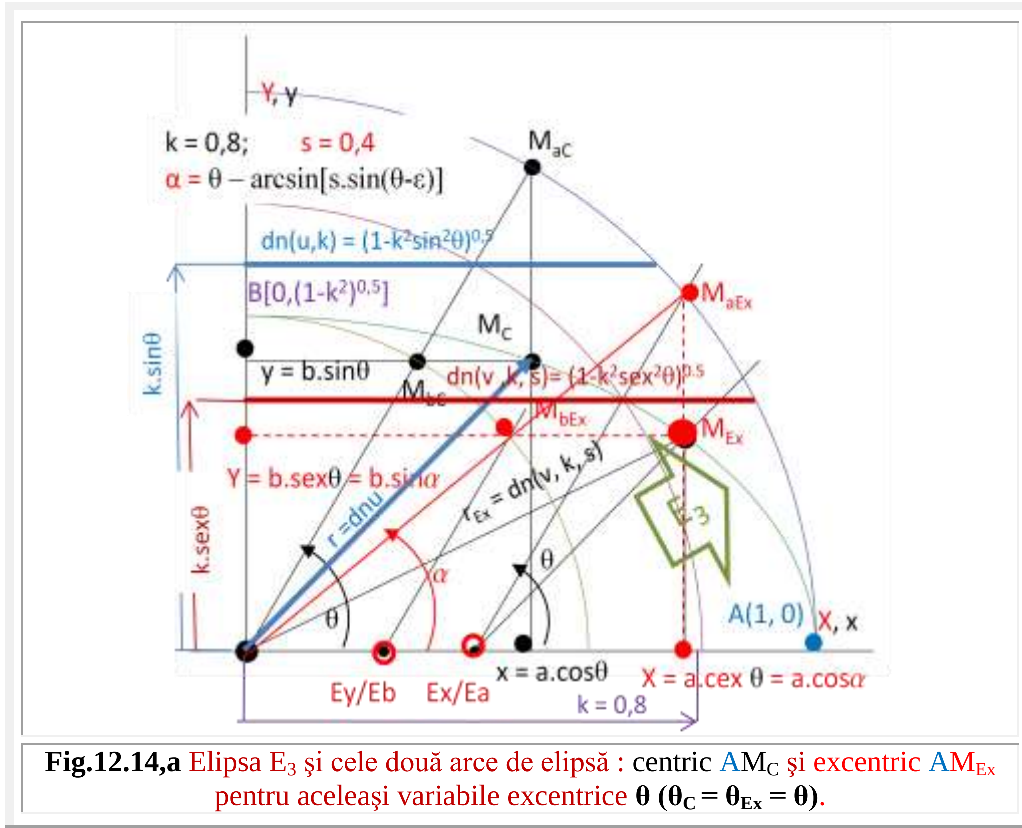


Fig.12.14,a Elipsa E_3 şi cele două arce de elipsă : centric AM_C şi excentric AM_{Ex} pentru aceleaşi variabile excentrice **θ** ($\theta_C = \theta_{Ex} = \theta$).

Elementul de arc circularizat al elipsei E_3, notând cu **v,** arcul °AM_{Ex}, va fi

(12.39) $dv = r_{Ex}.d\alpha = \sqrt{1 - k^2 sin^2 \propto}\, d\alpha$, astfel ca arcul v al elipsei este

(12.40) $v = v(\alpha, k, s) = \int_0^{\theta(\propto)} \sqrt{1 - k^2.sin^2 \propto}\; d\propto =$

$= \int_0^{\propto(\theta)} \sqrt{1 - k^2 sex^2[\theta, S(s,0)]}\; d\theta$

În concluzie, o **IEE** de speţa a doua se poate rezolva printr-o **IEC** de acelaşi tip prin schimbarea limitei superioare excentrice θ a **IEC** cu limita centrică $\alpha(\theta) = \theta - \arcsin(s\,.\,sin\theta)$.

Altfel spus, dacă **IEC** dă arcul de elipsă $\frown AM_C$, **IEE** dă arcul aceleaşi elipse $\frown AM_{Ex}$, dar de lungime mai redusă, pentru a > b, s > 0 şi ε = 0, aşa cum indică şi relaţia (12.37). Dacă a < b, s > 0, cazul elipsei E_1 din **figura 12.12**, situaţia se păstrează, în sensul că punctul curent pe elipsă, din cadranul I, M_{Ex} se deplasează spre punctul A, îndepărtându-se de M_C, în sens dextrorum / dextrogin.

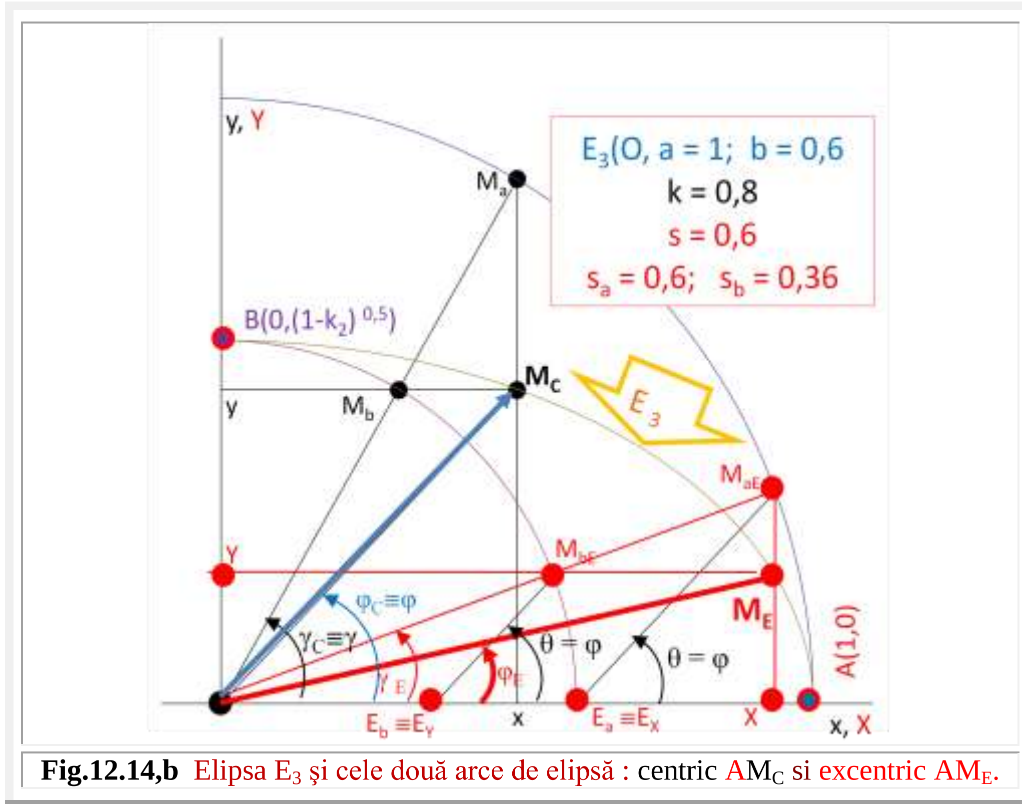


Fig.12.14,b Elipsa E_3 şi cele două arce de elipsă : centric AM_C si excentric AM_E.

Se cunoaşte că ecuaţia conicelor, în coordonate polare, având drept pol centrul conicei, în cazul elipsei punctul O(0, 0), este, cu notaţiile din **figura 12.10,** pentru o elipsă oarecare E (O,a,b)

(12.41) $\rho(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{1-\epsilon^2 cos^2 \varphi}}$

Pentru elipsa E_1 (O, a = 1, b = $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$) excentricitatea numerică a acestei elipse este

(12.42) $\epsilon = \frac{e}{a} \;\; \rightarrow \;\; \epsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - (\frac{b}{a})^2 = 1 - \frac{1}{1-k^2} = \frac{-k^2}{1-k^2}$

care, înlocuită în relaţia anterioară, rezultă

(12.43) $\rho(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 sin^2 \varphi}}$

expresia integrandului din **IEC incompletă** de speţa întâia F(θ, k).

Integrala eliptică incompletă de prima speţă F(θ, k) exprimă lungimea arcului de elipsă E_1 de la A la M_C, arc notat cu u = am(k, φ) = $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2 \varphi}}$.

Deoarece

(12.44) y = $\rho(\varphi)$.sinφ = b.sinθ = $\frac{sin\theta}{\sqrt{1-k^2}}$,

din această egalitate, rezultă dependenţa dintre cele două unghiuri θ şi φ

(12.45) $\varphi(\theta) = arcsin\frac{sin\theta}{\sqrt{1-k^2cos^2\theta}} = \arcsin(s_V(\theta).\sin\theta)$

în care, excentricitatea variabilă $s_V(\theta)$ are expresia $\rho(\varphi)/b = \sqrt{1-k^2}\,.\rho(\varphi)$, sau

(12.46) $s_V(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2cos^2\theta}}$

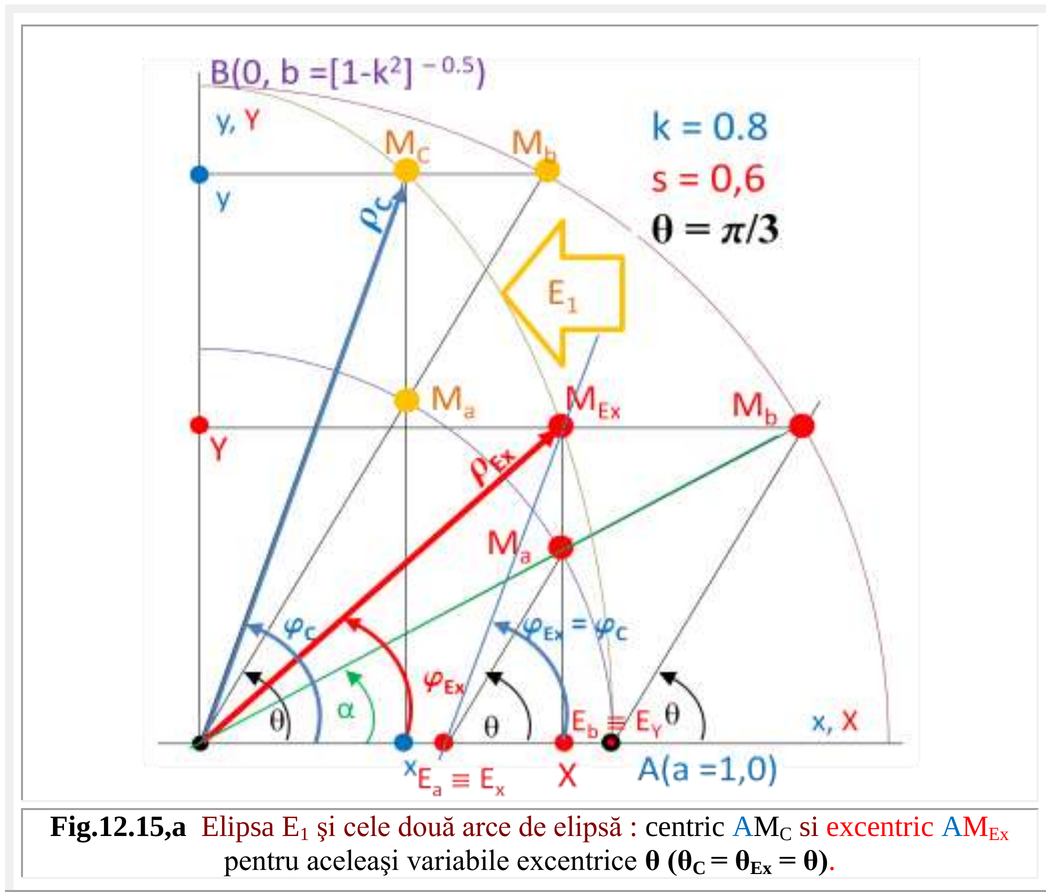


Fig.12.15,a Elipsa E_1 şi cele două arce de elipsă : centric AM_C si excentric AM_{Ex} pentru aceleaşi variabile excentrice **θ** ($\boldsymbol{\theta_C = \theta_{Ex} = \theta}$).

Se observă (**Fig.12.15,a**) că unghiul dreptei E_aM_{Ex} cu axa x, să-l notam cu φ_{CEx}, este chiar unghiul φ_C. Dacă în integrantul (12.40), unghiul $\varphi = \varphi_C$ este o variabilă centrică, φ_{CEx} este o variabila excentrică; din excentrul Ea ≡ Sa, deoarece R = a = 1, astfel ca $s_a = e_a$.

E necesar să se demonstreze că cele două unghiuri φ_C şi φ_{CEx} sunt egale. In acest scop, vom arăta că tangentele celor două unghiuri sunt aceleaşi. Astfel

(12.47) $\tan\varphi_C = \frac{y}{x} = b\frac{sin\theta}{cos\theta} = b.tan\theta$

În triunghiul dreptunghis E_aM_aX, ipotenuza E_aM_a este tocmai prima determinare, de indice 1, a **FSM**-**CE** radial excentric de variabilă excentrică θ, adică

(12.48) $E_aM_a = a.rex(\theta, S(s = ea, \varepsilon = 0)) = rex(\theta, S(s = ea, \varepsilon = 0)),\ a = 1$

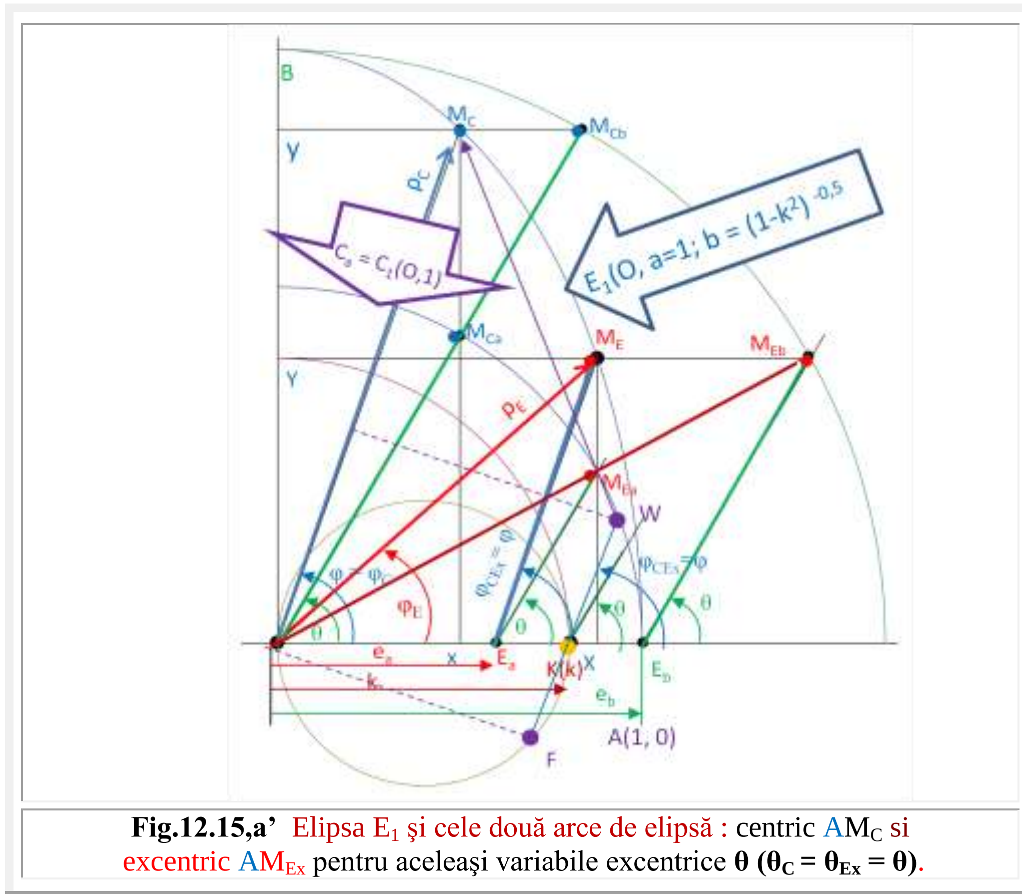


Fig.12.15,a' Elipsa E_1 şi cele două arce de elipsă : centric AM_C si excentric AM_{Ex} pentru aceleaşi variabile excentrice **θ ($\theta_C = \theta_{Ex} = \theta$)**.

Tangenta unghiului φ_{CEx}, din raportul catetelor, este

(12.49) $$\tan \varphi_{CEx} = \frac{Y}{X - e_a} = \frac{XMa}{EaX} = \frac{b.sin\propto}{cos\propto - e_a} = b\,\frac{rex\theta.sin\theta}{rex\theta.cos\theta} = b\,\frac{sin\theta}{cos\theta} = b.tan\theta$$

Comparând (12.47) cu (12.49) rezultă că, dacă tangentele sunt egale şi unghiurile corespunzătoare sunt egale, adică $\varphi = \varphi_C = \varphi_{CEx}$.

Ceea ce trebuia / (era de) demonstrat (QED).

Dacă segmentul E_aM_E are direcţia de unghi $\varphi = \varphi_C = \varphi_{CEx}$, segmentul E_bM_b are direcţia de unghi θ, aşa cum s-a subliniat în **figura 12.15,a'**. Aceeaşi, în principiu, cu **figura 12.15,a** , dar mai completă. S-a completat cu cercurile de rază k şi de rază k/2, precum şi din excentrul K(k,0) din care s-a dus direcţia de variabilă excentrică φ.

Aşa cum s-a mai arătat, şi cum se poate observa şi în figură, segmentul FW = $\frac{1}{OM_C} = \sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}$ = dn(u,k) este inversul razei vectoare $\rho_C = OM_C$. De aici, rezultă că expresia razei polare ρ, din originea O(0,0), a oricărui punct curent M_C, de pe elipsa E_1, este data de relaţia cunoscută

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}}$$

Ordonata Y a punctului M_{ex} din **figura 12.15,a** este, în acelaşi timp, aşa cum este definit sinusul excentric ca **FSM-CE**

(12.50) $Y = \rho_{Ex}.\sin\varphi_e = \rho_{Ex}.\text{sex}[\theta_a = \varphi_{Ex}, S(s = s_a/\rho_{Ex}, \varepsilon = 0)]$

şi, astfel, utilizând relaţia generală, rezultă

(12.51) $\rho_{Ex} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2.\sin^2\varphi_{Ex}}} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2.\text{sex}^2\varphi}}$

care este integrandul **IEE** de prima speţă/ tip.

In concluzie, semnificaţia geometrică a **IEE** de speţa întâia este lungimea arcului de elipsă, pe elipsa $E_1(O, a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}})$, de la A(1,0) la $M_{Ex}(X, Y) \equiv M_{Ex}(\rho_{Ex}, \varphi_{Ex})$.

Ca urmare, semnificaţiile geometrice ale **IEC** cât şi ale **IEE** sunt aceleaşi, atât pentru integralele de prima speţă cât şi pentru cele de speţa a doua. Cele două puncte M_C şi M_{Ex}, de pe elipsele E_1 şi, respectiv, E_3, se suprapun doar în cazurile $\theta, \varphi = 0$, pentru $\theta, \varphi \in [0, \pi/2]$, în care $\varphi_C = \varphi_{Ex} = \theta = \theta_a = 0$.

Fig. 12.16. Schiţă explicativă pentru K(k = 0,8)

Diferenţele maxime, dintre arcele AM_C şi AM_{Ex}, apar pentru $M_C \equiv B$ sau $\theta, \varphi = \pi/2$. Pentru $\varphi = \pi/2$ rezultă u = K(k) şi pentru k = 0,8 situaţia este prezentată în **figura 12.16**. În aceeaşi figură sunt prezentate şi primele transformări excentrice (de centrare), considerate în metoda hibridă de determinere a unei relaţii de calcul a integralei eliptice complete de prima speţă (v. relaţia (5.55)) care, după numai 5 paşi ai

transformării, asigură o precizie de **15** zecimale exacte, aşa cum s-a prezentat în **SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE**. Ed. **Politehnica din Timişoara**, Vol I, Cap. 5, pag.152 … 171.

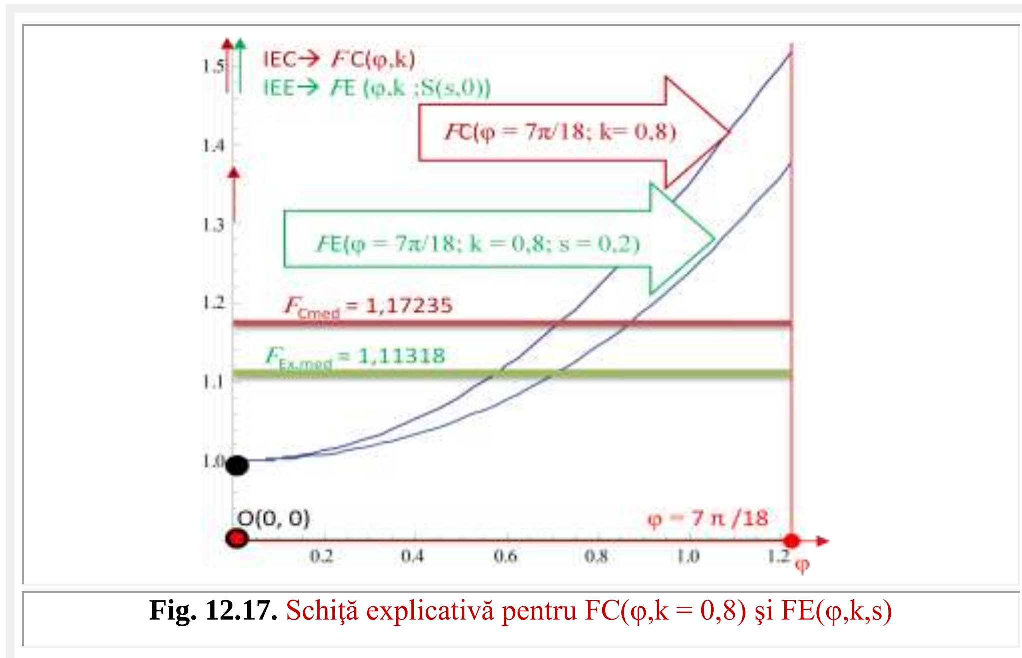


Fig. 12.17. Schiţă explicativă pentru FC(φ,k = 0,8) şi FE(φ,k,s)

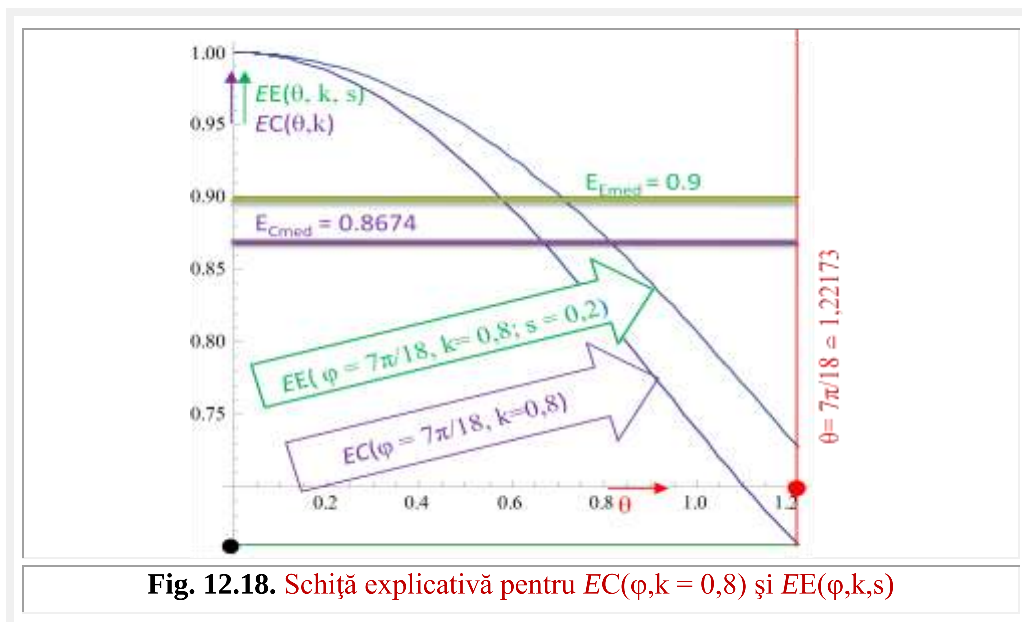


Fig. 12.18. Schiţă explicativă pentru *E*C(φ,k = 0,8) şi *E*E(φ,k,s)

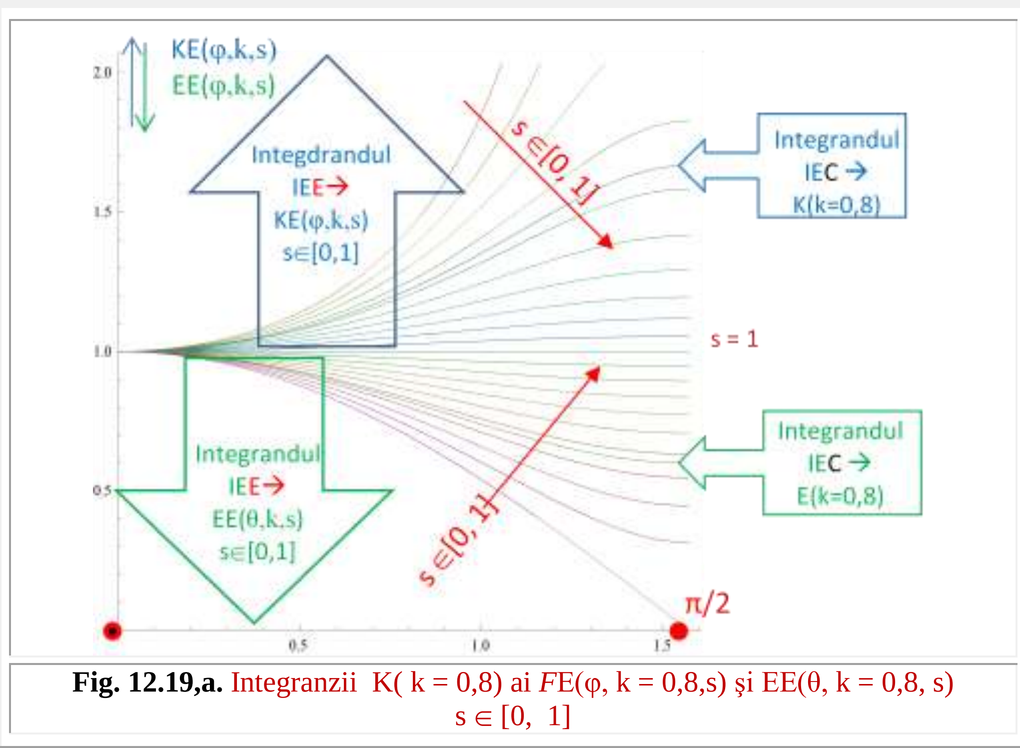


Fig. 12.19,a. Integranzii K(k = 0,8) ai *F*E(φ, k = 0,8,s) şi EE(θ, k = 0,8, s) s ∈ [0, 1]

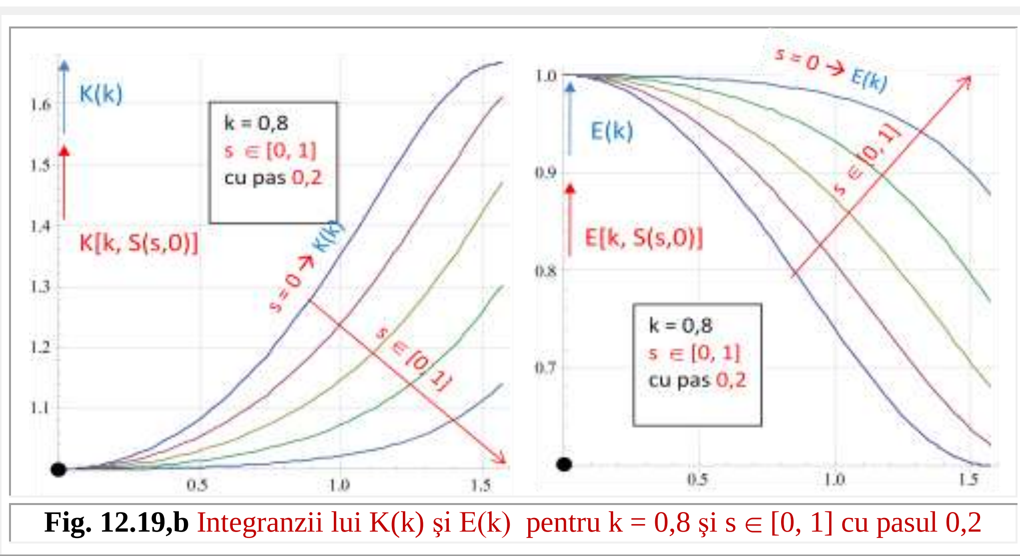


Fig. 12.19,b Integranzii lui K(k) şi E(k) pentru k = 0,8 şi s ∈ [0, 1] cu pasul 0,2

Pornind din punctul W(x = k = sinα = 0,8; y = cosα = 0,6) punctele transformării de pe cercul unitate sunt W_1 şi W_2, restul nemaiputand fi reprezentate grafic.

Astfel, pentru k = 0, punctul $W \equiv W_N$ find, deci, deja în punctul superior al cercului unitate B(0,1). Ca urmare $e_N = k_N = k = 0$ şi $R_N = 1$, astfel că valoarea lui K(k = 0) este $K(0) = \frac{\pi}{2R_N} = \frac{\pi}{2}$.

Pentru k = 1, punctul $W \equiv W_N \equiv A(1,0)$, astfel rezultă $k_N = s_N = k = 1$ şi $R_N = 0$, iar $K(k = 1) = \frac{\pi}{2R_N} = \frac{\pi}{0} = \infty$. Ambele valori extreme de 0 şi ∞ ale lui K(k) fiind cele cunoscute.

Toate acestea sunt compatibile cu **IEC** sau cu cele excentrice **(IEE)** dar de excentricitate numerică s = 0.(A nu se confunda cu excentricitătile numerice s şi s_i anterioare) , fiindcă dacă s = 0, IEE(k, s = 0) → IEC(k).

Dacă excentricitatea numerică are valoarea maximă de s = 1, atunci punctului $E_C(\varphi = \pi/2, k)$ de pe elipsa E_1 din B_1 $(0, \frac{1}{\sqrt{1-k^2}})$, adică $E_C \equiv B_1$, îi va corespunde punctul $M_{Ex}(1,0)$, adică $M_{Ex} \equiv A_1(1, 0)$ şi unghiul anterior, nu este variabila centrică din teoria **FSM-CE,** ci corespunde unghiul β_1 din punctul W a cărui sinus este modulul k al integralelor eliptice.

Abscisele acestor puncte W_i, sunt situate toate pe raza de R = 1, dau excentricităţiile numerice s = k, apoi $s_i = k_i$, i = 1, 2, …, N.

Ultima excentricitate numerică e_N, ca şi cea reală k_N, sunt nule ($e_N = k_N = 0$).

Ultimul punctul W_N, N → ∞ va fi pe cercul C(O,1) în W_N (0,1), în consecinţă, lungimea arcului A_1A_1 este nulă !

Punctele M_i, care în timpul transformării de centrare, sar de pe o orbită/cerc de rază mai mare pe altele de raze din ce în ce mai mici; raza minimă posibilă, pentru o anumita valoare k, fiind $R_N(k)$, sunt succesiv $M \equiv W, M_1, M_2, \dots M_N(x_N = 0; y_N = R_N)$; $M_i \neq W_i$, i = 1, 2, N.

Primul salt, de pe R = 1 pe R_1, este indicat şi în **figura 12.16**, punctul roşu, de tangenţă a dreptei OW_1 cu cercul $c_1[Oc_1(x_{O1}= 0, y_{O1} = k + \frac{1-k}{2})$, $r_1 = \frac{1-k}{2}]$ fiind M_1. M_1este totodată şi punctul de intersecţie dintre cercul centrat în originea O(0, 0) şi de rază R_1 - $C1(O,R_1)$ - cu cercul excentric / superior anterior c_1. Aşa rezultă, prin una dintre metode, raza primei orbitei R_1 şi, în mod asemănător, ale următoarelor orbite R_i.

Dacă familia de cercuri C_i, i = 1, 2, … , N trec prin punctul comun $A_1^-(-1, 0)$ al cercului unitate, atunci ele au punctele lor superioare $B_i(x_i = 0, y_i = R_i)$ înşirate pe dreapta determinată de punctele $A^-(-1, 0)$ şi punctul $B^+(0, 1)$, sgment de dreaptă înclinat cu 45^0, deci paralel cu prima bisectoare, reprezentat şi în **figura 12.16**.

Cateva valori particulare ale integralei K(k) rezultă imediat.

12.5 FUNCŢII ELIPTICE CENTRICE (FEC) ŞI FSM – CE

Se zice, pe bună dreptate, că o figură geometrică, sugestiv realizată, face mai mult decât câteva pagini de explicaţii.

În figura **12.16** este prezentată elipsa $E_1[O(0,0)$, a = 1 b = $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}]$ pentru valoarea parametrului/modulului k = 0,8. Aşa cum s-a mai arătat, arcul de elipsă

(12.52) $$AM = u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\rho(\varphi)} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} = F(k, \varphi)$$

în care punctul M, de coordonatele polare M(φ, ρ(φ) = $\frac{1}{\sqrt{1-k^2.sin^2\varphi}}$), aparţine elipsei E_1, adică M ⊂ E_1.

Raza polară a elipsei E_1 poate fi exprimată odată ca functie de φ prin expresia

(12.53) $$\rho(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2.sin^2\varphi}} = \frac{1}{dn(u,k)} = \frac{1}{\cos[\beta(\theta=\varphi)]} = \frac{1}{\cos(bex\varphi)}$$

şi, ca funcţie de unghiul γ, prin coordonatele unui punct M(x = a cosγ, y = b.sinγ) al unei elipse, în general, şi prin M(cosγ, $\frac{sin\gamma}{\sqrt{1-k^2}}$) al elipsei E_1 rezultând relaţia

(12.54) $$\rho(\gamma) = \sqrt{x^2(\gamma)+y^2(\gamma)} = \frac{\sqrt{1-k^2cos^2\gamma}}{\sqrt{1-k^2}}$$

Se cunoaşte expresia funcţiei eliptice centrice (**FEC)** dn(u, k) ca fiind

(12.55) $$dn(u,k) = \sqrt{1-k^2sin^2\varphi} = \sqrt{1-k^2sn^2(u,k)}$$

precum şi egalităţile

(12.56) $$\begin{cases} cn(u,k) = \cos\varphi \\ sn\,(u,k) = sin\varphi \end{cases}$$

O dependenţă dintre cele două expresii ale razei polare ρ este dată, exprimând abscisa x prin cele două variabile

(12.57) $$x = \cos\gamma = \rho\cos\varphi \;\rightarrow\; \rho = \frac{cos\gamma}{cos\varphi} = \frac{\cos\gamma}{cn(u,\ k)}$$

Interesant este faptul că, prin înlocuirea variabilei centrice **α** cu cea excentrică **θ**, egală cu **φ** în cazul de faţă, aşa cum se cunoaşte din teoria **FSM**, se trece de la **FCC** la **FSM- CE**, iar prin revenirea în centric sau considerând ca centrică variabila excentriă **θ** = **φ** se obţin **FEC**, aşa cum rezultă şi din relatiile (12.56) **.**

Din **figura 12.20** rezultă – pe cale pur geometrică clar - că, inversul razei polare ρ(φ = θ) este segmentul FW = dn (u, k) şi, evident, că inversul segmentului FW, proiectat pe raza polară ρ este raza polară ρ(φ), ţinând cont de construcţia grafică a inversului unui număr prin tangenta la cercul C(O, R=1) în punctul W(cexθ, sexθ) pentru θ = φ .

Pe cercul C_a sunt marcate, în **figura 12.20**, unghiurile φ = θ şi γ . Dacă am rostogoli pur, fără alunecare relativă, arcul de elipsă AM(x,y) peste cercul C_a (O, R= a =1), în locul în care M se suprapune şi aparţine atât elipsei E_1 cât şi cercului C_a, pe cercul C_a se va putea măsura şi arcul **u** şi se va putea determina, pe cale geometrică/grafica valoarea integralei incomplete de prima speţă *F*(φ, k). Valoarea integralei complete de speţa/tip întâia K(k) va corespunde suprapunerii punctului **B**(0, $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$) peste cercul C_a, prin acelaşi procedeu, adică, aceeaşi rostogolire pură a elipsei E_1 peste cercul unitate C_a.

Se deduce imediat că, pentru k = 0, elipsa unitate E_1degenerează în cercul unitate C_a, astfel că, suprapunerea se realizează fără rostogolire, B este deja în punctul B(0,1) de pe cerc şi rezultă valoarea minimă posibilă a integralei completa de speţa întâia K(k = 0) = π/2. Dacă k = 1, atunci elipsa E_1 degenerează în două drepte paralele, astfel că B(0,b) este aruncat la infinit, adică B(0,∞) şi oricât de mult am rostogoli, fără

alunecare, această “elipsă” degenerată, peste cercul unitate C_a, punctul B(0,∞) nu va ajunge să se suprapună nicicând peste cercul C_a, ceea ce arată că K(k = 1) = ∞.

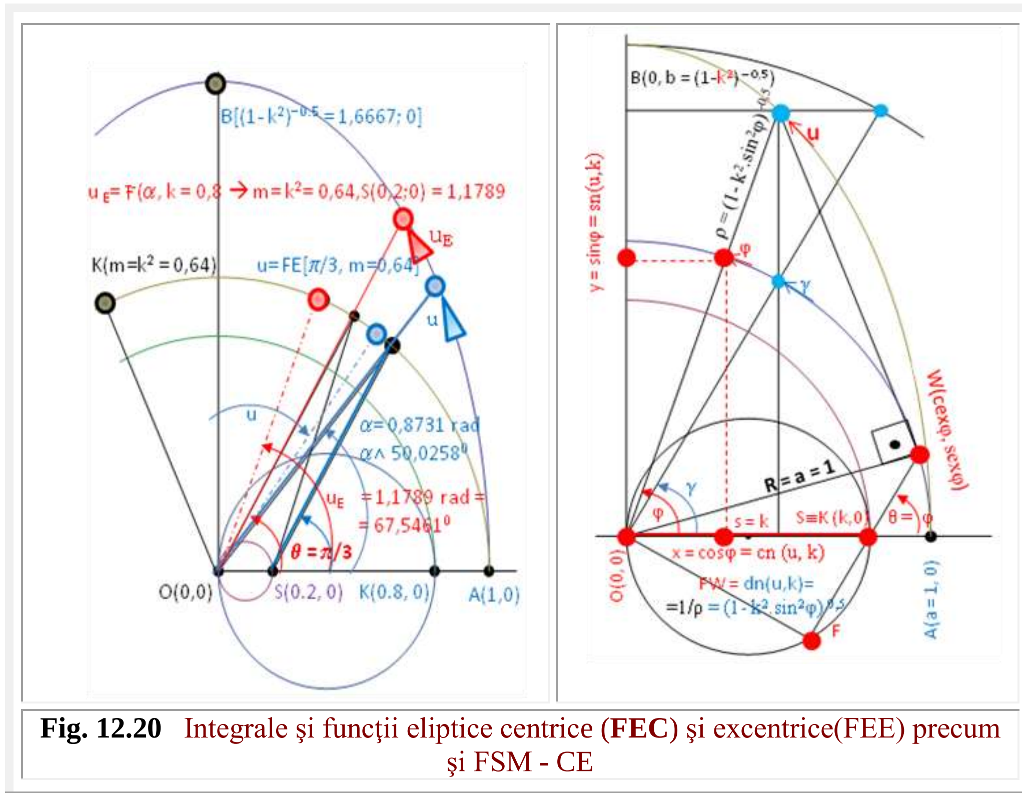


Fig. 12.20 Integrale şi funcţii eliptice centrice **(FEC)** şi excentrice(FEE) precum şi FSM - CE

12.6 FUNCŢII ELIPTICE EXCENTRICE (FEE)

Anterior, s-a văzut modul de definire al **IEE**, prin înlocuirea **FCC** cu **FSM-CE** în expresiile integralelor eliptice, denumite, acum, şi centrice (**IEC**).

Dacă s-ar dispune de expresii ale funcţiilor eliptice, cu excepţia funcţiei dn(u,k), care să fie exprimate prim **FCC** sinα şi/sau cosα, atunci metoda s-ar putea repeta, aidoma ca la **IEE**.

Alte tipuri de funcţii eliptice, ca cele exprimate în funcţie de arcul cercului inscris elipselor unitate, ca şi a cercului şi a elipsei cu “vârf” comun sau tangente intr-un punct, vor fi prezentate intr-un capitol separat, în continuare.

12.6.1 FSM ELIPTICE AMPLITUDINE EXCENTRICĂ

Funcţiile eliptice clasice sau ordinare am(u,k), cn(u,k) sn(u,k), dn(u,k) , pe care le vom denumi în continuare şi funcţii eliptice **centrice** (**FEC**) se exprimă, insă, prin dezvoltări în serie, în funcţie de variabila u. Astfel, {v. →Rîjic, I.M. şi Gradştein, I.S. "TABELE DE INTEGRALE, SUME, SERII ŞI PRODUSE", Ed. Tehnica, Buc., 1955, pag.308] expresia **FEC** am(u,k) este

(12.58) $$\mathrm{am}(u,k) = u - \frac{k^2}{3!}u^3 + \frac{k^2(4+k^2)}{5!}u^5 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{7!}u^7 + + \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{9!}u^9 - .. + .. ,\ |u| < |K'|$$

Variabila u, similară lui α – variabila centrica din **MC** a **SM**, îi corespunde în **ME** variabila excentrică θ şi trecerea din centric în excentric se face prin relaţia cunoscută (v. Vol.I, rel (1.10), pag. 28) α = θ – arcsin[s.sin(θ - ε)], astfel că trecerea de la FEC la **FEE** se poate realiza prin înlocuirea variabilei centrice u cu variabila excentrică, s-o notăm cu t

(12.59) u = t – arcsin[s. sin(t -ε)]

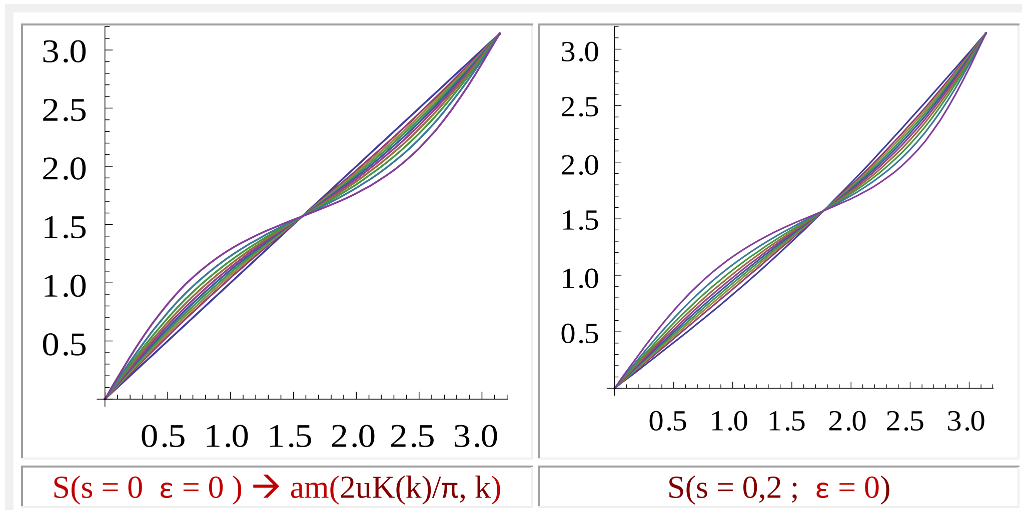
deoarece S(0, 0), figura nu mai reprezintă **FEE**, ci reprezintă variaţiile în 3D, ca funcţie de k, a **FEC** am (u,k).

În acest mod, se poate profita de programele existente de matematică, care operează cu seria (12.58). Astfel, dacă **FEC** se pot reprezenta grafic prin expresia

(12.60) Plot[Evaluate[Table[{JacobiAmplitude[2t EllipticK[(0.1 u)^0.5]/ Pi, (0.1u)^0.5]},{u,0,10}],{t,0,Pi}, AspectRatio→1]]

o **FEE** de S(0,6; 0) se reprezintă grafic prin expresia

(12.61) Plot[Evaluate[Table[{JacobiAmplitude[2 (t-ArcSin[0.6 Sin[t]]) EllipticK[(0.1u)^0.5]/Pi,(0.1 u)^0.5]},{u,0,10}],{t,0,Pi}]].



S(s = 0 ε = 0) → am(2uK(k)/π, k) | S(s = 0,2 ; ε = 0)

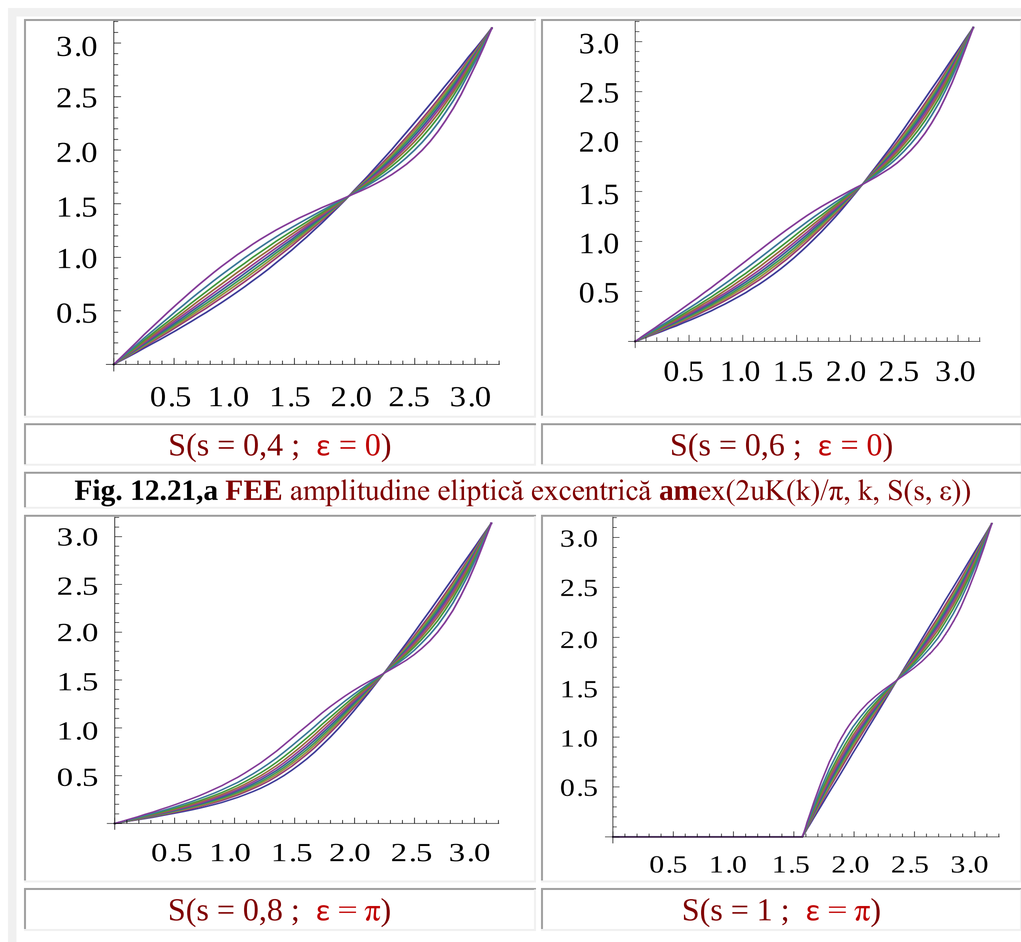


Fig. 12.21,a **FEE** amplitudine eliptică excentrică **am**ex(2uK(k)/π, k, S(s, ε))

Se observă, comparând cele două expresii, că variabila t → t - arcsin[0.6 sin[t]], în conformitate cu relaţia (12.47).

În acest mod, au fost realizate graficele **FEE**(s) ca funcţii de excentricitatea s, pentru ε = 0, adică S(0,6; 0) din **figura 12.21** şi ca funcţii de ε pentru s = 0.8 = constant, când excentrul S(0,8; ε) se roteşte pe cercul C(R = 0,8; O(0,0)) de raza R = 0,8, centrat in originea O(0,0), din **figura 12.21**.

O imagine mai bună se obţine prin reprezentarea graficelor în 3D, ca în **figura 12.21,c.** Fiind reprezentate în funcţie de k, modulul variază doar intre limitele k ∈ [0, 1]. Deoarece variabila t ∈ [0, π], pentru s = 1, punctul W_1 rămâne confundat în excentrul S(1,0), atâta timp cât t ∈ [-π, π]. De aceea, în acest caz, în ultima **figură 12.21,c,** S(1, 0) apare o suprafaţă plană de cotă zero, în intervalul t ∈ [0, π/2].

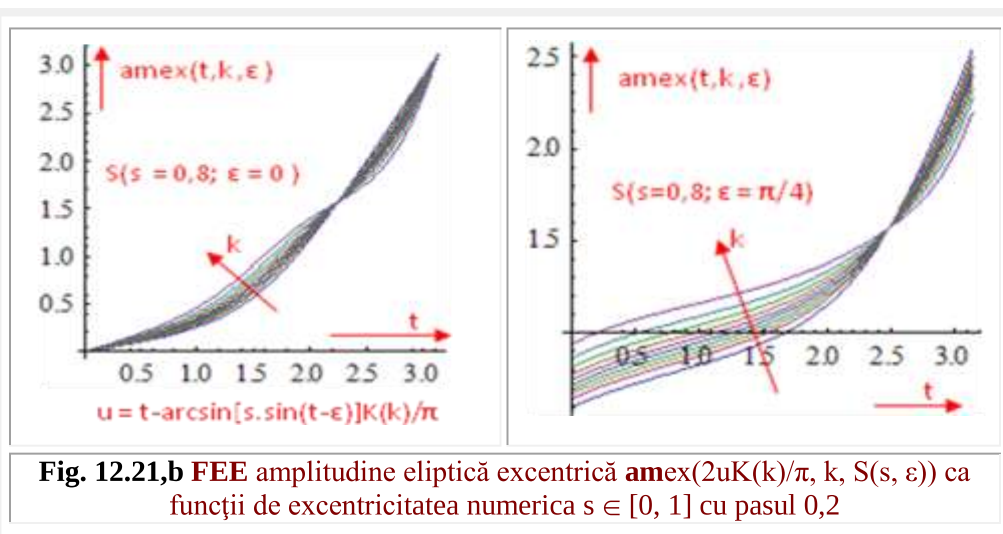


Fig. 12.21,b FEE amplitudine eliptică excentrică **am**ex(2uK(k)/π, k, S(s, ε)) ca funcţii de excentricitatea numerica s ∈ [0, 1] cu pasul 0,2

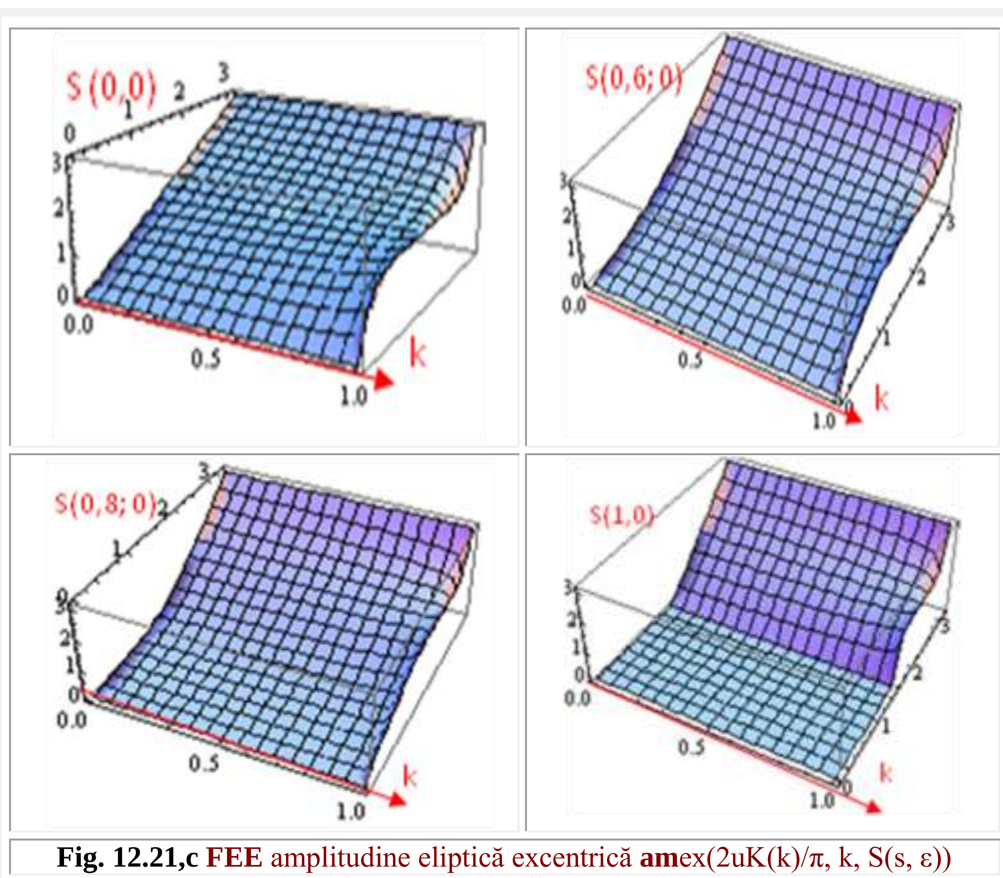


Fig. 12.21,c FEE amplitudine eliptică excentrică **am**ex(2uK(k)/π, k, S(s, ε))

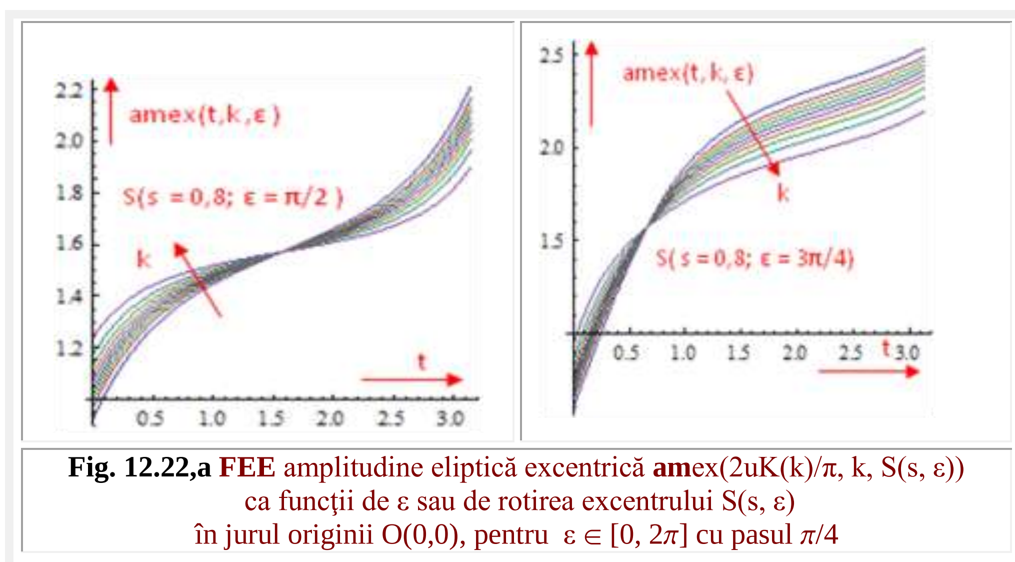


Fig. 12.22,a FEE amplitudine eliptică excentrică **am**ex(2uK(k)/π, k, S(s, ε)) ca funcţii de ε sau de rotirea excentrului S(s, ε) în jurul originii O(0,0), pentru ε ∈ [0, 2π] cu pasul π/4

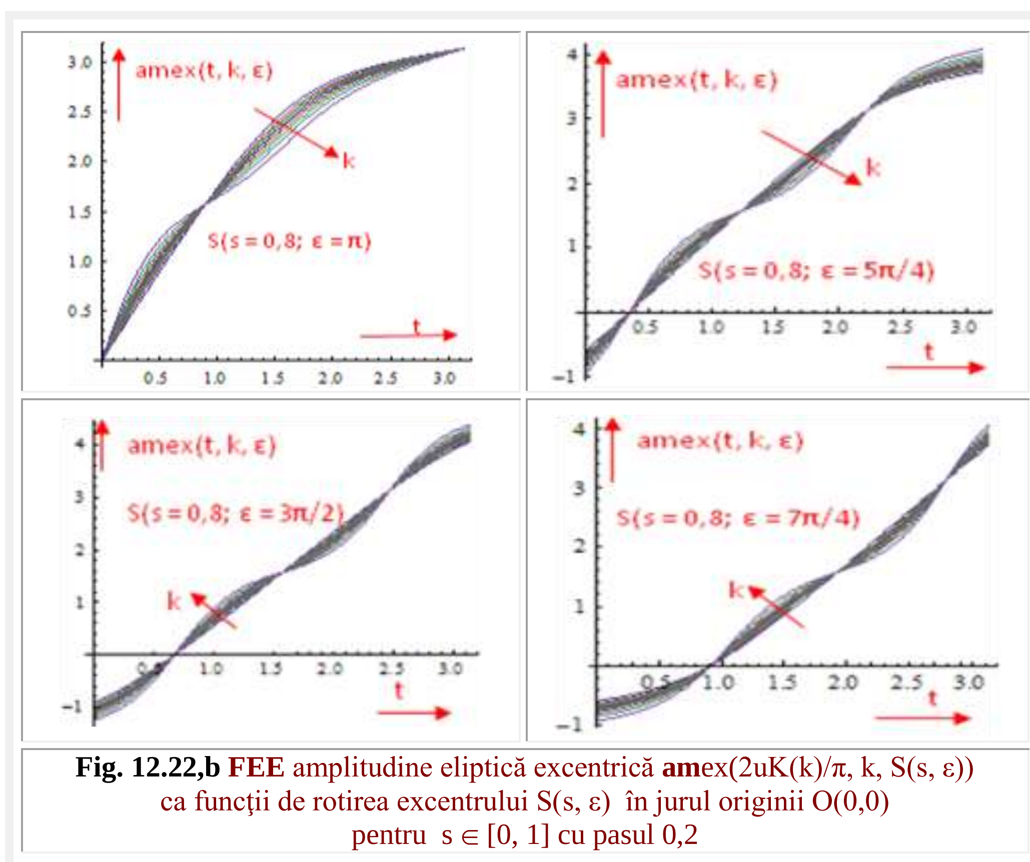


Fig. 12.22,b FEE amplitudine eliptică excentrică **am**ex(2uK(k)/π, k, S(s, ε)) ca funcţii de rotirea excentrului S(s, ε) în jurul originii O(0,0) pentru s ∈ [0, 1] cu pasul 0,2

Dacă **FEC** aex(u,k) variază liniar cu t = u, **pentru k = 0**, adică graficul ei este reprezentat de o linie dreaptă – prima bisectoare – în cazul **FEE** (s ≠ 0) această dependenţă nu mai apare. În prima **figură 12.21,c** apare, însă, la k = 0 -stânga- dependenţa liniară.

Ca funcţie de excentricitatea unghiulară ε, **FEE** amplitudine excentrice sunt reprezentate în **figura 12.22**, în care, excentricitatea numerică liniară s a fost aleasă, arbitrar, de valoare s = 0,8.

Se observă că nu mai apar dependenţe liniare şi, ca şi în cazul altor **FSM-CE,** pentru diverse valori ale lui ε, apar puncte comune, de intersecţie ale tutruror curbelor, puncte atractor şi/sau puncte repulsive.

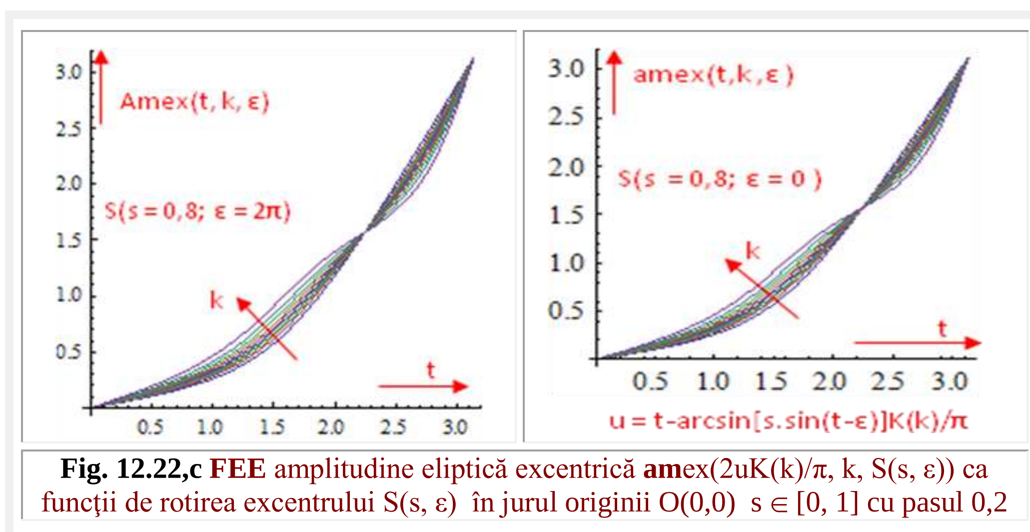


Fig. 12.22,c FEE amplitudine eliptică excentrică **am**ex(2uK(k)/π, k, S(s, ε)) ca funcţii de rotirea excentrului S(s, ε) în jurul originii O(0,0) s ∈ [0, 1] cu pasul 0,2

12.6.2 FSM ELIPTICE Jacobi CENTRICE (FEJC) dn(u,m), dn(u,k) ŞI DE ARGUMENT MODIFICAT dn [2uK(m)/π, m], dn [2uK(k)/π, k]

Deoarece literatura românească nu abundă în a exprima graficele funcţiilor speciale eliptice centrice, ne luăm permisiunea de-a le prezenta aici ca un preambul la cele excentrice şi pentru a oferi posibilitatea comparării lor. Astfel, în stânga **figura 12.23,a** sunt prezentate graficele funcţiilor dn(u, m), a căror expresii sunt

(12.62) $\mathrm{dn}(u,k) = \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} = \sqrt{1-m.\sin^2\theta} = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)}$

în care $m = k^2$.

Rezultă că sunt distincte funcţiile dn(u, m) pentru m > 0 (pozitiv) şi m < 0 (negativ) şi funcţiile dn(u,k) există numai pentru valori pozitive ale lui k.

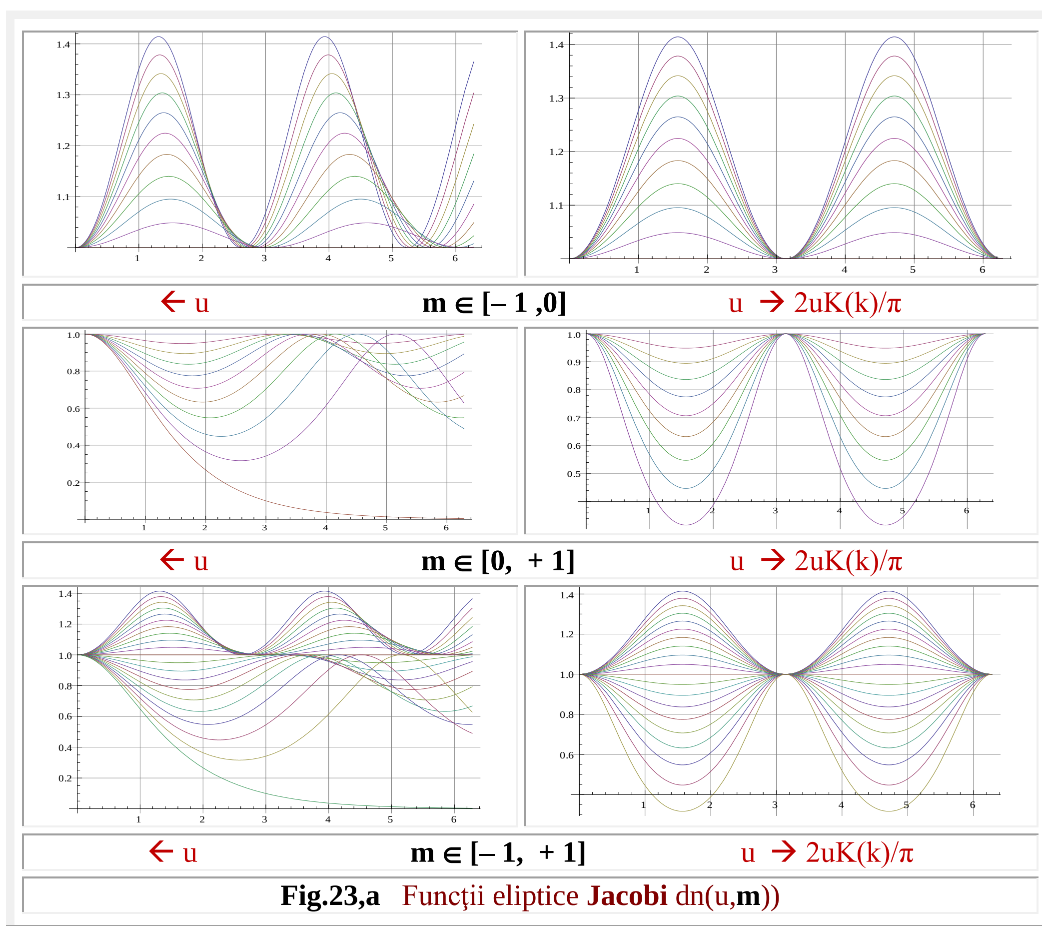


Fig.23,a Funcţii eliptice **Jacobi** dn(u,**m**))

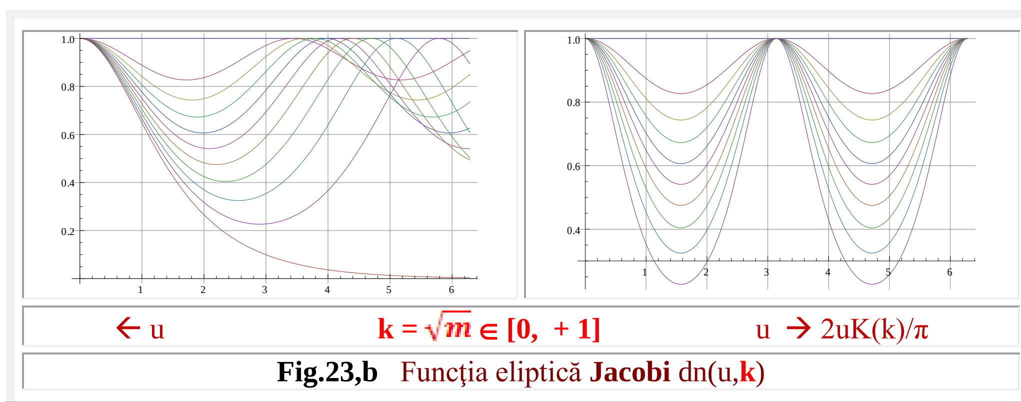


Fig.23,b Funcţia eliptică **Jacobi** dn(u,**k**)

Funcţiile de argument u şi modul m = k^2 sunt periodice de perioadă 4K(k), fiecare funcţie a familiei, de un anumit m sau k, având altă perioadă 4K(k). În dreapta **figurii 12.23,a** sunt prezentate aceleaşi funcţii eliptice **Jacobi** (**FEJC**) dar de argument modificat, în sensul că variabila u → $\frac{2uK(k)}{\pi}$ şi, aşa cum se poate observa, întreaga familie de **FEJC** devin funcţii periodice de aceeaşi perioadă π.

12.6.3 FSM ELIPTICE Jacobi EXCENTRICE (FEJE) nex(u,m), dnex(u,k) ŞI DE ARGUMENT MODIFICAT dnex [2uK(m)/π, m], dnex [2uK(k)/π, k]

Dacă în dezvoltarea (12.58) argumentul u se înlocuieşte cu funcţia amplitudine excentrică de variabilă excentrică θ → u, notată cu u, adică

(12.63) u → u – arcsin[s.sin(u - ε)],

atunci **FEJC** trec în **FEJE** ca urmare a transformării lor în funcţii induse.

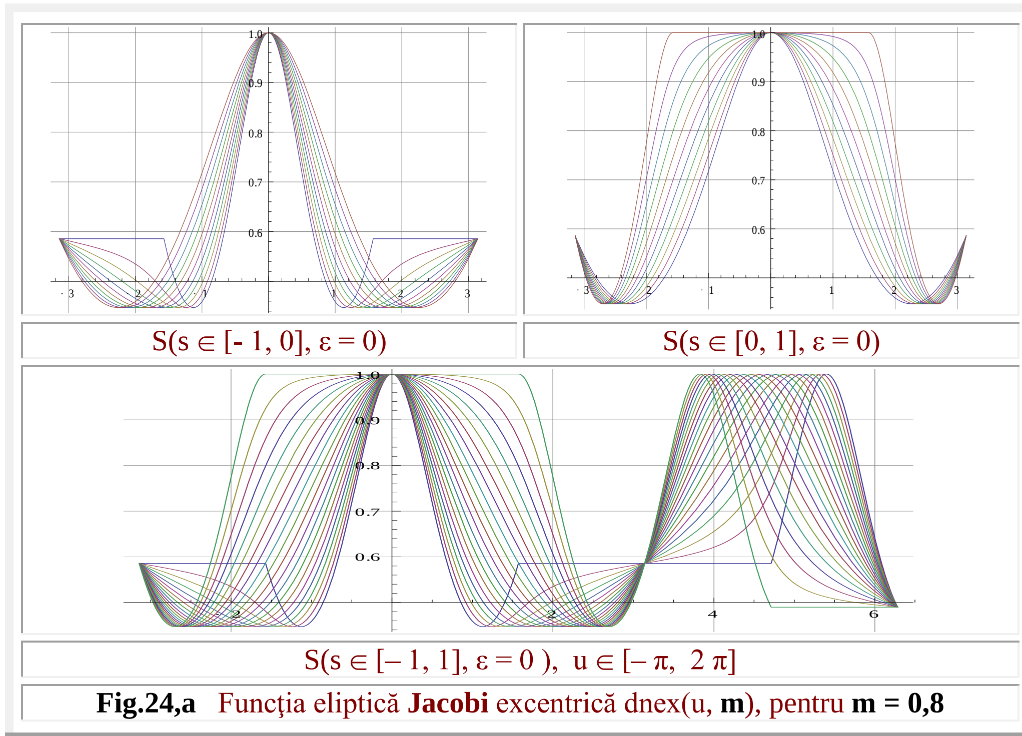
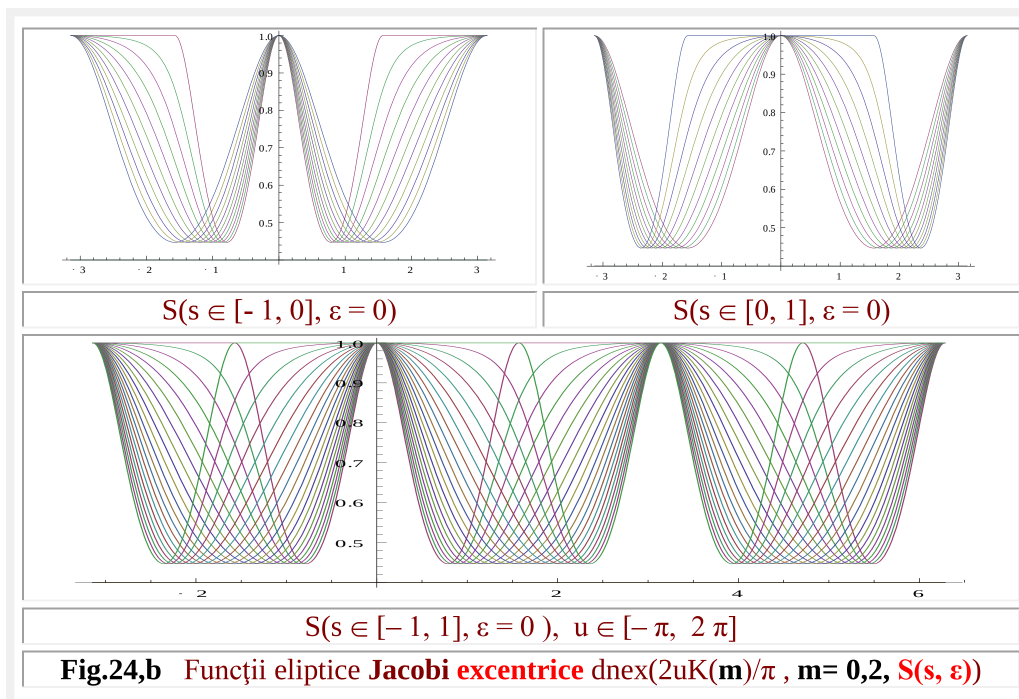


Fig.24,a Funcţia eliptică **Jacobi** excentrică dnex(u, **m**), pentru **m = 0,8**

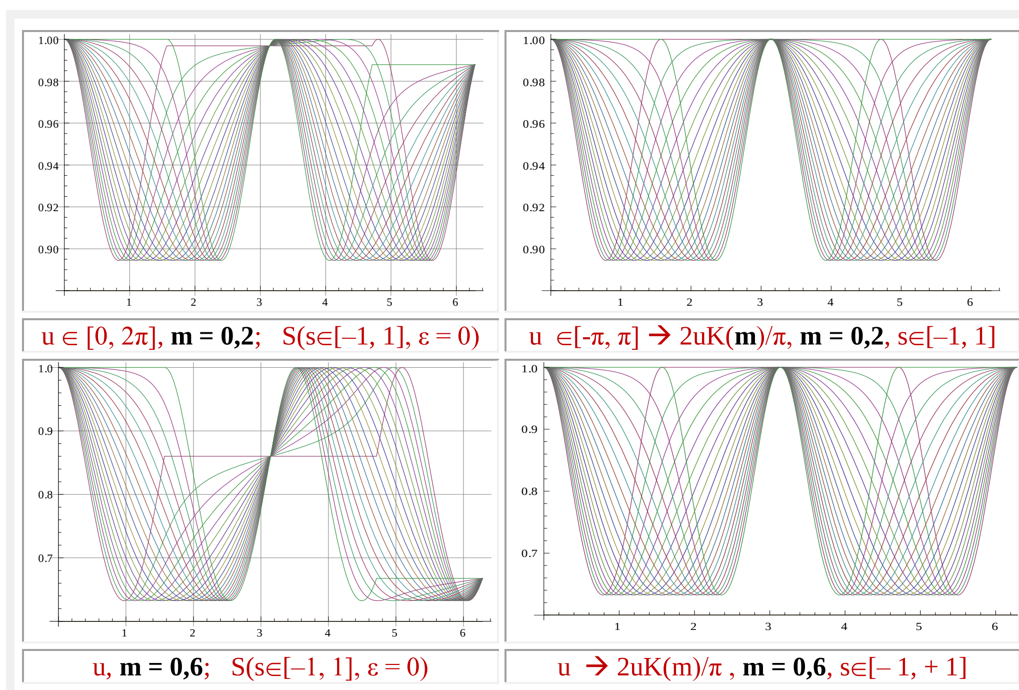
Expresia plotată pentru **FEJE** de u este



S(s ∈ [- 1, 0], ε = 0) S(s ∈ [0, 1], ε = 0)

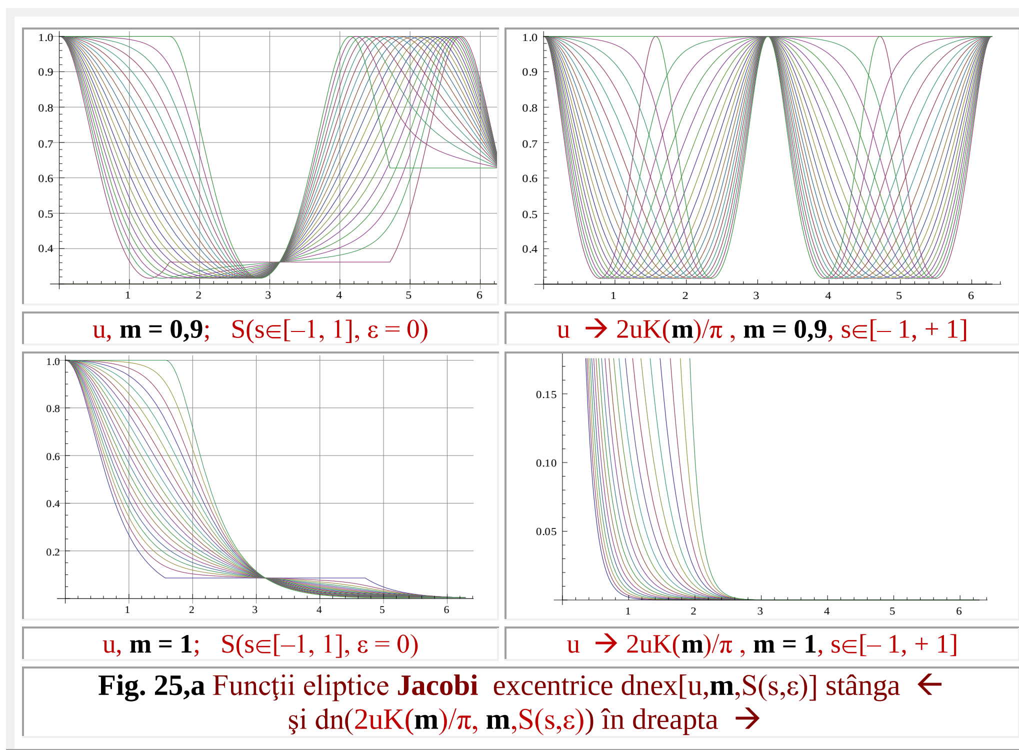
S(s ∈ [– 1, 1], ε = 0), u ∈ [– π, 2 π]

Fig.24,b Funcţii eliptice **Jacobi excentrice** dnex(2uK(**m**)/π , **m= 0,2**, **S(s, ε)**)



u ∈ [0, 2π], **m = 0,2**; S(s∈[–1, 1], ε = 0) u ∈[-π, π] → 2uK(**m**)/π, **m = 0,2**, s∈[–1, 1]

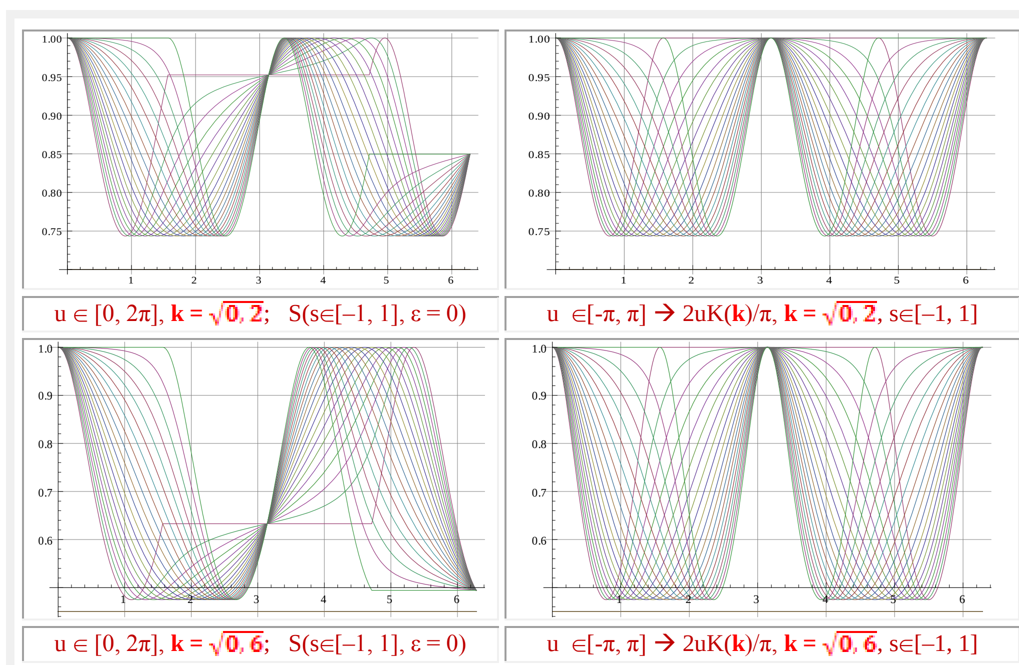
u, **m = 0,6**; S(s∈[–1, 1], ε = 0) u → 2uK(m)/π , **m = 0,6**, s∈[– 1, + 1]



u, **m = 0,9**; S(s∈[–1, 1], ε = 0) | u → 2uK(**m**)/π , **m = 0,9**, s∈[– 1, + 1]

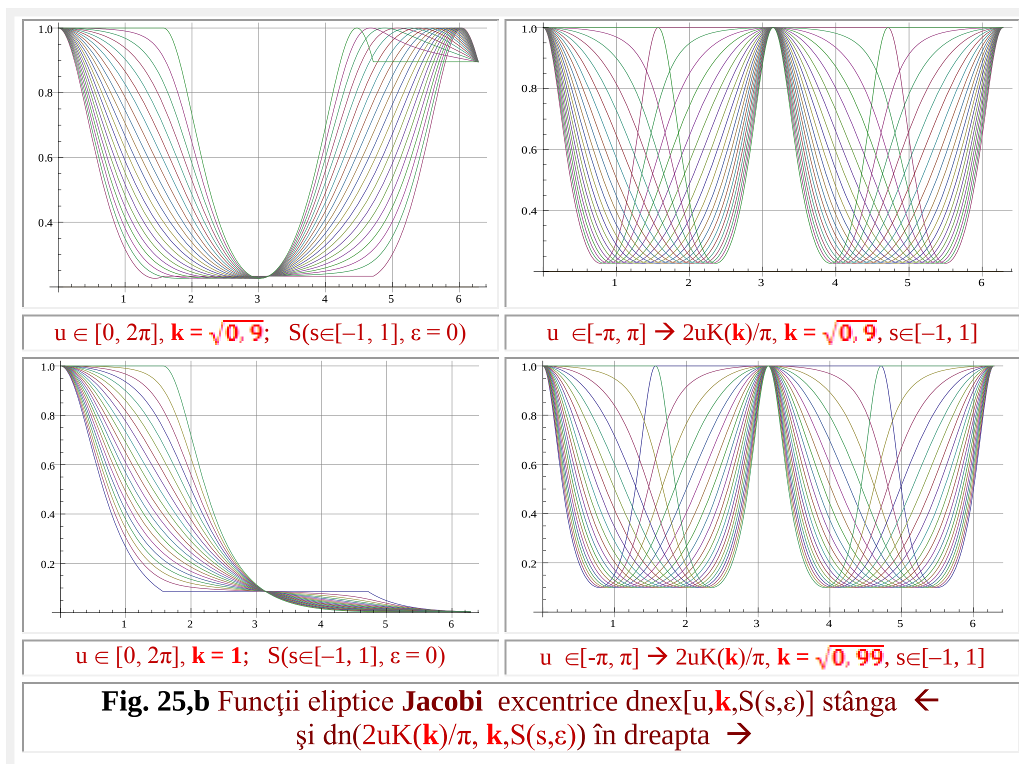
u, **m = 1**; S(s∈[–1, 1], ε = 0) | u → 2uK(**m**)/π , **m = 1**, s∈[– 1, + 1]

Fig. 25,a Funcţii eliptice **Jacobi** excentrice dnex[u,**m**,S(s,ε)] stânga ← şi dn(2uK(**m**)/π, **m**,S(s,ε)) în dreapta →



u ∈ [0, 2π], **k** = $\sqrt{0,2}$; S(s∈[–1, 1], ε = 0) | u ∈[-π, π] → 2uK(**k**)/π, **k** = $\sqrt{0,2}$, s∈[–1, 1]

u ∈ [0, 2π], **k** = $\sqrt{0,6}$; S(s∈[–1, 1], ε = 0) | u ∈[-π, π] → 2uK(**k**)/π, **k** = $\sqrt{0,6}$, s∈[–1, 1]



$u \in [0, 2\pi]$, $\mathbf{k} = \sqrt{0,9}$; S(s∈[–1, 1], ε = 0)

u ∈[-π, π] → 2uK(**k**)/π, $\mathbf{k} = \sqrt{0,9}$, s∈[–1, 1]

$u \in [0, 2\pi]$, **k = 1**; S(s∈[–1, 1], ε = 0)

u ∈[-π, π] → 2uK(**k**)/π, $\mathbf{k} = \sqrt{0,99}$, s∈[–1, 1]

Fig. 25,b Funcţii eliptice **Jacobi** excentrice dnex[u,**k**,S(s,ε)] stânga ← şi dn(2uK(**k**)/π, **k**,S(s,ε)) în dreapta →

(12.64) Plot[Evaluate[Table[JacobiDN[u-ArcSin[s.Sin[u]], m], {s,-1,1}],{u, – π, π}]],

în care modulului **m** i se dau diverse valori: 0,2; 0,6; 0,9 şi 1.

În **figura 12.24,a** s-a ales **m = 0,8** şi S(s ∈ [-1,1], ε = 0).

În **figura 12.24,b** s-au ales aceleaşi valori, dar pentru argumentul **u** modificat la **2uK(m)/*π*** a cărui expresie plotată este

(12.65 Plot[Evaluate[Table[JacobiDN[2(u-ArcSin[sSin[u]]) EllipticK[m]/Pi,0.2], {s, 0, 1}],{x, –π, π}]].

Pentru a urmări, în paralel, evoluţiile graficelor **FEJE** în funcţie de excentricitatea numerică s, pentru un excentru S(s, ε) care evolueaza pe axa x, adică ε = 0, s-au prezentat garficele din **figura 12.25,a**: în stânga de argument u, iar în dreapta de argument modificat u → 2uK(m)/π, începând cu m = : 0,2; 0,6; 0,9 şi 1, iar s ∈ [– 1, 1], pentru u ∈ [0, 2π].

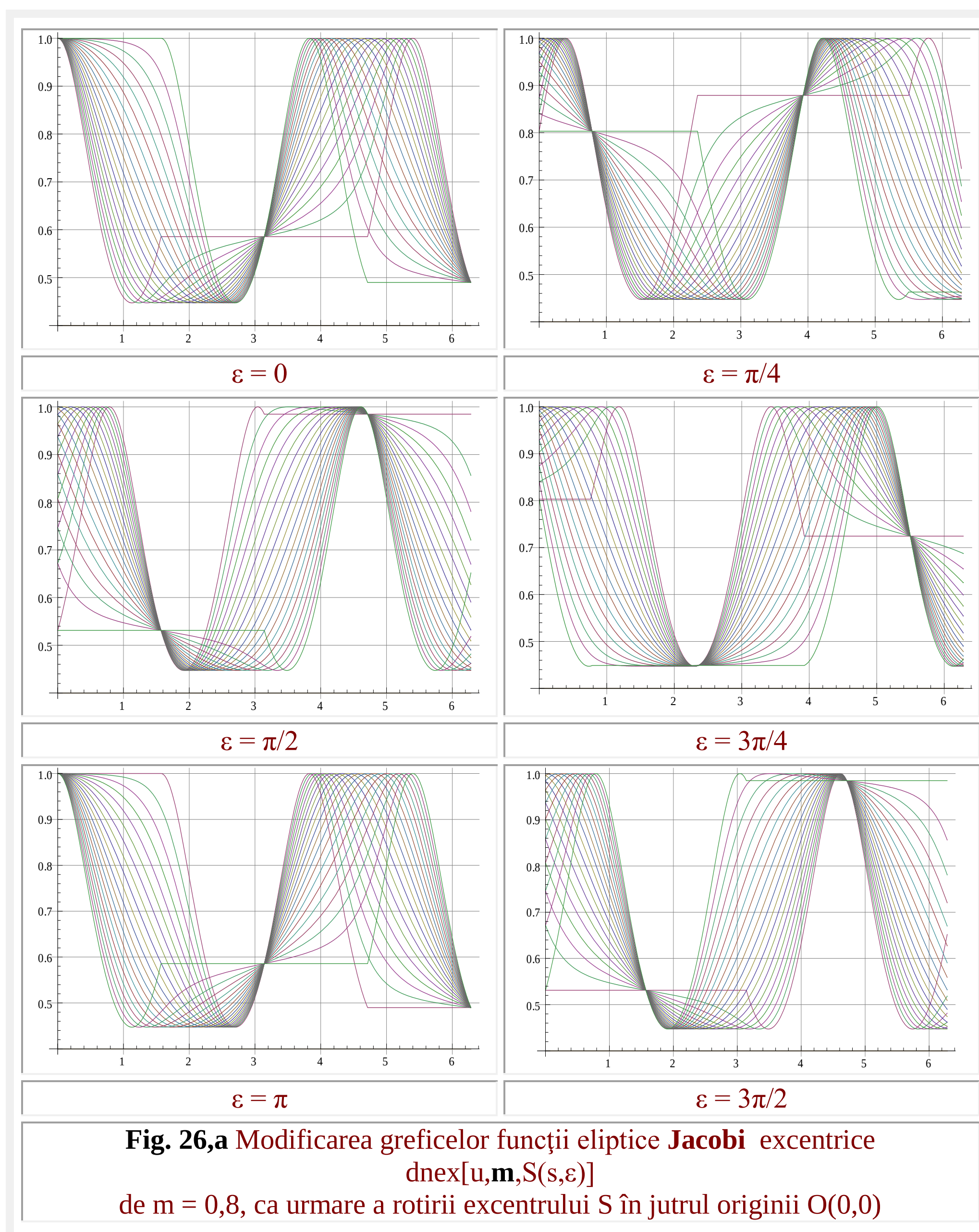


Fig. 26,a Modificarea greficelor funcţii eliptice **Jacobi** excentrice dnex[u,**m**,S(s,ε)] de m = 0,8, ca urmare a rotirii excentrului S în jutrul originii O(0,0)

Aceleaşi grafice, dar în funcţie de **k** = $\sqrt{m}$, sunt prezentate, în paralel, în funcţie de u şi de u modificat u → 2uK(**k**)/π în **figura 12.25,b.**

Modificarea graficelor ca funcţie de rotirea excentrului S(s, ε), adică ε ∈ [0, 2ε] cu pasul π/4, pe un cerc de raza **s** = 0,8, sunt prezentate în **figura 12.26,a** ca funcţie de **m** şi în **figura 12.26,b** ca funcţie de **k**.

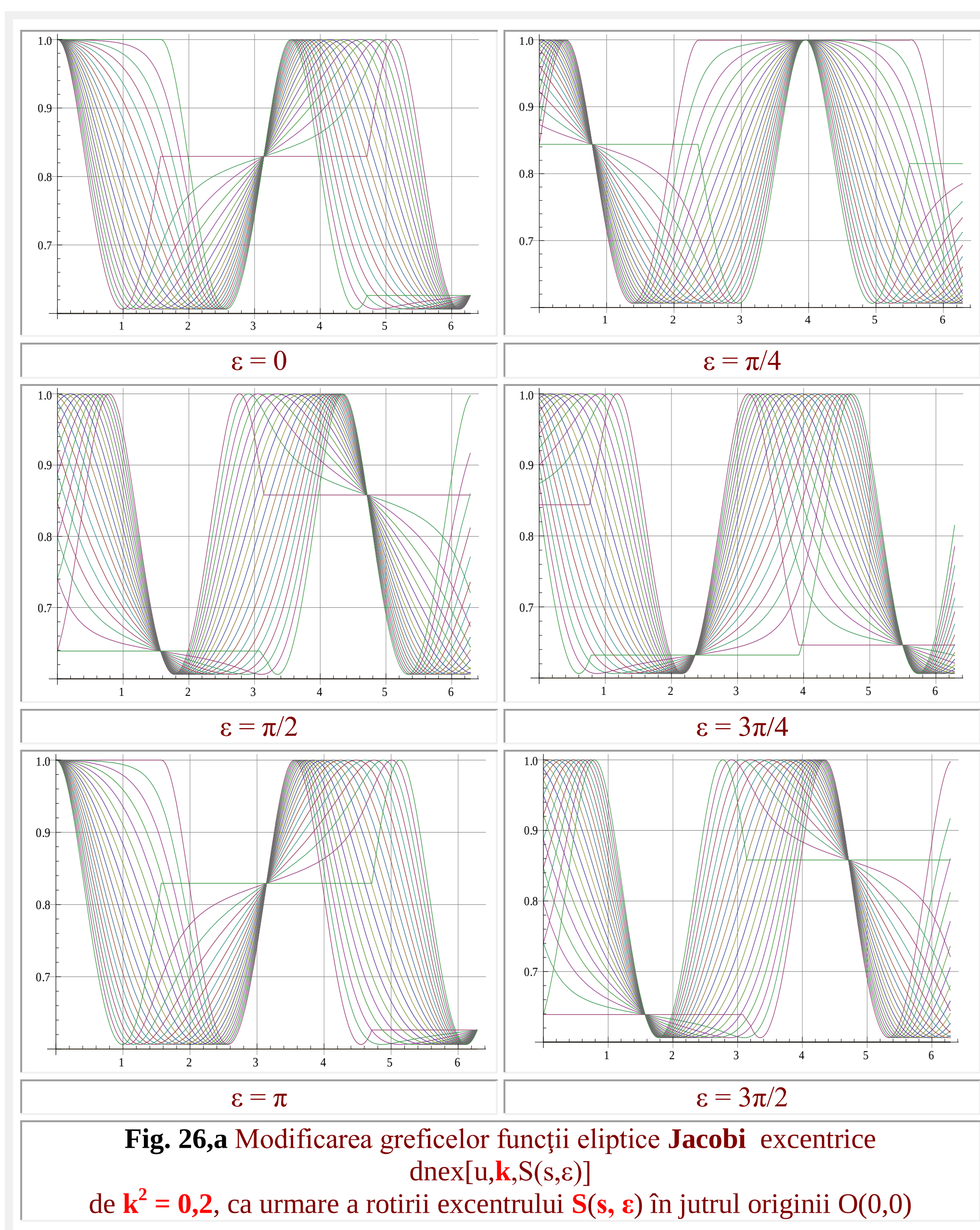


Fig. 26,a Modificarea greficelor funcţii eliptice **Jacobi** excentrice dnex[u,**k**,S(s,ε)]
de $\mathbf{k^2}$ **= 0,2**, ca urmare a rotirii excentrului **S(s, ε)** în jutrul originii O(0,0)

Se observă că, la fel ca şi în cazul **FSM-CE**, punctele atractoare şi repulsive îşi modifică poziţiile de la $u_a = 0$ şi $u_r = \pi$, pentru $\varepsilon = 0$, la $u_a' = 0 + \varepsilon$ şi, respectiv, la $u_r' = \pi + \varepsilon$, aşa cum se poate observa în **figura 12.26,a** cu m = 0,8 şi **12.26,b** cu **k = 0,2** în care **$s \in [-1; 1]$**.

12.6.4 FSM ELIPTICE Jacobi EXCENTRICE (FEJE) cnex(u,m), cnex(u,k) ŞI DE ARGUMENT MODIFICAT cnex [2uK(m)/π, m], cnex [2uK(k)/π, k]

Programele de matematică calculeaza valorile funcţiei cosinus eliptic **Jacobi, notată JacobiCN[u, m]** cu ajutorul dezvoltării în serie.

Seria cu 5 termeni este

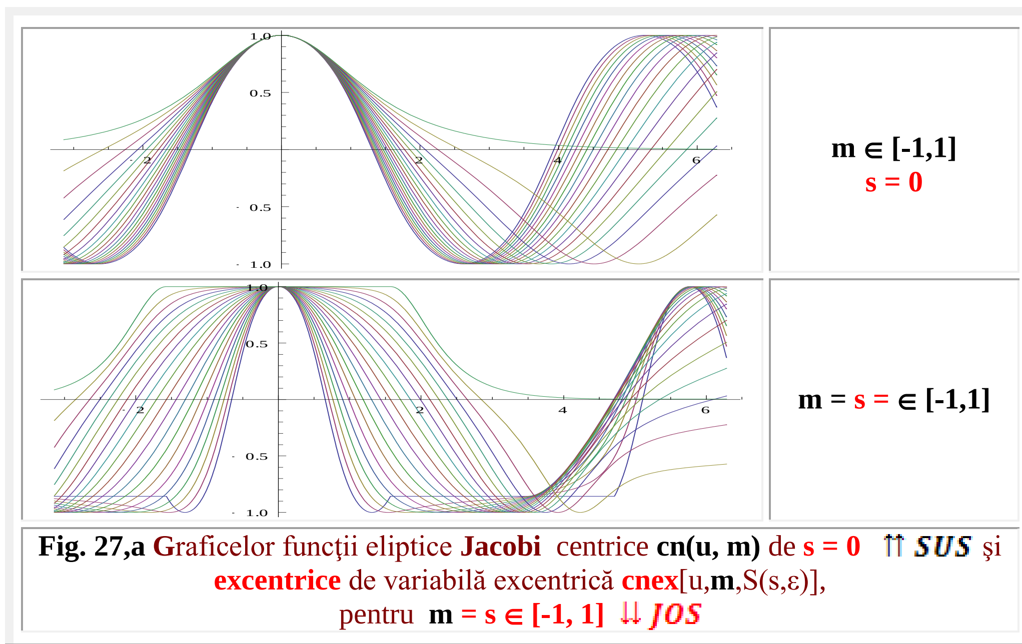


Fig. 27,a Graficelor funcţii eliptice **Jacobi** centrice **cn(u, m)** de **s = 0** ⇈ ***SUS*** şi **excentrice** de variabilă excentrică **cnex**[u,**m**,S(s,ε)], pentru **m = s ∈ [-1, 1]** ⇊ ***JOS***

(12.66) **JacobiCN[u, m]** $\cong 1 - u^2/2 + (1/24 + m/6)\, u^4 + 1/720\, (-1 - 44\, m - 16\, m^2)\, u^6 + ((1 + 408\, m + 912\, m^2 + 64\, m^3)\, u^8)/40320 + O[u]^{10}$

Dacă în (12.66) se înlocuieşte argumentul **u** cu funcţia amplitudine excentrică de variabilă excentrică din relaţia (12.59) se vor obţine funcţii eliptice **Jacobi** excentrice (**FEJE**) de variabilă excentrică (**Fig.12.28,a**), iar dacă se va înlocui cu funcţia similară de variabilă centrică

(12.67) $$\mathrm{Aex}[u, S(s, \varepsilon)] = u + \arcsin\frac{s.\sin(u-\varepsilon)}{Rex[u,\ S]} = u + \arcsin\frac{s.\sin(u-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(u-\varepsilon)}}\ ,$$

atunci se vor obţine **FEJE** de variabilă centrică (**Fig.12.28,b**)

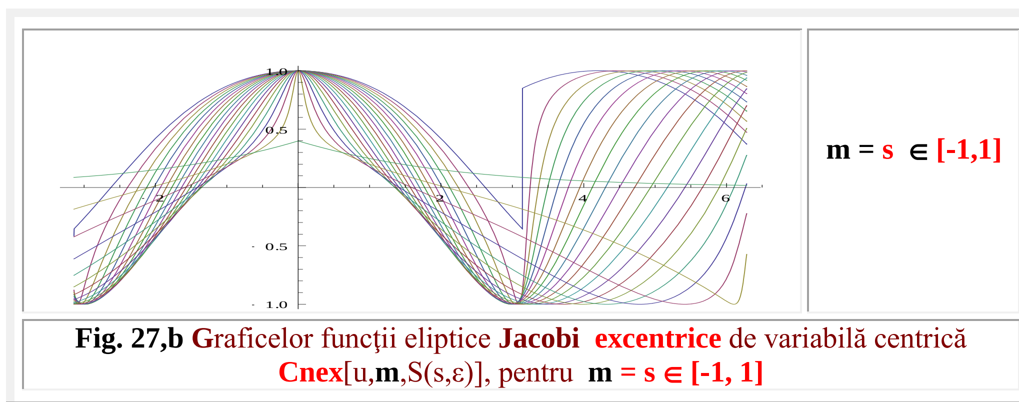


Fig. 27,b Graficelor funcţii eliptice **Jacobi** **excentrice** de variabilă centrică **Cnex**[u,**m**,S(s,ε)], pentru **m** = s ∈ [-1, 1]

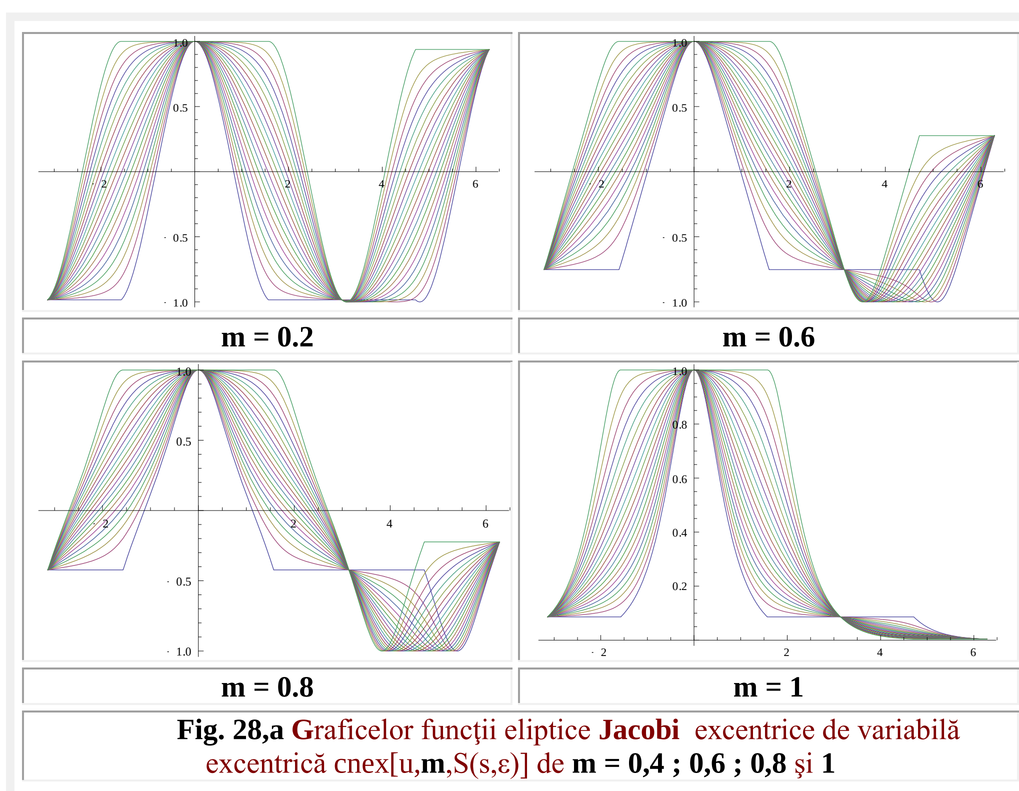


Fig. 28,a Graficelor funcţii eliptice **Jacobi** excentrice de variabilă excentrică cnex[u,**m**,S(s,ε)] de **m = 0,4 ; 0,6 ; 0,8** şi **1**

Graficele **FEJE** de argumet **k** (**Fig. 12.29,a** şi **12.29,b**) nu diferă prea mult de cele de argument **m** (**Fig.12.28,a** şi **12.28,b**); graficele funcţiilor de m = 0,04 fiind aceleaşi cu cele ale funcţilor de k = 0,2, deoarece **m** = k^2 şi **k** = $\sqrt{m}$.

FEJE de argument modificat, ca funcţii de **m** sunt prezentate în figura **12.30,a** ca funcţii de variabilă excentrică şi în figura **12.30,b** ca funcţii de variabilă centrică.

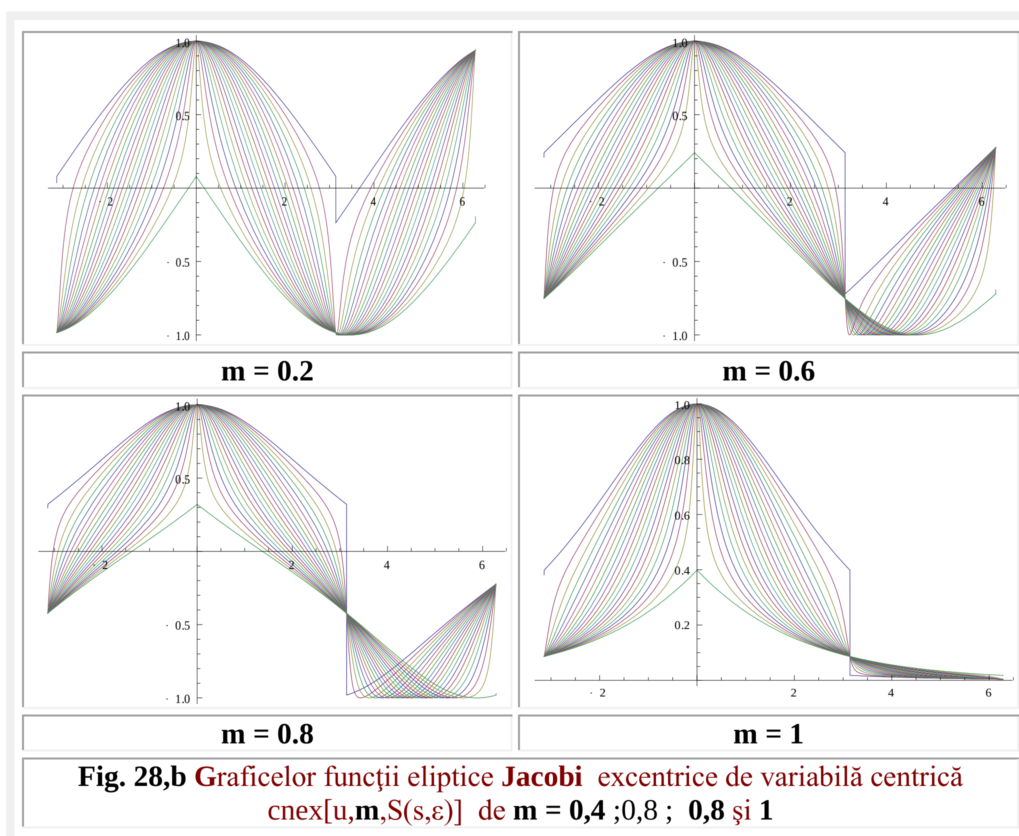
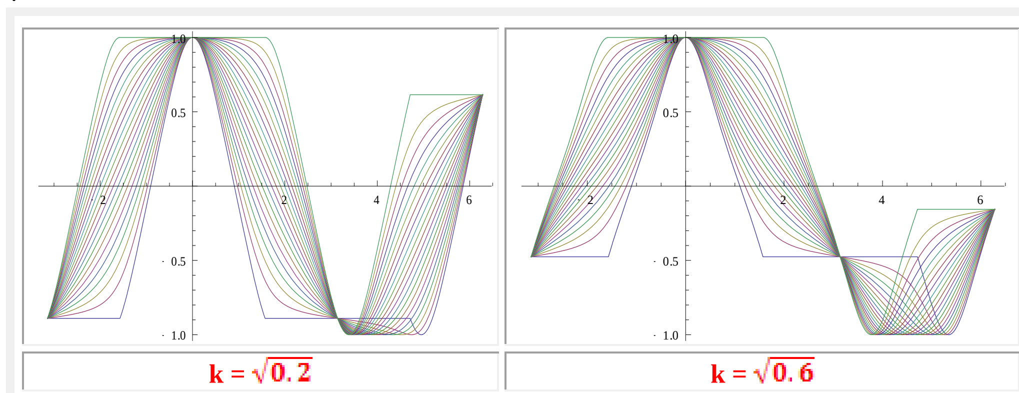


Fig. 28,b Graficelor funcţii eliptice **Jacobi** excentrice de variabilă centrică cnex[u,**m**,S(s,ε)] de **m = 0,4** ;0,8 ; **0,8** şi **1**



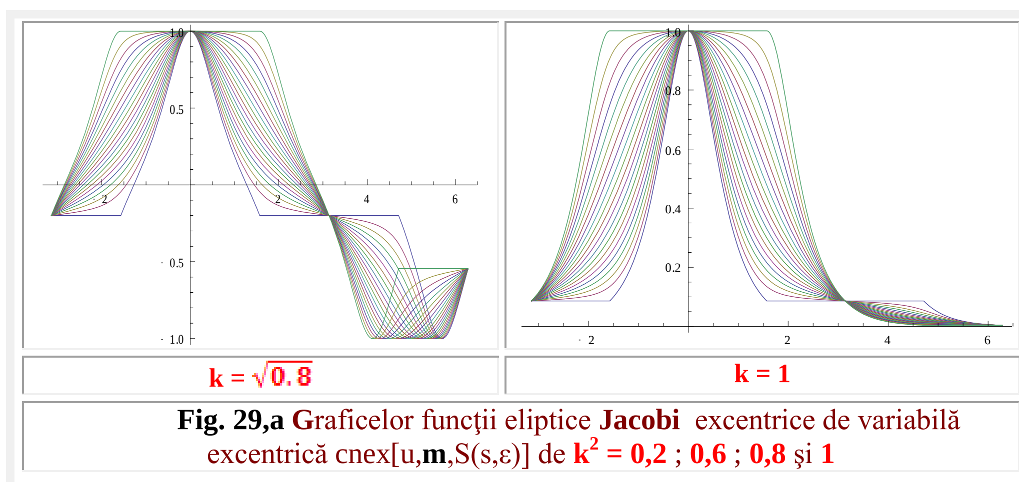


Fig. 29,a Graficelor funcţii eliptice **Jacobi** excentrice de variabilă excentrică cnex[u,**m**,S(s,ε)] de **k^2 = 0,2 ; 0,6 ; 0,8** şi **1**

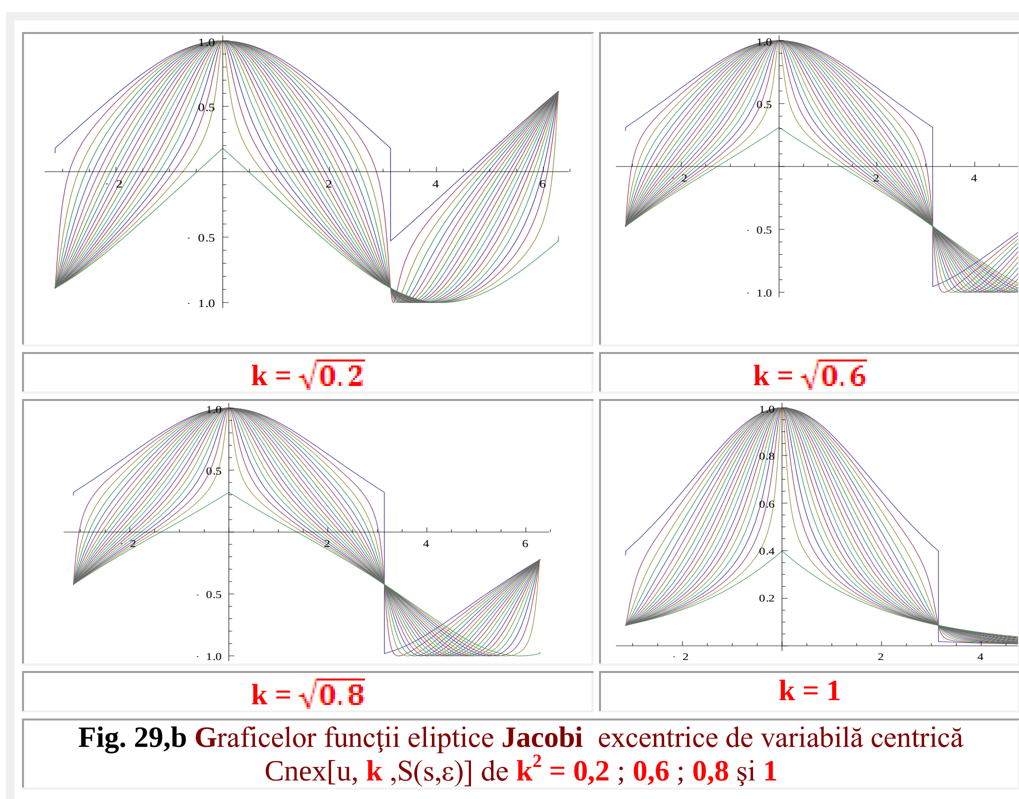


Fig. 29,b Graficelor funcţii eliptice **Jacobi** excentrice de variabilă centrică Cnex[u, **k** ,S(s,ε)] de **k^2 = 0,2 ; 0,6 ; 0,8** şi **1**

Aceleaşi funcţii dar de modul **k** sunt prezentate în **figurile 12.31,a** şi **12.31,b**.

Deoarece diferenţele dintre **FEJE** de modul m şi de parametru k sunt neglijabile, se vor prezenta doar **FEJE** de **k** în **figura 12.32**. **FEJE** de modul **m** sunt aproape identice pentru modulul cuprins în domeniul **m** = 0, 2..0,8.

Variaţia formelor graficelor ca funcţii de ε şi de modul **k = 0.9** sunt prezentate în **figura 12.33**. Se observă ca din acest punct de vedere **FEJE** sunt funcţii de perioadă π.

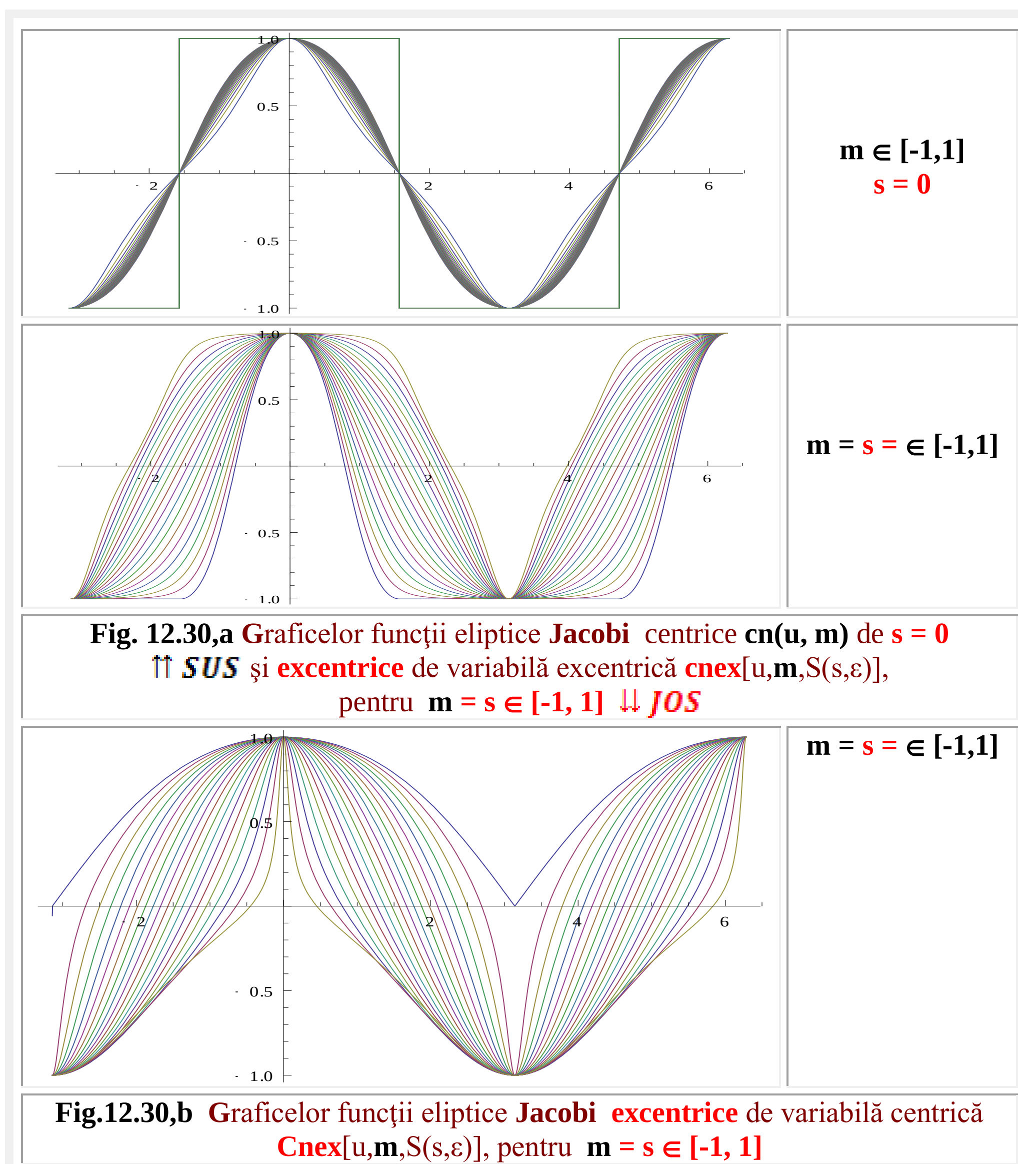


Fig. 12.30,a Graficelor funcţii eliptice **Jacobi** centrice **cn(u, m)** de **s = 0** ⇈ ***SUS*** şi **excentrice** de variabilă excentrică **cnex**[u,**m**,S(s,ε)], pentru **m = s ∈ [-1, 1]** ⇊ ***JOS***

Fig.12.30,b Graficelor funcţii eliptice **Jacobi** **excentrice** de variabilă centrică **Cnex**[u,**m**,S(s,ε)], pentru **m = s ∈ [-1, 1]**

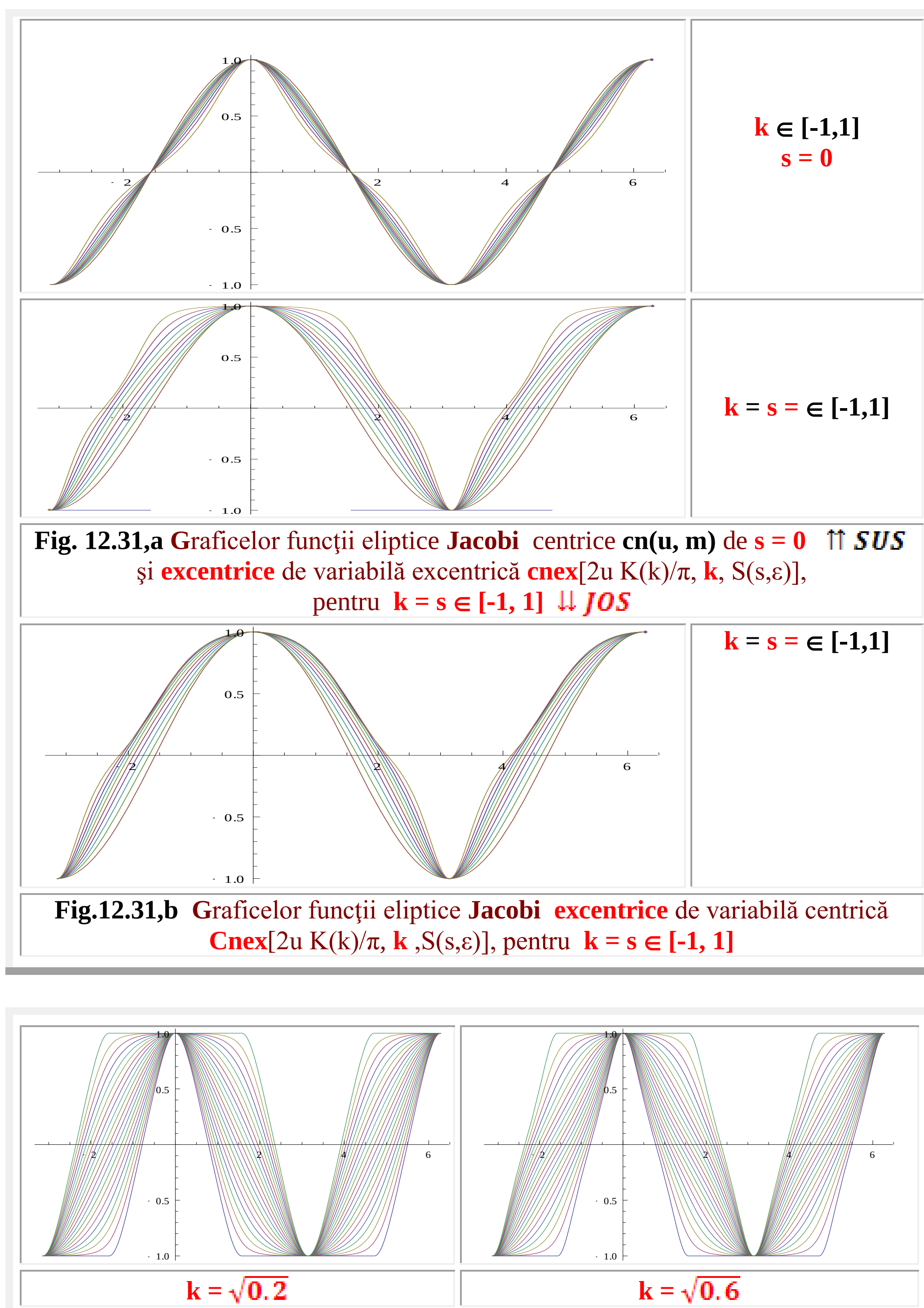


Fig. 12.31,a Graficelor funcţii eliptice **Jacobi** centrice **cn(u, m)** de **s = 0** ⇈ ***SUS***
şi **excentrice** de variabilă excentrică **cnex**[2u K(k)/π, **k**, S(s,ε)],
pentru **k = s ∈ [-1, 1]** ⇊ ***JOS***

Fig.12.31,b Graficelor funcţii eliptice **Jacobi** **excentrice** de variabilă centrică
Cnex[2u K(k)/π, **k** ,S(s,ε)], pentru **k = s ∈ [-1, 1]**

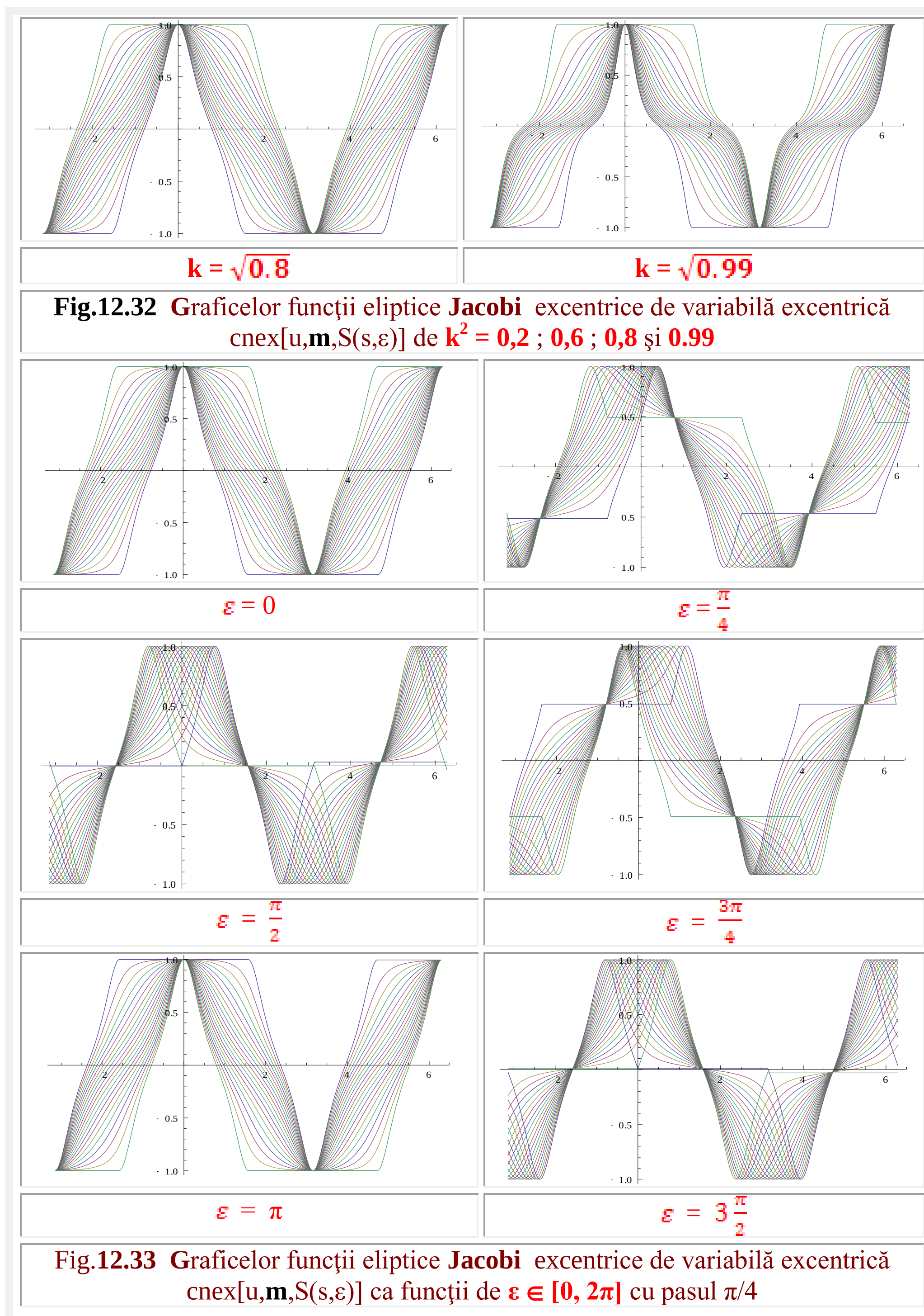


Fig.12.32 Graficelor funcţii eliptice **Jacobi** excentrice de variabilă excentrică cnex[u,**m**,S(s,ε)] de **k^2 = 0,2 ; 0,6 ; 0,8 şi 0.99**

Fig.**12.33** Graficelor funcţii eliptice **Jacobi** excentrice de variabilă excentrică cnex[u,**m**,S(s,ε)] ca funcţii de **ε ∈ [0, 2π]** cu pasul π/4

12.6.5 FSM ELIPTICE Jacobi EXCENTRICE (FEJE) snex(u,m), snex(u,k) ŞI DE ARGUMENT MODIFICAT snex [2uK(m)/π, m], snex [2uK(k)/π, k]

Funcţia eliptica **Jacobi** centrică **(FEJC)** este exprimată de dezvoltarea în serie de puteri

(12.68) $sn(u,m) = u + (-(1/6)-m/6)\, u^3 + 1/120\, (1 + 14\, m + m^2)\, u^5 + ((-1-135\, m -135\, m^2-m^3)\, u^7)/5040 + ((1+1228\, m + 5478\, m^2 + 1228\, m^3 + m^4)\, u^9)/362880 + O[u]^{11}$

Cele două tipuri de familii de funcţii eliptice **Jacobi** (**FEJC**) centrice sunt prezentate în paralel în **figura 12.34** ca funcţii de modulul m şi de parametrul k. Se observă că diferenţele sunt destul de mici ca formă a graficelor dar suficient de mari valoric.

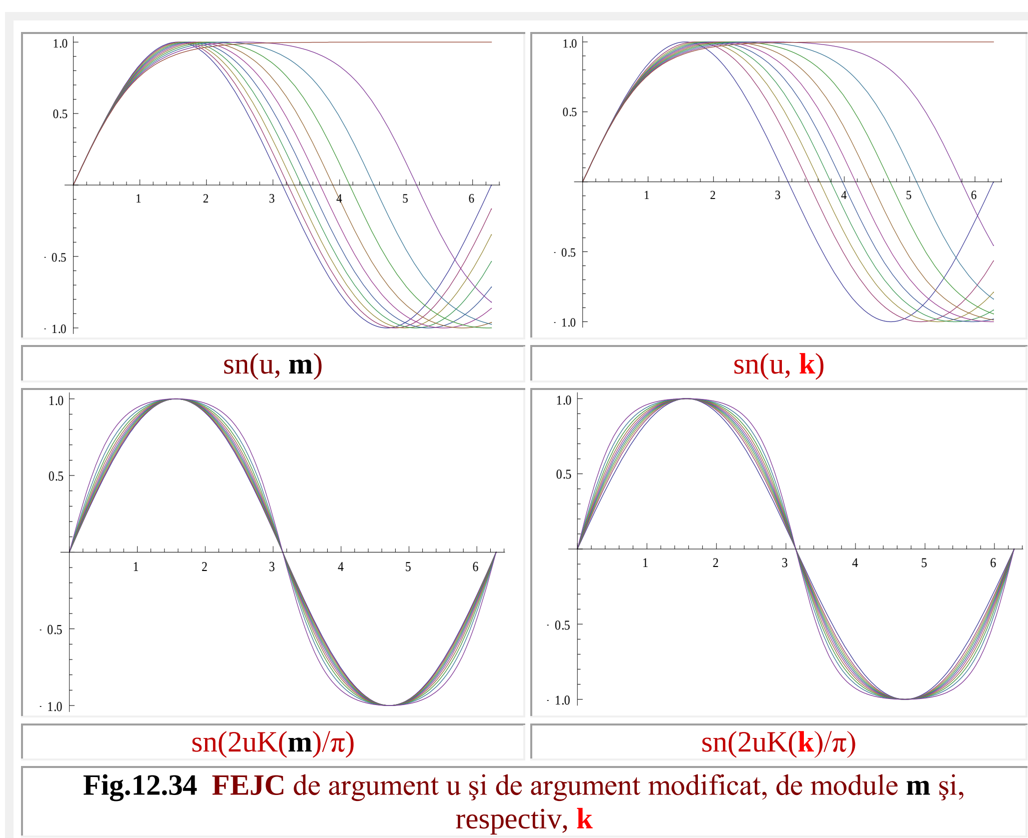


Fig.12.34 FEJC de argument u şi de argument modificat, de module **m** şi, respectiv, **k**

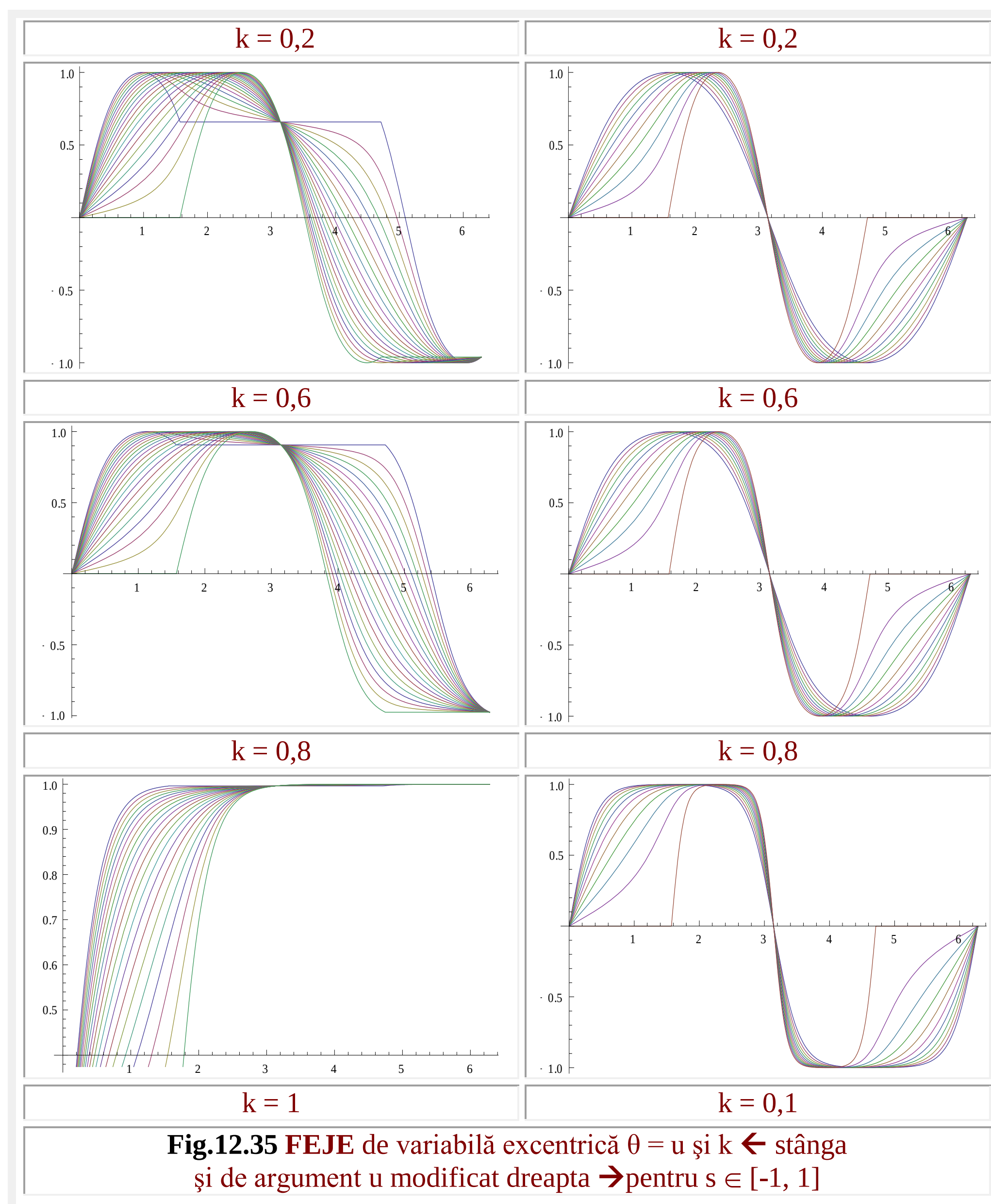


Fig.12.35 FEJE de variabilă excentrică θ = u şi k 🡐 stânga şi de argument u modificat dreapta 🡒pentru s ∈ [-1, 1]

Procedând ca şi în cazurile anteriore şi înlocuind argumentul u cu funcţia aex[θ = u, S(s, ε)] se va trece din centric în excentric şi se vor obţine funcţii eliptice **Jacobi** excentrice de variabilă excentrică (**FEJE**) – **Fig.12.35 -** , iar prin înlocuirea cu **FSM-CE** Aex(α ≡ u, S(s, ε)] se vor obţine **FSM** eliptice **Jacobi** excentrice (**FEJE**) de variabilă centrică α ≡ u (Fig. **12.36** stânga🡐).

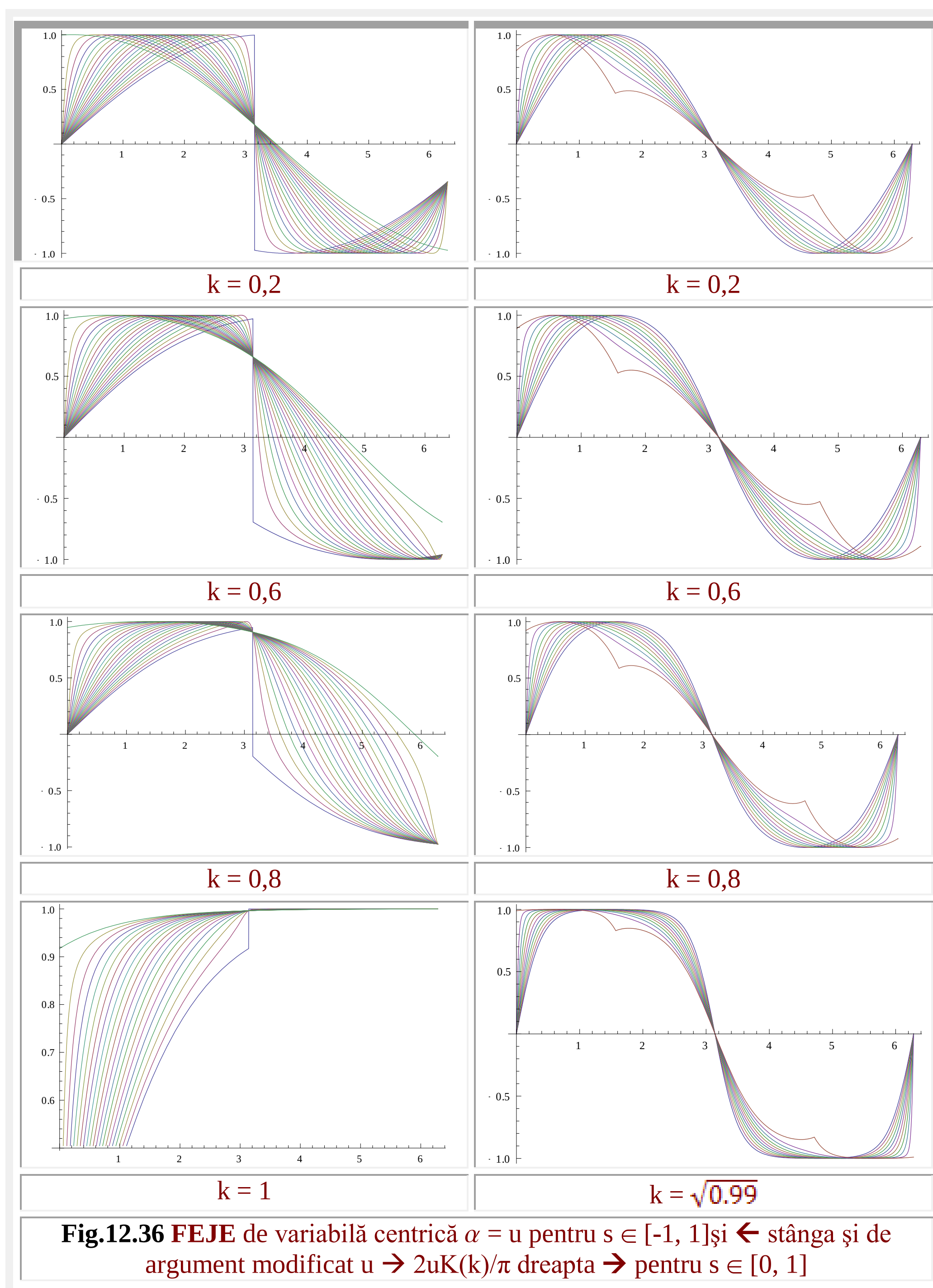


Fig.12.36 FEJE de variabilă centrică α = u pentru s ∈ [-1, 1]şi ← stânga şi de argument modificat u → 2uK(k)/π dreapta → pentru s ∈ [0, 1]

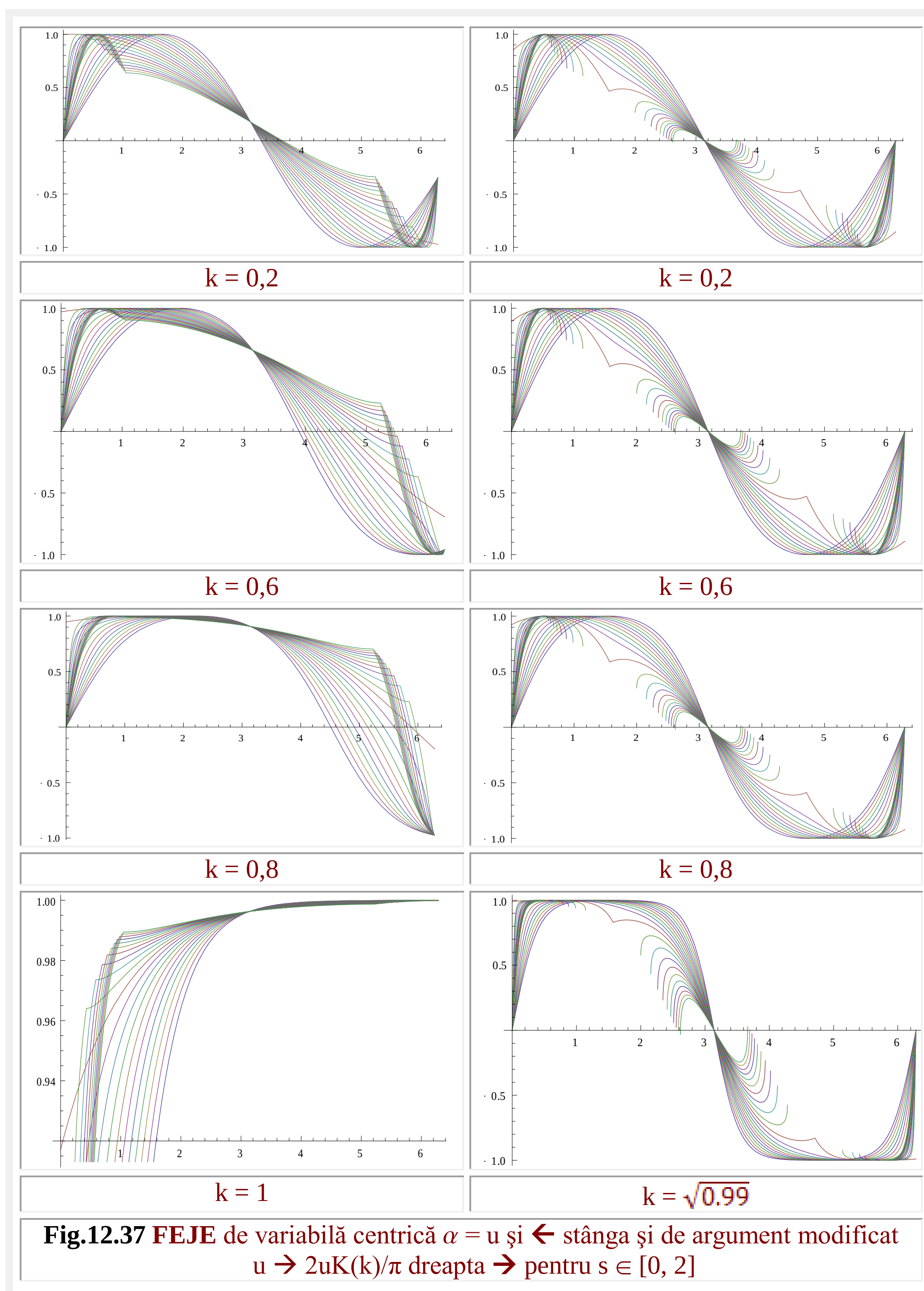
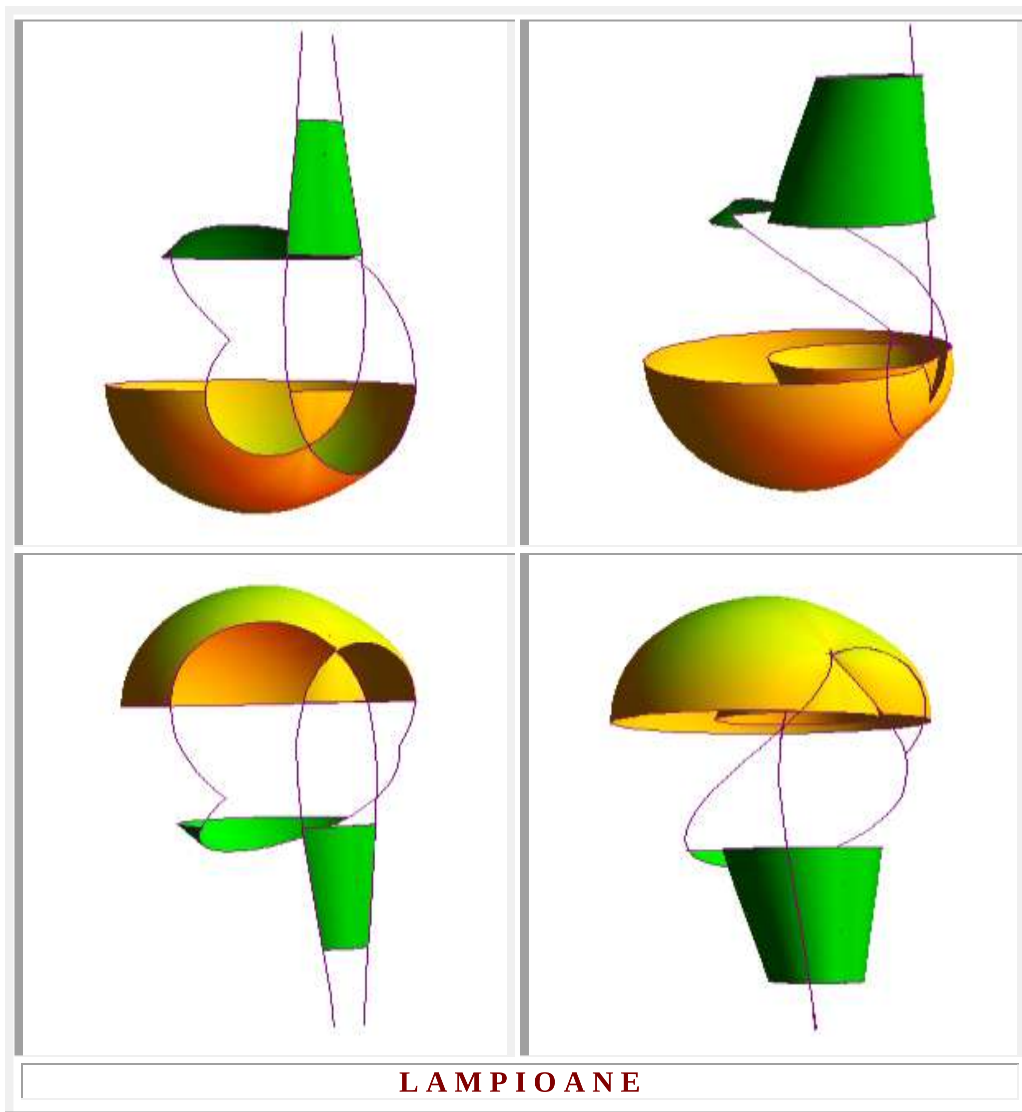


Fig.12.37 FEJE de variabilă centrică α = u şi ← stânga şi de argument modificat u → 2uK(k)/π dreapta → pentru s ∈ [0, 2]

Prin modificarea argumentului u la 2uK(k)/π se obţin **FEJ** de argument modificat (**Fig. 12.36** dreapta →).

Se ştie că **FSM-CE** de variabila centrică sunt continue şi pentru $s^2 > 1$ ceea ce nu se mai întâmlă şi pentru toate tipurile de **FEJE**, aşa cum se poate observa în **figura 12.37.** **FEJE** de variabilă u (stânga figurii) sunt continue, iar cele de variabila modificată (dreapta) sunt discontinue pentru $s^2 > 1$.



L A M P I O A N E

Motto “**Intuiţia este o ştiinta exactă** “
Autor necunoscut exact

Capitolul 13

F U N C Ţ I I C O M P U S E A U T O I N D U S E (F A I) Ş I F U N C Ţ I I I N D U S E (F I)

13.1 DESPRE DIVERSE FUNCŢII MATEMATICE VECHI ŞI NOI

Unele dintre aceste funcţii, in special cele induse şi cele autoinduse, sunt rodul aplicării principiul lui **Fred Menger** “ Dacă torturezi datele suficient, acestea îţi vor mărturisi aproape totul”.

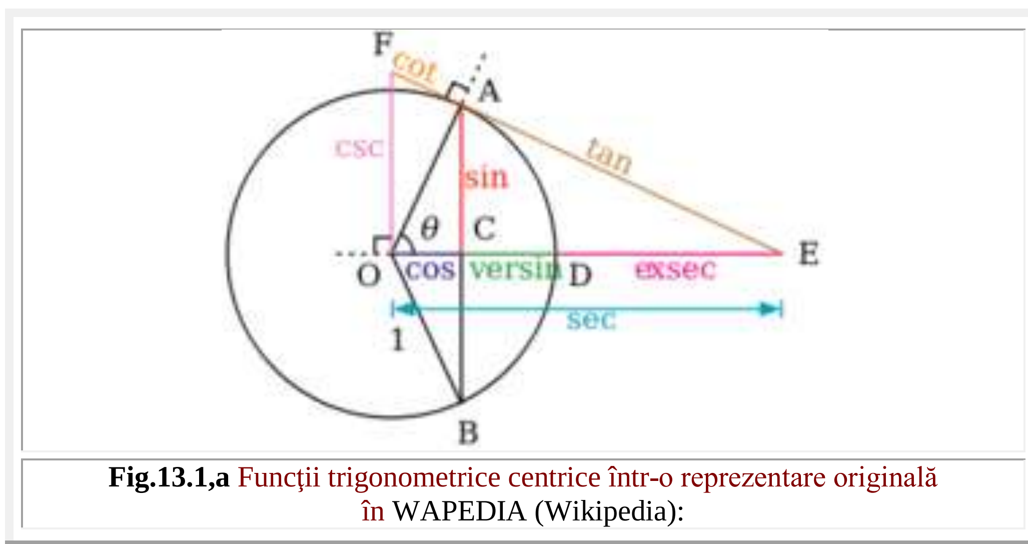


Fig.13.1,a Funcţii trigonometrice centrice într-o reprezentare originală în WAPEDIA (Wikipedia):

Căutând posibilitatea deformării, într-un anumit fel, a unor curbe, date de funcţii trigonometrice centrice şi excentrice, diversele lor expresii au fost torturate sau “întoarse pe toate feţele/părţile” până ce au fost descoperite noile funcţii compuse sau funcţii de funcţii, sau numai de funcţie, denumite, provizoriu, **funcţii matematice autoinduse (FMAI** , pe scurt, **FAI)** dacă expresiile lor conţin una şi aceeaşi funcţie din aceeaşi clasă, repetată de n ori, de exemplu ; sin[sin[sin[sin[…..[sin[x]…]]]] (**Fig. 13.2,a**; **13.2,b**; **13.3**, **13.4**, **13.5**; **13.6** ş.a.) şi **funcţii matematice induse (FMI)** pe scurt, **(FI)**, dacă expresiile lor conţin funcţii de diverse clase şi din aceeaşi clasa de diverse tipuri, ca de exemplu cos[sin[cos[sin[0,5cos[0,5sin[….sin[x]….]]]].

Pentru a le definii, e necesar să se reamintească definiţiile funcţiei, în general şi, în special, a celor trigonometrice. Pentru a fi mai credibili, cităm din WAPEDIA (Wikipedia):

"În matematică, o **funcţie** este o *relaţie* care asociază fiecărui element dintr-o mulţime (**domeniul**) un singur element dintr-o altă (**posibil din aceeaşi**) mulţime (**codomeniul**). Noţiunea de funcţie este fundamentală în aproape toate ramurile matematicii şi în toate ştiinţele exacte.

În matematică, prin **funcţii trigonometrice** se înţeleg nişte funcţii ale unui unghi oarecare. Ele se folosesc la studierea triunghiurilor şi reprezentarea unor fenomene periodice, printre multe altele. Ele sunt definite ca raporturi între anumite laturi ale triunghiului dreptunghic în funcţie de un unghi al acestuia, şi pot fi, echivalent, definite ca lungimi ale diferitelor segmente de dreaptă construite în jurul unui cerc unitate. Unele definiţii mai moderne le exprimă sub formă de serii infinite sau ca soluţii ale unor ecuaţii diferenţiale, permiţând extinderea lor la valori pozitive şi negative şi chiar la numere complexe.

Studiul funcţiilor trigonometrice datează din vremurile babiloniene, şi o muncă considerabilă a fost depusă în domeniul lor de către matematicienii greci şi persani, în antichitate.

În utilizarea modernă, există şase funcţii trigonometrice de bază, tabelate mai jos împreună cu ecuaţiile care le leagă una de alta, la care s-au mai adăugat noile funcţii ale lui **Octavian Voinoiu** publicate în a sa "**MATEMATICĂ SIGNADFORASICĂ**". Mai ales în cazul ultimelor patru, aceste relaţii sunt adesea considerate *definiţii* ale acestor funcţii, dar pot fi definite la fel de bine şi geometric sau prin alte mijloace, definiţii din care se pot deduce aceste relaţii (**Fig.1**).

Câteva alte funcţii au fost utilizate de-a lungul istoriei (şi au apărut în unele tabele vechi), dar în zilele noastre sunt rar folosite, astfel de exemple fiind funcţia versinus = 1 − cos θ şi funcţia exsecantă = sec θ − 1."

O definiţie mai general dată funcţiei afirmă că "Prin funcţie (aplicaţie) f definită pe mulţimea A cu valori în mulţimea B se înţelege orice procedeu (lege sau convenţie) prin care oricărui element x din A i se asociază un unic element y notat cu f(x) din B. " A este domeniul şi B este codomeniul.

Pe website-ul amintit, în **figura 13.1,a**, unele funcţii trigonometrice centrice sunt prezentate grafic intr-un mod original, dar corect. Astfel, tangenta nu este prezentată clasic, ca o tangentă în D la cercul unitate, ci în punctul A. Astfel prezentată, ea se poate exprima ca o **FSM-CE** radial excentric de variabila centrică **Rex$\boldsymbol{\theta}$**, notată cu θ în **figura 13.1,a**, sau **rex$\boldsymbol{\alpha}$** de variabila excentrică α din excentrul E, constituind o abordare nouă, din care rezultă o serie de observaţii.

Aici, variabilele excentrice şi centrice sunt notate exact invers decât notaţiile practicate în această lucrare. Dar, în definitiv, unghiurile pot fi notate oricum, notaţiile nu influenţează rezultatele.

Să încercăm să reprezentăm tangenta prin funcţiile rexα = Rexθ = EA, în acest caz, având ambele determinări, de indice 1 şi 2, egale şi, pentru s > 1, de acelaşi semn + când dreapta d este tangentă cu semidreapta pozitiva d^+ şi de semn – când tangenta este semidreapta negativa d^-, aşa cum rezulta şi din **mecanismul T** din **figura 13.1,b**.

Se observă că excentricitatea numerica **s** este supraunitară (s > 1) şi este

(13.1) s = $|OE|$= secθ = $\frac{1}{cos\theta}$ > 1,

iar expresia **FSM-CE** rexα de **variabilă excentrică** este

(13.2) rexα = – s. cosα ± $\sqrt{1 - s^2 . sin^2 \propto}$, în care

(13.3) $\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$,

Expresia cunoscută a lui Rexθ, de **variabilă centrică**, este

(13.4) Rexθ = ± $\sqrt{1 + s^2 - 2s.cos\theta}$

Înlocuind excentricitatea (13.1) în (13.2) cu valoarea lui (13.3) rezultă

(13.5) rexα = $-\frac{1}{cos\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \pm \sqrt{1 - \frac{1}{cos^2\theta}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{sin\theta}{cos\theta} \pm \sqrt{1 - \frac{cos^2\theta}{cos^2\theta}} =$ tanθ, ceea ce era de demonstrat (**QED**).

Tabelul 13.1 Tabelul **funcţiilor trigonometrice centrice** curente, completate cu câteva funcţiile trigonometrice ale lui **O. Voinoiu**

Funcţia	**Abrevierea**	**Relaţii**
Cosinus	**cos**	$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$
Sinus	**sin**	$\pm\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$
Tangentă	tg / **tan**	$\pm tana = \pm\frac{sina}{cosa} = \frac{\pm 1}{cota} == \cot\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$
Tangenta Voinoiu	tgv/**tanv**	tanv$\alpha = \frac{sin\propto}{Abs[cos\propto]}$ = cotv$\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$
Cotangentă	ctg / **cot**	$\pm cota = \pm\frac{cosa}{sina} = \frac{\pm 1}{tana} = \tan\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$
Cotangenta Voinoiu	ctg / **cotv**	± cotv$\alpha = \frac{cos\propto}{Abs[sin\propto]}$ = tanv$\alpha\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$
Secantă	**sec**	$\pm seca = \frac{\pm 1}{cosa}$ = csc$\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right)$
Cosecantă	cosec / **csc**	$csc \propto = \frac{\pm 1}{sin \propto} = sec\left(\frac{\pi}{2} \pm \propto\right)$

Înlocuind excentricitatea (13.1) în (13.4) rezultă la fel

(13.6) Rexθ = $\pm\sqrt{1 + \left(\frac{1}{cos\theta}\right)^2 - 2} = \pm\sqrt{\frac{(1 - cos^2\theta)}{cos^2\theta}} = \pm\sqrt{\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}} = \pm$ tanθ .

Concluzia, care se desprinde de aici, este că valorile şi expresiile **FSM-CE** în punctele $W_{i,f}$, de inceput şi de sfarşit al domeniului de existenţă a **FSM-CE**, în cazul s > 1, revenind la notaţiile consacrate: $\boldsymbol{\alpha}$ variabila **centrică** şi $\boldsymbol{\theta}$ cea **excentrică**, sunt

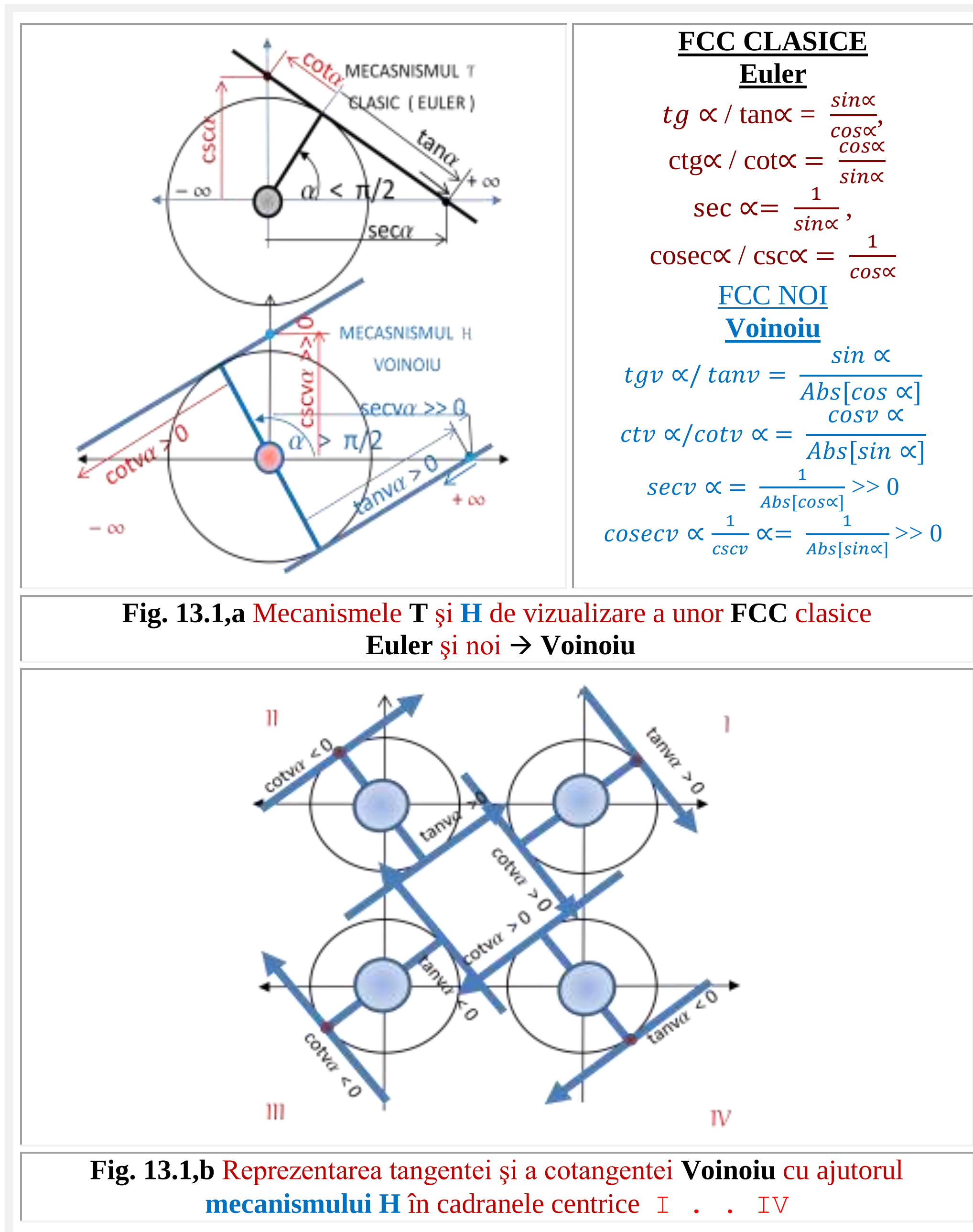


Fig. 13.1,a Mecanismele **T** şi **H** de vizualizare a unor **FCC** clasice **Euler** şi noi → **Voinoiu**

Fig. 13.1,b Reprezentarea tangentei şi a cotangentei **Voinoiu** cu ajutorul **mecanismului H** în cadranele centrice I . . IV

(13.7)
$$\begin{cases}\begin{cases} rex_1\theta = rex_2\theta = Rex_1\alpha = Rex_2\alpha = tan\alpha \\ cex_1\theta = cex_2\theta = Cex\alpha_1 = Cex\alpha_2 = cos\alpha \end{cases} \\ \begin{cases} sex_1\theta = sex_2\theta = Sex\alpha_1 = Sex\alpha_2 = \pm sin\alpha \\ dex_1\theta = dex_2\theta = Dex\alpha_1 = Dex\alpha_2 = 0 \end{cases}\end{cases}$$

Semnul plus la sinus fiind pentru W_i şi minus pentru W_f, dacă excentrul S(s > 1(şi pozitiv), ε = 0).

Vom denumi schema de exprimare vizuală a **FCC** clasice tanα, cotα, secα, cscα ca mecanismul în **T** sau, pe scurt, mecanismu **T Euler**, prezentat în **figura 13.1,a** şi **13.1,b** – sus.

Mecanismul de vizualizare a **FCC Voinoiu**, prezentat în partea de jos a **figurii 13.1,a** este denumit ca mecanism în **H Voinoiu**.

În conformitete cu **matematica signadforasică** a lui **O. Voinoiu**, semnul unei fracţii este dat **exclusiv** de semnul numărătorului.

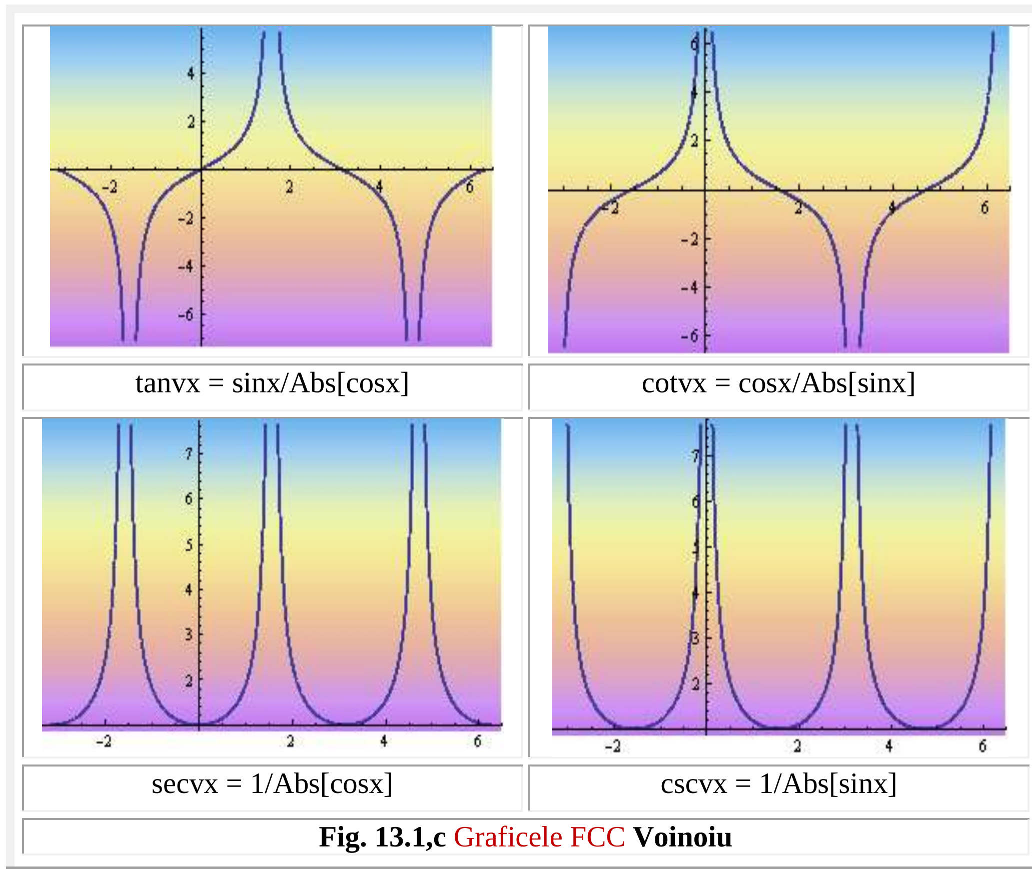


Fig. 13.1,c Graficele FCC **Voinoiu**

De aceea, **FCC** compuse au expresiile (13.8) din care rezultă că secanta **Voinoiu** → secvα şi cosecanta **Voinoiu** → cscvα sunt strict pozitive (notate cu **>> 0**

în **figura 13.1,b**) şi se obţin prin intersectarea mecanismului **H numai** cu semiaxele x şi, respectiv, y > 0. Expresiile de definiţie ale **FCC Voinoiu** sunt

(13.8) $$\begin{cases} \begin{cases} \frac{\sin\propto}{Abs[\cos\propto]} = tgv \propto / \, tanv \propto \rightarrow \text{numită tangenta } \textbf{Voinoiu} \\ \frac{\cos\propto}{Abs[\sin\propto]} = ctgv \propto / cotv \propto \rightarrow \quad \textit{numită cotangenta } \textbf{Voinoiu} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{Abs[\cos\propto]} = secv \propto / secv \propto \gg 0 \rightarrow \textit{numită secantă } \textbf{Voinoiu} \\ \frac{1}{Abs[\sin\propto]} = cosecv \propto / cscv \propto \gg 0 \rightarrow \textit{numită cosecantă } \textbf{Voinoiu} \end{cases} \end{cases}$$

Funcţiile tangenta **Voinoiu** tavα şi cotangenta **Voinoiu** cotvα rezultă prin intersectarea succesivă, cu cele două braţe paralele ale lui H, a semiaxei x > 0 cu una dintre semidreptele pozitive a lui **H**, pentru tanvα şi cu semidreapta negativă a lui H a axei x < 0 pentru cotvα, aşa cum este ilustrat în **figura 13.1,a**, pentru cazul π < α > π/2.

Tangenta şi cotangenta **Voinoiu** utilizeaza ambele semiaxe x şi y cât şi ambele semidrepte – pozitive şi negative - ale celor două drepte ale lui H tangente la C(O,1), pentru care originile dreptelor sunt punctele de tangenţă T(1, α) şi T'(1, α+π).

De asemenea, intersecţia tangentelor se face atât cu semiaxele pozitive x, y > 0 cât şi cu cele negative x, y < 0 (**Fig.13.1,b**).

Rezultă că tanvα > 0 unde şi sinα > 0, adică în domeniul / intervalul $\alpha \in$ [0, π] în care creşe de la zero la + ∞ şi apoi scade din nou la zero şi negativă în intervalul în care şi sinα < 0, adică pentru $\alpha \in$ [π, 2π].

Ca urmare, tangenta **Voinoiu**, de exemplu, este + ∞ la α = π/2 şi – ∞ la α = 3π/2 şi nu este, în acelaş timp, pentru α = π/2 şi α = 3π/2, atât la + ∞ cât şi la – ∞ ca în cazul tangentei, ca şi dealtfel, a tuturor funcţiilor clasice **Euler**.

La mecanismul **T**, punctul curent **M(1,α),** de pe cercul unitate împarte tangenta la **C** a mecanismului **T** în două semidrepte, una pozitivă şi cealaltă negativă, dar, aşa cum se poate observa în **figura 13.1,b**, cotα > 0, pentru un α < π/2, deşi pozitivă apare ca negativă pe semidreapta tangentă negativă!, apoi, în intervalul $\alpha \in$ [π/2, π], în care este negativă, ea este orientată în sensul + al semidreptei pozitive, deci pare că ar fi pozitivă !. Ceea ce nu se întâmplă şi cu **FCC** tanα care este corect reprezentată pe cele două semidreapte ale tangentei: + ∞ la π/2 – Δε şi –∞ la π/2 + Δε .

Aşcum se poate observa în **figura 13.1,a**, în timp ce o tangenta genereaza **FCC** nouă tanvα, cealaltă tangentă generează funcţia cotvα, generările fiind efectuate simultan cu acelaşi tip de semidreaptă, în **figurile 13.1,a** şi **13.1,b**, pentru $\alpha \in$ [π/2, π], tanvα > 0 şi cotvα < 0.

Prin creşterea lui α şi rotirea lui **H**, în sens trigonometric pozitiv (sisnistrorum, levogin), din figură se vede că tanvα > 0 scade de la + ∞ la 0 şi cotvα < 0 scade de la 0 la – ∞.

Pentru generarea **FCC noi,** secanta **Voinoiu** secvα şi cosecanta **Voinoiu** cscvα, se utilizează ambele semidrepte pozitive ale celor două tangente ale lui **H**, dar intersecţia lor se face
doar cu semiaxele pozitive x, y > 0, deoarece aceste funcţii circulare / trigonometrice centrice **Voinoiu** sunt **strict pozitive** (secvα >> 0, cscvα >> 0).

Graficele **FCC Voinoiu** sunt prezentate în **figura 13,1,c**.

13.2 DERIVATELE FUNCŢIILOR CIRCULARE CENTRICE VOINOIU

Pentru a putea deriva aceste **FCC**, este necesar, în prealabil, să se determine derivata funcţiei compuse Abs[f(x)].

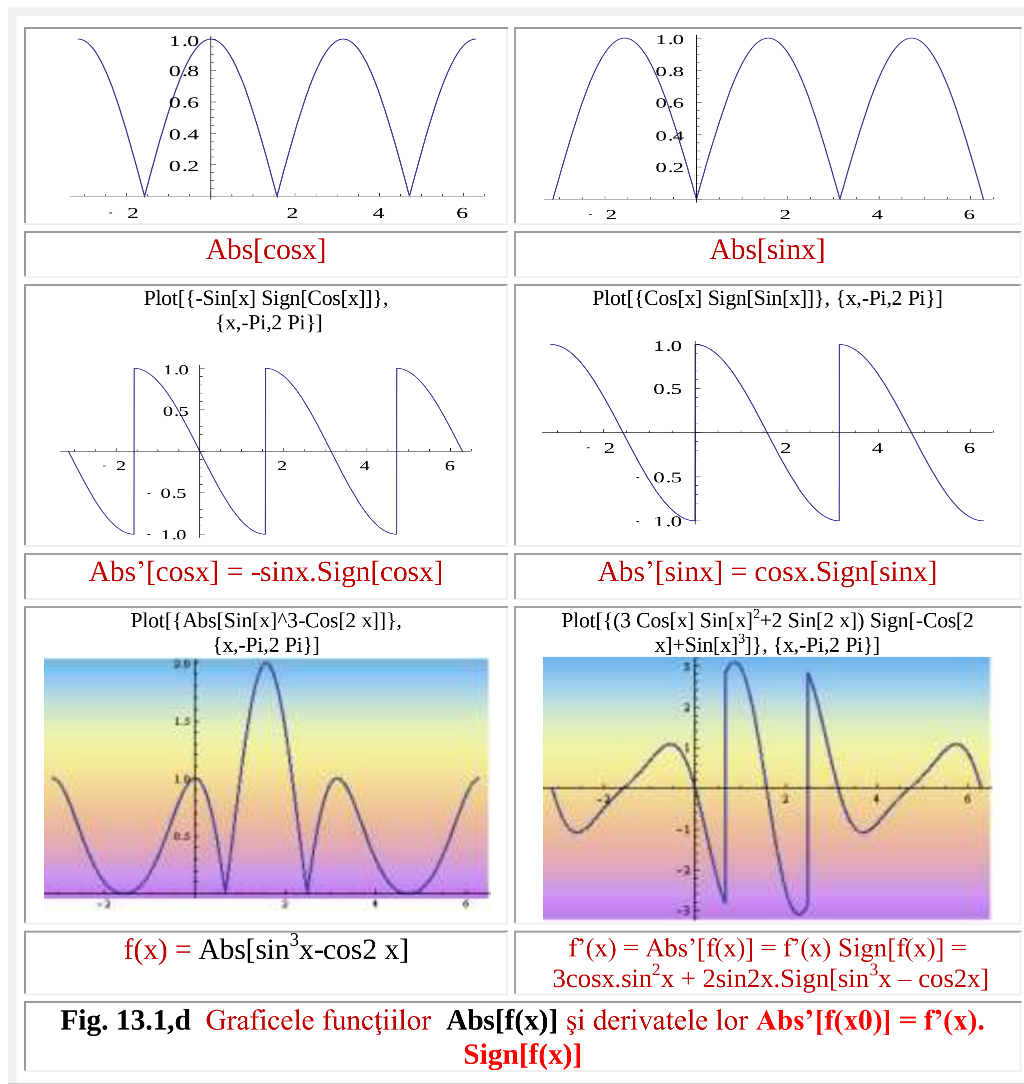


Fig. 13.1,d Graficele funcţiilor **Abs[f(x)]** şi derivatele lor **Abs'[f(x0)] = f'(x). Sign[f(x)]**

Programul de matematica al lui **Stephan Wolfram** dă, pentro o astfel de derivată, expresia

(13.9) D[Abs[f(x),x]= $\frac{d}{dx}(Abs[f(x)]) = \frac{df(x)}{dx}\, Abs'[f(x)] = f'(x).Abs'[f(x)]$

dar nu spune cine este Abs’[f(x)] şi nici nu printează o astfel de expresie.

De aceea, vom încerca să aflăm care este derivata **Abs’** a lui **Abs,** prin metoda **Menger** a “torturării” expresiilor de acest gen, urmând ca, în final, să se tragă concluziile de rigoare**.**

În acest scop, se prezintă, în **figura 13.1,d** graficele câtorva funcţii, şi anume: Abs[cosx], Abs[sinx] şi Abs[$\sin^3$x – cos2x], x ∈[-π, 2π], prcum şi derivatele lor.

Urmărind derivatele acestor funcţii, adică tangentele la graficele acestor funcţii, ca semn şi ca valoare s-a putut trage concluzia cu privire la derivata acestei funcţii bizare **Abs** [f(x)], derivată pe care autorul nu a gasit-o dată în literatura de specialitate / matematică, nefigurând în niciun memorator de derivate matematice, deşi derivata n-a fost greu / complicat de găsit.

Din aceste exemple se poate trage concluzia că derivata lui **Abs**[f(x)] are expresia:

(13.10)

$$\frac{d}{dx}Abs[f(x)] = \frac{df(x)}{dx}\,Sign[f(x)]$$

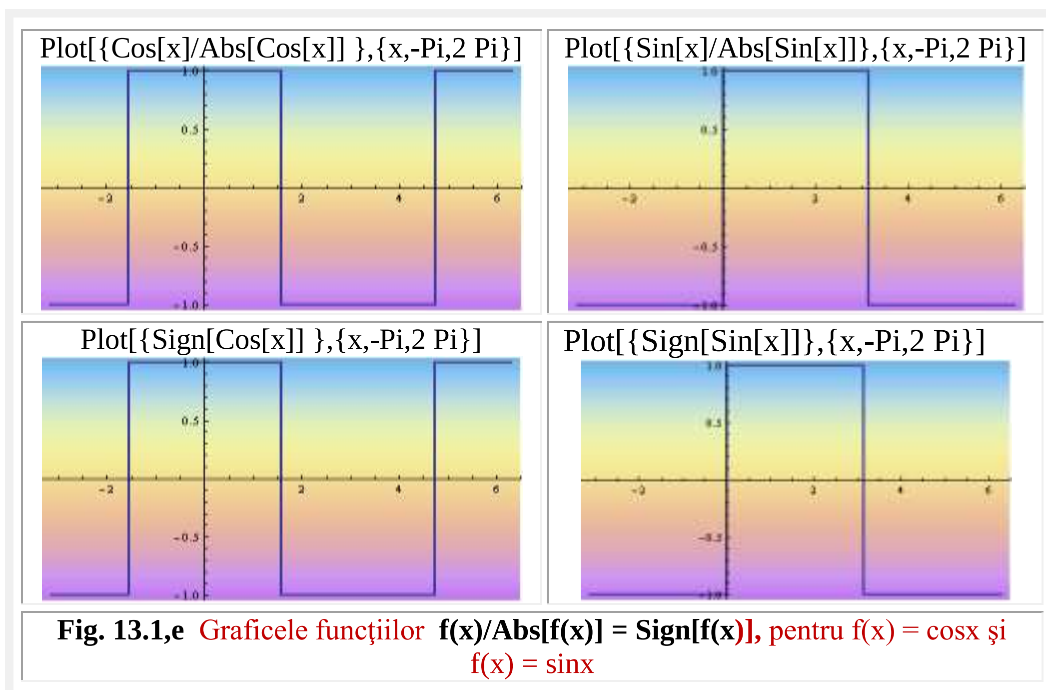


Fig. 13.1,e Graficele funcţiilor **f(x)/Abs[f(x)] = Sign[f(x)],** pentru f(x) = cosx şi f(x) = sinx

Acum, derivatele FCC **Voinoiu** nu mai ridică niciun fel de probleme. Ele sunt

$$(13.11)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dx}(tanvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{sinx}{Abs[cosx]}\right)=\frac{cosx.Abs[cosx]+sin^2x.Sign[cosx]}{(Abs[cosx])^2} \\ \frac{d}{dx}(cotvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{cosx}{Abs[sinx]}\right)=\frac{-sinx.Abs[sinx]-cos^2x.Sign[sinx]}{(Abs[sinx])^2} \\ \frac{d}{dx}(secvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Abs[cosx]}\right)=\frac{sinx.Sign[cosx]}{(Abs[cosx])^2} \\ \frac{d}{dx}(cscvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Abs[sinx]}\right)=-\frac{cosx.Sign[sinx]}{(Abs[sinx])^2} \end{cases}$$

şi pot fi scrise si sub formele (13.12).

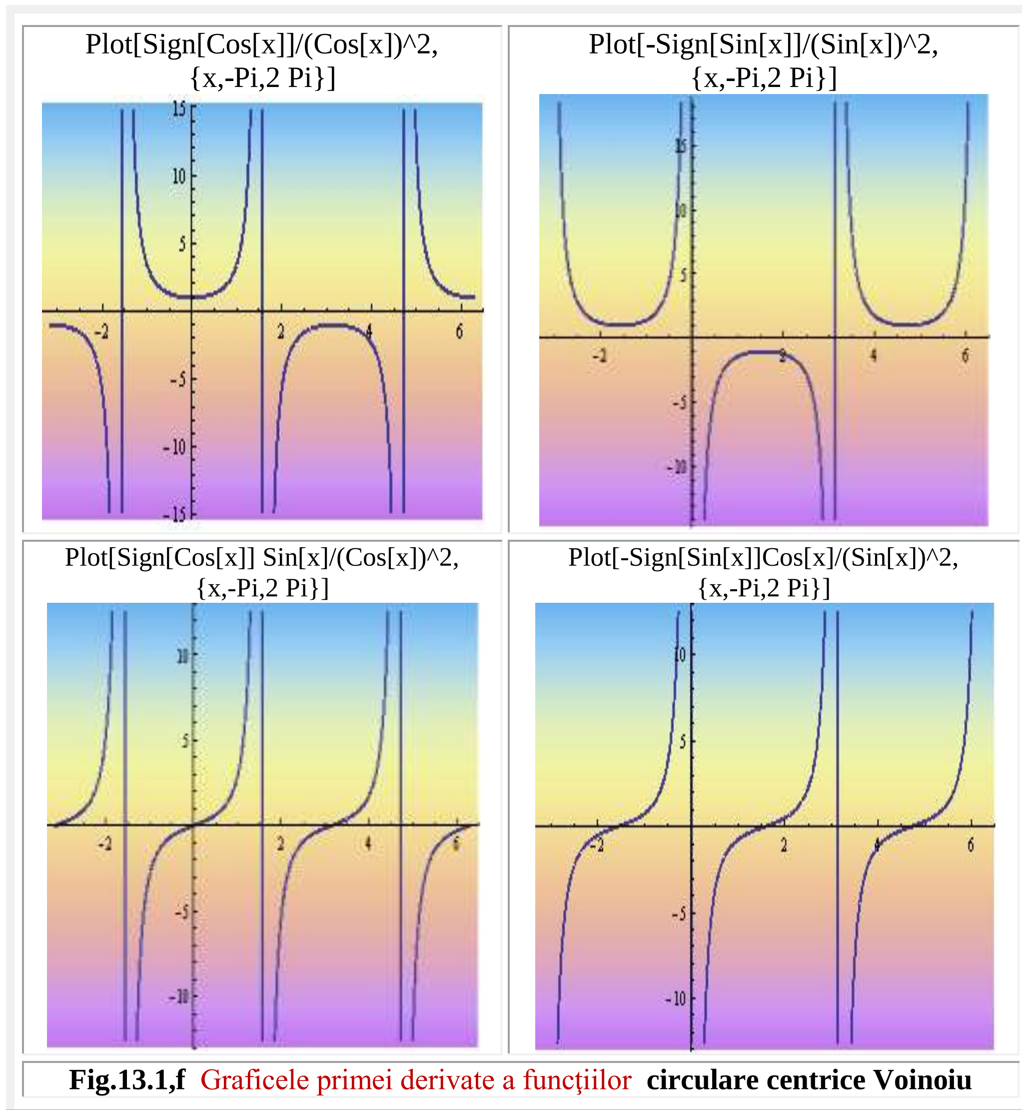


Fig.13.1,f Graficele primei derivate a funcţiilor **circulare centrice Voinoiu**

În aceste expresii se recunosc funcţiile dreptunghiulare (13.13) cu graficele din **figura 13.1,e**

$$(13.12)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dx}(tanvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{sinx}{Abs[cosx]}\right)=\frac{cosx}{Abs[cosx]}+\frac{sin^2x.Sign[cosx]}{(Abs[cosx])^2} \\ \frac{d}{dx}(cotvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{cosx}{Abs[sinx]}\right)=\frac{-sinx.}{Abs[sinx]}-\frac{cos^2x.Sign[sinx]}{(Abs[sinx])^2} \\ \frac{d}{dx}(secvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Abs[cosx]}\right)=Sign[cosx]\,\frac{sinx.}{(Abs[cosx])^2} \\ \frac{d}{dx}(cscvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Abs[sinx]}\right)=-\,Sign[sinx]\,\frac{cosx}{(Abs[sinx])^2} \end{cases}$$

în care s-au folosit egalităţile

$$(13.13)\qquad \begin{cases} \frac{\boldsymbol{cosx}}{\boldsymbol{Abs[cosx]}}=\boldsymbol{Sign[cosx]} \\ \frac{\boldsymbol{sinx.}}{\boldsymbol{Abs[sinx]}}=\boldsymbol{Sign[sinx]} \end{cases}$$

care reprezină una şi aceeaşi funcţie, funcţii dreptunghiulare cu graficele din **figura 13.1,e**.

Înlocuind egalităţile (13.13) în relaţiile / derivatele (13.12) rezultă

$$(13.14)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dx}(tanvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{sinx}{Abs[cosx]}\right)=Sign[cosx](1+\frac{sin^2x}{(Abs[cosx])^2}) \\ \frac{d}{dx}(cotvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{cosx}{Abs[sinx]}\right)=-Sign[sinx](1+\frac{cos^2x}{(Abs[sinx])^2}) \\ \frac{d}{dx}(secvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Abs[cosx]}\right)=Sign[cosx]\,\frac{sinx.}{(Abs[cosx])^2} \\ \frac{d}{dx}(cscvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Abs[sinx]}\right)=-\,Sign[sinx]\,\frac{cosx}{(Abs[sinx])^2} \end{cases}$$

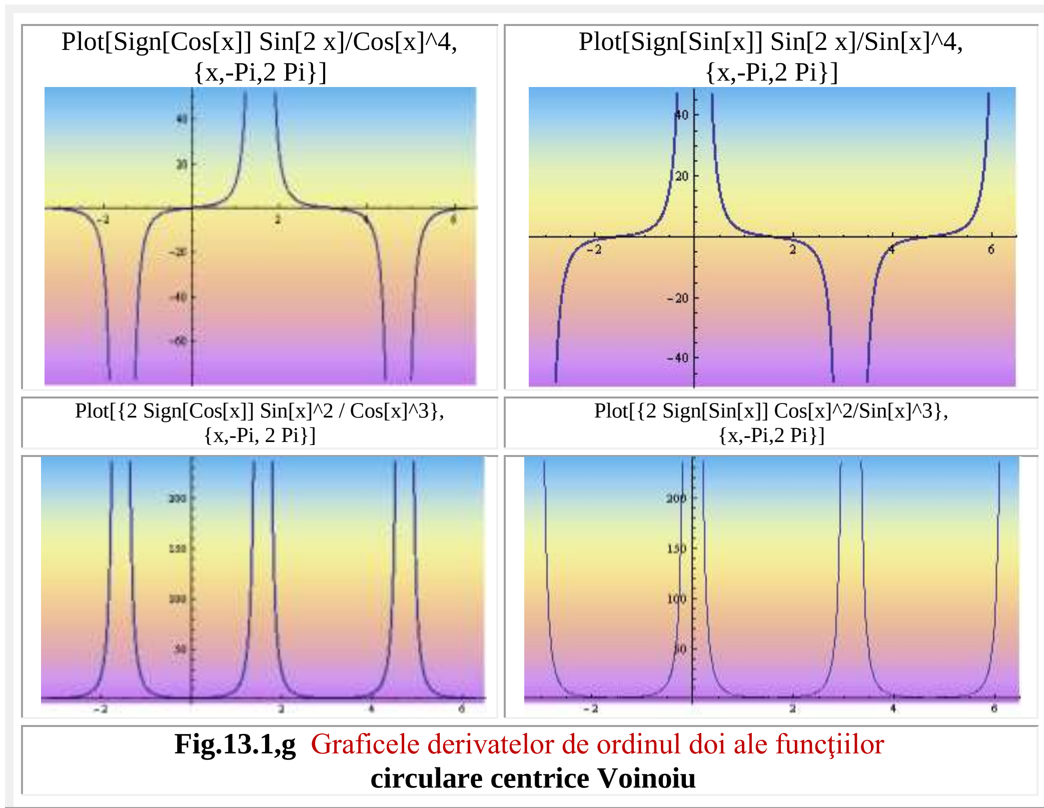


Fig.13.1,g Graficele derivatelor de ordinul doi ale funcţiilor **circulare centrice Voinoiu**

Deoarece

(13.15) $$\begin{cases}(Abs[cosx])^2 = cos^2x\\(Abs[sinx])^2 = sin^2x\end{cases}$$

utilizând egalităţiile (13.15) în relaţiile (13.14) se obţin forme asemănătoare cu ale derivatelor funcţiilor clasice de acelaşi tip, aşa cum se observă în relţiile (13.16)

(13.16) $$\begin{cases}\frac{d}{dx}(tanvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{sinx}{Abs[cosx]}\right)= Sign[cosx]\,\frac{1}{cos^2x}=Sign[cosx].sec^2x\\ \frac{d}{dx}(cotvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{cosx}{Abs[sinx]}\right)= -Sign[sinx]\frac{1}{sin^2x}=-Sign[sinx].csc^2x\\ \frac{d}{dx}(secvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Abs[cosx]}\right) = Sign[cosx]\frac{tanx}{cosx} = Sign[cosx]\frac{sinx}{cos^2x}\\ \frac{d}{dx}(cscvx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Abs[sinx]}\right) = - Sign[sinx]\,\frac{cotx}{sinx0} =- Sign[sinx]\frac{cosx}{sin^2x}\end{cases}$$

Graficele derivatelor de ordinul întâi al **FCC Voinoiu** sunt prezentate în **figura 13.1,f**.

Pentru determinarea celei de a doua derivate a FCC **Voinoiu** este necesar să observăm că funcţia Sign[f(x)], fiind o constanta, derivata ei este nulă, aşa că, prin derivarea primelor derivate (13.16) se obţin derivatele de ordinul doi (13.17) cu graficele din **figura 13.1g**

(13.17) $$\begin{cases}\frac{d^2}{dx^2}(tanvx)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{sinx}{Abs[cosx]}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{Sign[cosx]}{cos^2x}\right)=\frac{2Sign[cosx].cosx.sinx}{cos^4x}=\frac{Sign[cosx].sin2x}{cos^4x}\\ \frac{d^2}{dx^2}(cotvx)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{cosx}{Abs[sinx]}\right)=-\frac{d}{dx}\left(\frac{Sign[sinx]}{sin^2x}\right)=\frac{2Sign[sinx].sinx.cosx}{sin^4x}=\frac{Sign[sinx].sin2x}{sin^4x}\\ \frac{d^2}{dx^2}(secvx)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{Abs[cosx]}\right)=\frac{d}{dx}\left(Sign[cosx]\frac{sinx}{cos^2x}\right)=2Sign[cosx]\frac{sin^2x}{cos^3x}\\ \frac{d^2}{dx^2}(cscvx)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{Abs[sinx]}\right)=-\frac{d}{dx}\left(Sign[sinx]\frac{cosx}{sin^2x}\right)=2Sign[sinx]\frac{cos^2x}{sin^3x}\end{cases}$$

13.3 FUNCŢII MATEMATICE CENTRICE AUTOINDUSE (FAI)

Se vor face referi la funcţiile supermatematice **excentrice autoinduse**, după ce se vor prezenta cele **centrice autoinduse**, care sunt mai simple, mai uşor de înţels, dar la fel de utile şi de surprinzătoare, din multe puncte de vedere.

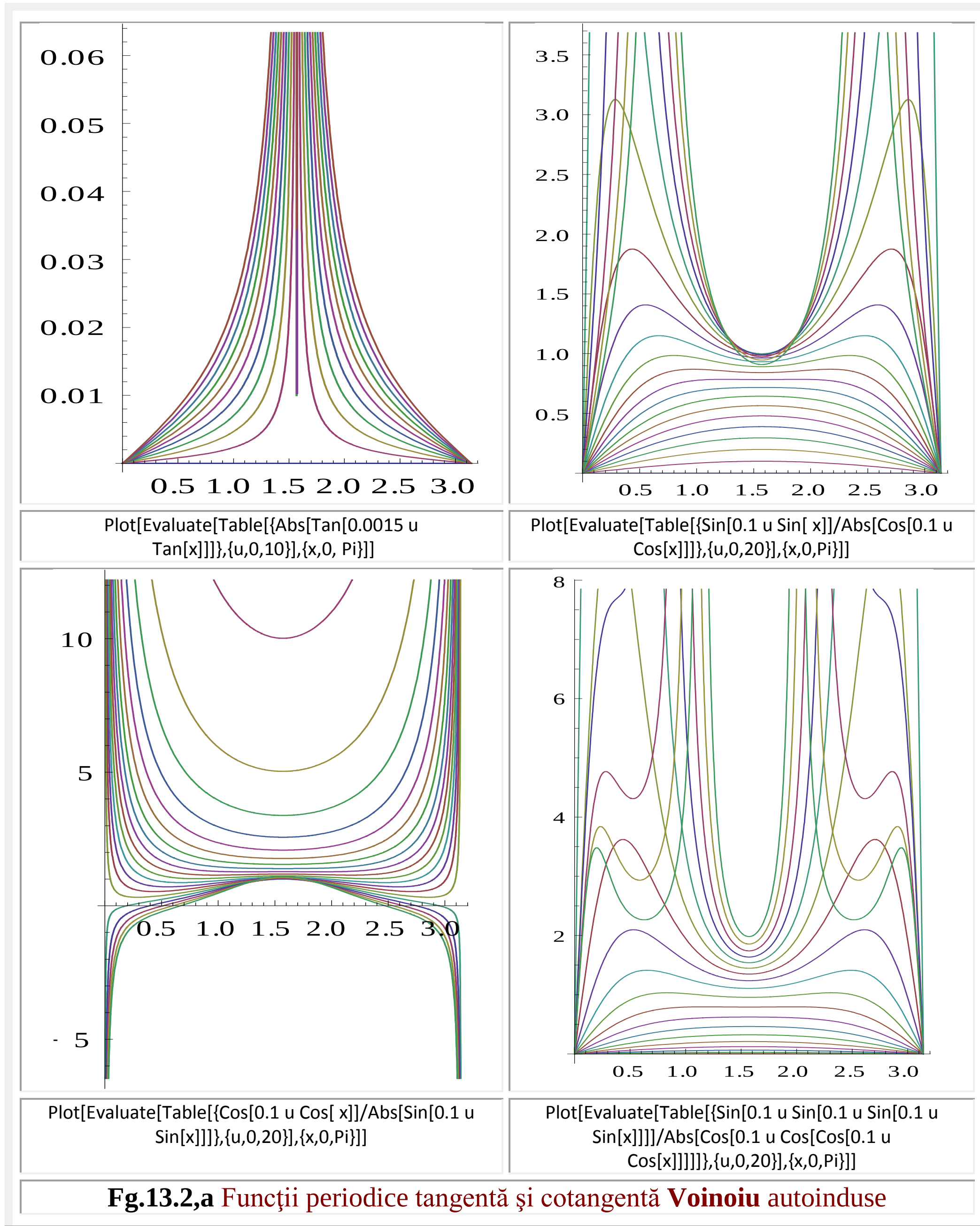
Se debutează cu câteva familii de **FAI** plăcute ochiului. Ochiului autorului: “de gustibus non est disputandum”.

Se vor exemplifica graficele unor **FAI**, centrice **Voinoiu**, surprinzatoare ca formă şi ca imagine artistică. Se remarcă funcţia sub formă de **turn**, sub formă de **pantalon** cu talie joasă, în **figura 13.2,a**, şi a unor funcţii periodice în **figura 13.2,b**.

Funcţia autoindusă (FAI) stabileşte o *relaţie* care asociază fiecărui element dintr-o mulţime (**domeniul**, care este valoarea **aceleaşi funcţii**, trigonometrică sau nu, de aceeaşi amplitudine sau de alta, de la caz la caz, adică este **codomeniul** tot al unei funcţii – ulterioare/următoare), un singur element dintr-o aceaşi mulţime (**codomeniul**).

Funcţia autoindusă (FAI) este, aşa dar, o funcţie compusă, o funcţie de funcţie, sau, mai general/precis, o funcţie de funcţie compusă DIN ACELEAŞI FUNCŢII.

Exemplele sunt mai elocvente şi cu mult mai simple, în acest caz, decât definiţiile:



Plot[Evaluate[Table[{Abs[Tan[0.0015 u Tan[x]]]},{u,0,10}],{x,0, Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[0.1 u Sin[x]]/Abs[Cos[0.1 u Cos[x]]]},{u,0,20}],{x,0,Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Cos[0.1 u Cos[x]]/Abs[Sin[0.1 u Sin[x]]]},{u,0,20}],{x,0,Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[0.1 u Sin[0.1 u Sin[0.1 u Sin[x]]]]/Abs[Cos[0.1 u Cos[Cos[0.1 u Cos[x]]]]]},{u,0,20}],{x,0,Pi}]]

Fg.13.2,a Funcţii periodice tangentă şi cotangentă **Voinoiu** autoinduse

Funcţia **sinus autoindus**, notată sinai[A, n, sinx] , sau sinai [A_1, A_2,..A_n; n.sinx] în care A_i sunt amplitudinile succesive şi **n – numărul autoinducţiilor** sau **gradul de autoinducţie**, care arată de câte ori se repetă funcţia de funcţie şi are, de exemplu, expresia / ecuaţia

(13.18) sinai[A_i=1, n= 4,sinx]=sinai[1, n, sinx] = sin[sin[sin[sin[sin[x]]]]] ≡ sinai[x]

Graficele unor funcţii **sinus autoinduse** cu A_i = 1 şi n = 0 … 13 sunt prezentate în **figura 13.2,c,** iar graficele familiilor de **FAI** centrice cosinus cosai[1, n, cosx] ≡ cosai[x] în **figura 13.2,d**.

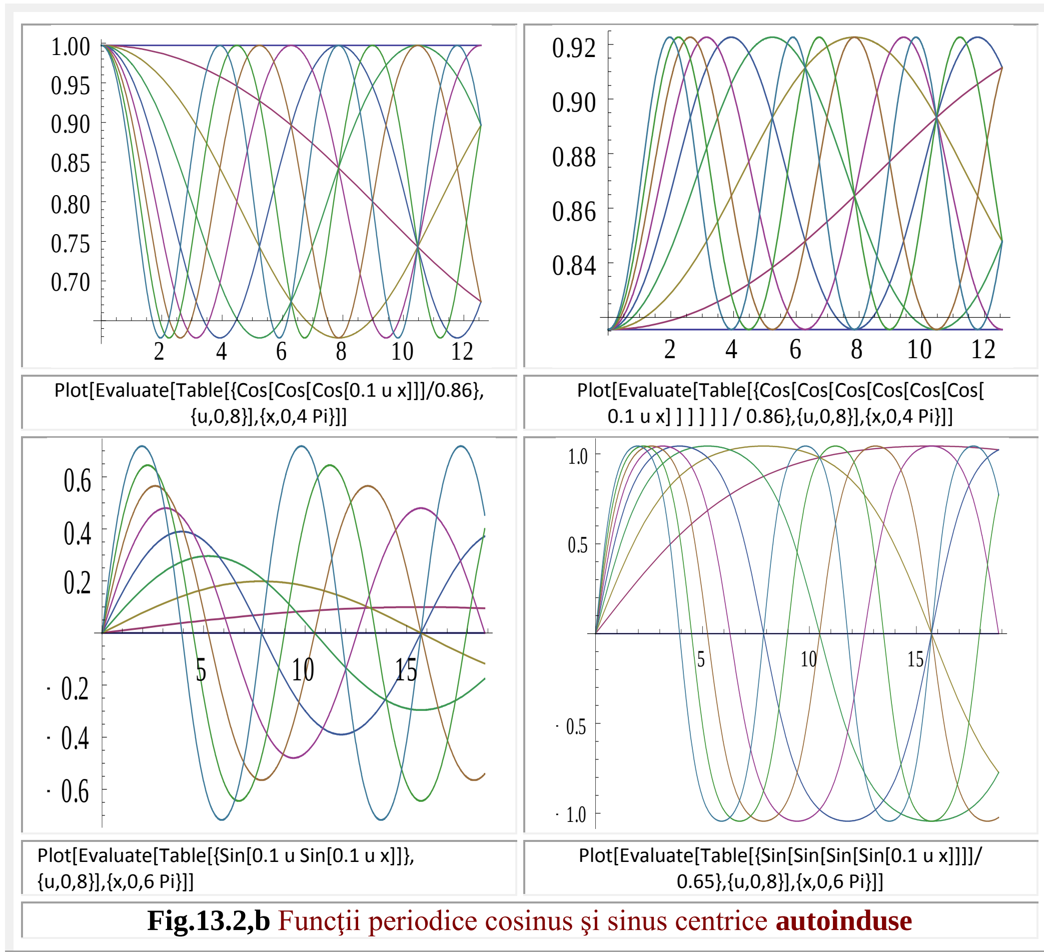


Fig.13.2,b Funcţii periodice cosinus şi sinus centrice **autoinduse**

În **figura 13.3** sunt prezentate garaficele **FAI** centrice cosinus, de amplitudini autoinduse diverse, date de ecuaţia cosai[$A_i \in$ [1,2; 2], n = 1, …,4, cosx] = cosai[A_i cos[x]].

Se remarcă faptul că, dacă sinusul autoindus păstrează perioada de 2π a variabilei / argumentului şi rămân funcţii impare, deoarece originea O(0,0) rămâne centru de simetrie, pe când **FAI** cosinus îşi modifică această perioadă injumătăţind-o, dar rămân funcţii pare; axa Oy (y = 0) rămânând axă de simetrie.

O altă observaţie, este aceea că, dacă sinai[x] este o funcţie care oscilează simetric faţă de axa Ox (y = 0), **FAI** cosai[x] oscilează simetric faţă de o altă dreaptă,

paralelă cu axa Ox, de înălţime variabilă ce scade cu creşterea gradului de autoinducţie, adică cu n. Familiile de funcţii cosai[x] au puncte comune de intersecţie, a căror abscise rezultă din rezolvarea ecuaţiilor succesive:

(13.19) cos[cos[x]] = cos[cos[cos[x]]] → cos[x] = cos[cos[x]] → x = cos[x]
→ x = arccos[cos[cos[x]]]

a cărei soluţe numerică (FindRoot[Cos[x]==x, {x, 0, 2 Pi}]) este

(13.20) $y_i = x_1 = 0.7390851332151607$

dar celelalte valori ale absciselor punctelor de intersectie x_2, x_3, x_4… sunt variabile.

```
Plot[{Sin[x],Sin[Sin[x]],Sin[Sin[Sin[x]]],Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]],Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x]]]]]]]]]]]]]]},{x,0,2 Pi}]
```

Fig.13.2,c Familie de 14 funcţii trigonometrice centrice dintre care 13 **sinusuri autoinduse sinai[x]** precum şi **FCC** sinx pentru A_i = 1, n = 0, …, 13

Rezultă că **FAI** cosai[x] variază cu amplitudini asimetrice faţă de dreapta $y = y_i = 0.7390851332151607$, care se repetă periodic, sau alternează, aşa cum se observă clar şi în **figura 13.2,d**.

Expresia **FAI** cosai[A_i = 1,2, n = 4, cosx] din **figura 13.3** este

(13.21) cosai[A_i =1,2,n=4,cosx]=cosai[1,2;4;cosx]=
=cos[1,2cos[1,2cos[1,2cos[1,2cos[x]]]]]

FAI îşi modifică forma şi amplitudinea, dar pot să-şi modifice şi perioada, prin modificarea amplitudinilor autoinduse, aşa cum se poate observa în **figura 13.4** pentru o **FAI**

(13.22) sinai[A_1..A_{12} = 1, $A_{13} \in$ [2, 6], variabil, n = 13, sin[x]].

şi în **figura 13.5** pentru modificarea perioadei/frecvenţei, care s-a injumătăţit utilizand amplitudinea autoindusa de 2 şi s-a impătrit prin schimbarea x → 4x.

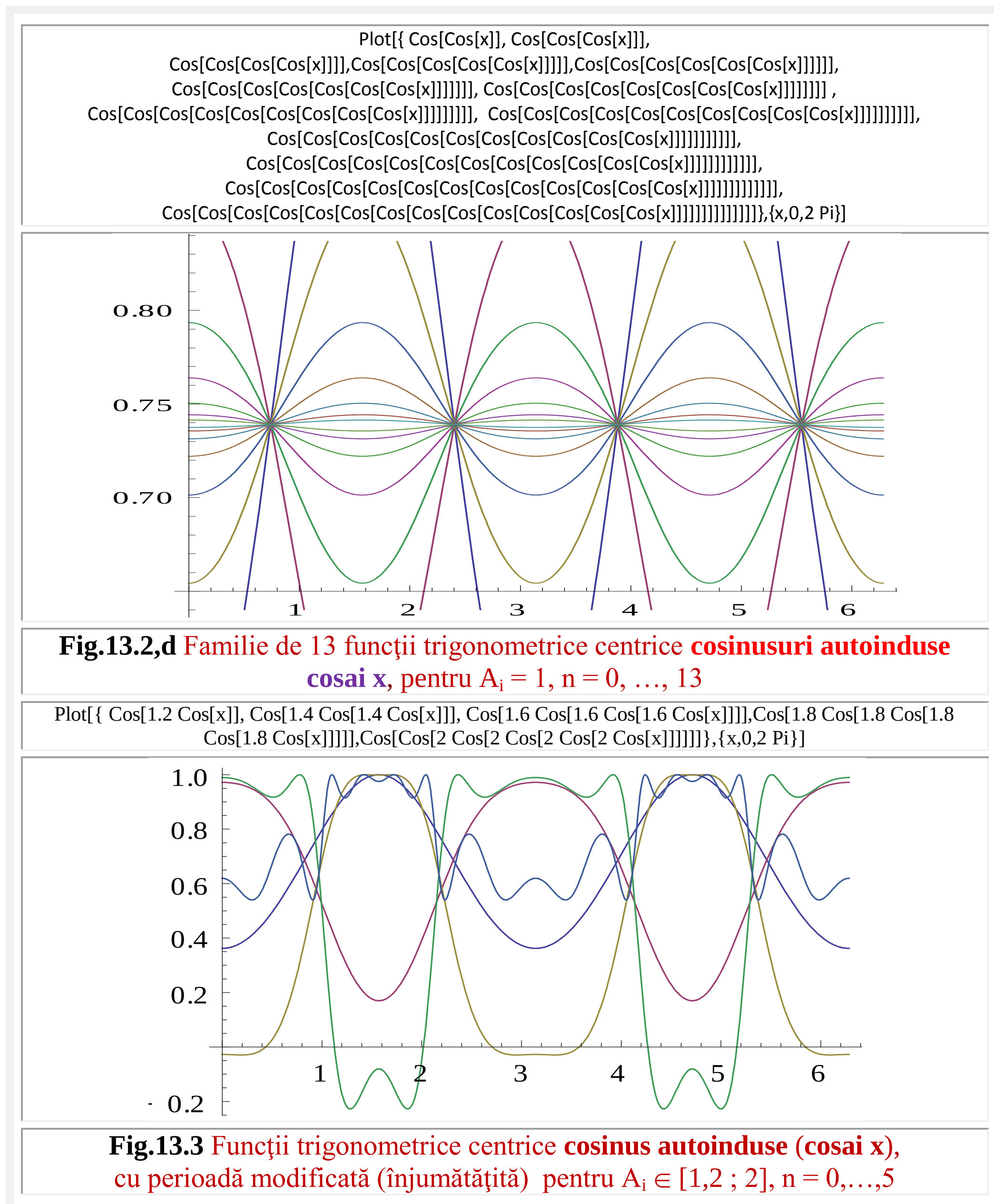


Fig.13.2,d Familie de 13 funcţii trigonometrice centrice **cosinusuri autoinduse cosai x**, pentru $A_i = 1$, n = 0, …, 13

Fig.13.3 Funcţii trigonometrice centrice **cosinus autoinduse** (**cosai x**), cu perioadă modificată (înjumătăţită) pentru $A_i \in [1,2 ; 2]$, n = 0,…,5

Şi, în plus, prin alternarea amplitudinilor de π/2 cu cea de 3π/2 s-au obţinut funcţii dreptunghiulare printr-o nouă metodă, mult mai simplă decât cele utilizate până în prezent, dar nu mai simplă decât cu funcţiile **SM**-**CE** derivată excentrica (dex*θ*),

cosinus (coqθ) şi/sau sinus (siqθ) cuadrilobe (quadrilobe) de excentricitate numerică **s** = ±1.

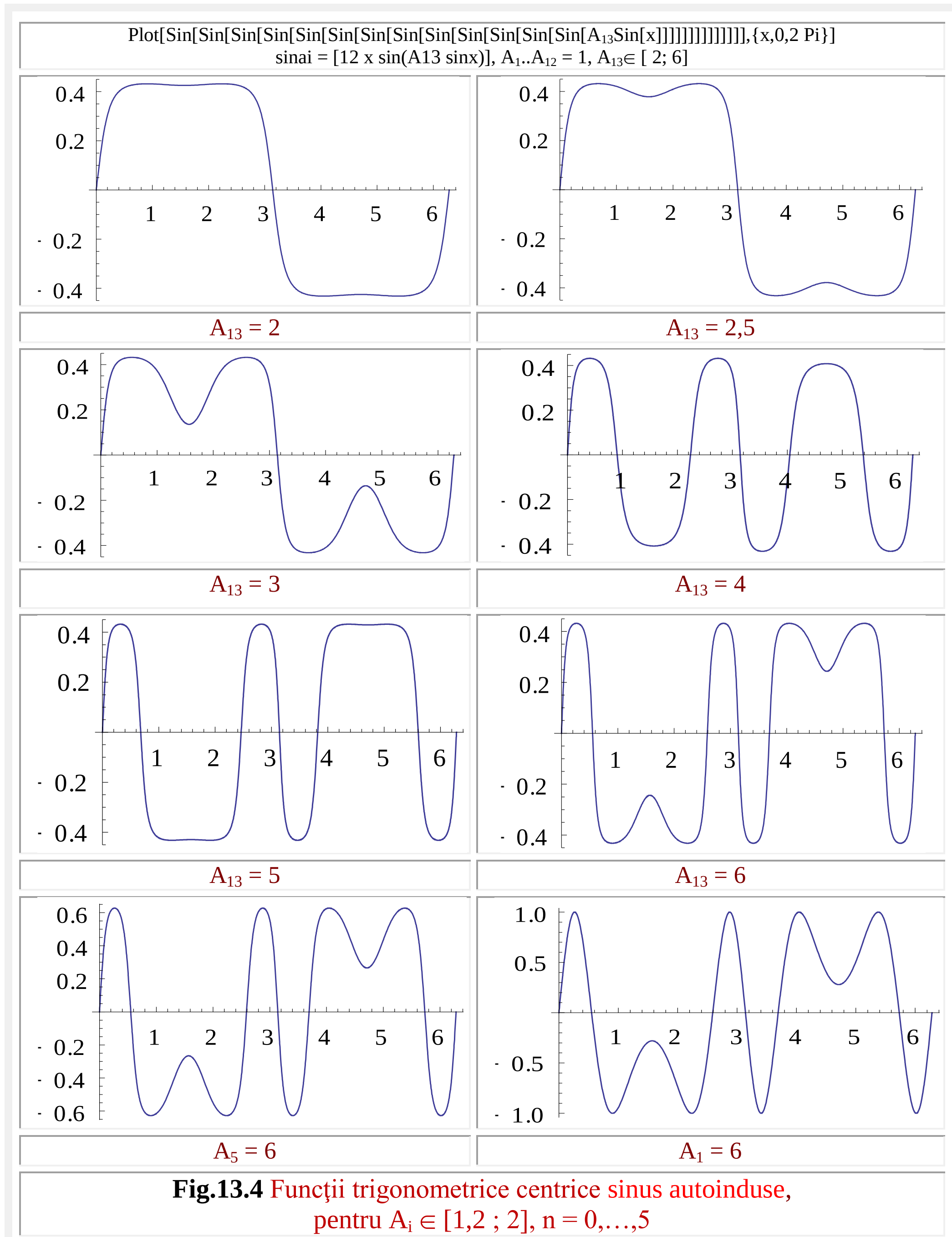


Fig.13.4 Funcţii trigonometrice centrice sinus autoinduse, pentru $A_i \in [1,2 ; 2]$, n = 0,…,5

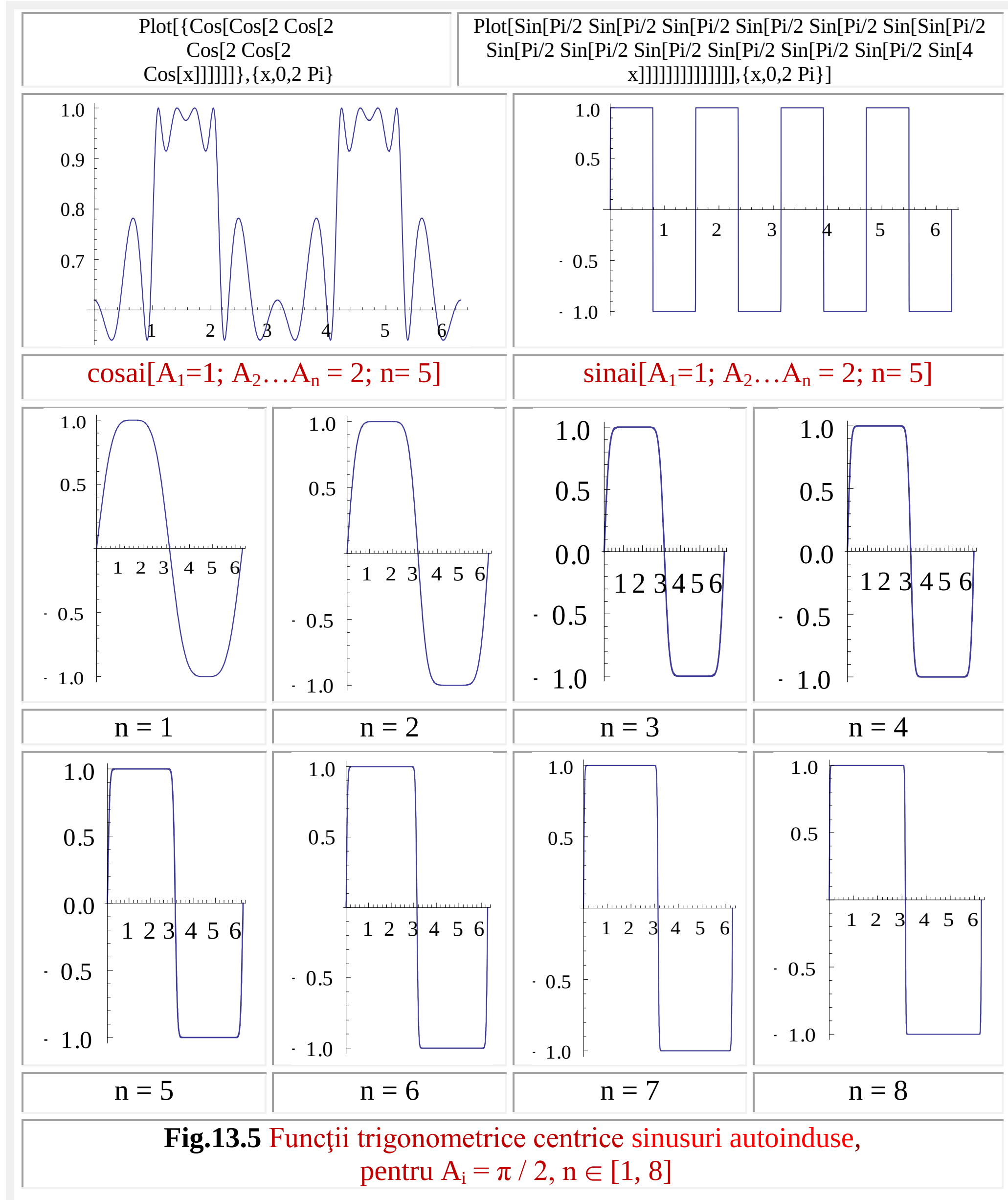


Fig.13.5 Funcţii trigonometrice centrice sinusuri autoinduse, pentru $A_i = \pi / 2$, $n \in [1, 8]$

Sinusul centric autoindus, din **figura 13.2**, arată că arcul de cerc este mai mare decât valoarea funcţie sinus ($\alpha_i > \sin\alpha_i$). De exemplu, dacă ne referim doar la valorile maxime ale funcţiilor sinus autoinduse, care apar la aceleaşi argumente cu ale funcţie sinx, atunci, la arcul de cerc de $x_1 = \frac{\pi}{2} = 1.5708\ldots\ldots$ radiani se corespunde un unghi $\alpha_1 = 90^0$ şi funcţia sinus are valoarea $y_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

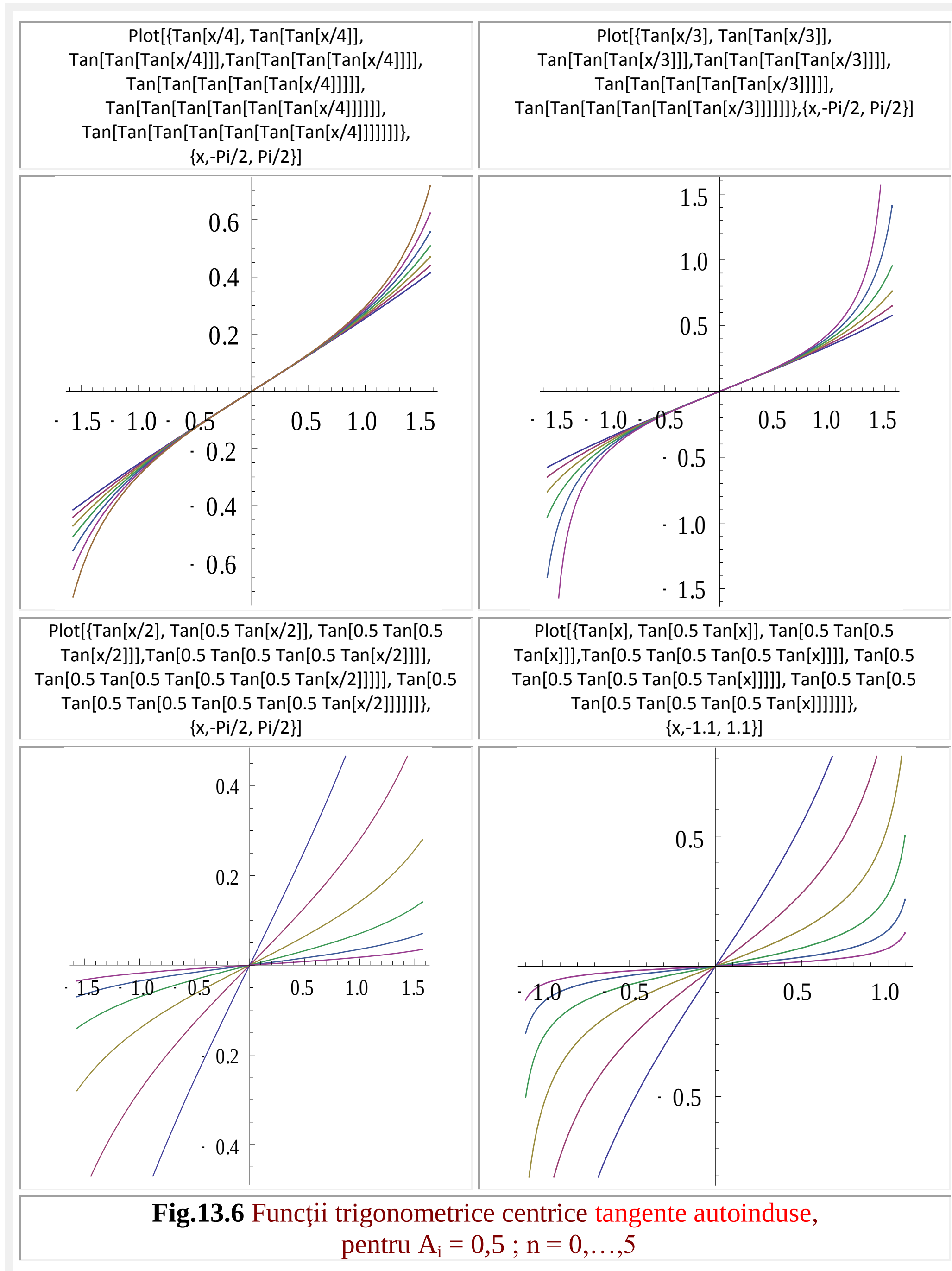


Fig.13.6 Funcţii trigonometrice centrice tangente autoinduse,
pentru A_i = 0,5 ; n = 0,…,5

Arcului de cerc de x_2 = 1 radian îi corespunde un unghi, sau arc de cerc, de α_2 = 57,295779..^{0} pentru care y_2 = sin(x_2 = 1) = 0.841471.. care corespunde amplitudinii maxime a primei funcţii autoinduse; a doua funcţie din graficele **figurii 13.2,c**.

Arcului de x_3 = 0.841471 radiani îi corespunde un unghi de α_3 = 48,212731..^{0} şi y_3 = sin(x_3 = 0.841471) = 0,7456241.. = x_4 care este amplitudinea maximă a celei de a treia curbe autoinduse, ş.a.m.d.

Pe măsură ce valorile funcţiilor scad, scad şi valorile argumentelor; pentru valori mici sinusul se apropie de valorile arcelor/argumentelor. Astfel că, rata de scădere a amplitudinilor devine din ce în ce mai mică. Acesta este şi motivul pentru care, în jurul argumentelor de 0, π, 2π şi în general ± kπ, în care sinusurile au valori reduse şi apropiate de valorile argumentelor, graficele funcţiilor autoinduse se suprapun; diferenţele lor fiind foarte/extrem de mici; chiar în punctele amintite, în zerourile de pe axa x, fiind nule.

În concluzie, dacă numărul n de autoinducţii ale funcţiilor din **figura 13.2,c** ar tinde către infinit, atunci valorile ultimei funcţii autoinduse ar tinde spre axa absciselor, cu rate de scădere din ce în ce mai mici, adică ar fi peste tot nulă; convergenţa fiind extrem-extrem de redusă.

În **figura 13.4** sunt redate individual/separat câteva **FAI** centrice sinus de amplitudini diverse**.**

Primele 4 funcţii au expresiile

(13.23) sinai[A_i=1, n∈[1, 12], A_{13} ∈ [2; 6], sin[x]],

cu valorile A_{13} indicate în figură, iar urmatoarele două curbe au amplitudinile unitare, cu excepţia celor indicate în figură, care sunt diferite de 1, cum sunt amplitudinile A_5 = 6 şi, respectiv, A_1 = 6

Figura 13.5 reprezintă o funcţie cosai[A_1=1, A_2..A_5 = 2, n = 5, cos[x]], în stânga şi, în dreapta, o **FAI** sinai[A_i = π/2, n = 12, sin[4x]]], care s-a transformat, surprinzător, într-o funcţie dreptunghiulară.

Ar putea fi denumită funcţie trigonometrică centrică autoindusă sinus dreptunghiular sau, pe scurt, **sinus dreptunghiular**. Evoluţiile ei, pentru n = 1 … 8, sunt redate în aceeaşi figură.

Pentru un excentru S(s ∈[0,1]; ε = 0) familiile de curbe pentru n = 0…5 sunt prezentate în figura **13.18,a,** pentru prima determinare, **principală**, de indice **1**, care, conform convenţiei din Vol.I, nu este necesar să fie indicată/marcată, când nu pot apărea unele confuzii.

Ca şi în cazul **FAI** centrice sinx, amplitudinile consecutive scad cu creşterea gradului de autoinducţie **n**, la fel ca şi în cazul funcţiilor supermatematice circulare elevate (**FSM-CEl**) şi, cu siguranţă, pentru n → ∞ amplitudinea maximă, ca şi valoarea elongaţiei **FAI** y = a → 0, în tot domeniul x ∈ [–∞; + ∞]. Aşa cum se poate urmări, din succesiunea graficelor din figura **13.18,a**, aplatizarea curbelor începe de la excentricitatea numerică maximă s = 1 (V. n = 1) şi se continua, apoi, cu valori ale lui s mai reduse, pentru n= 2, n = 3 şi n = 4.

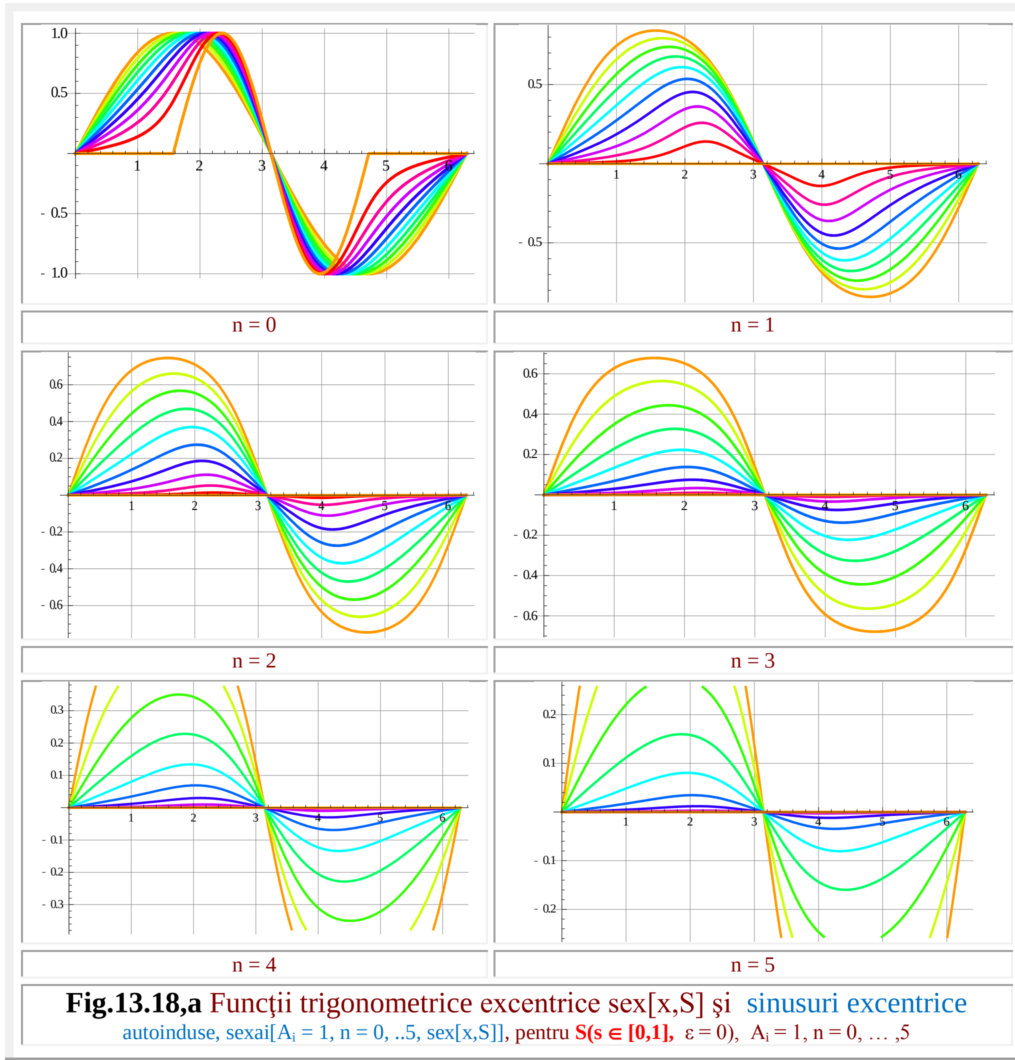
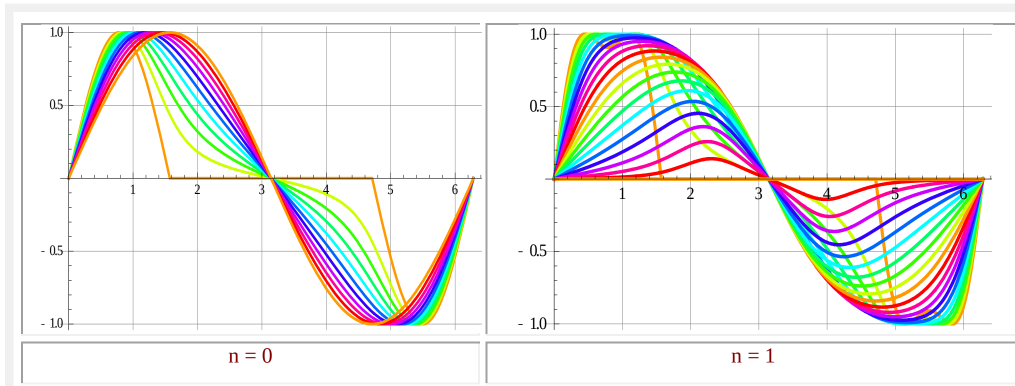


Fig.13.18,a Funcţii trigonometrice excentrice sex[x,S] şi sinusuri excentrice autoinduse, sexai[A_i = 1, n = 0, ..5, sex[x,S]], pentru **S(s ∈ [0,1],** ε = 0), A_i = 1, n = 0, … ,5



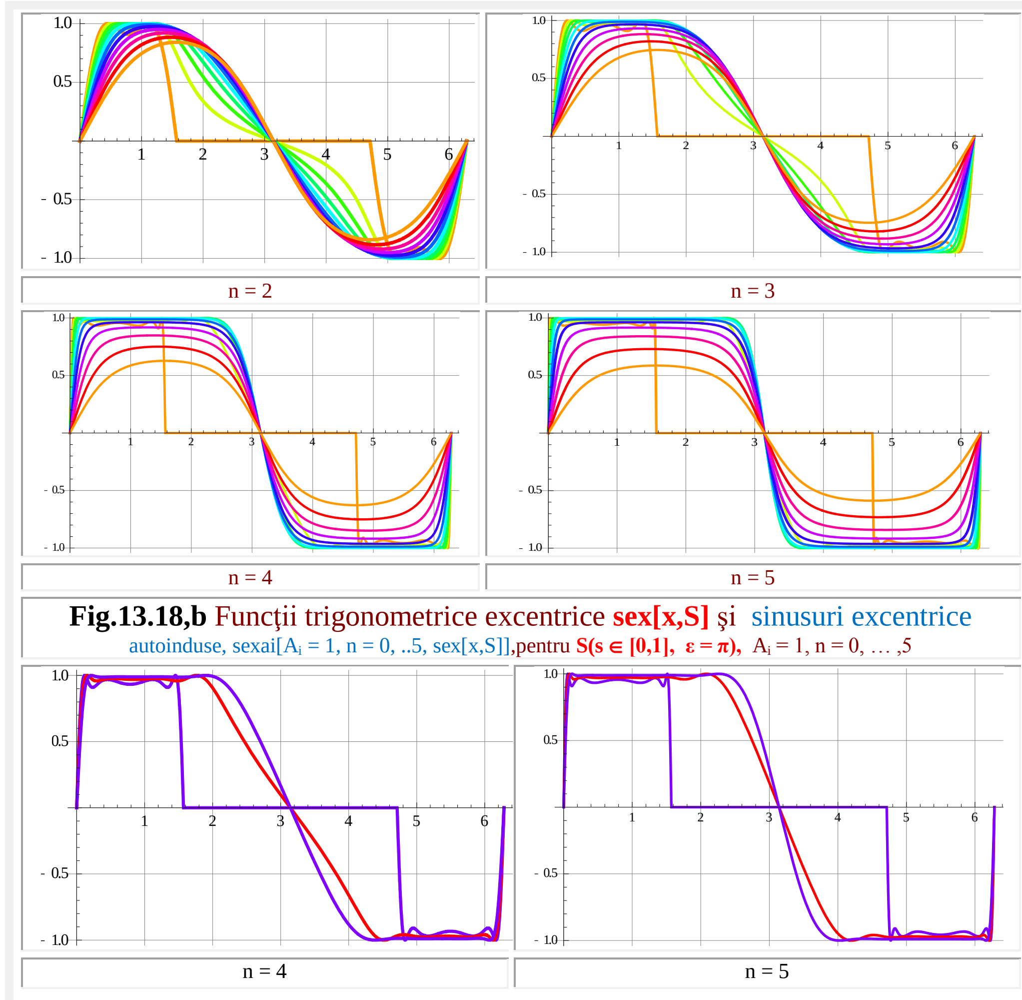
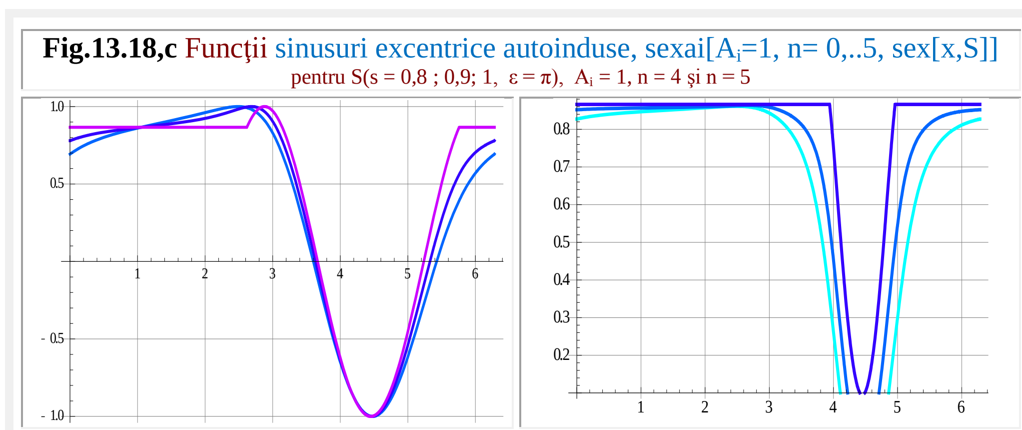


Fig.13.18,b Funcţii trigonometrice excentrice **sex[x,S]** şi sinusuri excentrice autoinduse, sexai[A_i = 1, n = 0, ..5, sex[x,S]],pentru **S(s ∈ [0,1], ε = π),** A_i = 1, n = 0, … ,5

Fig.13.18,c Funcţii sinusuri excentrice autoinduse, sexai[A_i=1, n= 0,..5, sex[x,S]] pentru S(s = 0,8 ; 0,9; 1, ε = π), A_i = 1, n = 4 şi n = 5



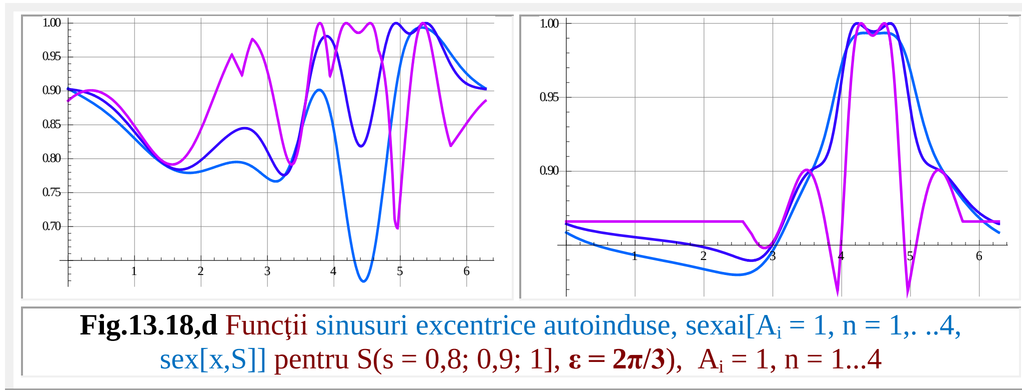
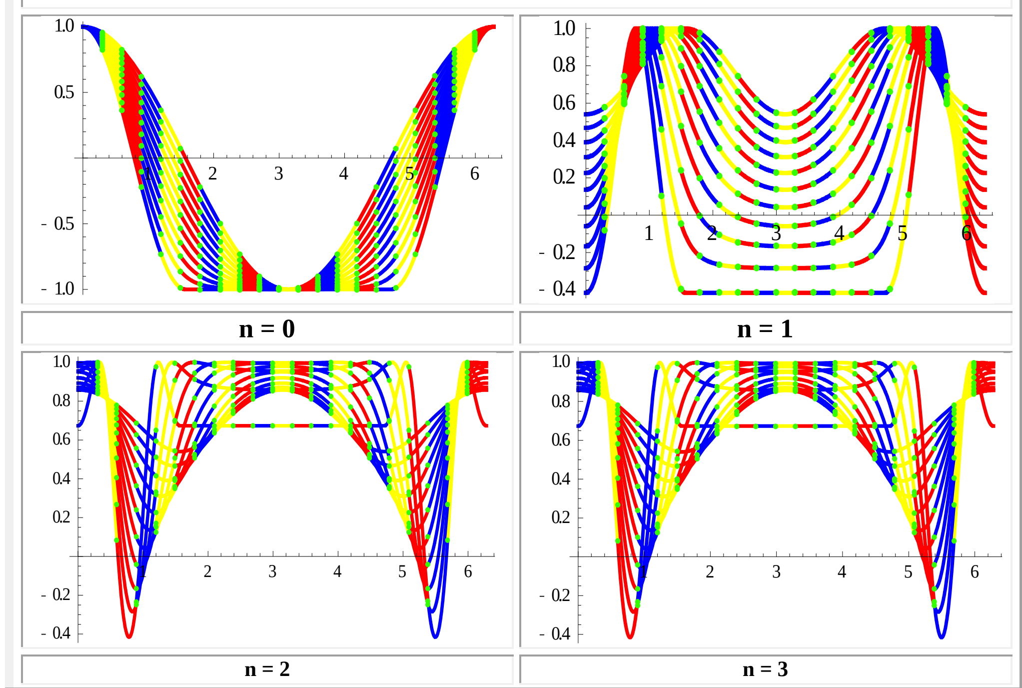


Fig.13.18,d Funcţii sinusuri excentrice autoinduse, sexai[A_i = 1, n = 1,. ..4, sex[x,S]] pentru S(s = 0,8; 0,9; 1], **ε = 2π/3)**, A_i = 1, n = 1...4

Un exemplu de scriere a unei ecuaţie a funcţiei autoinduse
cosinus excentric **cexai(x, S)**
de **n = 5** ,**S[s ∈ [-0,1]],** x ∈ [0, 2π]

```
Plot[Evaluate[Table[{Cos[Cos[Cos[Cos[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]]]]]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[Cos[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]]]]]]]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[Cos[Cos[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]]]]]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[Cos[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]-ArcSin[0.1 m Sin[Cos[x-ArcSin[0.1 m Sin[x]]]]]]]]]]]]]},{m,0,10}],{x,0,2 Pi}]
```



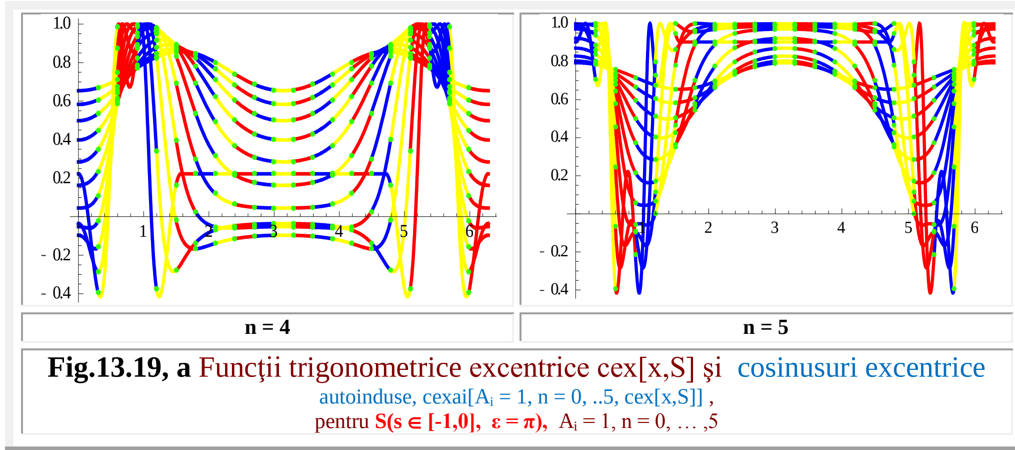


Fig.13.19, a Funcţii trigonometrice excentrice cex[x,S] şi cosinusuri excentrice autoinduse, cexai[A_i = 1, n = 0, ..5, cex[x,S]] , pentru **S(s ∈ [-1,0], ε = π)**, A_i = 1, n = 0, … ,5

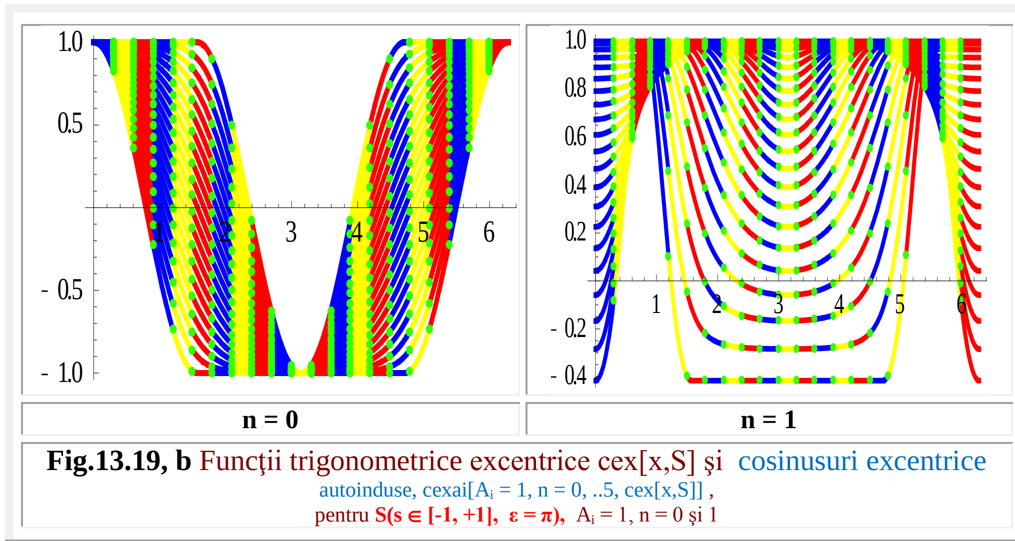
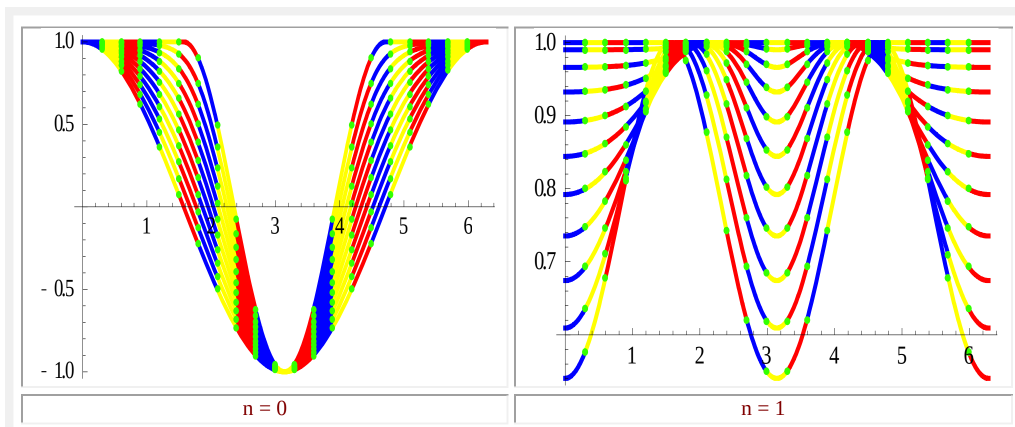


Fig.13.19, b Funcţii trigonometrice excentrice cex[x,S] şi cosinusuri excentrice autoinduse, cexai[A_i = 1, n = 0, ..5, cex[x,S]] , pentru **S(s ∈ [-1, +1], ε = π)**, A_i = 1, n = 0 şi 1



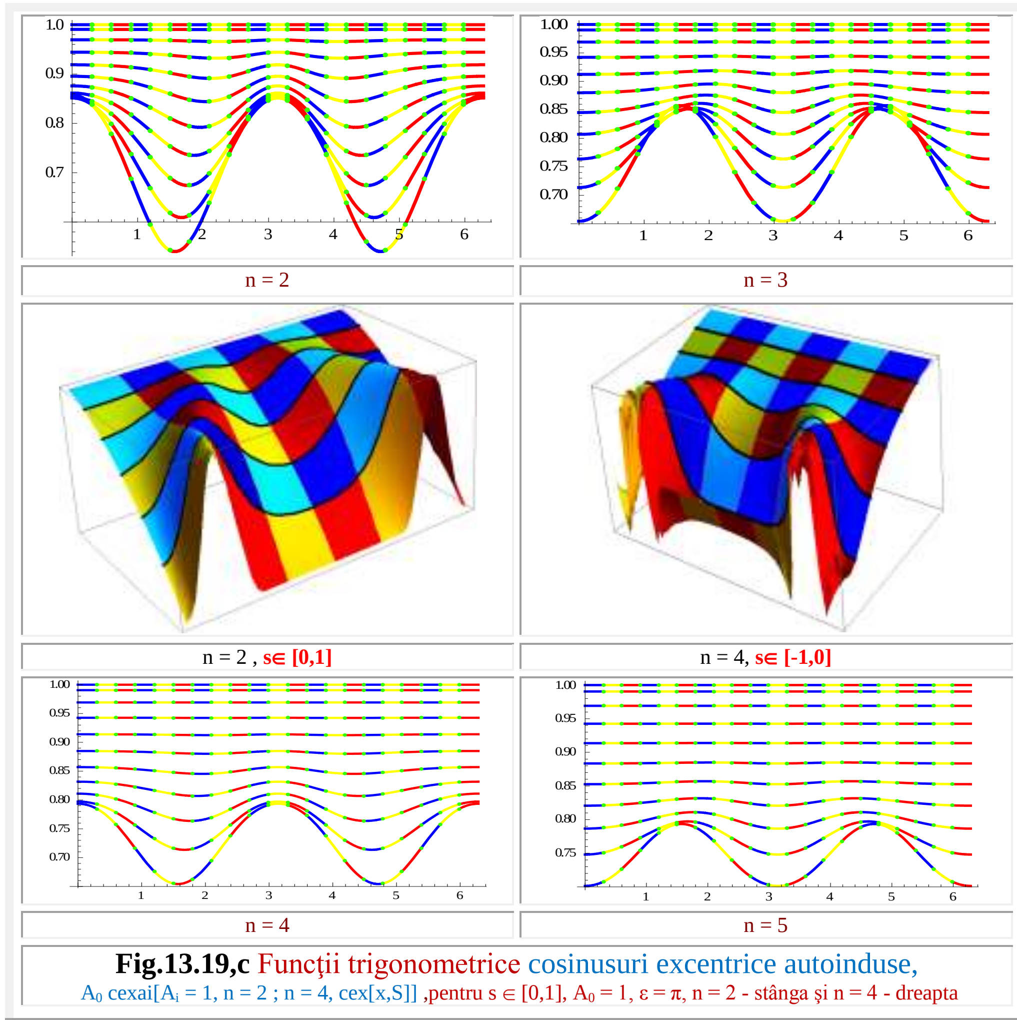
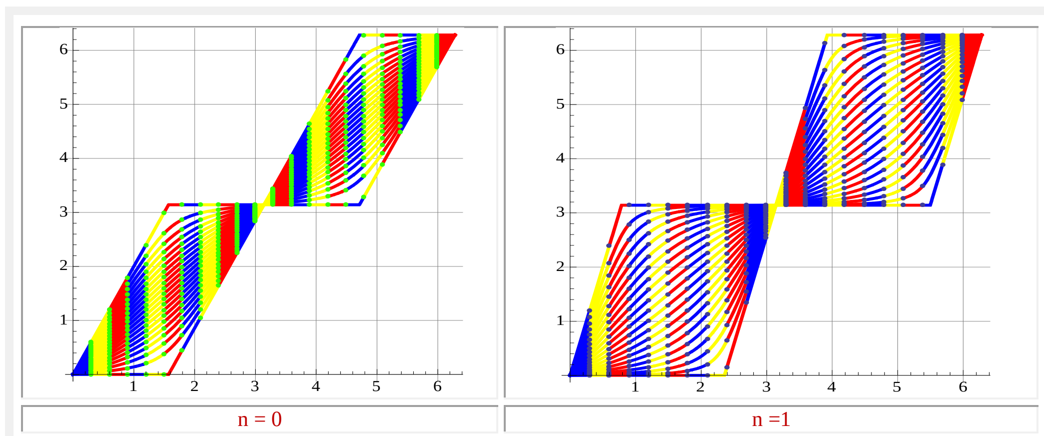


Fig.13.19,c Funcţii trigonometrice cosinusuri excentrice autoinduse,
A_0 cexai[A_i = 1, n = 2 ; n = 4, cex[x,S]] ,pentru s $\in$ [0,1], A_0 = 1, $\varepsilon = \pi$, n = 2 - stânga şi n = 4 - dreapta



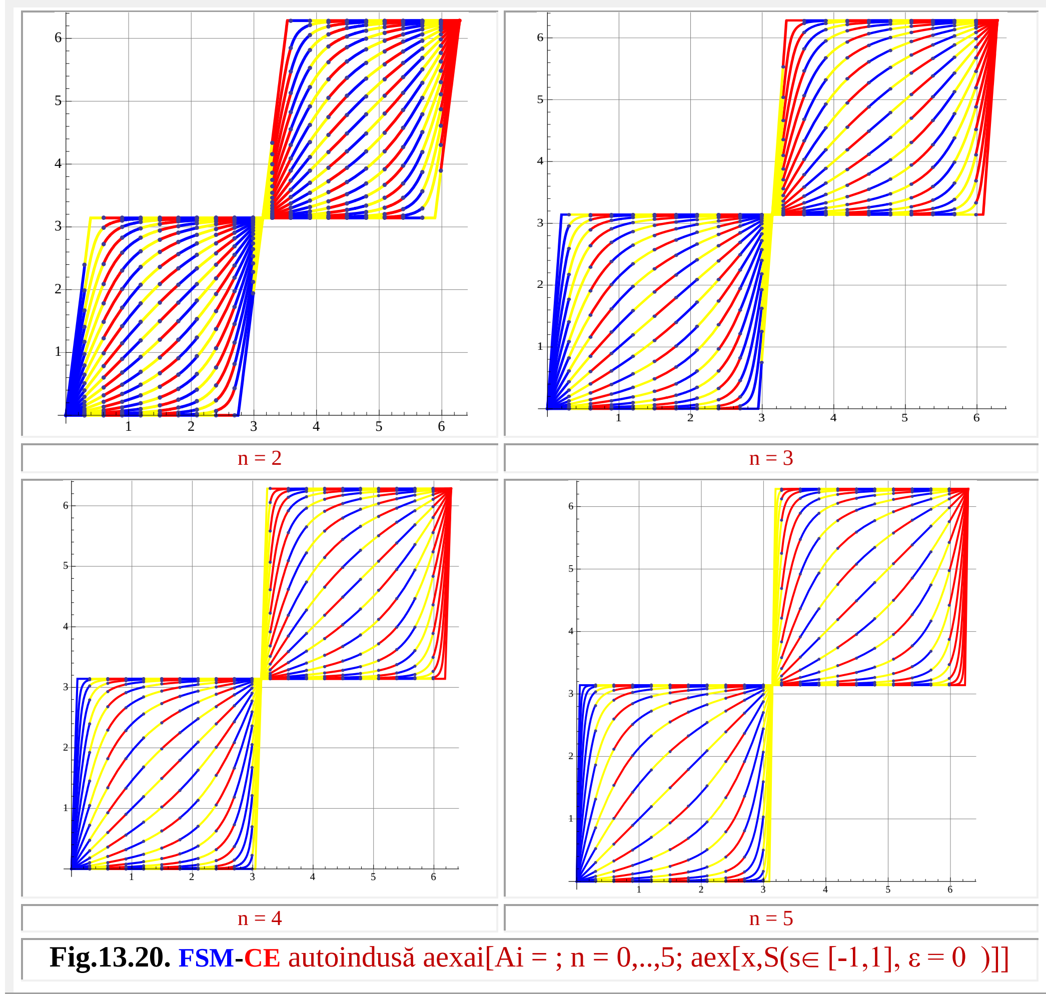
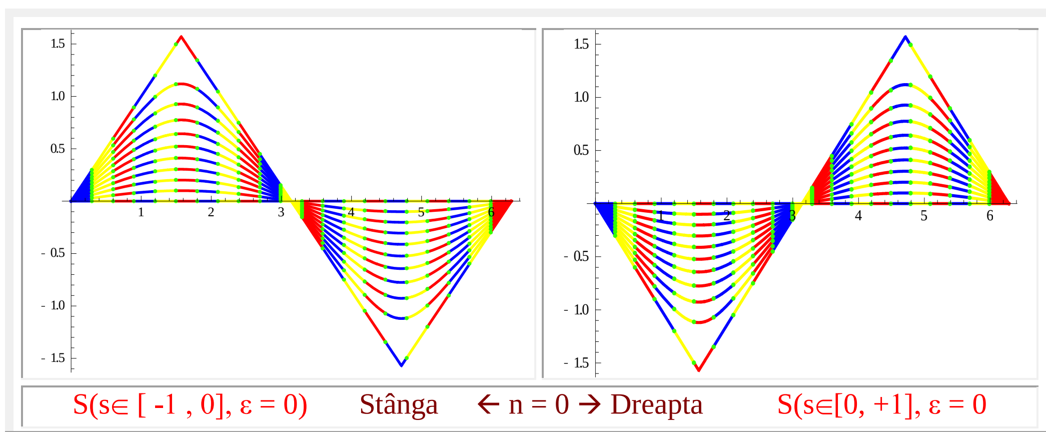


Fig.13.20. **FSM-CE** autoindusă aexai[Ai = ; n = 0,..,5; aex[x,S(s∈ [-1,1], ε = 0)]]



S(s∈ [-1 , 0], ε = 0) Stânga ← n = 0 → Dreapta S(s∈[0, +1], ε = 0

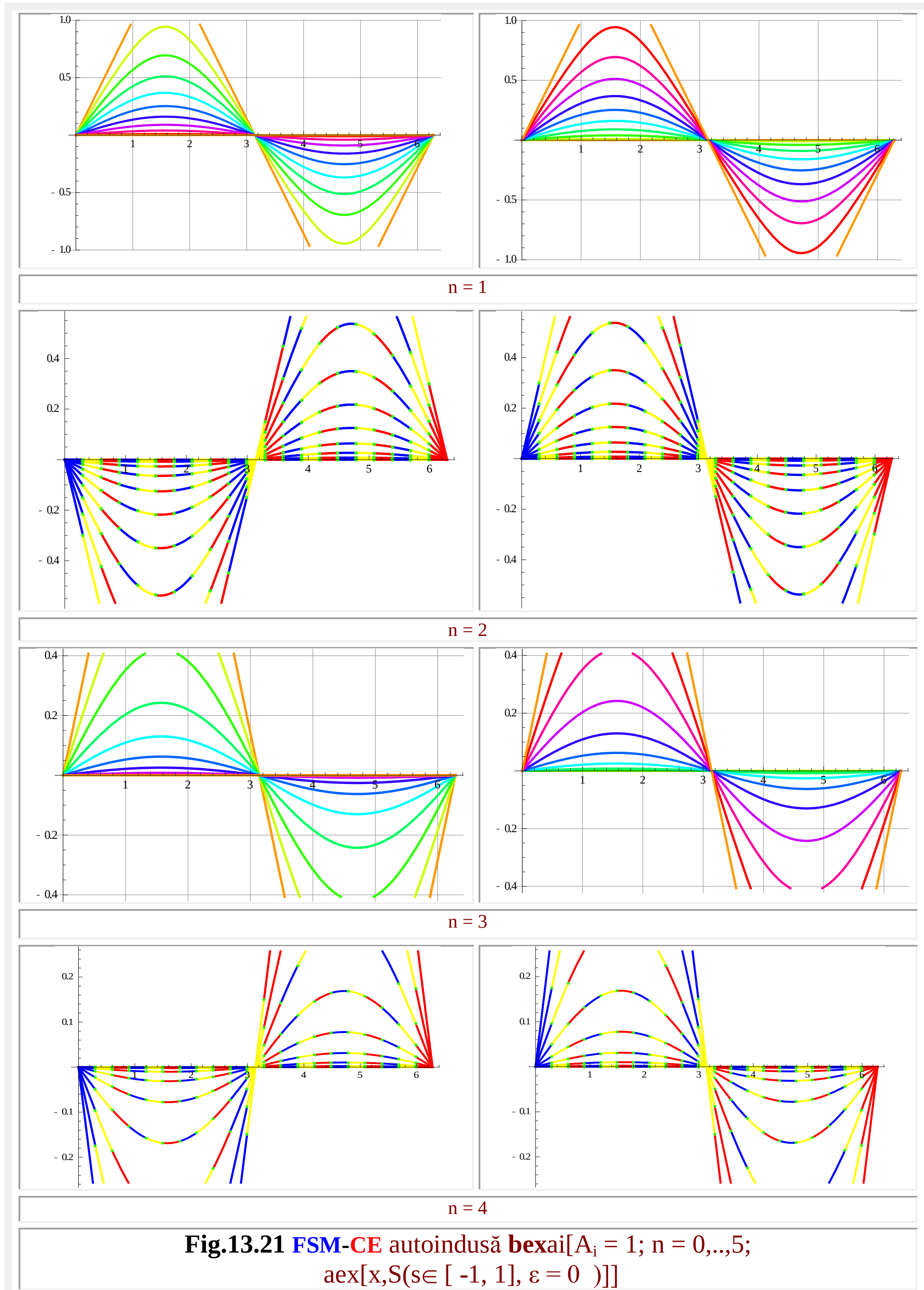


Fig.13.21 FSM-CE autoindusă **bex**ai[A_i = 1; n = 0,..,5; aex[x,S(s∈ [-1, 1], ε = 0)]]

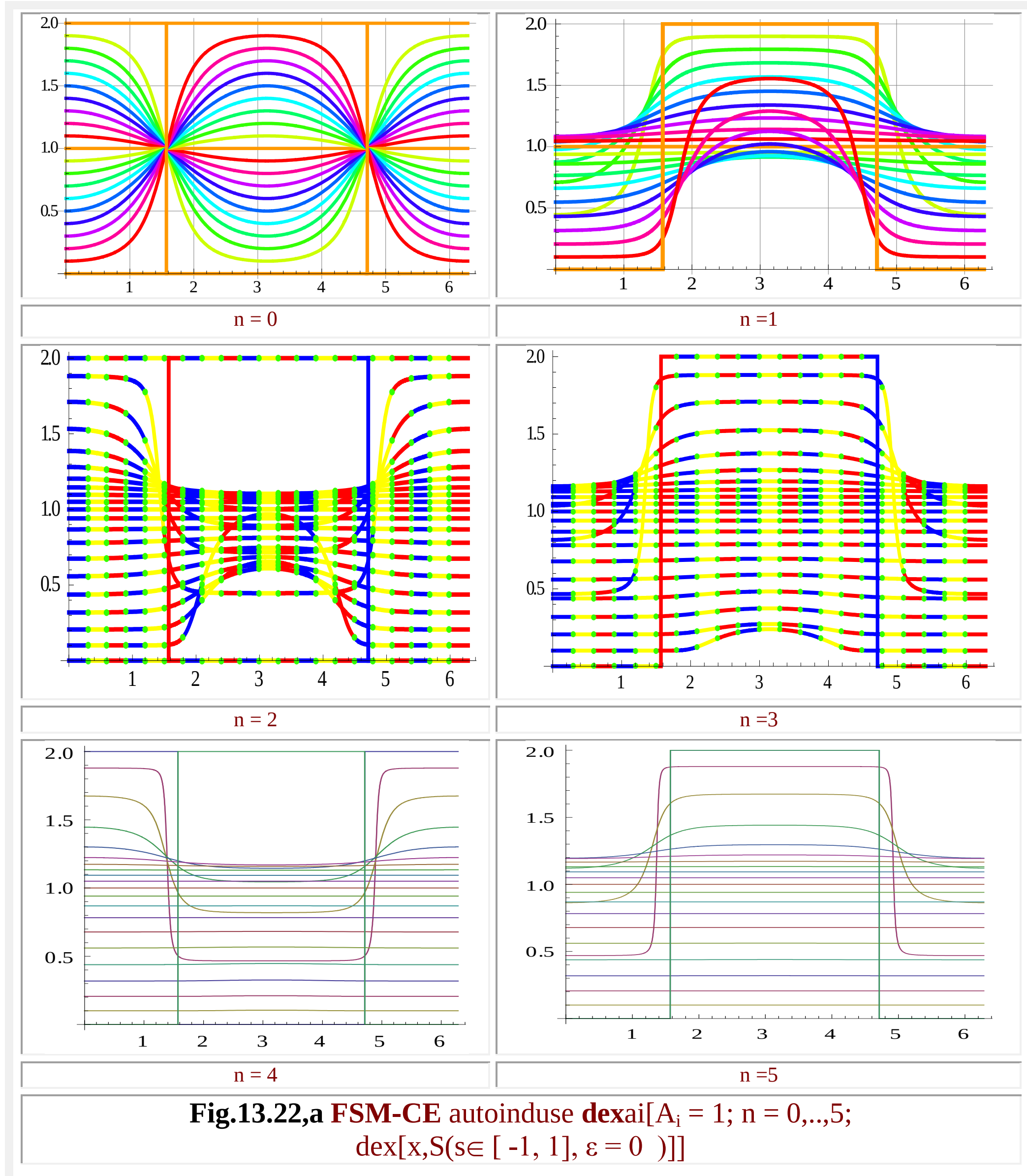


Fig.13.22,a FSM-CE autoinduse **dex**ai[A_i = 1; n = 0,..,5; dex[x,S(s∈ [-1, 1], ε = 0)]]

Una dintre cele mai importante **FSM-CE**, amplitudine excentrică de variabilă excentrică, are graficele **FAI** prezentate în **figura 13.20** pentru s ∈ [-1, 1].

FAI amplitudine excentrică de variabila excentrică aexθ sunt identice cu aceleaşi **FSM-CE** de excentricitate dublă → a2exθ, tripla → a3exθ şi, în general, multiplă a(n+1)exθ, adică

Pentru excentricitatea numerica s = 1 şi pentru un grad de autoinducţie **n** mai mare decât cel din **figura 13.18,c** (n = 5), se obţin funcţii mai apropiate de cele

dreptunghiulare de perioadă 2π. **Figura 13.18,d** exprimă modificările graficelor funcţiilor anterioare (s = 0,8; 0,9; 1) dacă se modifică **ε**: $\varepsilon = \pi \rightarrow \varepsilon = 3\pi/2$.

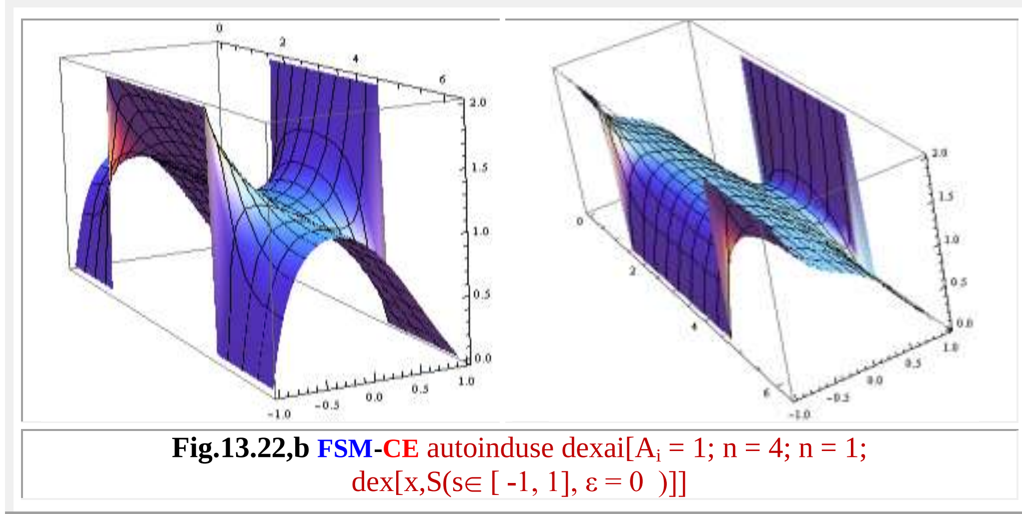
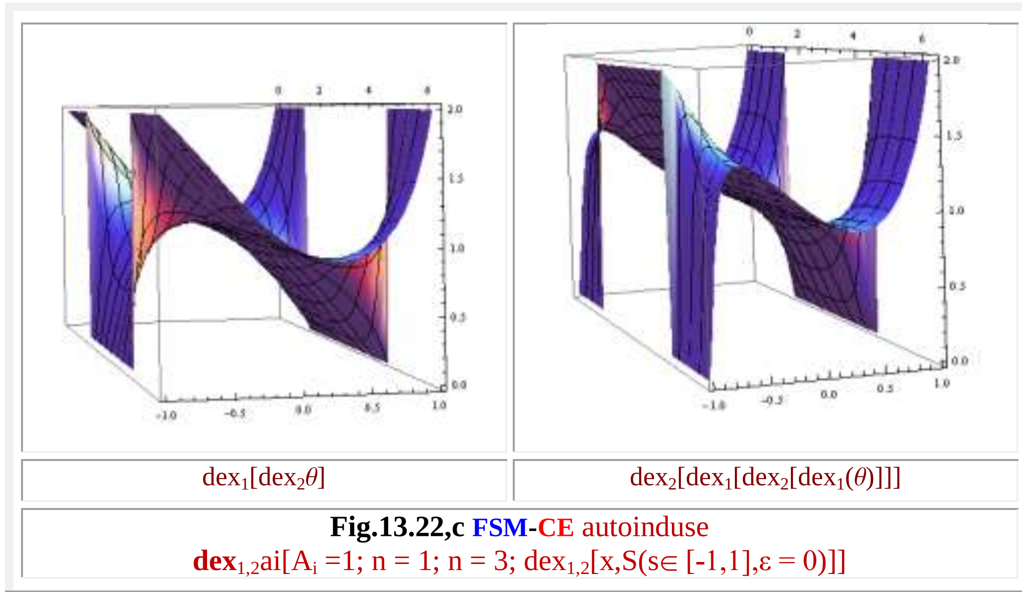


Fig.13.22,b **FSM-CE** autoinduse dexai[A_i = 1; n = 4; n = 1; dex[x,S(s∈ [-1, 1], ε = 0)]]



$dex_1[dex_2\theta]$ $dex_2[dex_1[dex_2[dex_1(\theta)]]]$

Fig.13.22,c **FSM-CE** autoinduse **dex**$_{1,2}$ai[A_i =1; n = 1; n = 3; $dex_{1,2}$[x,S(s∈ [-1,1],ε = 0)]]

Se evidenţiază modificările pronunţate ale formelor graficelor, odată cu creşterea gradului **n** de autoinducţie de la n = 1 la n = 4.

Funcţia supermatematică circulară excentrică autoindusă (**FSM-CE-AI**) ***cexaiθ*** pentru un excentru punct fix S(s ∈ [0,1], ε = 0), are graficele primei determinări – principale - prezentate în **figura 13.19,a** şi expresia (13.60).

(13.60) $sexai_{1,2}[x] = sexai_{1,2}[A_i, n, sex[x,S(s, \varepsilon)]]$

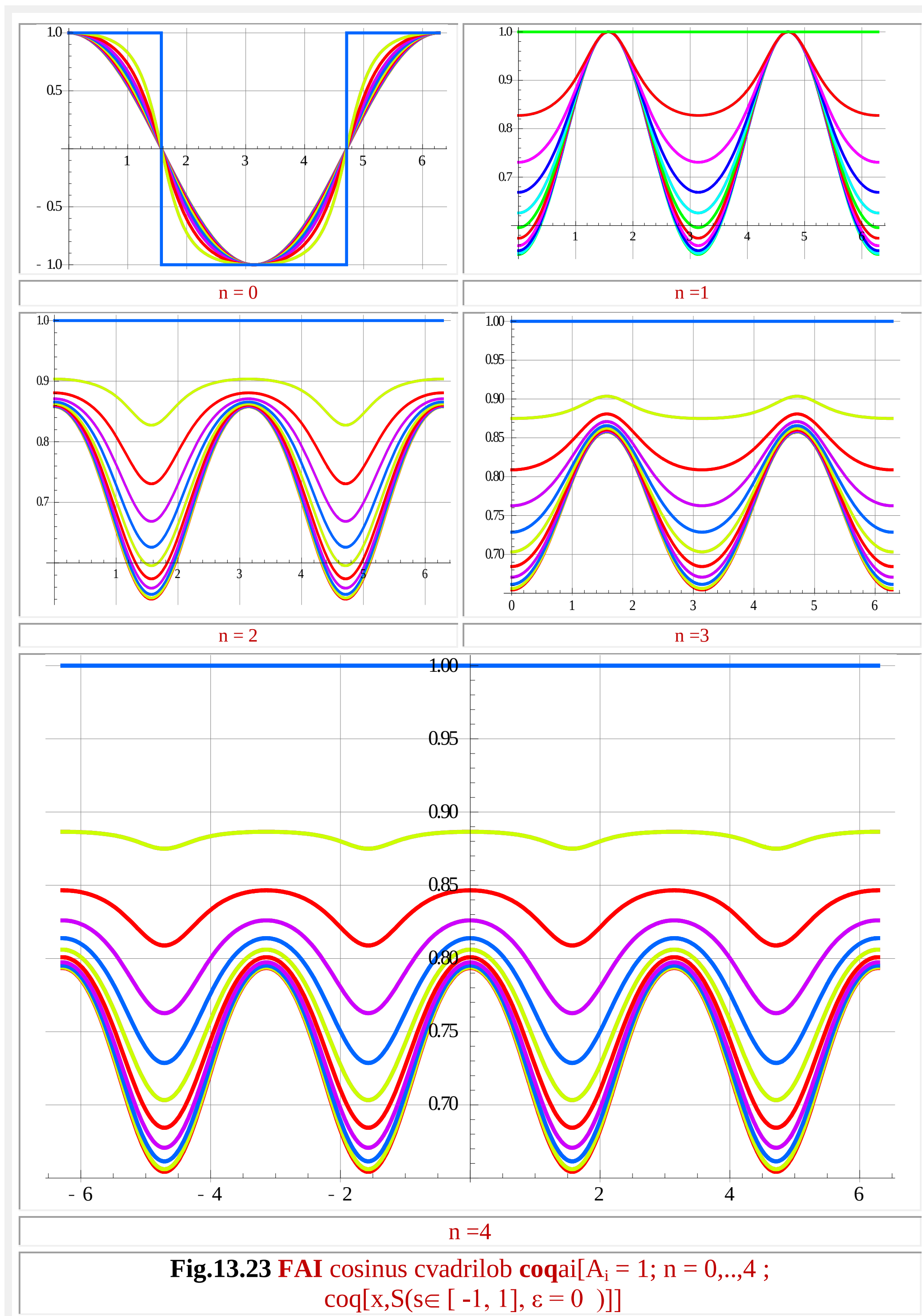


Fig.13.23 FAI cosinus cvadrilob **coq**ai[A_i = 1; n = 0,..,4 ; coq[x,S(s∈ [-1, 1], ε = 0)]]

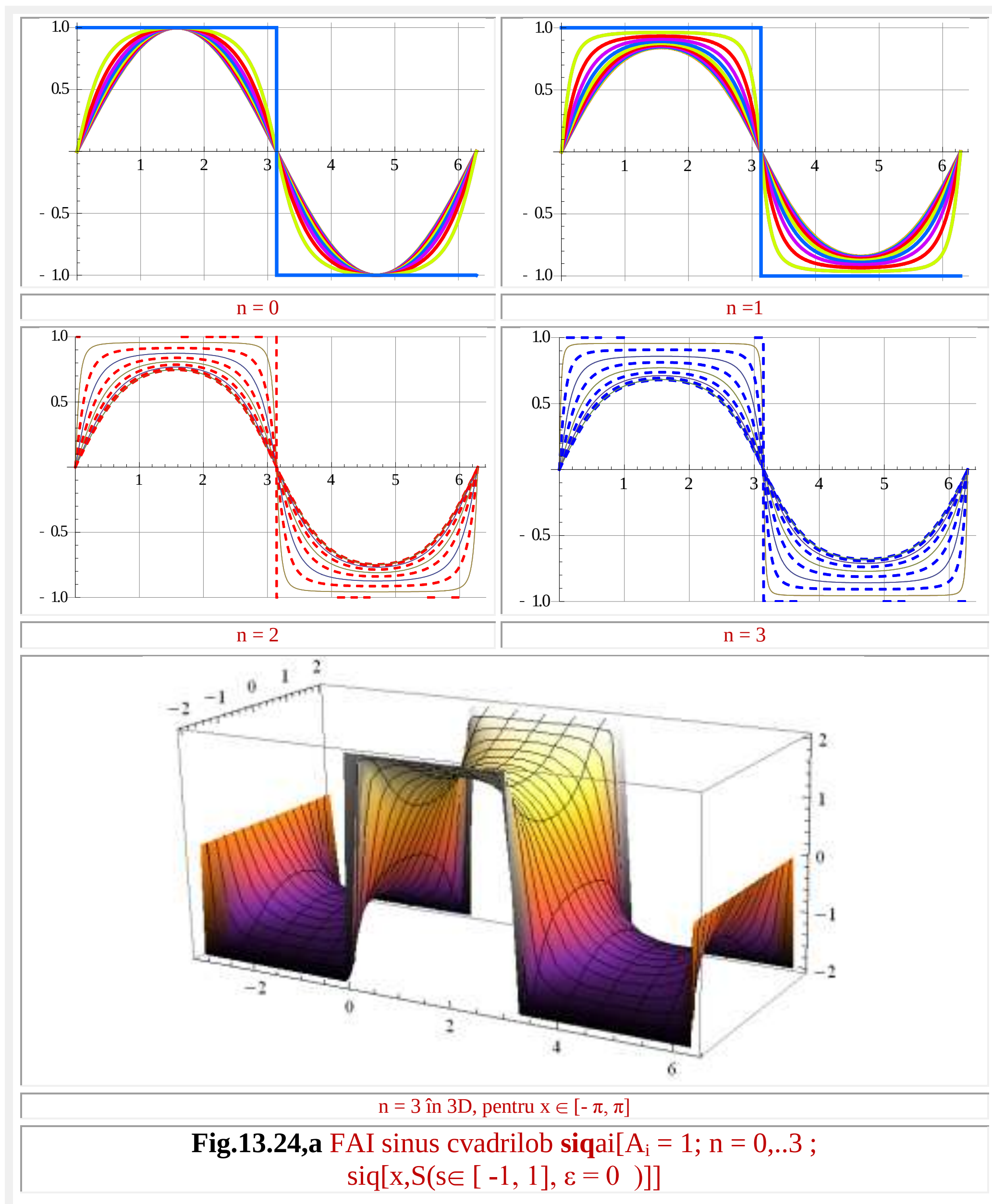


Fig.13.24,a FAI sinus cvadrilob **siq**ai[A_i = 1; n = 0,..3 ; siq[x,S(s∈ [-1, 1], ε = 0)]]

Pentru a evidenţa / ilustra complexitatea scrierii acestor ecuaţii, se prezintă explicit ecuaţia "în clar" în continuare, pentru un grad de autoinducţie de n = 4 şi graficele din **figura 13.19,a**.

Graficele seamănă cu distribuţia liniilor de curent ale curgerilor turbulente (pentru valori mici ale excentricităţii) şi laminare (pentru valori mari: 1; 0,9; 0,8 ş.a.m.d), între straturile unui fluid, în conducte / canale deschise.

Se observă o trecere succesivă, continuă, de la o “curgere turbulentă la una laminară” începând de la excentricităţile numerice **s = 1** spre cele de s = 0, odată cu creşterea lui n.

Graficele **FSM-CE-AI** cexai[A_i = 1; n = 0, … 5; cex[θ,S(s∈[-1,0], ε = 0)] sunt prezentate în **figura 13.19,b** în 2D şi în **figura 13.19,c** pentru n = 2 şi n = 4 în 3D.
Se prezintă, uneori, şi suprafeţele în **3D** în ideea că acestea pot fi urtilizate la realizarea programelor de generare a suprafeţelor complexe dintr-un nou sistem de generare a acestora cu ajutorul **FSM-CE** denumit **SM-CAD-CAM**, dar şi o posibilitate/modele de inspiraţie pentru arhitecţi.

(13.61)
$$\begin{cases} aexai[1,1,aex\theta]=a2ex\theta \\ aexai[1,2,aex\theta]=a3ex\theta \\ aexai[1,3,aex\theta]=a4ex\theta \\ aexai[1,n,aex\theta]=a(n+1)ex\theta \end{cases}$$

Notaţiile **FSM-CE** de excentricitate multiplă, din relaţiile (13.61), sunt în concordanţă cu notaţiile propuse pentru astfel de funcţii, prezentate în volumul I al lucrării.

FSM-CE dexθ, cea care exprimă raportul de transmitere a tuturor mecanismelor plane (V. Vol. I, pag. 189 … 196), are **FAI dexaiθ** cu graficele din **figura 13.22,a** are expresia

(13.62) dexaiθ = dexai[A_i; n = 0, …5; dex[θ, S(s∈[-1, 1], ε = 0)]]

Reprezentarea ei în **3D**, pentru n =1→ stânga şi n = 5 → dreapta, este prezentată în **figura 13.22,b**

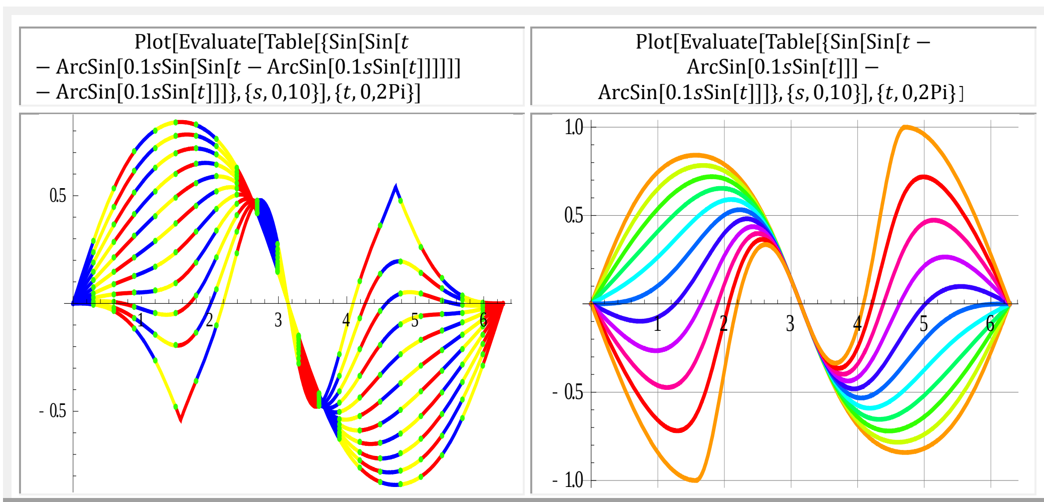
Deoarece **FSM-CE** au câte două determinări, o funcţie de genul

(13.62) $dexai_{1,2}[A_i,n,dex_{1,2}(\theta, S)] = dex_1[dex_2[dex_1[dex_2....dex_1[dex_2(\theta,S)]]]….]$

va fi **considerată** tot o funcţie autoindusă.

FSM cosinus cvadrilob/quadrilob are graficele funcţiilor sale autoinduse prezentate în **figura 13.23**, iar sinusul cvadrilob/quadrialob în **figura 13.24**. Pentru sinusul cvadrilob s-a realizat şi o omagine în 3D, care ilustrează suprafeţe în şa dublă.

Câteva **FSM-CE autoinduse** de interes sunt preentate în figurile următoare:



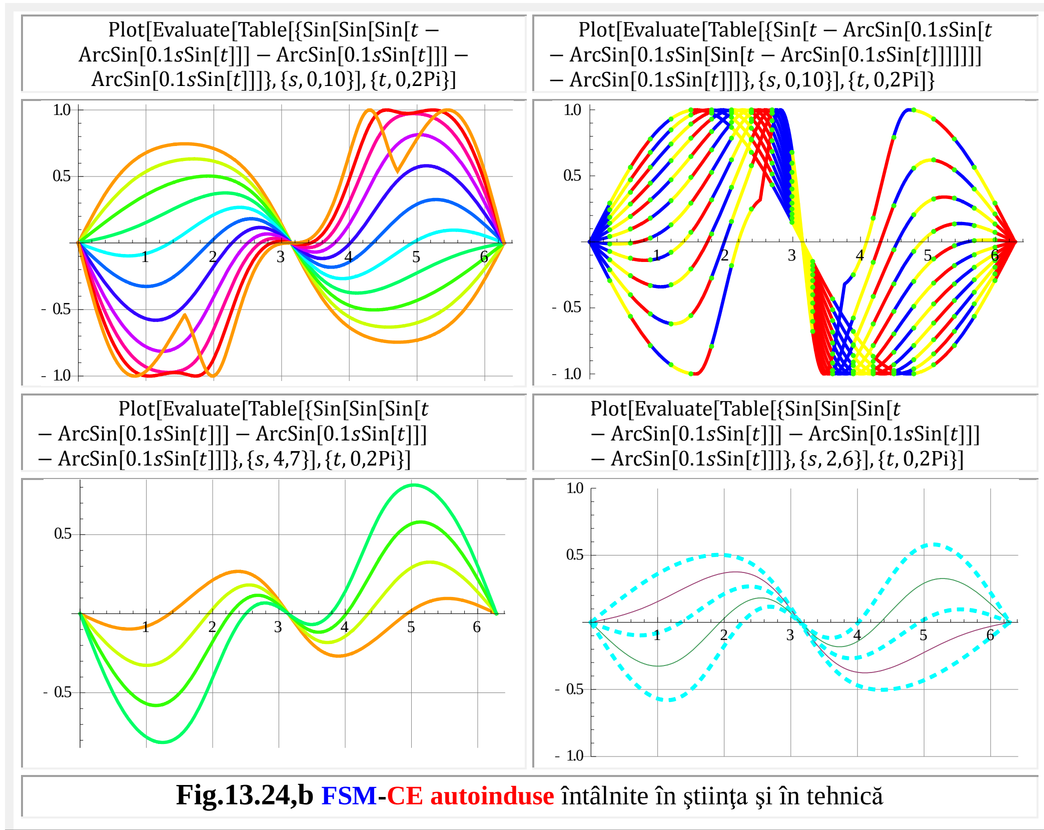


Fig.13.24,b FSM-CE autoinduse întâlnite în ştiinţa şi în tehnică

13.4.5 FUNCŢII CIRCULARE CENTRICE (FIC) ŞI EXCENTRICE (FIE) INDUSE ŞI COMBINAŢIILE LOR: FUNCŢII INDUSE HIBRIDE (FIH)

Aşa cum s-a afirmat deja, funcţiile **induse** sunt compuse din una sau mai multe funcţii diferite. Astfel, ele pot fi toate funcţii centrice, denumite funcţii induse centrice (**FIC**) ca, de exemplu (**Fig. 13.25,** cu n = 1, … ,10 şi cu n = 48)

(13.63) fc(x) = sin[cos[sin[cos[…..sin[x]]]]],

sau toate funcţii excentrice, denumite funcţi induse excentrice (**FIE**)

(13.64) fe(x) = sex[cex[sex[cex[sex[x, S(s,ε)]]]]].

Dacă funcţia compusă este alcătuită atât din funcţii centrice cât şi din funcţii excentrice, ea va fi denumită **funcţie indusă hibridă** (**FIH**). Un astfel de exemplu este funcţia

(13.65) fh(x) = sex[sin[cex[cos[sex[….cos[x]]]]]]

Ca şi în cazul **FAI** cosx (**Fig**. **13.2,d** şi **13.3**), **FIC** (13.63) din **figura 13.25** îşi dublează perioada şi pentru n → ∞, fc(x) → constanta (C = 0,69482..), aşa cum rezultă pentru un grad n de inducţie foarte ridicat, de n = 48. Constanta rezultă şi din rezolvarea ecuaţiilor succesive, folosind programul **MATHEMATICA 8** a lui **Stephan**

Wolfram, ca de exemplu

(13.66) `FindRoot[Sin[Cos[x]]==x,{x,0,2 Pi}]` → `{x→0.694}`

Plot[{ Sin[Cos[x]], Sin[Cos[Sin[x]]], Sin[Cos[Sin[Cos[x]]]], Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]], Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[x]]]]]], Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]]]], Sin[Cos[Sin[Cos [Sin[Cos[Sin[Cos[x]]]]]]]], Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos [Sin[Cos[Sin[x]]]]]]]]], Sin[Cos[Sin[Cos [Sin[Cos[Sin[Cos [Sin[Cos[x]]]]]]]]]] , Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos [Sin[Cos[Sin[x]]]]]]]]]]] },{x,0,2 Pi}]	Plot[{Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin [Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin [Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin [Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[Cos[Sin [Cos[Sin[x]]}},{ x,0,2 Pi}]
0.80, 0.75, 0.70, 0.65, 0.60, 0.55; 1 2 3 4 5 6	0.69482, 0.69482, 0.69482, 0.69482, 0.69482; 1 2 3 4 5 6
n = 1, …, 10	n = 48

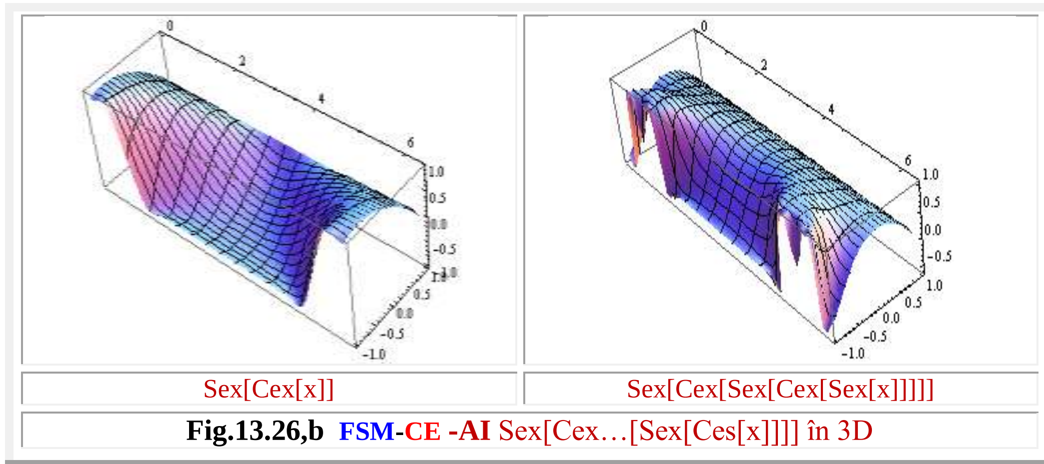


Fig.13.25 Funcţii induse centrice (**FIC**) fc(x) = sin[cos[sin[cos[…sin[x]]]]]

1.0, 0.5, - 0.5, - 1.0; 1 2 3 4 5 6	1.0, 0.5, - 0.5; 1 2 3 4 5 6
Sex[Cex[x]]	Sex[Cex[Sex[x]]]
1.0, 0.5, - 0.5; 1 2 3 4 5 6	1.0, 0.5, - 0.5; 1 2 3 4 5 6
Sex[Cex[Sex[Cex[x]]]]	Sex[Cex[Sex[Cex[Sex[x]]]]]

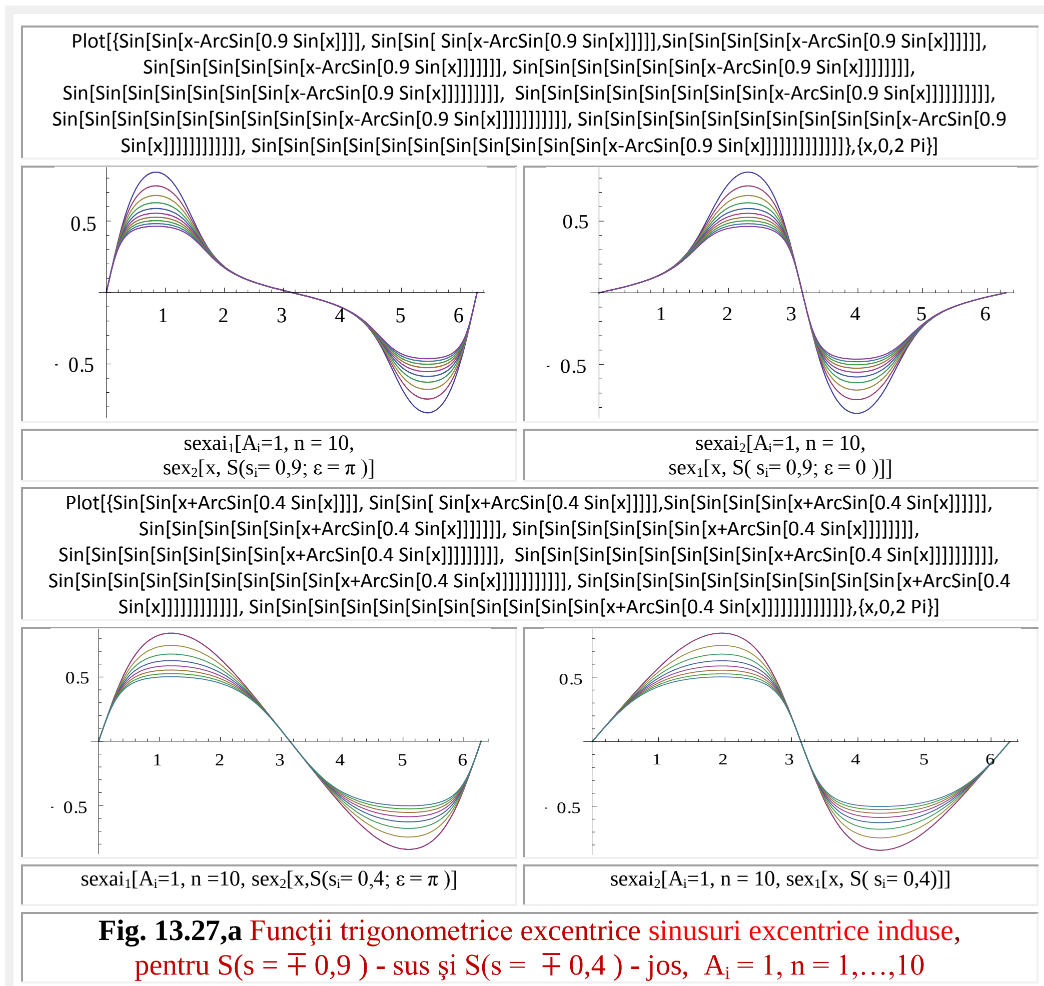


Fig.13.26,a FSM-CE -AI Sex[Cex…[Sex[Ces[x]]]]



Sex[Cex[x]] | Sex[Cex[Sex[Cex[Sex[x]]]]]

Fig.13.26,b **FSM-CE -AI** Sex[Cex…[Sex[Ces[x]]]] în 3D



```
Plot[{Sin[Sin[x-ArcSin[0.9 Sin[x]]]], Sin[Sin[ Sin[x-ArcSin[0.9 Sin[x]]]]],Sin[Sin[Sin[Sin[x-ArcSin[0.9 Sin[x]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x-ArcSin[0.9 Sin[x]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x-ArcSin[0.9 Sin[x]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x-ArcSin[0.9 Sin[x]]]]]]]]],  Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x-ArcSin[0.9 Sin[x]]]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x-ArcSin[0.9 Sin[x]]]]]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x-ArcSin[0.9
Sin[x]]]]]]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x-ArcSin[0.9 Sin[x]]]]]]]]]]]]]},{x,0,2 Pi}]
```

$sexai_1[A_i=1, n = 10,$ $sex_2[x, S(s_i= 0,9; \varepsilon = \pi)]$ | $sexai_2[A_i=1, n = 10,$ $sex_1[x, S(s_i= 0,9; \varepsilon = 0)]]$

```
Plot[{Sin[Sin[x+ArcSin[0.4 Sin[x]]]], Sin[Sin[ Sin[x+ArcSin[0.4 Sin[x]]]]],Sin[Sin[Sin[Sin[x+ArcSin[0.4 Sin[x]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x+ArcSin[0.4 Sin[x]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x+ArcSin[0.4 Sin[x]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x+ArcSin[0.4 Sin[x]]]]]]]]],  Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x+ArcSin[0.4 Sin[x]]]]]]]]]],
Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x+ArcSin[0.4 Sin[x]]]]]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x+ArcSin[0.4
Sin[x]]]]]]]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[x+ArcSin[0.4 Sin[x]]]]]]]]]]]]]},{x,0,2 Pi}]
```

$sexai_1[A_i=1, n =10, sex_2[x,S(s_i= 0,4; \varepsilon = \pi)]$ | $sexai_2[A_i=1, n = 10, sex_1[x, S(s_i= 0,4)]]$

Fig. 13.27,a Funcţii trigonometrice excentrice sinusuri excentrice induse, pentru S(s = ∓ 0,9) - sus şi S(s = ∓ 0,4) - jos, $A_i = 1$, n = 1,…,10

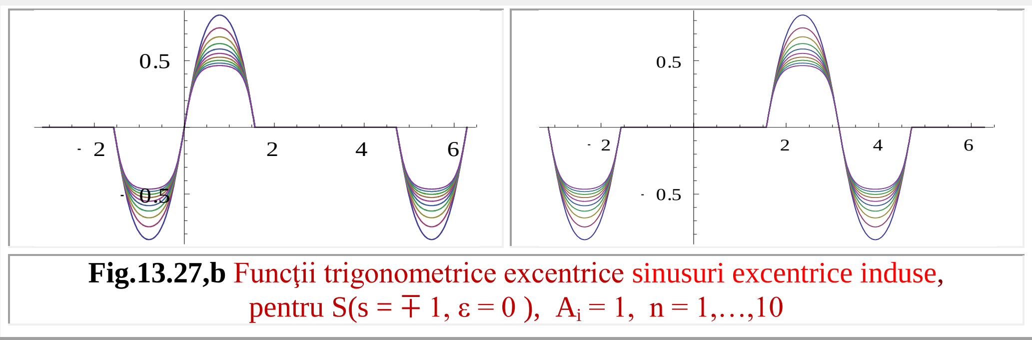


Fig.13.27,b Funcţii trigonometrice excentrice sinusuri excentrice induse, pentru $S(s = \mp 1, \varepsilon = 0)$, $A_i = 1$, $n = 1,\ldots,10$

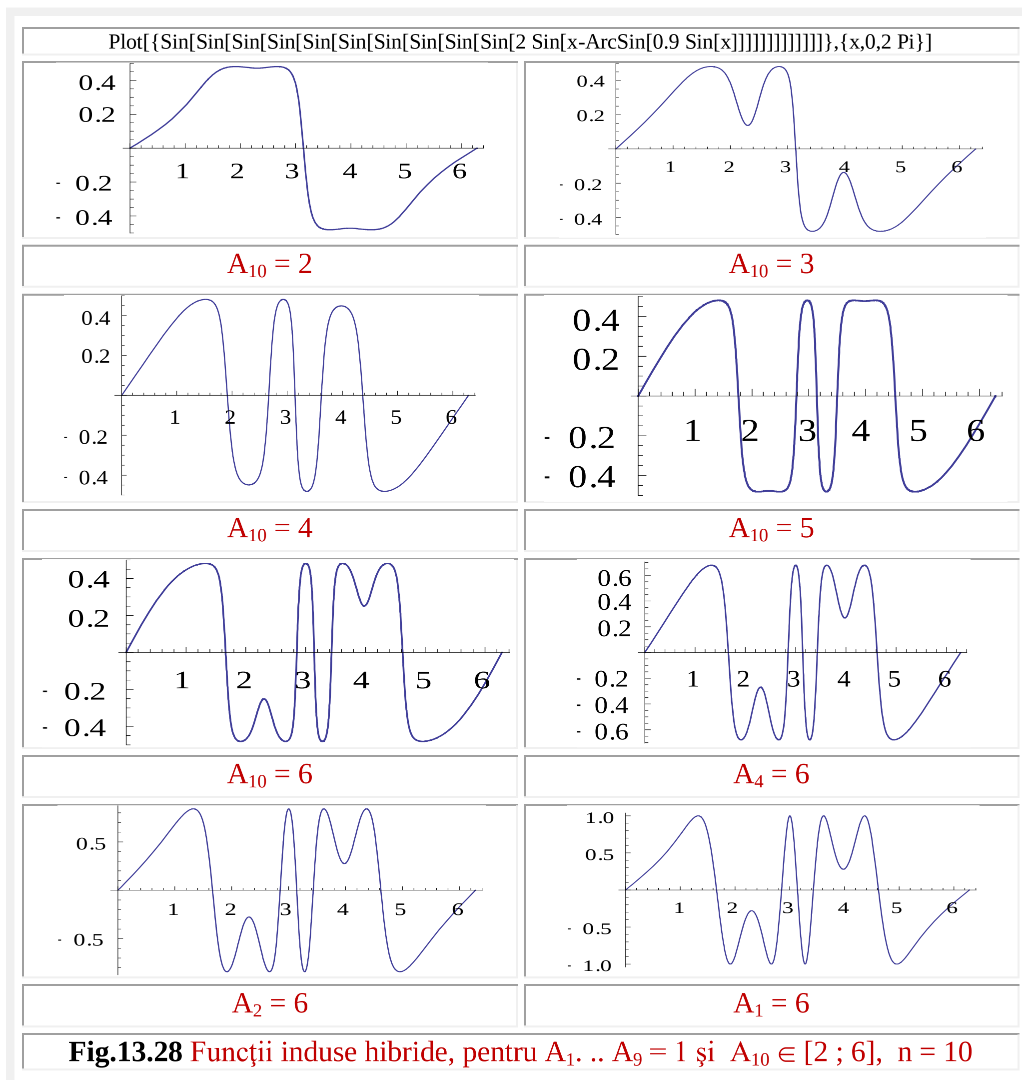


Fig.13.28 Funcţii induse hibride, pentru $A_1. .. A_9 = 1$ şi $A_{10} \in [2 ; 6]$, $n = 10$

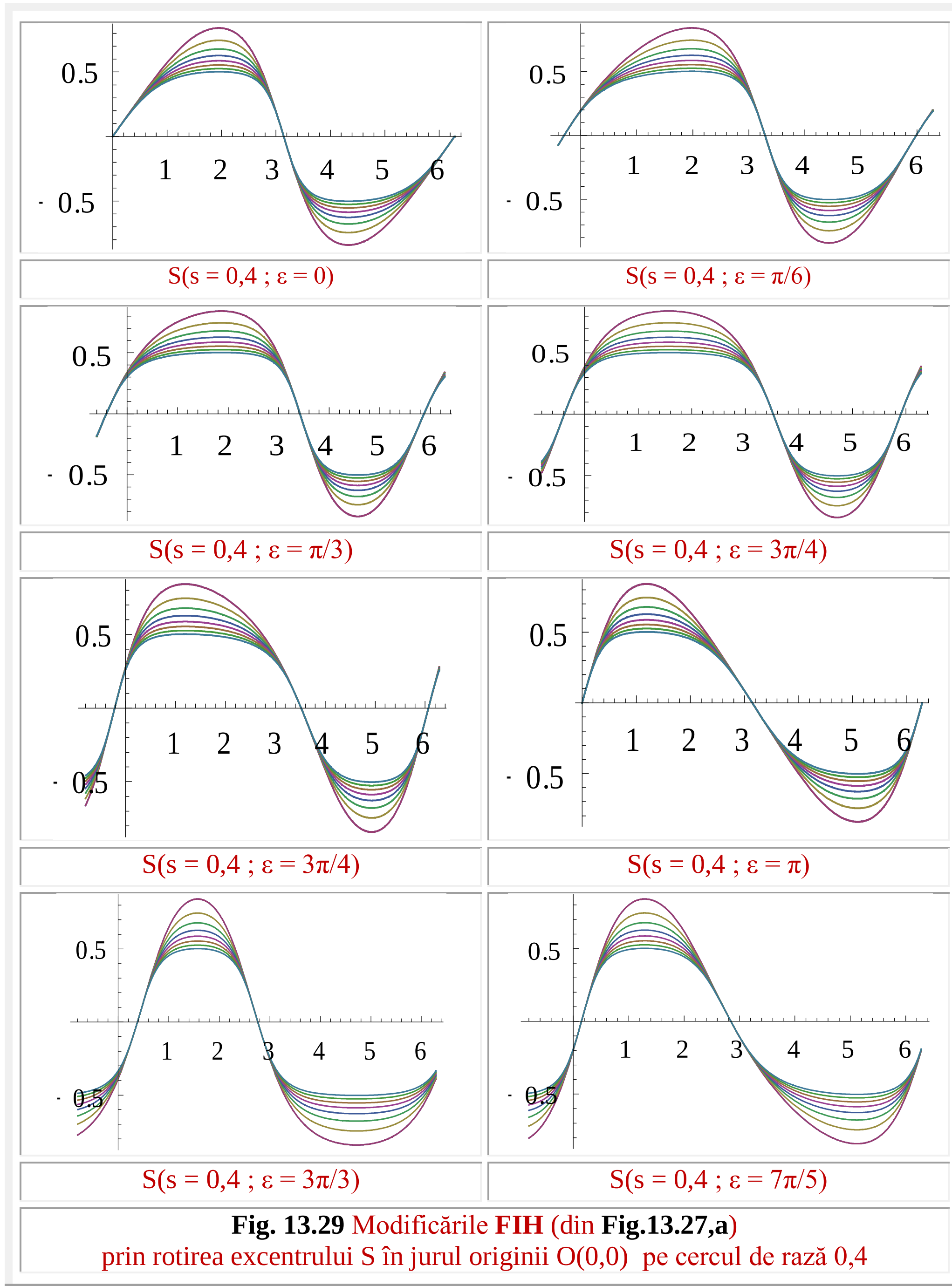


Fig. 13.29 Modificările **FIH** (din **Fig.13.27,a**)
prin rotirea excentrului S în jurul originii O(0,0) pe cercul de rază 0,4

Funcţii induse excentrice (**FIE**) sunt prezentate în **figura 13.26, a** în 2D şi **b** în 3D.

O serie de funcţii induse hibride (**FIH**) sunt prezentate în continuare. Astfel, în **figura 13.27,a** este prezentata funcţia indusă hibridă

(13.67) fh(x) = sin[sin[sin[…sin[sex[x,S(s, ε)]]]]]

pentru S(s = - 0,9, ε = 0) sus şi s = - 0,4 jos.

În **figura 13.27,b** sunt prezentate graficele pentru s = ±1, cu n = 0, … ,10

Pentru a urmării influenţa amplitudinilor asupra formelor graficelor **FIH** s-au prezentat graficele din **figura 13.28**, care arată că, prin modificarea amplitudinilor, formele graficelor **FIH** se modifică foarte mult.

Modificările formelor graficelor **FIH** sunt urmărite în **figura 13.29**, în care excentrul **S** se roteşte în jurul originii **O**(0,0) pe un cerc de rază egală cu excentricitatea numerică s = 0,4 = constant. Se observă că pentru ε ∈ [0, π] domeniul expansiv creşte şi cel contractiv scade, apoi, pentru ε ∈ [π, 0] fenomenul se inversează. Amplitudinile scad cu creşterea gradului de inducţie **n** şi sunt aceleaşi pentru un anumit **n**. Rezultă că pe lângă contracţie şi expansiune are loc şi o translaţie pe direcţia x, a cărei deplasare scade cu creşterea lui O translaţie a punctelor curbelor **FIH** are loc şi numai datorită creşterii gradului de inducţie n, simultan cu expansiunea punctelor curbelor, care duc la “rotunjirea” acestora, aşa cum se observă în **figura13.30**, la trecerea de la sin[sex[x]] la sin[sin[sin[..sex[x]]]].

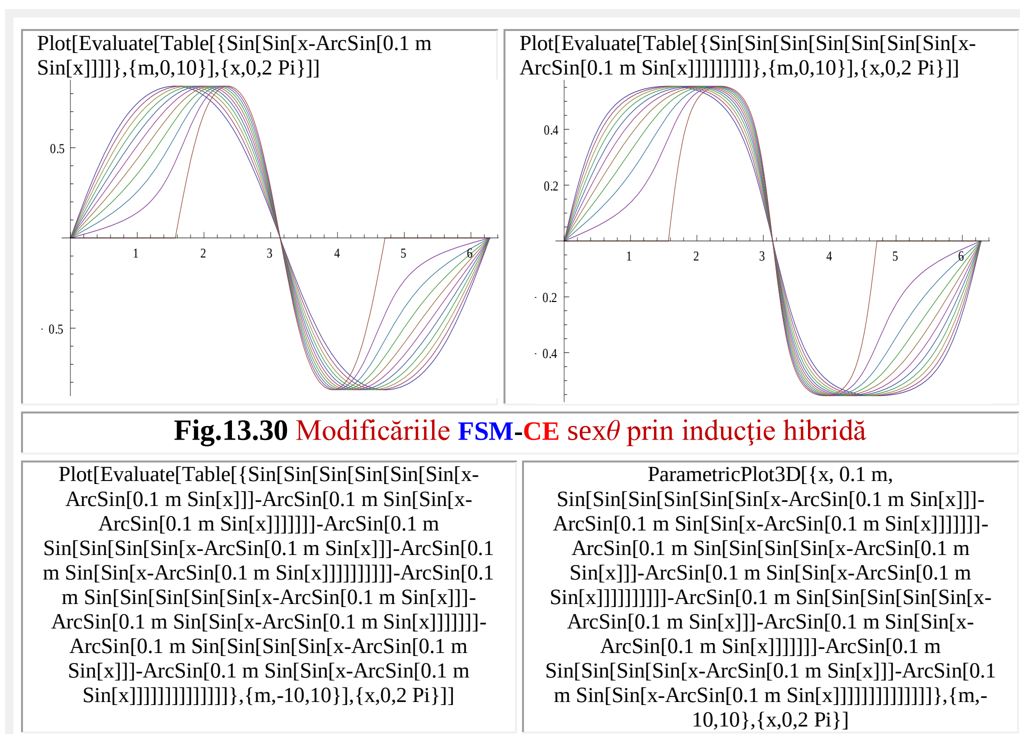


Fig.13.30 Modificăriile **FSM-CE** sexθ prin inducţie hibridă

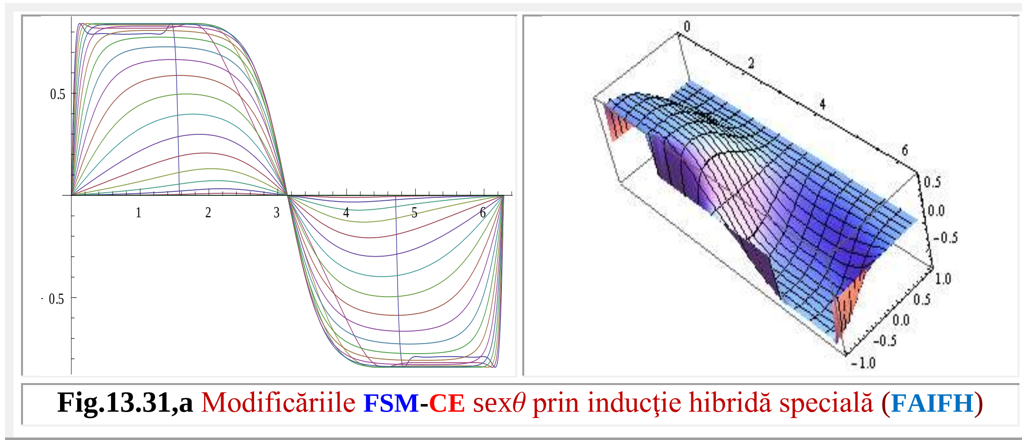


Fig.13.31,a Modificăriile **FSM-CE** sexθ prin inducţie hibridă specială (**FAIFH**)

Inducţii hibride speciale sunt prezentate în **figurile 13.31,a** şi **13.31,b**. Ele sunt formate astfel: o FIH, la un moment dat, este selecţionată şi copiată, apoi variabila x este înlocuită peste tot cu funcţia indusă hibridă selecţionată. Apoi, se repetă această operaţie de mai multe ori.

Un exemplu este prezentat în continuare.

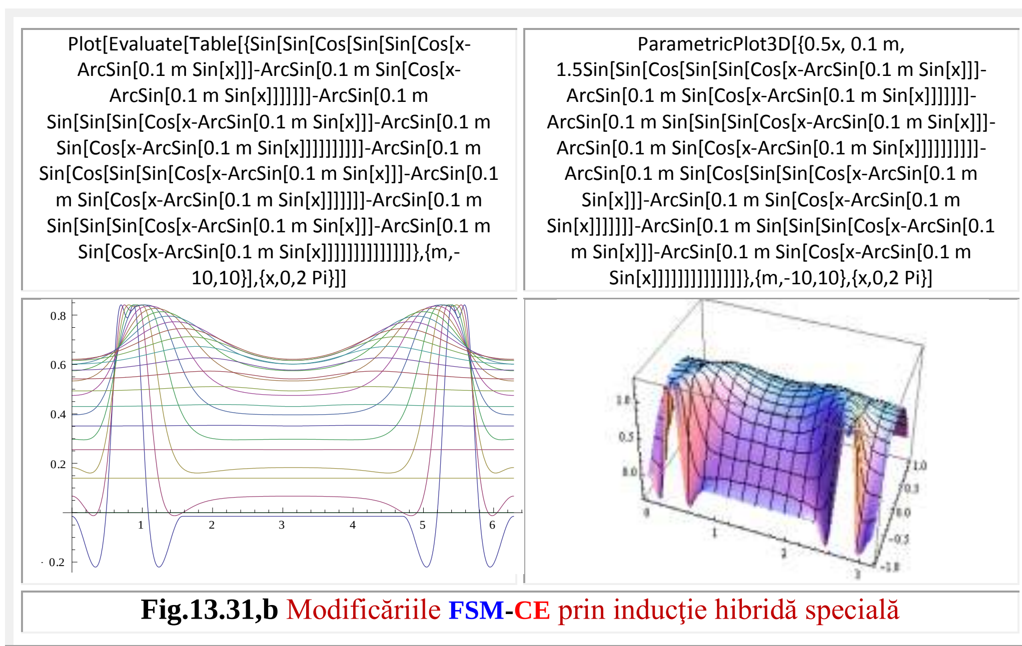


Fig.13.31,b Modificăriile **FSM-CE** prin inducţie hibridă specială

Fie **FIH**

(13.68) sin[sex[x]]= sin[sin[x-arcsin[s.sin(x-ε)]]]

Se copiază această FIH, în culori distincte pentru o înteleger mai facilă

(13.68’) sin[sin[x-arcsin[s.sin(x-ε)]]] sin[sin[x-arcsin[s.sin(x-ε)]]]

apoi, în locul vatriabilei x din (13.68) se introduce funcţia hibridă copiată şi rezultă
(13.69) sin[sin[sin[sin[x-arcsin[s.sin(x-ε)]]]-arcsin[s.sin(sin[sin[x-arcsin[s.sin(x-ε)]]]-ε)]]]

Operaţia se poate repeta, copiindu-se **FAIFH** (13.69) şi înlocuindu-se variabilele x cu funcţia nou copiată. Deoarece, variabila este succesiv inlocuită cu funcţia anterioară, arată că avem de-a face cu un proces de autoinducţie a unor funcţii hibride (**FAIFH**).

Pentru că acest proces este greu de urmărit, în figurile anterioare au fost prezentate, deasupra greficelor (2D) ca şi a reprezentarilor 3D şi expresiile funcţiilor autoinduse hibride (**FAIFH**).

Acest tip de autoinducţie este net diferit de cel prezentat în §**13.3** şi §**13.4.**
În acele paragrafe se autoinduceau continuu aceleaşi funcţii

(sin[sin[sin[sin[…[sin[x]]]]]] sau cos[cos[cos[….[cos[x]]]]])

pe când, în cazul de faţă, la fiecare inducţie se induc, simultan, **toate** funcţiile **anterior induse**. Ca de exemplu, în cazul unor **FCC**

n = 2 → sin[cos[cos[x]]] → **FHC**
n = 3 → sin[cos[cos[sin[cos[cos[x]]]]]] → **FAIFHC**
n = 4 → sin[cos[cos[sin[cos[cos[sin[cos[cos[sin[cos[cos[x]]]]]]]]]]]] → **FAIFHC**
n=5→sin[cos[cos[sin[cos[cos[sin[cos[cos[sin[cos[cos[
sin[cos[cos[sin[cos[cos[sin[cos[cos[sin[cos[cos[x]]]]]]]]]]]]]]]]]]]]]]]] → **FAIFHC**

Exemplele ar putea continua mult, dar ne limita la a sublinia, în loc de concluzii, că **autoinducţia şi inducţia**, ca forme particulare ale funcţiilor compuse, constitue un nou mod de multiplicare a funcţiilor matematice, spre satisfacţia programatorilor de maşini-unelte **CNC**, în cazul programării cu directoare şi / sau generatoare programată a suprafeţelor complexe, şi, în special, prin utilizarea programelor **SM-CAD-CAM** ca şi spre satisfacţia arhitecţiilor.

Şi, cu siguranţă, cu trecerea timpului, numărul beneficiarilor va creşte foarte mult: **Dumnezeu** ajută, dar nu bagă şi-n traistă / straiţă !

13.5 DERIVATELE FUNCŢIILOR AUTOINDUSE ŞI ALE FUNCŢIILOR INDUSE

Fiind funcţii compuse, sau, mai precis, **funcţii de funcţii**, derivatele lor, în principiu, nu ridică probleme.

Trebuie menţionat că în "**FORMULARUL MATEMATIC ŞI TEHNIC**" Ed. Tehnică, 1953, pag.201, se face distincţie între **funcţia de funcţie**, care este y = f(u), u = g(x) cu derivata y' = f'.g' şi diferenţiala dy = f'(u).du şi **funcţia compusă**, care este y = f(u,v), u = f_1(x); v = f_2(x); cu derivata y' = f'_u.u' + f'_v.v' şi diferenţiala dy = f'_u.du + f'_v.dv, diferenţiere care nu mai apare în manualele recente.

Insă, realizarea concretă a derivatelor **FAI** şi a **FI**, mai ales pentru grade înalte de inducţie sau de autoinducţie **n**, ridică problemele şi complicaţiile încep să apară, cu precădere la derivatele de ordin superior, aşa cum se va vedea în continuare.

13.5.1 DERIVATELE FUNCŢIILOR CENTRICE AUTOINDUSE (FC-AI)

Fie funcţia autoindusă (**FAI**)

(13.70) $f(x) = \text{sinai}[A_i = 1,\ n = 1,\ \sin x] = \sin[\sin x]$

Fiind o funcţie de functii / compusă , de tipul y = f(u), u = g(x) sau y = f(g(x)) cu derivata y' = f'.g', prima ei derivată este

(13.71) $f'(x) = \cos[\sin x].\cos x$, iar derivata a doua va fi

(13.72) $f''(x) = -\sin[\sin x].\cos^2 x - \cos[\sin x].\sin x$

Dacă gradul de inducţie **n** al **FAI** este mai ridicat, ca de exemplu n = 4,

(13.73) $f(x) = \sin[\sin[\sin[\sin[\sin[x]]]]]$

atunci derivarea ridică ceva probleme/grutăţi, nu în principiu, care-i clar, ci în fapt, la efectuarea concretă / practică a derivatelor, aşa cum rezultă în continuare.

Prima derivată al **FAI** (13.73), realizată computerizat (**MATHEMATICA 8**), este

(13.74) $f'(x) = \text{Cos}[x]\ \text{Cos}[\text{Sin}[x]]\ \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]\ \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]*$
$*\text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]]$

iar derivata a doua, obţinută la fel, va fi

(13.75) $-\ \text{Cos}[\text{Sin}[x]]\ \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]\ \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]*$
$*\text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]]\ \text{Sin}[x]-\ \text{Cos}[x]^2\ \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]\ \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]$
$*\text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]]\ \text{Sin}[\text{Sin}[x]]-\text{Cos}[x]^2\ \text{Cos}[\text{Sin}[x]]^2\ \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]$
$*\text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]]\ \text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]-\text{Cos}[x]^2\ \text{Cos}[\text{Sin}[x]]^2\ \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]^2$
$*\text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]]\ \text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]-\text{Cos}[x]^2\ \text{Cos}[\text{Sin}[x]]^2$
$*\text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]^2\ \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]^2\ \text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[x]]]]]$

cu graficele din **figura 13.32**.

Dacă numai amplitudinea ultimei autoinducţii A_4 se modifică, de la 1 la $A_4 = \pi/2$, deci pentru FAI

(13.76) $f(x) = \text{sinai}[A_1=A_2=A_3=1,\ A4 = \pi/2;\ \sin x] = \sin[\sin[\sin[\sin[\pi.\sin x / 2]]]]$,

atunci prima derivată va fi

(13.77) $f'(x) = 1/2\ \pi\ \text{Cos}[x]\ \text{Cos}[1/2\ \pi\ \text{Sin}[x]]\ \text{Cos}[\text{Sin}[1/2\ \pi\ \text{Sin}[x]]]\ \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[1/2\ \pi\ \text{Sin}[x]]]]\ \text{Cos}[\text{Sin}[\text{Sin}[\text{Sin}[1/2\ \pi\ \text{Sin}[x]]]]]$, iar a doua derivată este

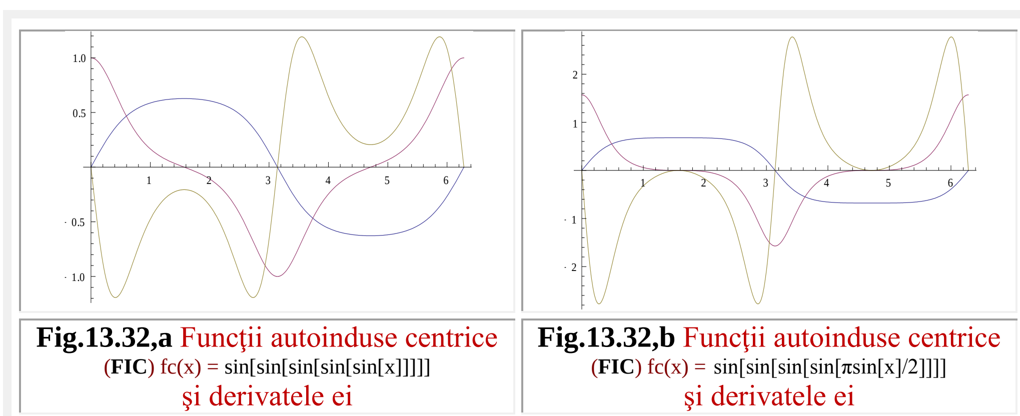


Fig.13.32,a Funcţii autoinduse centrice (**FIC**) fc(x) = sin[sin[sin[sin[sin[x]]]]] şi derivatele ei

Fig.13.32,b Funcţii autoinduse centrice (**FIC**) fc(x) = sin[sin[sin[sin[πsin[x]/2]]]] şi derivatele ei

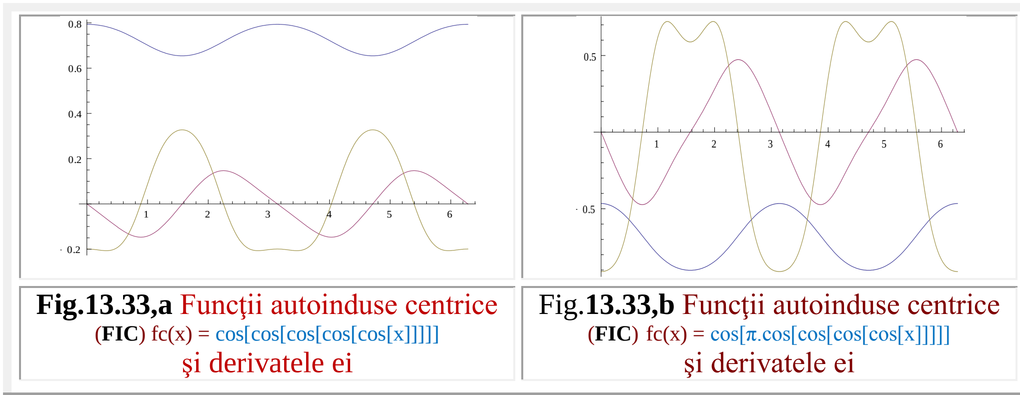


Fig.13.33,a Funcţii autoinduse centrice
(**FIC**) fc(x) = cos[cos[cos[cos[cos[x]]]]]
şi derivatele ei

Fig.**13.33,b** Funcţii autoinduse centrice
(**FIC**) fc(x) = cos[π.cos[cos[cos[cos[x]]]]]
şi derivatele ei

(13.78) f''(x) = -(1/2) π Cos[1/2 π Sin[x]] Cos[Sin[1/2 π Sin[x]]] Cos[Sin[Sin[1/2 π Sin[x]]]] Cos[Sin[Sin[Sin[1/2 π Sin[x]]]]] Sin[x]-1/4 π ^{2} Cos[x]^2 Cos[Sin[1/2 π Sin[x]]] Cos[Sin[Sin[1/2 π Sin[x]]]] Cos[Sin[Sin[Sin[1/2 π Sin[x]]]]] Sin[1/2 π Sin[x]]-1/4 π ^{2} Cos[x]^2 Cos[1/2 π Sin[x]]^2 Cos[Sin[Sin[1/2 π Sin[x]]]] Cos[Sin[Sin[Sin[1/2 π Sin[x]]]]] Sin[Sin[1/2 π Sin[x]]]-1/4 π ^{2} Cos[x]^2 Cos[1/2 π Sin[x]]^2 Cos[Sin[1/2 π Sin[x]]]^2 Cos[Sin[Sin[Sin[1/2 π Sin[x]]]]] Sin[Sin[Sin[1/2 π Sin[x]]]]-1/4 π ^{2} Cos[x]^2 Cos[1/2 π Sin[x]]^2 Cos[Sin[1/2 π Sin[x]]]^2 Cos[Sin[Sin[1/2 π Sin[x]]]]^2 Sin[Sin[Sin[Sin[1/2 π Sin[x]]]]]

Funcţia şi derivatele ei au graficele din **figura 13.32,b**

Funcţia autoindusă (**FAI**)

(13.79) f(x) = cosai[Ai=1, n=4, cosx] = cos[cos[cos[cos[cos[x]]]]]

are prima derivată

(13.80) f'(x) = –Sin[x] Sin[Cos[x]] Sin[Cos[Cos[x]]] Sin[Cos[Cos[Cos[x]]]] Sin[Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]]

şi a doua derivată

(13.81) f''(x) = -Cos[Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]] Sin[x]^2 Sin[Cos[x]]^2 Sin[Cos[Cos[x]]]^2 Sin[Cos[Cos[Cos[x]]]]^2+Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]] Sin[x]^2 Sin[Cos[x]]^2 Sin[Cos[Cos[x]]]^2 Sin[Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]]-Cos[Cos[Cos[x]]] Sin[x]^2 Sin[Cos[x]]^2 Sin[Cos[Cos[Cos[x]]]] Sin[Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]]+Cos[Cos[x]] Sin[x]^2 Sin[Cos[Cos[x]]] Sin[Cos[Cos[Cos[x]]]] Sin[Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]]-Cos[x] Sin[Cos[x]] Sin[Cos[Cos[x]]] Sin[Cos[Cos[Cos[x]]]] Sin[Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]]

cu graficele din **figura 13.33,a**.

Efectuând o modificare şi în această funcţie, la amplitudinea primei autoinducţii, adică, considerând **FAI**

(13.82) f(x) = cos[π.cos[cos[cos[πcos(x)/2]]]]

cu prime ei derivată

(13.83) f'(x) = -π Sin[x] Sin[Cos[x]] Sin[Cos[Cos[x]]] Sin[Cos[Cos[Cos[x]]]] Sin[π Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]]

şi cu a doua derivată

(13.84) F''(x) = -π^2 Cos[π Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]] Sin[x]^2 Sin[Cos[x]]^2 Sin[Cos[Cos[x]]]^{2}Sin[Cos[Cos[Cos[x]]]]^2+πCos[Cos[Cos[Cos[x]]]]Sin[x]^2

Sin[Cos[x]]^2 Sin[Cos[Cos[x]]]^2 Sin[π Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]]- π Cos[Cos[Cos[x]]] Sin[x]^2 Sin[Cos[x]]^2 Sin[Cos[Cos[Cos[x]]]] Sin[π Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]]+ π Cos[Cos[x]]Sin[x]^{2}Sin[Cos[Cos[x]]]Sin[Cos[Cos[Cos[x]]]]Sin[π Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]]-πCos[x] Sin[Cos[x]] Sin[Cos[Cos[x]]] Sin[Cos[Cos[Cos[x]]]] Sin[π Cos[Cos[Cos[Cos[x]]]]] au graficele din **figura 13.33,b**.

Atât graficele din **figura 13.32** cât şi cele din **figura 13.33** sunt des întâlnite în tehnică, din care cauză, dintre multitudinea / imensitatea de grafice posibile ale **FAI** ne-am limitat la acestea.

13.5.2 DERIVATELE FUNCŢIILOR CENTRICE INDUSE (FC-I)

Fie funcţia indusă (**FI**) cu $A_i = 1$, n = 4

(13.85) f(x) = sin[cos[sin[cos[sin[x]]]]]

Ea are prima derivată dată de expresia

(13.86) f'(x) = Cos[x] Cos[Cos[Sin[x]]] Cos[Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]] Sin[Sin[x]] Sin[Sin[Cos[Sin[x]]]]

şi a doua derivată, dată de expresia

(13.87) f''(x) = -Cos[x]^2 Cos[Cos[Sin[x]]]^2 Cos[Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]] Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]] Sin[Sin[x]]^2+Cos[x]^2 Cos[Cos[Sin[x]]] Cos[Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]] Cos[Sin[x]] Sin[Sin[Cos[Sin[x]]]]-Cos[Cos[Sin[x]]] Cos[Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]] Sin[x] Sin[Sin[x]] Sin[Sin[Cos[Sin[x]]]]+Cos[x]^2 Cos[Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]] Sin[Cos[Sin[x]]] Sin[Sin[x]]^2 Sin[Sin[Cos[Sin[x]]]]-Cos[x]^2 Cos[Cos[Sin[x]]]^2 Sin[Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]] Sin[Sin[x]]^2 Sin[Sin[Cos[Sin[x]]]]^2.

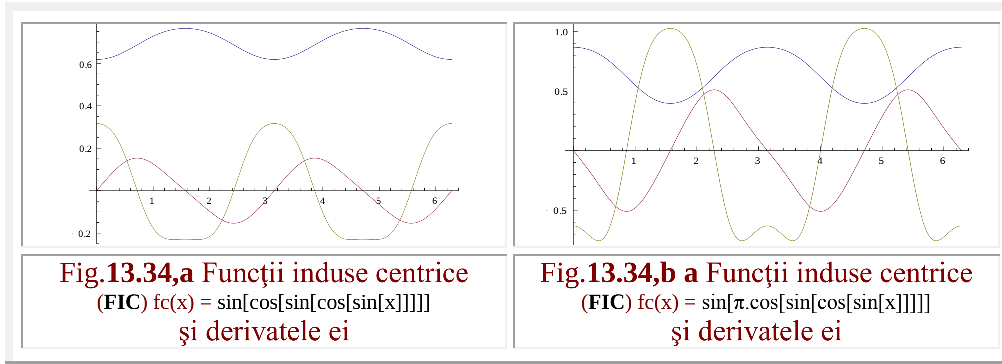


Fig.**13.34,a** Funcţii induse centrice (**FIC**) fc(x) = sin[cos[sin[cos[sin[x]]]]] şi derivatele ei

Fig.**13.34,b a** Funcţii induse centrice (**FIC**) fc(x) = sin[π.cos[sin[cos[sin[x]]]]] şi derivatele ei

Graficele funcţie cu derivatele ei sunt redate în **figura 13.34,a**

Pentru **FI**

(13.88) f(x) = sin[π.cos[sin[cos[sin[x]]]]] şi derivatele ei,

(13.89) f'(x) = π Cos[x] Cos[Cos[Sin[x]]] Cos[π Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]] Sin[Sin[x]] Sin[Sin[Cos[Sin[x]]]] şi

(13.90) f''(x) = - π Cos[x]^2 Cos[Cos[Sin[x]]]^2 Cos[π Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]] Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]] Sin[Sin[x]]^2+ π Cos[x]^2 Cos[Cos[Sin[x]]] Cos[π

Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]] Cos[Sin[x]] Sin[Sin[Cos[Sin[x]]]]- π Cos[Cos[Sin[x]]] Cos[π Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]] Sin[x] Sin[Sin[x]] Sin[Sin[Cos[Sin[x]]]]+ π Cos[x]^2 Cos[π Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]] Sin[Cos[Sin[x]]] Sin[Sin[x]]^2 Sin[Sin[Cos[Sin[x]]]]- π ^{2} Cos[x]^2 Cos[Cos[Sin[x]]]^2 Sin[π Cos[Sin[Cos[Sin[x]]]]] Sin[Sin[x]]^2 Sin[Sin[Cos[Sin[x]]]]^2 , cu graficele sunt date in **figura 13.34,b**

Se observă, prin comparaţie, că o mică modificare a uneia dintre amplitudini, în cazul de faţă a lui A_1 de la 1 la π, duce la o modifcare pronunţată a formei relative a graficelor.

Alte **FI** ca

(13.91) f(x) = sin[cos[sin[cos[sin[x]]]]] şi

(13.92) f(x) = sin[π.cos[sin[cos[sin[x]]]]] au graficele lor şi a derivatelor lor, prezentate, fără exprsiile derivatelor, în **figurile 13.35,a** şi, respectiv, **13.45,b**.

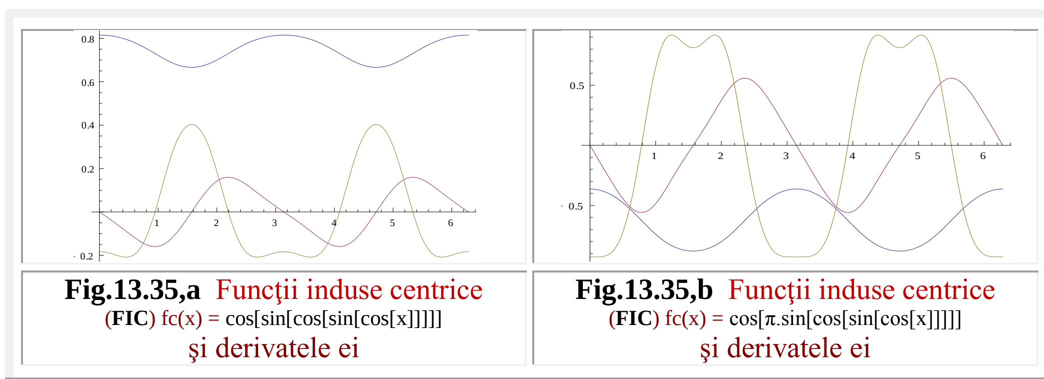


Fig.13.35,a Funcţii induse centrice (**FIC**) fc(x) = cos[sin[cos[sin[cos[x]]]]] şi derivatele ei

Fig.13.35,b Funcţii induse centrice (**FIC**) fc(x) = cos[π.sin[cos[sin[cos[x]]]]] şi derivatele ei

13.5.3 DERIVATELE FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE AUTOINDUSE (FCE-AI)

Fie **FSM-CE -AI**

(13.93) y(x) = sex[sex[x]] cu graficele din **figura 13.36,a**

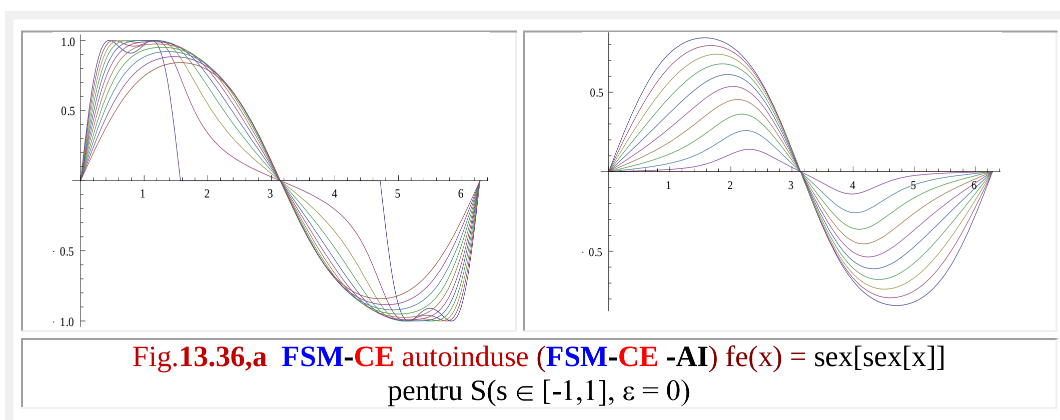
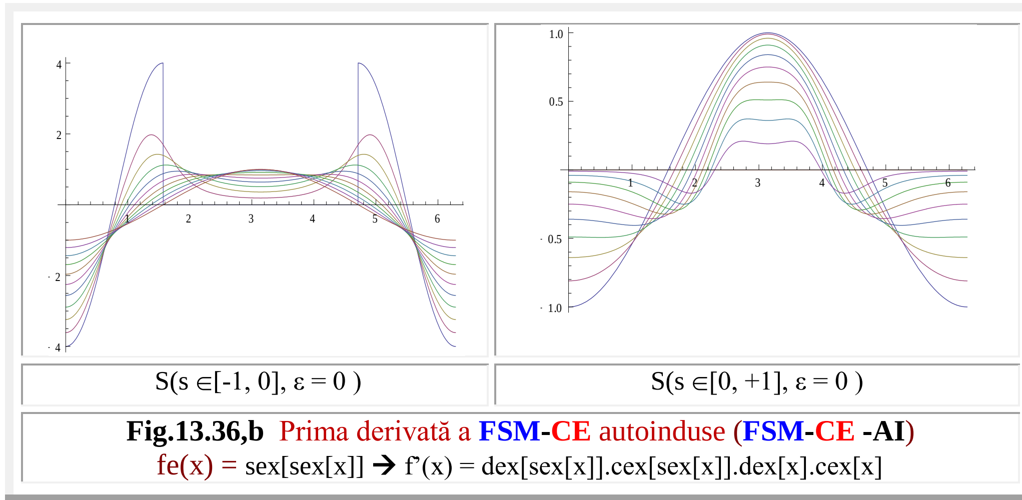


Fig.**13.36,a** **FSM-CE** autoinduse (**FSM-CE -AI**) fe(x) = sex[sex[x]] pentru S(s ∈ [-1,1], ε = 0)

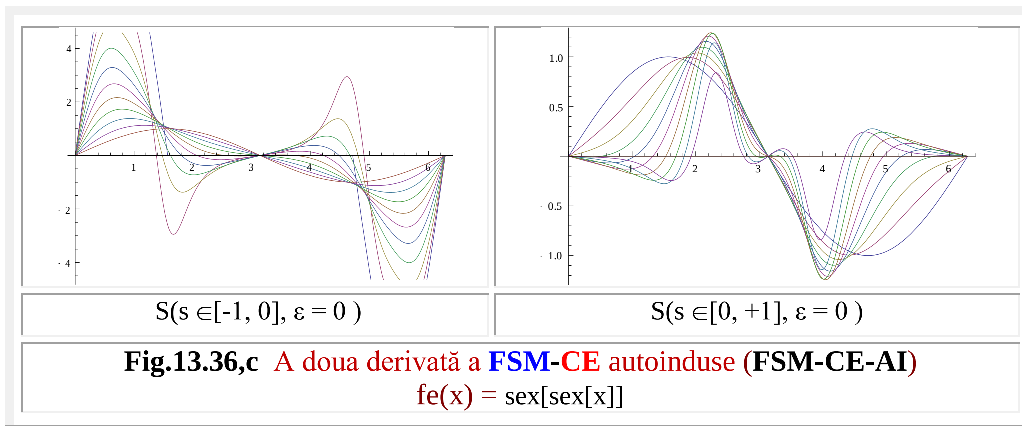
Ea are prima derivata dată de expresia

(13.94) y'(x) = dex[sex[x]].cex[sex[x]]. dex[x].cex[x] = -Cos[x-ArcSin[0.1 u Sin[x]]] (1-(0.1 u Cos[x])/$\sqrt{1-0.01\,u^2 Sin^2[x]}$) + (0.1 u Cos[x-ArcSin[0.1 u Sin[x]]] Cos[Sin[x-ArcSin[0.1 u Sin[x]]]] (1-(0.1 u Cos[x])/$\sqrt{1-0.01u^2 sin[x]^2}$)) / $\sqrt{1-0.01\,u^2 Sin^2[Sin[x-ArcSin[0.1uSin[x]]]}$
cu graficele din **figura 13.36,b** .



S(s ∈[-1, 0], ε = 0) | S(s ∈[0, +1], ε = 0)

Fig.13.36,b Prima derivată a **FSM-CE** autoinduse (**FSM-CE -AI**)
fe(x) = sex[sex[x]] → f'(x) = dex[sex[x]].cex[sex[x]].dex[x].cex[x]



S(s ∈[-1, 0], ε = 0) | S(s ∈[0, +1], ε = 0)

Fig.13.36,c A doua derivată a **FSM-CE** autoinduse (**FSM-CE-AI**)
fe(x) = sex[sex[x]]

A doua derivată este atât de complexă, încât nu are sens / rost să fie prezentată expresia ei, rezumâdu-ne să prezentăm doar graficele ei din **figura 13.36,c**.

Dacă în **FSM-CE** înlocuirea variabilei x cu funcţia sex[x] se face în sens invers, de la stânga spre dreapta, adică

(13.95) f(x) = sex[sex[x]] = sin[sex[x] - arcsin[0.1u sex[x]]] = sin[sin[x]-arcsin[0.1u sin[x]] – arcsin[0,1u sin[x-arcsin[0,1 u sin[x]]]]] , atunci prima derivata, realizata computational / mecanic, este

(13.96) f'(x) = -Cos[ArcSin[0.1 u Sin[x-ArcSin[0.1 u Sin[x]]]]-Sin[x-ArcSin[0.1 u Sin[x]]]]

iar a doua derivată va fi prea complexă pentru a fi prezentată expresia ei, rezumandu-ne la prezentarea graficelor derivatelor în **figura 13.37**.

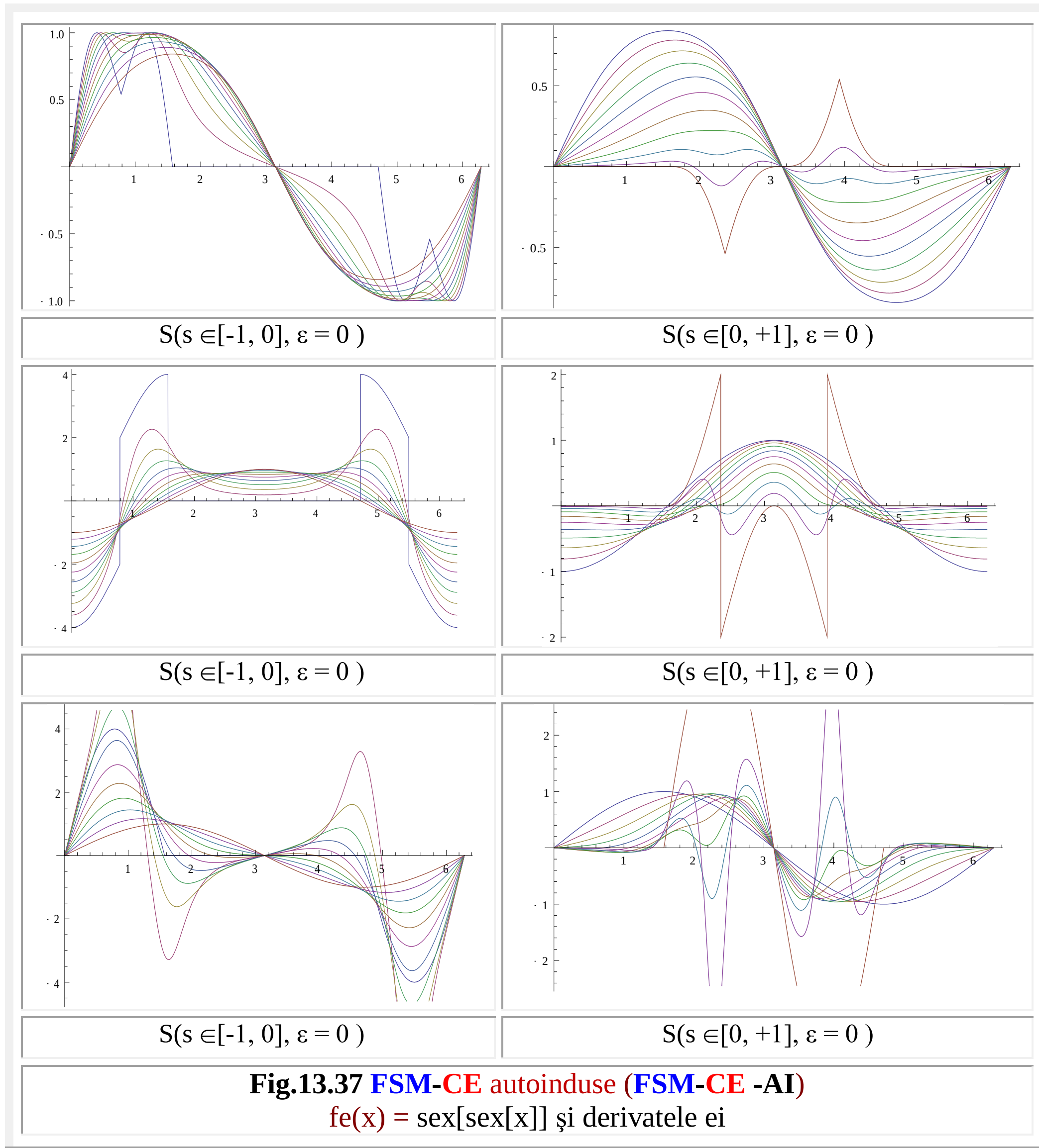


Fig.13.37 FSM-CE autoinduse (**FSM-CE -AI**)
fe(x) = sex[sex[x]] şi derivatele ei

13.5.4 DERIVATELE FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE INDUSE (FC-I)

Se consideră **FSM-CE –I**

(13.97) f(x) = sex[ces[x,S]] , ambele **FSM-CE** fiind de primă determinare.

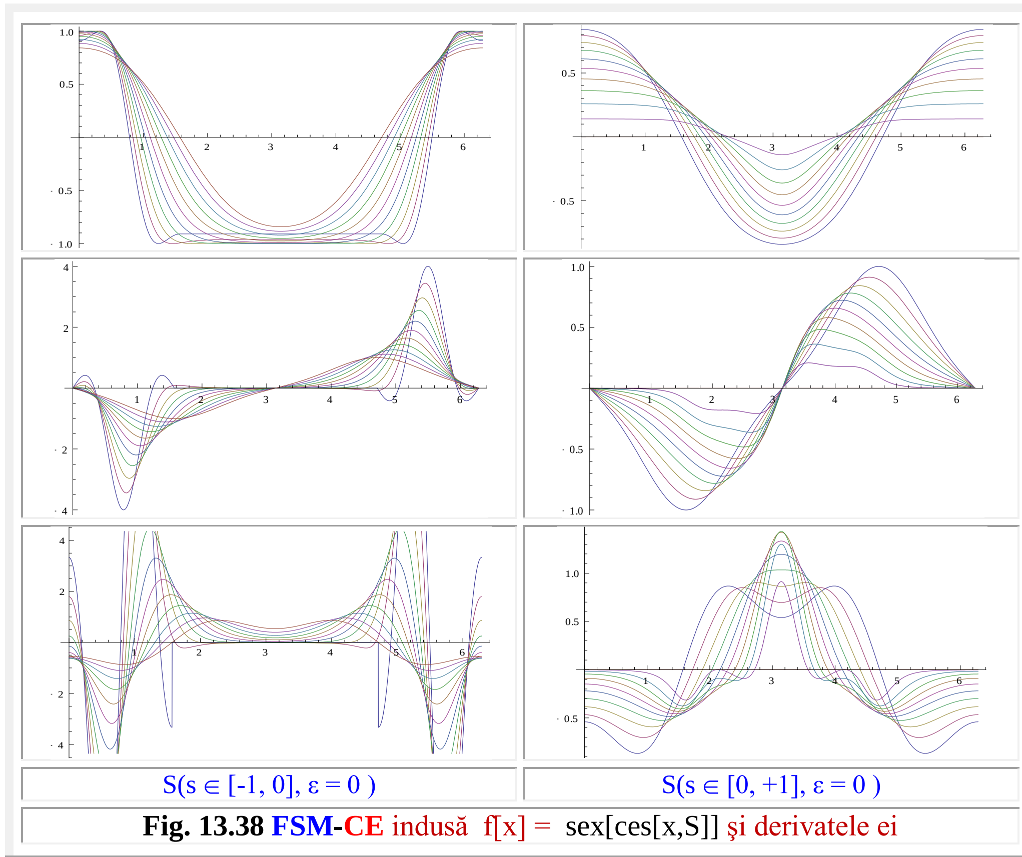


Fig. 13.38 **FSM-CE** indusă f[x] = sex[ces[x,S]] şi derivatele ei

Prima derivată a acestei **FSM-CE -I** este

(13.98) f'[x] = dex[cex[x,S]].cex[cex[x,S].(–dex[x,S]sex[x,S])

care, explicitată, are o expresie prea stufoasă pentru a fi prezentată, ca să nu mai vorbim de derivata a doua, care ocupă o pagina intreagă.

Se observă cât de diferite sunt graficele, în special ale acceleraţiilor (din derivata a doua), numai prin schimbarea semnului excentricitatii numerice s, adică trecând de la ε = 0 la ε = π.

Daca se schimba ordinea **FSM-CE**, adica

(13.99) f[x] = cex[sex[x,S]],

atunci derivata va fi

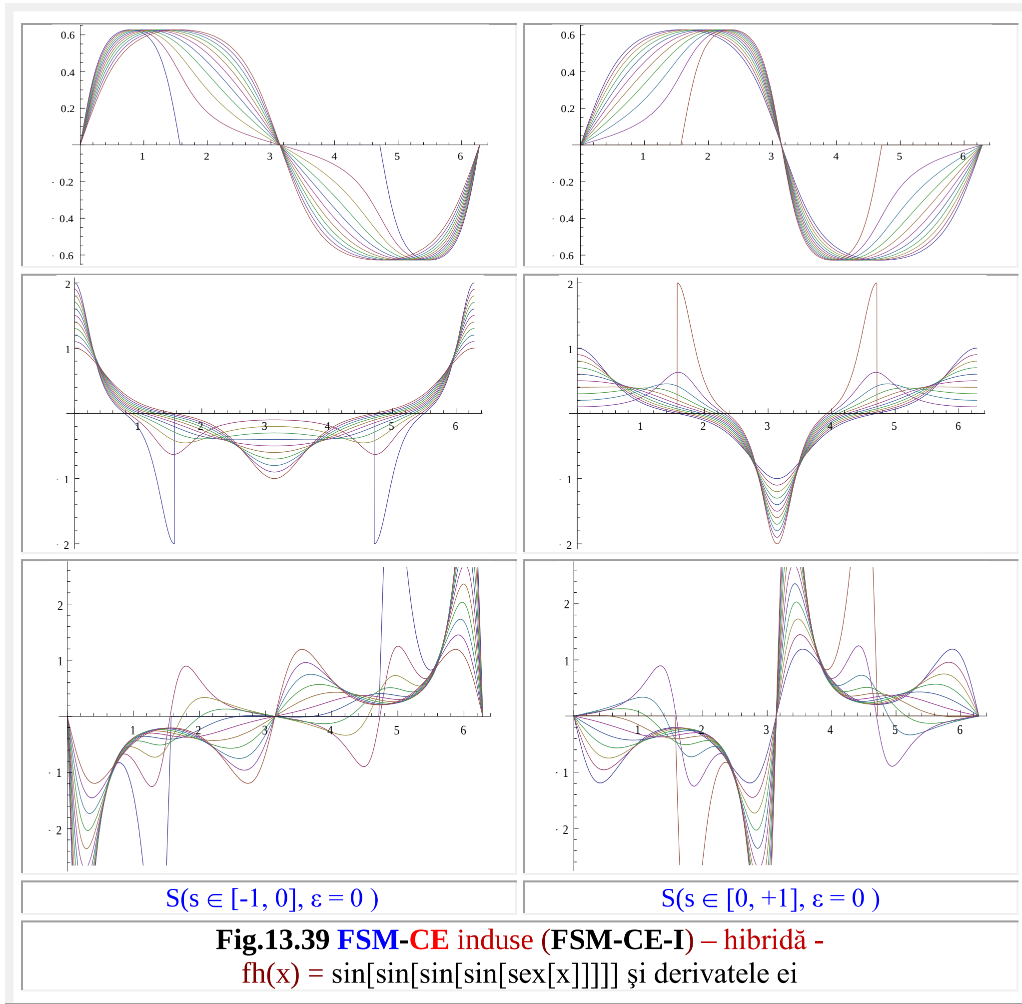
(13.100) f'[x] = – dex[sex[x,S]].sex[sex[x,S]].(dex[x,S].cex[x,S])

cu graficele funcţiei şi a derivatelor sale din **figura 13.39**.

Considerând **FSM-CE** şi FCC

(13.101) fh(x) = sin[sin[sin[sin[sex[x,S]]]]]

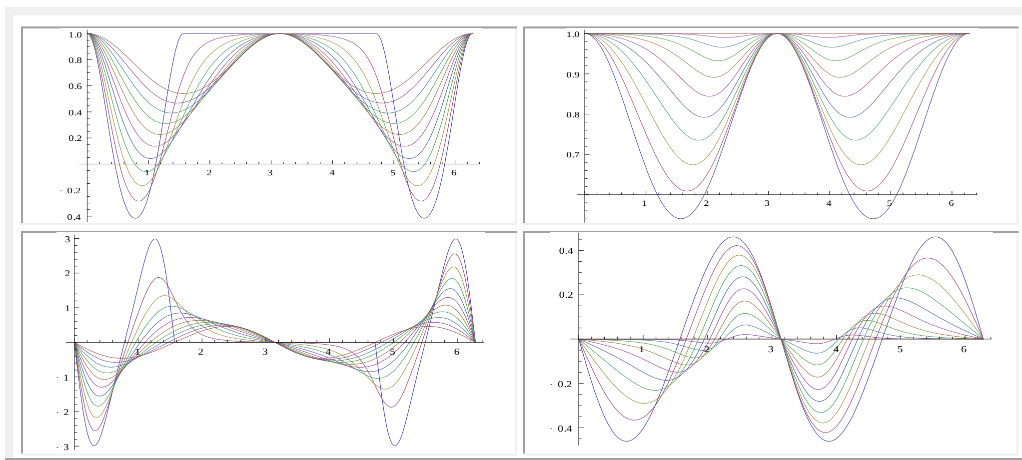
cu graficele ei şi a derivatelor sale din **figura 13.40**. Fiind o combinaţie dintre **FCC** şi **FSM-C** ea este, totodată, şi o funcţie supermatematică hibridă.

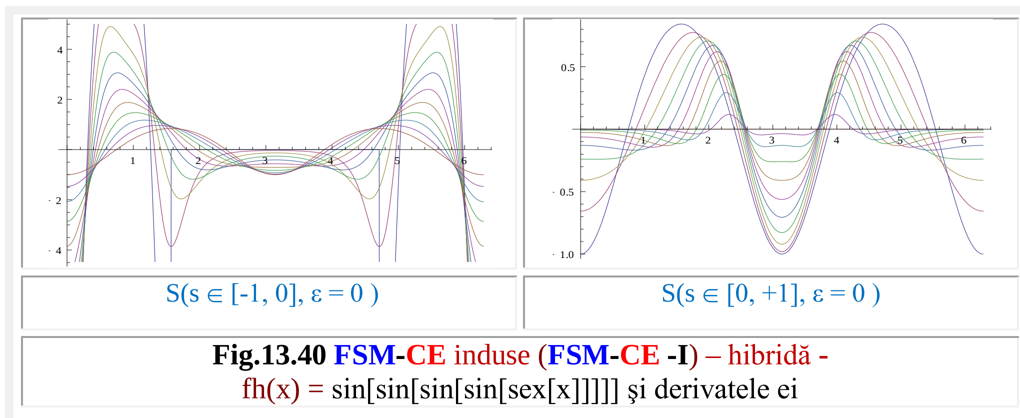


S(s ∈ [-1, 0], ε = 0)

S(s ∈ [0, +1], ε = 0)

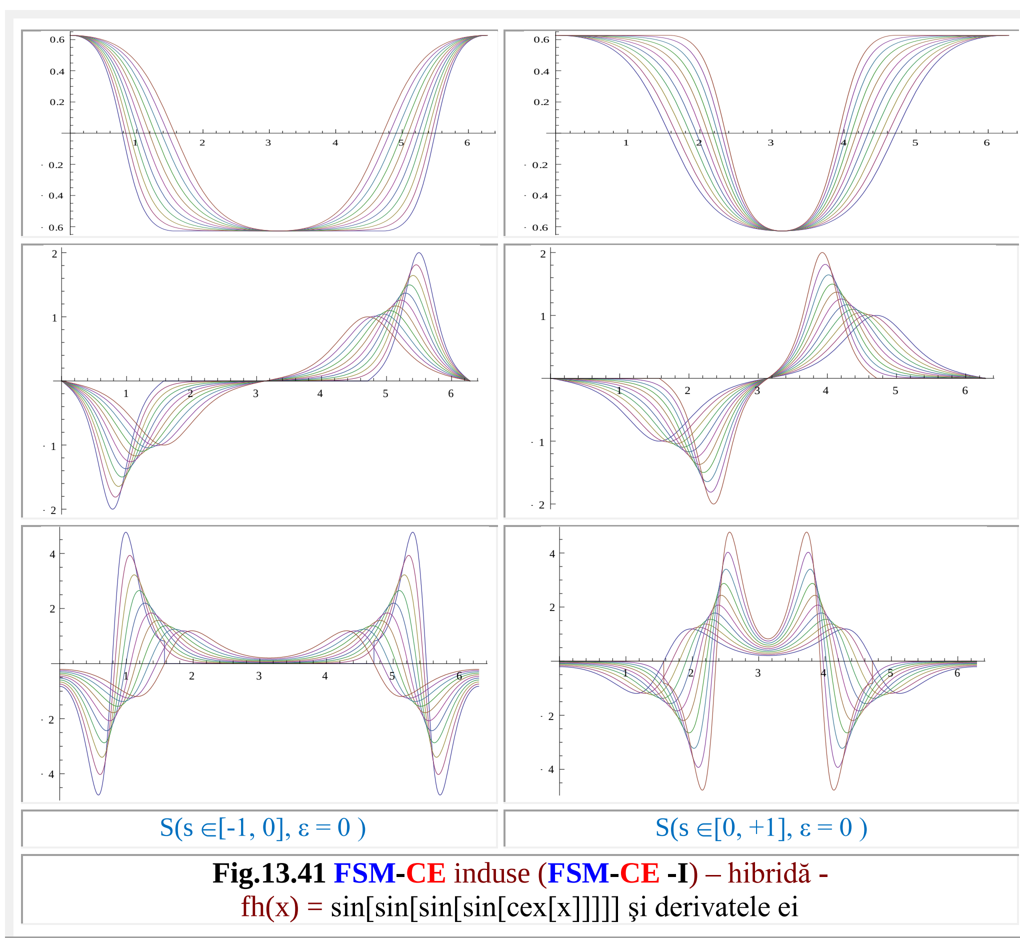
Fig.13.39 **FSM-CE** induse (**FSM-CE-I**) – hibridă -
fh(x) = sin[sin[sin[sin[sex[x]]]]] şi derivatele ei





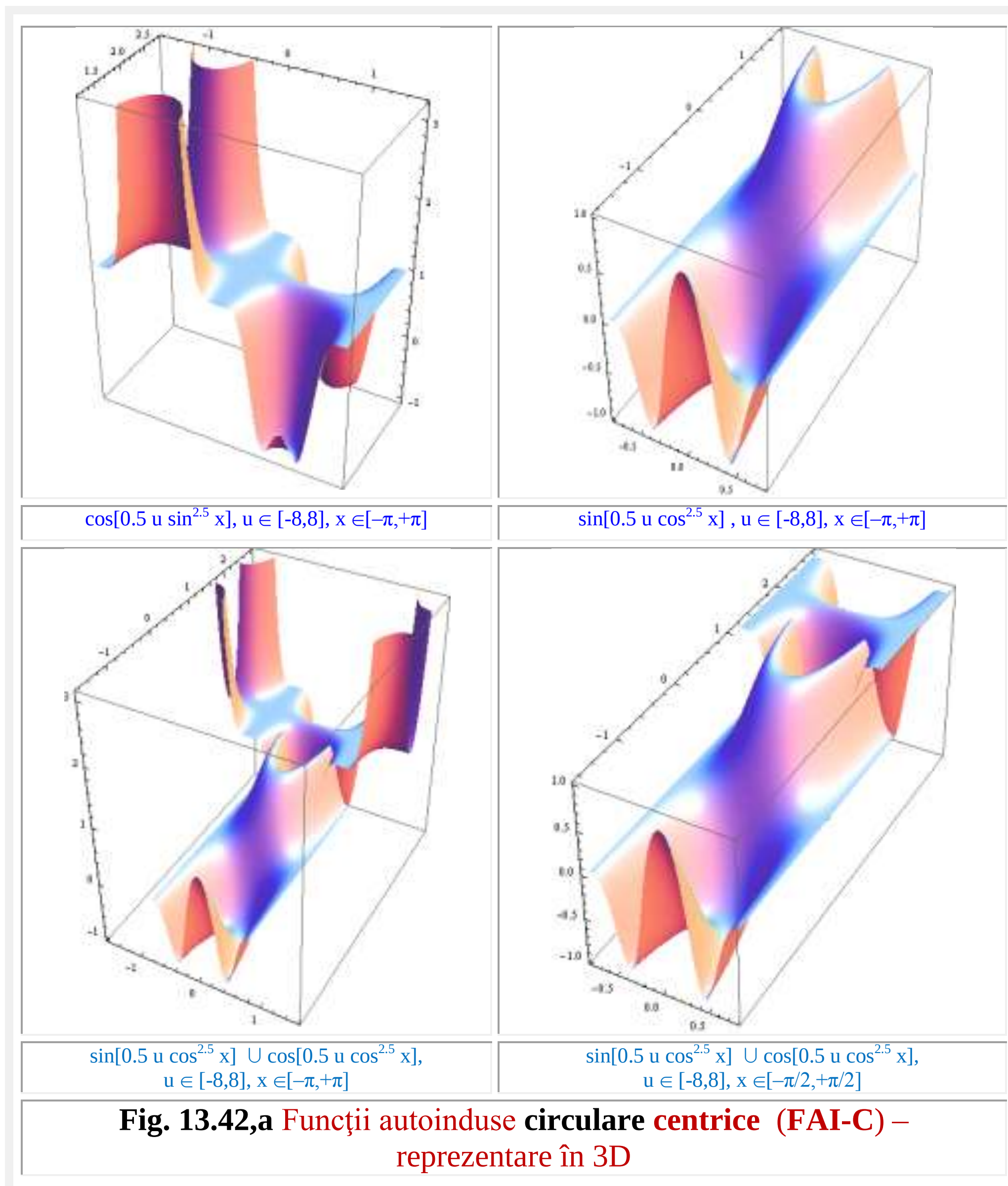
S(s ∈ [-1, 0], ε = 0) S(s ∈ [0, +1], ε = 0)

Fig.13.40 FSM-CE induse (**FSM-CE -I**) – hibridă -
fh(x) = sin[sin[sin[sin[sex[x]]]]] şi derivatele ei



S(s ∈[-1, 0], ε = 0) S(s ∈[0, +1], ε = 0)

Fig.13.41 FSM-CE induse (**FSM-CE -I**) – hibridă -
fh(x) = sin[sin[sin[sin[cex[x]]]]] şi derivatele ei



cos[0.5 u $\sin^{2.5}$ x], u ∈ [-8,8], x ∈[−π,+π]

sin[0.5 u $\cos^{2.5}$ x] , u ∈ [-8,8], x ∈[−π,+π]

sin[0.5 u $\cos^{2.5}$ x] ∪ cos[0.5 u $\cos^{2.5}$ x], u ∈ [-8,8], x ∈[−π,+π]

sin[0.5 u $\cos^{2.5}$ x] ∪ cos[0.5 u $\cos^{2.5}$ x], u ∈ [-8,8], x ∈[−π/2,+π/2]

Fig. 13.42,a Funcţii autoinduse **circulare centrice (FAI-C)** – reprezentare în 3D

Prin înlocuirea **FSM-CE** sex*θ* cu cex*θ*, *θ* = x, rezultă **FSM-CE** indusă hibridă

(13.102) fh(x) = sin[sin[sin[sin[cex[x,S]]]]]

cu graficele ei şi a derivatelor sale din **figura 13.41**.

Din multitudinea de exemple posibile, au fost prezentate, doar câteva, care arată că **FSM-CE** constitue un **rezervor nesecat de funcţii** cu aplicaţi în ştiinţă şi tehnică, iar scrierea lor (cex, sex[x], aex[x], bex[x], tex[x], ş.a.m.d.) oferă posibilitatea exprimării unor derivate ale lor, care explicitate n-ar avea niciun înteles.

În final, fără a epuiza subiectul, ci, dimpotrivă, il considerăm de abea antamat, prezentam, în 3D, câteva funcţii circulare centrice autoinduse care pot încânta ochiul şi pot constitui, totodata, un izvor de inspiraţie pentru cei ce trudesc la realizarea unor forme spaţiale moderne, plăcute ochiului.

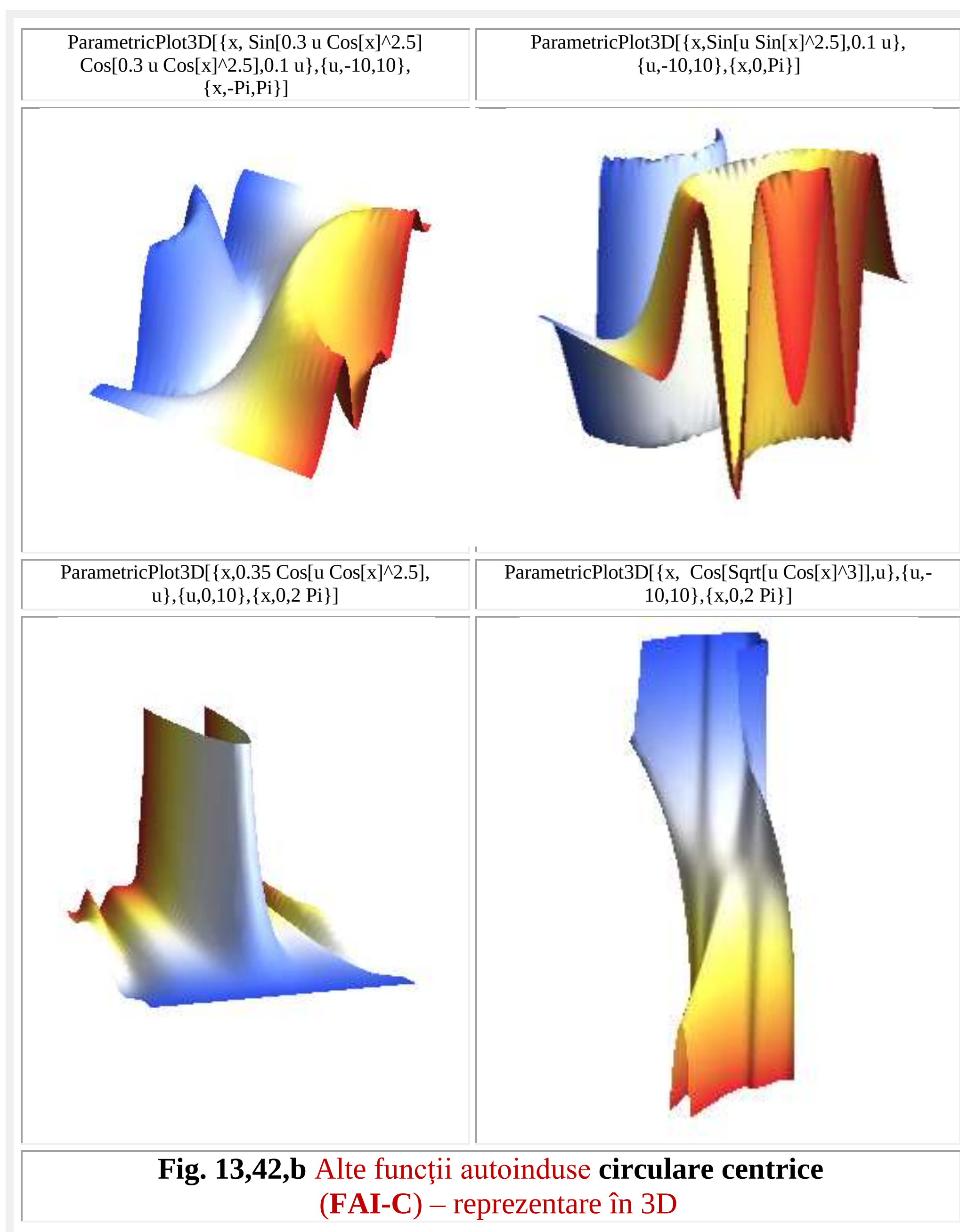


Fig. 13,42,b Alte funcţii autoinduse **circulare centrice** (**FAI-C**) – reprezentare în 3D

O altă serie de **FSM-CE** de forme deosebite sunt prezentate în încheiere în **figura 13.43**, impreună cu ecuţiile lor de definiţie

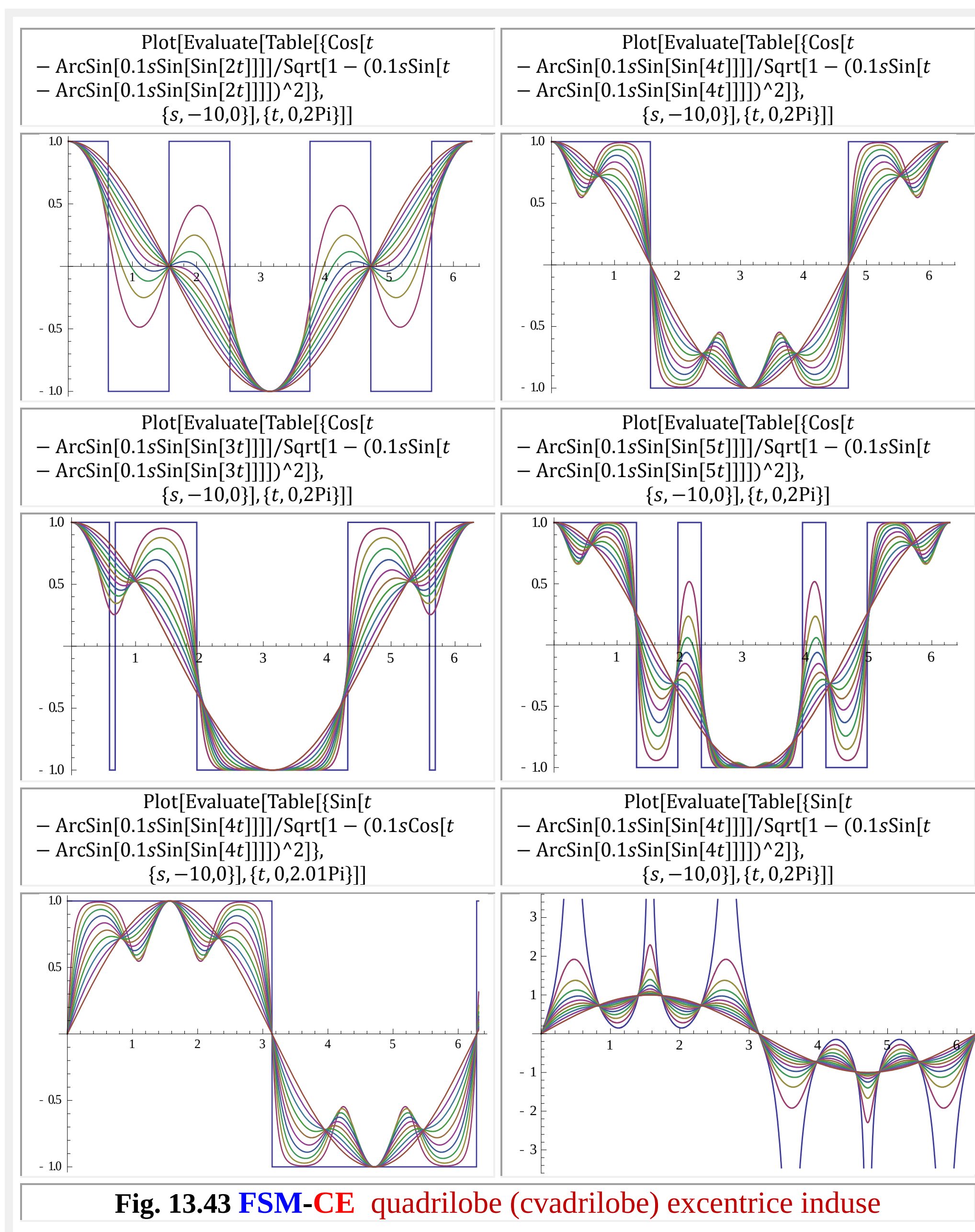


Fig. 13.43 FSM-CE quadrilobe (cvadrilobe) excentrice induse

Moto " Lumea este construită ca o structura matematică şi nu ca una materială "
Werner Karl Heisenberg
Mai precis, o **structura supermatematică**,
sau structura **matematică a mileniului III**
Autorul

Capitolul 14

FUNCŢII SUPERMATEMATICE HIPERBOLICE

14.1 INTRODUCERE

Ca şi în domeniul funcţiilor circulare, şi în cel al funcţiilor hiperbolice, s-a simţit nevoia diversificării acestora. În domeniul funcţiilor circulare, aşa cum s-a descris în Vol.I Cap.2, s-a căutat, din păcate, să se înlocuiască **cercul**, pe care s-au definit aceste funcţii, cu alte curbe închise, sau cu obiecte matematice noi. Astfel, s-a căutat înlocuirea cercului cu **pătratul** sau **rombul** (**V.Alaci**, 1939), funcţii generalizate apoi de **M. O. Enulescu** (1940), pe **poligoane** cu n laturi în **funcţii poligonale** [14]. Dar, încă în 1877, **Dr. Biehringer** [15] defineşte funcţiile trigonometrice **înclinate**, iar **A.I. Marcuşevici** (1965), în [16], publică funcţii trigonometrice definite pe **lemniscată** şi funcţii trigonometrice **generalizate**, evidenţiind şi legaturile ce există între aceste funcţii şi funcţiile **eliptice.**

Este aproape inexplicabil faptul că **nimeni** n-a încercat să schimbe (mute), din centru şi din originea sistemului de referinţă (reperului), măcar poziţia unui singur punct, dintre cele trei - originea **O**(0,0), centrul cercului unitate **C**(0,0) şi polul **P**(0,0)- toate confundate în origine.

Şi în domeniul funcţiilor hiperbolice s-a procedat la înlocuirea hiperbolei echilatere, pe care sunt definite funcţiile hiperbolice centrice (**FHC**) cu.. cercul trigonometric, de **M. Moscovici** (1956) în [**Moscovici, M**, O INTERPRETARE GEOMETRCĂ NATURALĂ A SOLUŢIILOR COMPLEXE REZULTATE DIN UNELE PROBLEME DE GEOMETRIE ANALITICĂ, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956], reuşind o folositoare reunificare a celor doua domenii, care va fi utilizată şi de noi. In plus, autorul a reuşit o interpretare intuitivă şi coerentă a intersecţiei unei drepte cu un cerc, intersecţie folosita apoi în tot restul lucrării. Prin similitudine, devine posibilă şi unificarea celor două domenii ale **SM**: **circular** şi **hiperbolic** !

Analog funcţiilor pătratice **V. Alaci**, prof. **E. Vişa** (1940) a definit **funcţiile pseudohiperbolice** [**Vişa, Eugen**, **FUNCŢII PSEUDO-HIPERBOLICE**, **STUDIU ELEMENTAR**, Rev. Matematică din Timişoara, anul XX, Nr. 1, 2, 4, 5, Timişoara, 1940]: definind o **pseudohiperbolă,** formată din semidrepte paralele cu asimptotele hiperbolei echilatere, cu vârful în vârful hiperbolei (v. Vol.I, Cap. 2, §2.5, pag. 62 …65).

Ca şi în multe alte cazuri, după definirea funcţiilor directe, au fost definite şi cele inverse pseudohiperbolice.

In cele ce urmează, definirea funcţiilor supermatematice hiprerbolice excentrice (**FSM-HE**) se va face în mai multe moduri, începând cu cel geometric, mai intuitiv, pentru că beneficiază şi de primul simţ al sistemului sensorial, prin care se percep peste 80% din informaţiile noastre: **văzul**.

În acest scop, este necesar, în prealabil, să se definească funcţiile **Gudermann excentrice**, care fac legătura dintre argumentul **t – dublul ariei** unui triunghi curbiliniu-şi **unghiul la centru cercului unitate** α **;** trecerea de la **centric** (α) la **excentric** (θ) fiind deja cunoscută.

Apoi, se va utiliza metoda cunoscută din **MC** şi se va proceda aidoma acestei metode de trecere de la funcţiile matematice centrice **circulare** la cele **hiperbolice**, prin înlocuirea variabilei reale **t** a **FCC** cu cele complexe **i.t**.

14.2 CLASIFICAREA FUNCŢIILOR HIPERBOLICE CENTRICE ŞI EXCENTRICE

Funcţiile supermatematice hiperbolice (**FSM-H**), ca şi funcţiile supermatematice circulare (**FSM-C**), centrice şi / sau excentrice, pot fi clasificate, în funcţie de poziţia reciprocă a celor trei puncte: **origine O(0,0),** a unui sistem rectangular drept xOy şi / sau polar**,** **centrul** cercului unitate **C(c,φ)** şi **polul** sau **excentrul** S(s,ε) în

- **FH** **centrice** → **FHC** dacă → **S** ≡ **C** ≡ **O**
- **FSM -H** excentrice → **FSM -HE** dacă → **S** ≠ **C** ≡ **O**
- **FSM -H** elevate → **FSM -HEl** dacă → **C** ≠ **O** ≡ **S**
- **FSM -H** exotice → **FSM -HEx** dacă → **C** ≠ **O** ≠ **S**

FHC sunt cunoscute de la introducerea lor in matematică, de către **Vincent Riccati** în 1757, cu notaţiile date, "**ceva**" mai târziu, în 1878, de **Guillaume Jules Jouël**.

14.3 HIPERBOLE CENTRICE ŞI HIPERBOLE EXCENTRICE

Hiperbola a fost descoperita de **Menechmus** (sec 4 î.e.n), denumirea i-a fost dată de **Apollonius** din Perga, iar construcţia ei mecanică a fost realizată, iniţial, de **Gurdubaldo del Monte** (1579).

Hiperbola este locul geometric al punctelor a căror **diferenţă** a distanţelor la două puncte fixe, F_1 şi F_2, denumit **focare**, este constantă.

Hiperbola centrică are ecuaţia raportată la axele ei de simetrie x, y → centrul de simetrie O(0,0)

(14.1) $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$ sau → $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$

şi reprezentările parametrice

(14.2) $\begin{cases} X = \frac{a}{cos\propto} \\ Y = b.tan\propto \end{cases}$, cu graficele din **figura 14.1,a**

Pe baza acestora din urmă, prin înlocuirea **FCC** cu **FSM - CE**

(14.3) $\begin{cases} cos\propto \Rightarrow cex(\theta, S) \\ tan\alpha \Rightarrow tex(\theta, S) \end{cases}$, $S(s,\varepsilon)$

se pot defini **hiperbolele supermatematice excentrice**, prin ecuaţiile parametrice

(14.4) $\begin{cases} X = \frac{a}{cex(\theta,\ S)} \\ Y = b.tex(\theta, S) \end{cases}$, cu graficele din **figura 14.1,b**

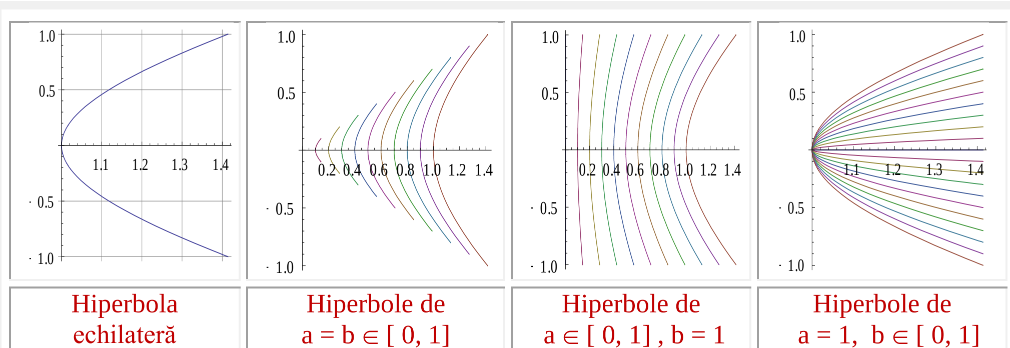


Fig.14.1,a Hiperbole **centrice** conform rel. (14.2)

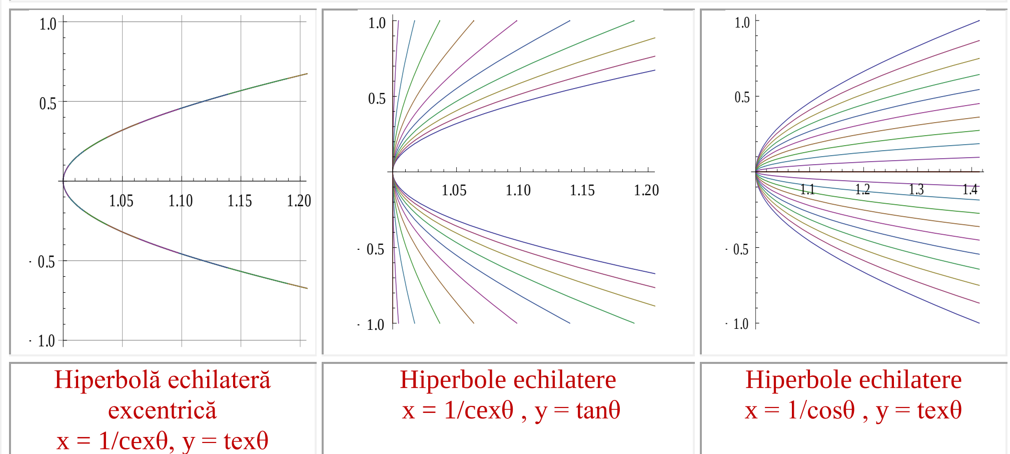


Fig.14.1,b Hiperbole echilatere **excentrice** s ∈ [0,1], conform rel. (14.4) cu s ∈[0, 1]

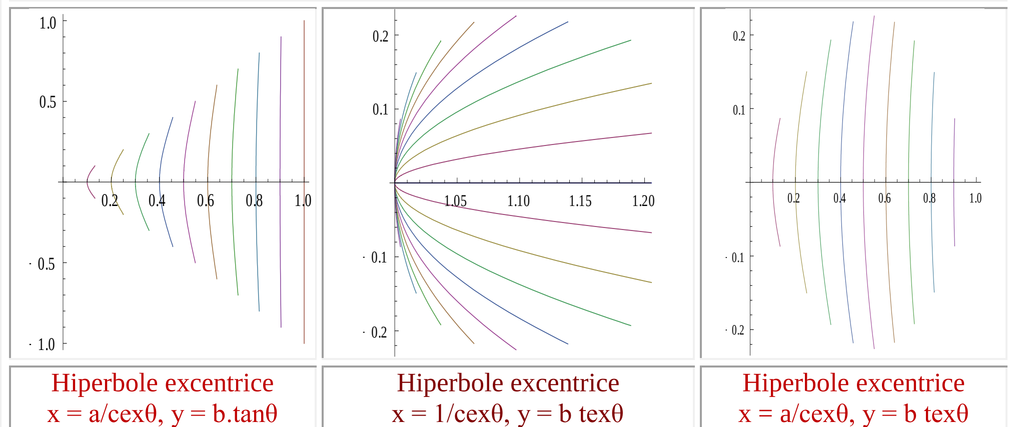
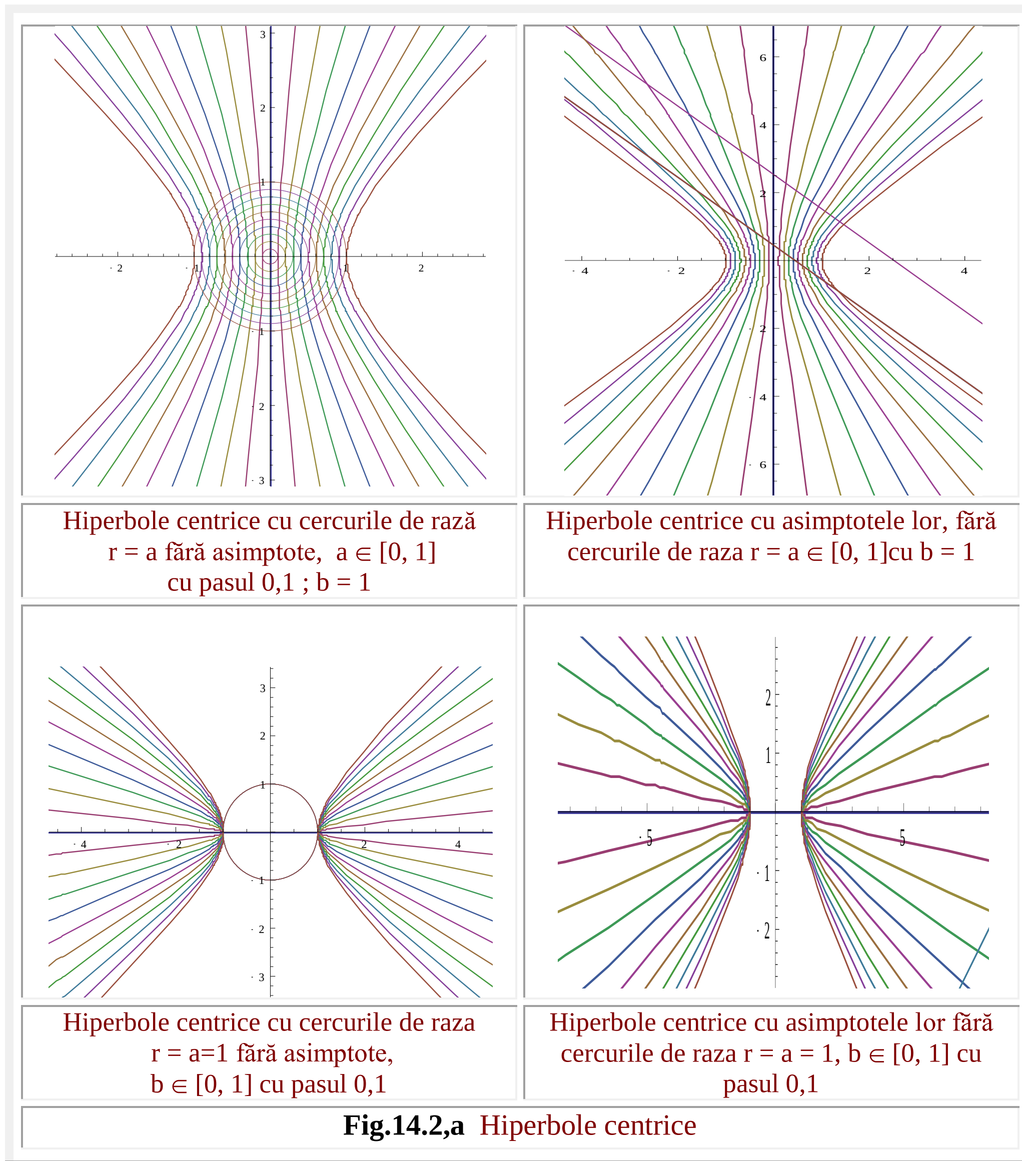


Fig.14.1,c Hiperbole **excentrice** , a = b ∈[0, 1], s ∈ [0,1], θ ∈ [– π/4, + π/4]

În acest fel, fiecărei hiperbole centrice, de anumiţi parametri a şi b fixaţi (**Fig. 14.1** şi **Fig. 14.2**), îi corespund o infinitate de hiperbole supermatematice excentrice **(Fig.14.3)** corespunzător infinităţii de puncte din planul hiperbolei în care poate fi plasat excentrul **S(s, ε)**.



Hiperbole centrice cu cercurile de rază r = a fără asimptote, a ∈ [0, 1] cu pasul 0,1 ; b = 1

Hiperbole centrice cu asimptotele lor, fără cercurile de raza r = a ∈ [0, 1]cu b = 1

Hiperbole centrice cu cercurile de raza r = a=1 fără asimptote, b ∈ [0, 1] cu pasul 0,1

Hiperbole centrice cu asimptotele lor fără cercurile de raza r = a = 1, b ∈ [0, 1] cu pasul 0,1

Fig.14.2,a Hiperbole centrice

Pentru a = 1şi b = 1 se obţine în **MC**, aşa cum se cunoaşte, hiperbola echilateră centrică (**Fig. 14.2,a**), căreia îi corespund hiperbolele supermatematice echilatere excentrice din **figura 14.3.**

Ecuaţiile (14.4) dau graficele hiperbolelor împreună cu asimptotele lor (**Fig. 14.2,a→** dreapta).

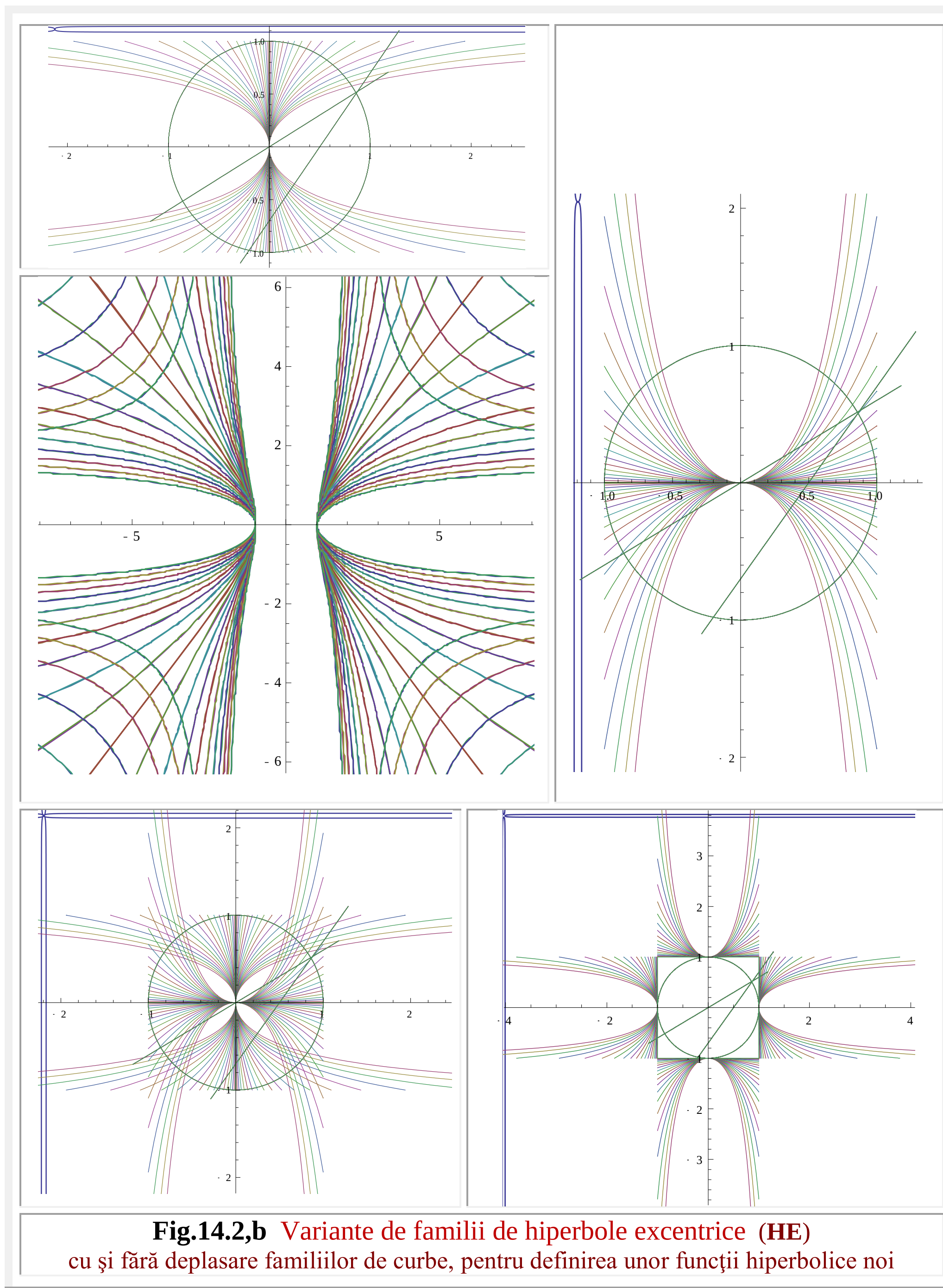


Fig.14.2,b Variante de familii de hiperbole excentrice (**HE**)
cu şi fără deplasare familiilor de curbe, pentru definirea unor funcţii hiperbolice noi

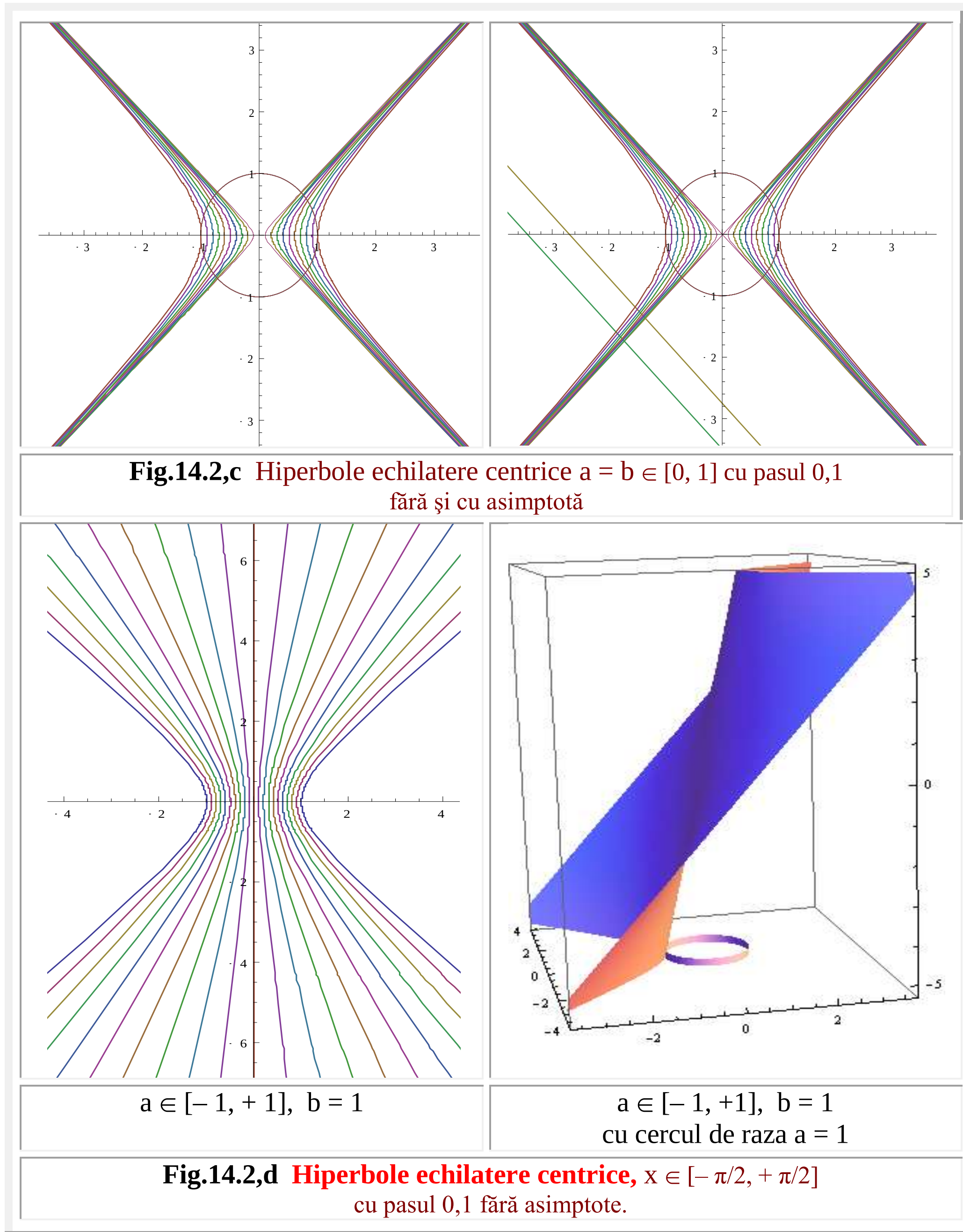


Fig.14.2,c Hiperbole echilatere centrice a = b ∈ [0, 1] cu pasul 0,1 fără şi cu asimptotă

a ∈ [– 1, + 1], b = 1

a ∈ [– 1, +1], b = 1 cu cercul de raza a = 1

Fig.14.2,d Hiperbole echilatere centrice, x ∈ [– π/2, + π/2] cu pasul 0,1 fără asimptote.

Dacă, în ecuaţiile (14.4), tangenta clasică **Euler** (tant ≡ tgt) se înlocuieşte cu tangenta **Voinoiu** (tavt = sint/Abs[cost]), atunci se obţin numai graficele hiperbolelor şi nu şi a asimptotelor lor (**14.2**, ← stânga).

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{{Cosh[t − ArcSin[0.1uSin[t]]], Sinh[t]}, {−Cosh[t
− ArcSin[0.1uSin[t]]], Sinh[t]}}, {u, −10,10}], {t, −Pi, Pi}]
```

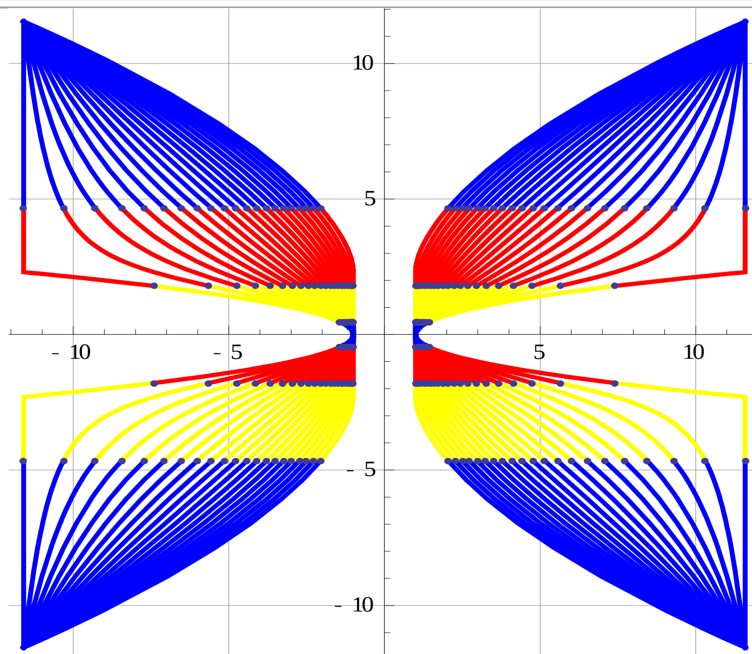


Fig.14.3,a Hiperbole echilatere excentrice de **cexh**

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{{−Cosh[t], Sinh[t − ArcSin[0.1uSin[t]]]}, {Cosh[t], Sinh[t −
ArcSin[0.1uSin[t]]]}}, {u, −10,10}], {t, −Pi, Pi}]
```

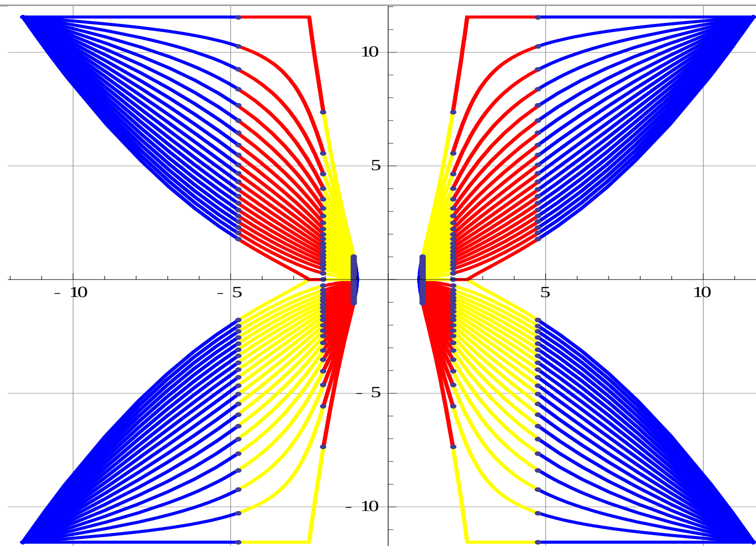
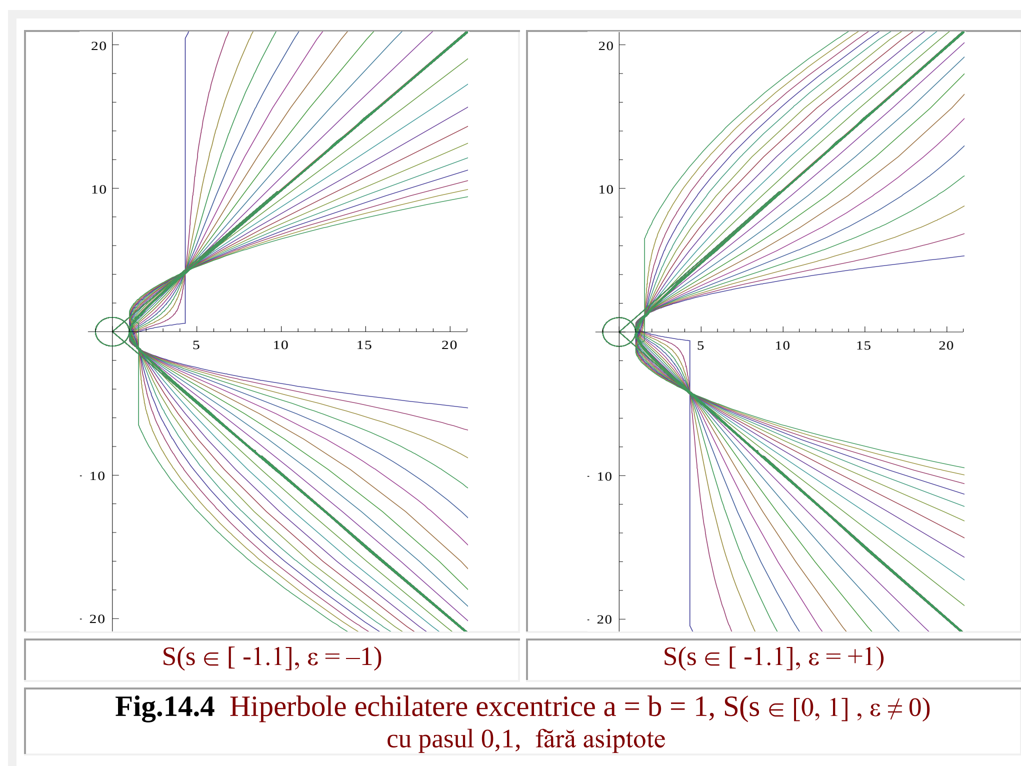


Fig.14.3,b Hiperbole echilatere excentrice de sexh



S(s ∈ [-1.1], ε = –1)   S(s ∈ [-1.1], ε = +1)

Fig.14.4 Hiperbole echilatere excentrice a = b = 1, S(s ∈ [0, 1] , ε ≠ 0) cu pasul 0,1, fără asiptote

Pentru definirea funcţiilor hiperbolice centrice şi excentrice se utilizeaza hiperbolele echilatere, de aceea, lor li se va acorda o atenţie mai deosebită.

Hiperbola centrică şi hiperbolele excentrice din **figura 14.3** ← stânga au graficele de deasupra hiperbolei centrice (cele cu deschiderea mai largă, care tind spre dreapta x = 1 pentru s = 1) pentru un excentru S(s∈[0,1], ε = 0) şi cele de dedesubtul / interiorul hiperbolei centrice – culoarea verde a asimptotelor ei- pentru excentre S(s∈ [-1,0], ε = 0) sau, ceea ce este acelaşi lucru, S(s ∈ [0,1], ε = π).

Dacă excentrul **S** variază pe direcţia de ε = – 1 radian, atunci hiperbolele **supermatematice** echilatere excentrice au graficele din **figura 14.4** ← stânga, iar pentru ε = + 1 în → dreapta.

14.4 FUNCŢII EXPONENŢIALE CENTRICE ŞI EXCENTRICE

Funcţia exponenţială centrică $f(\alpha)$ este funcţia f : ℝ → $(0, \infty)$, definită prin $f(\alpha) = a^{\propto}$, unde a > 0, a ≠1 cu următoarele proprietăţi

- a > 1 → $\begin{cases} a^{\propto} > 1, pentru \ \propto > 0 \\ 0 < a^{\propto} < 1, pentru \ \propto < 0 \end{cases}$
- 0 < a < 1 → $\begin{cases} 0 < a^{\propto} < 1 , pentru \ \propto > 0 \\ a^{\propto} > 1, pentru \ \propto < 0 \end{cases}$
- $\forall\, a > 0$ → $\propto = 0 \Rightarrow a^{\propto} = 1$

- $\propto > 1, f(\propto) = a^{\propto}$ este strict crescătoare, iar pentru 0 < a < 1 este strict descrescătoare
- Funcţia exponenţială f : ℝ → $(0, \infty)$, $f(\propto) = a^{\propto}, a > 1, a \neq 1$ *este bijectivă* .
- Funcţia exponenţială $f(\propto) = a^{\propto} = N$ este inversabilă şi inversa ei este funcţia logaritmică A = lg_aN, denumită logaritm în baza a din N. Pentru a = 10 se obţine logaritmul zecimal, sau logaritmul în baza 10 din N, notat A = lg N sau A = log N, iar pentru baza a = e = 2.718283..se obţine logaritmul natural notat A = LN = ln N
  O istorie interesanta şi palpitntă a numărului e, ca şi a altor numere remarcabile se gaseşte pe website-ul
  http://gshenricoanda.licee.edu.ro/nraur/ro/istoric3.html
- Orice număr pozitiv are un logaritm, în toate matematicile
- Numărul negativ nu are logaritm în matematica clasică, dar are logaritm în **matematica signadforasică** a lui **Octavian Voinoiu (v. Octavian Voinoiu,** BAZELE MATEMATICII SIGNADFORASICE, Ed. Nemira, 1996).

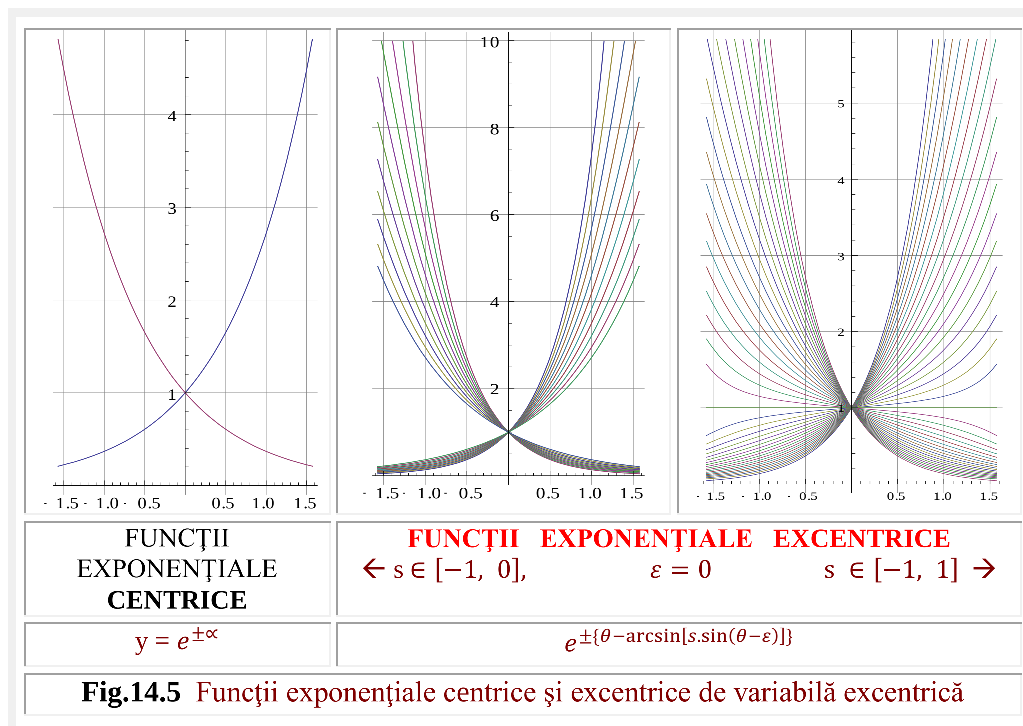
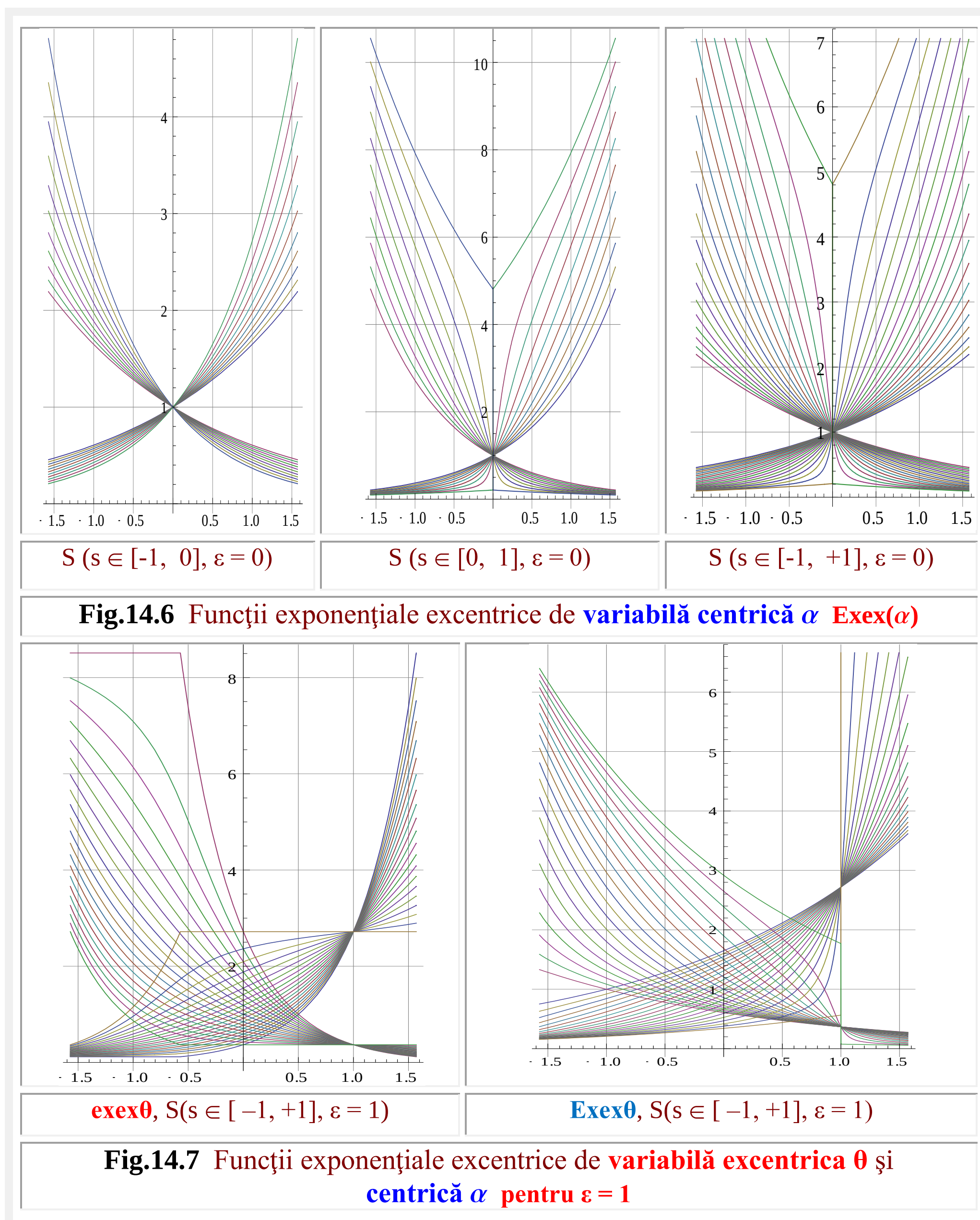


Fig.14.5 Funcţii exponenţiale centrice şi excentrice de variabilă excentrică

Dacă exponentul α, care este variabila sau argumentul funcţiei exponenţiale centrice, trece într-o funcţie amplitudine excentrică, adică α → $\alpha(\theta)$ = aex[θ, S(s, ε)], atunci se obţin funcţii induse exponenţiale de variabilă excentrică **θ** (**Fig. 14.5**), notate cu exex(θ, S) sau numai **exexθ** date de expresia

(14.5) **exexθ** = $e^{\pm\propto(\theta,S)} = e^{\pm aex\theta} = e^{\pm\{\theta-\arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\}}$



S (s ∈ [-1, 0], ε = 0) S (s ∈ [0, 1], ε = 0) S (s ∈ [-1, +1], ε = 0)

Fig.14.6 Funcţii exponenţiale excentrice de **variabilă centrică** α **Exex(**α**)**

exexθ, S(s ∈ [–1, +1], ε = 1) **Exexθ**, S(s ∈ [–1, +1], ε = 1)

Fig.14.7 Funcţii exponenţiale excentrice de **variabilă excentrica θ** şi **centrică** α **pentru ε = 1**

Iar dacă se înlocuieşte cu funcţia amplitudine excentrică de variaboilă centrică α → Aex[α, S(s, ε)] se obţin funcţii exponenţiale excentrice de variabilă centrică α (Fig. **14.6**), notate cu Exex(α, S) sau numai **Exex**α**,** date de expresia

(14.6) $\mathbf{Exex}\alpha = e^{\pm Aex(\alpha,S)} = e^{\pm(\alpha + arcsin\frac{s.sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha})}$**.** Din **figurile 14.5** şi **14.6** rezultă că punctul N = N(ε = 0, 1) este un nod prin care trece întreaga familie de funcţii

excentrice, inclusiv cele centrice, de/pentru s = 0, dacă şi numai dacă excentricitatea unghiulară ε = 0. Pentru ε ≠ 0, de exemplu pentru ε = ± 1, funcţiile exponenţiale excentrice de θ şi de α îşi mută nodul **N(0, 1)** în punctul **N**(θ = ± ε =± 1, **exex(θ = 1)**) şi, respectiv în **N**[α = ± ε = ± 1, **Exex(*α* = 1)**], aşa cum se poate observa în **figura 14.7**. Fenomenul fiind similar cu cel descris în cazul **FSM-CE** cu privire la punctele atractor şi repulsiv.

14.5 DEFINIRE AGEOMETRICĂ A FUNCŢIILOR HPERBOLICE CENTRICE ŞI EXCENTRICE

Atât **FHC** cât şi **FSM-HE** admit semnificaţii geometrice asociate hiperbolei echilatere (a = 1, b = 1). De aceea, se va trece direct la prezentarea în paralel atât a **FHC** cât şi a **FSM-HE**.

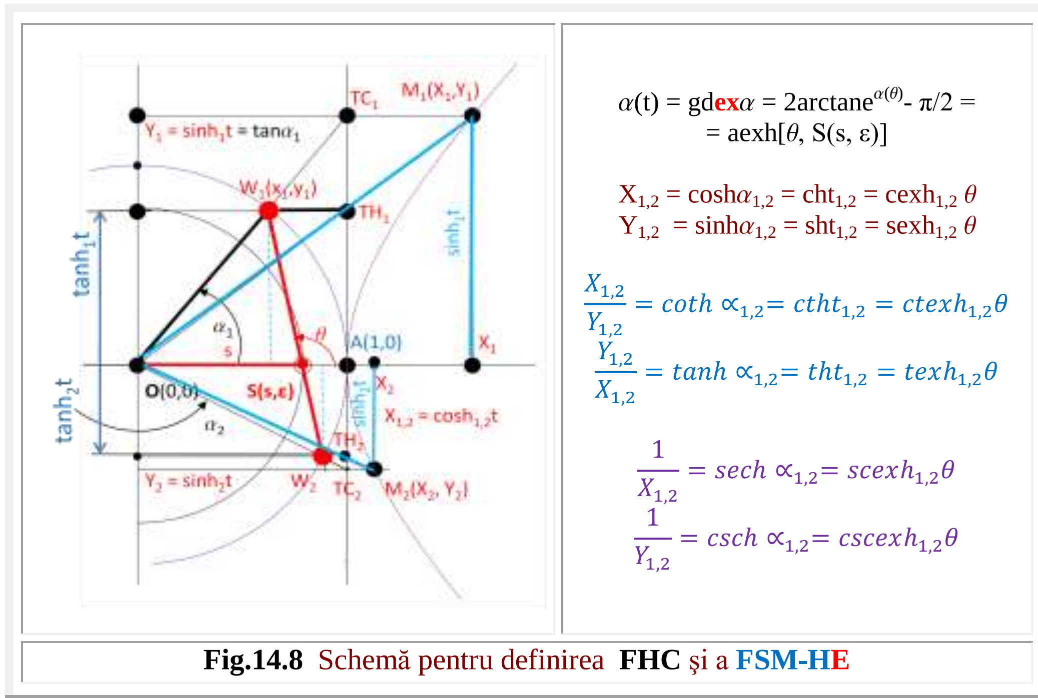


Fig.14.8 Schemă pentru definirea **FHC** şi a **FSM-HE**

În acest scop, prezentăm definirea geometrică a lor pe baza **figurii 14.8**, care are la bază utilizarea cercului unitate/trigonometric, ceea ce va simplifica mult înţelegerea, datorită similitudinii existente între definirea **FSM circulare** şi a **FSM hiperbolice**. Ecuaţia hiperbolei echilatere este

(14.7) $X^2 - Y^2 - 1 = 0 \rightarrow X^2 - Y^2 = 1$

a cărei ramură, situată în semiplanul X > 0, admite reprezentarea parametrică

(14.8) $\begin{cases} X = \mathrm{cht} \equiv \mathrm{cosht} \\ Y = sht \equiv sinht \end{cases}$ sau

(14.9) $\begin{cases} X = \frac{a}{cos\propto}, \\ Y = b.tan \propto, \end{cases}$ $X = \frac{1}{cos\propto} = sec \propto$, $Y = tan \propto$ pentru a = b = 1, sau

(14.10) $\begin{cases} X = a\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ Y = b\frac{2t}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$

Dacă **M_1** (**Fig. 14.8**) este un punct al acestei ramuri, argumentul **t** reprezintă dublul ariei triunghiului curbiliniu **OAM_1**, o latură fiind arcul de hiperbolă **AM_1**, iar valorile **FHC** sunt date de relaţiile

(14.11) $\begin{cases} X_1 = cht \equiv cosh_1 t \\ Y_1 = sht \equiv sinh_1 t \\ y = tht \equiv tanht = sin\alpha = A\,TH_1 \end{cases}$

Pentru definirea **FSM-HE** mai este necesară o dependenţă între argumentul **t** şi variabila centrică **$\alpha_{1,2}$** sau unghiul cu vârful în centrul cercului unitate O(0,0). – **Fig. 14.8**-. Dependenţă prezentată în paragraful următor. Apoi, pe baza dependenţelor, cunoscute deja, dintre variabila centrică ***α*** şi cea excentrică ***θ*** - unghiul cu vârful în excentrul **S(s,ε)** – date de relaţiile, deja cunoscute, (14.12)

(14.12)

$$\begin{cases} \propto_{1,2} = \begin{cases} \propto_1 = \theta - \beta_1(\theta) = \theta - arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)] \\ \alpha_2 = \theta - \beta_2(\theta) = \theta + \arcsin[s.sin(\theta - \varepsilon)] + \pi \end{cases} \\ \theta = \alpha_{1,2} + \beta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + arcsin\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{Rex\alpha_{1,2}} = \alpha_{1,2} + arctan\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)} \end{cases}$$

să poată fi definite şi **FSM-HE.**

14.6 FUNCŢIILE AMPLITUDINE HIPERBOLICĂ CENTRICĂ ŞI AMPLITUDINE HIPERBOLICĂ EXCENTRICĂ. FUNCŢII GUDERMANN EXCENTRICE

Unghiul $\alpha = \alpha_1 = $ (**Ox**, **O** TC_1) este numit **amplitudine hiperbolică** sau **gudermanianul gd t** $= \alpha$ şi este definit de integrala

(14.13) $gd\ t = \int_0^{\propto}\frac{d\propto}{cosh\propto} = \int_0^{\propto}\frac{d\propto}{ch\propto} = 2.arctane^{\propto} - \frac{\pi}{2}$, astfel că

(14.14) $t = \int_0^{gdt}\frac{d\propto}{cos\propto} = \ln[tan(\frac{gd\,t}{2} + \frac{\pi}{4})]$, cu graficele din **figura 14.9,a .**

Înlocuind în (14,13) argumentul α cu funcţia $\alpha(\theta)$ = aexθ se obţin funcţiile **Gudermann directe excentrice** de variabilă **excentrică θ, notate gdex(θ, S)** date de relaţia

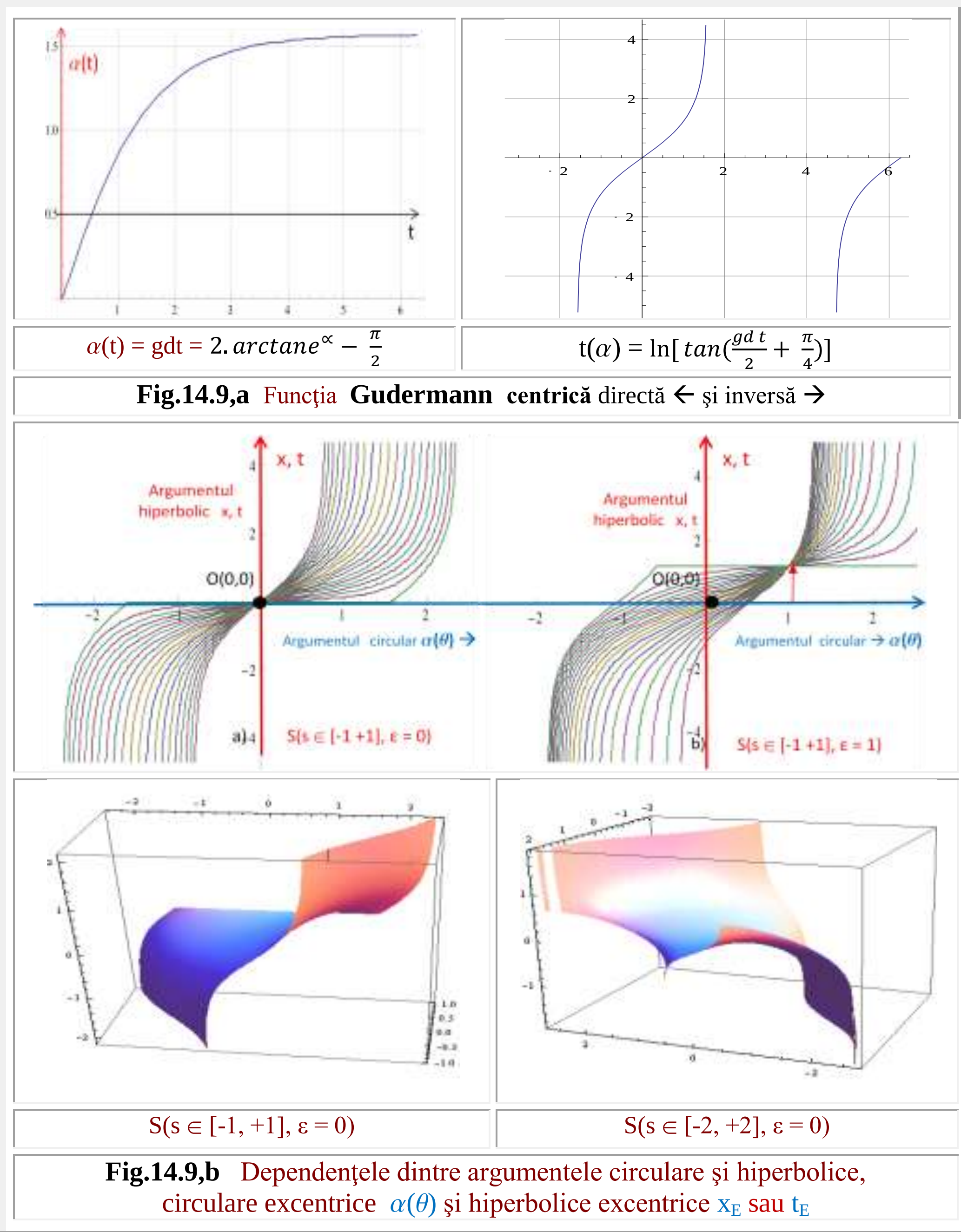
(14.15) **gdex(θ, S)** $= 2\arctan[e^{\alpha}] - \frac{\pi}{2} = 2arctane^{\theta - arcsin[s.sin(\theta-\varepsilon)]} - \frac{\pi}{2}$

cu graficele din **figura 14.9, b1.**

Iar dacă se inlocueşte argumentul α cu funcţia $\theta(\alpha)$ = Aex(α, S) se obţin funcţiile **Gudermann directe excentrice** de variabilă **centrică *α*, notate Gdex(*α*, S)** date de relaţia

(14.16) **Gdex(*α*, S)** $= 2\arctan[e^{\theta(\alpha)}] - \frac{\pi}{2} = 2arctane^{(\propto + arcsin[\frac{s.sin(\propto-\varepsilon)}{Rex\propto}])} - \frac{\pi}{2}$

cu graficele din **figura 14.9,b2.**



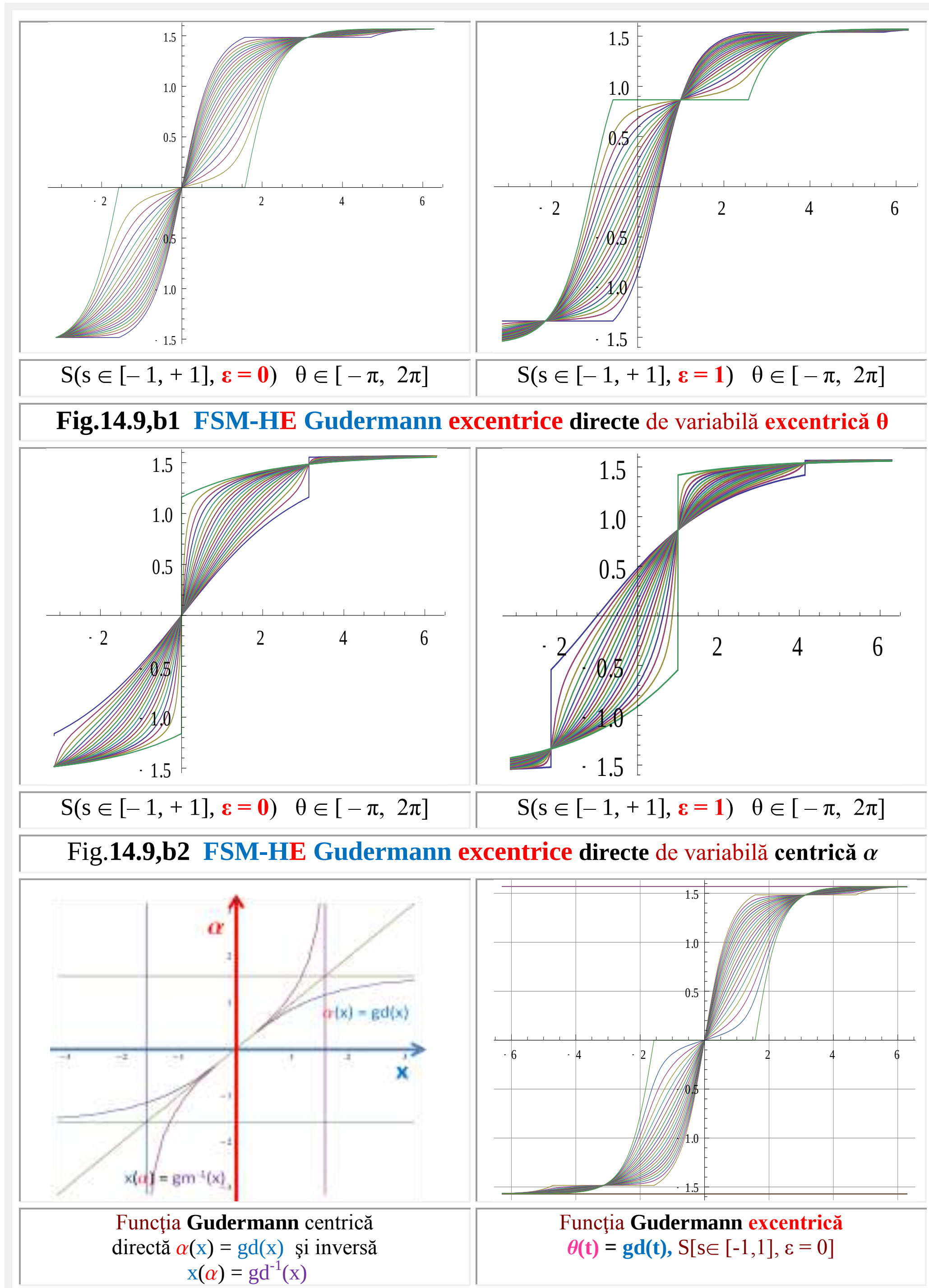
α(t) = gdt = $2.arctane^{\propto} - \frac{\pi}{2}$ | t(α) = ln[$tan(\frac{gd\,t}{2} + \frac{\pi}{4})$]

Fig.14.9,a Funcţia **Gudermann centrică** directă ← şi inversă →

S(s ∈ [-1, +1], ε = 0) | S(s ∈ [-2, +2], ε = 0)

Fig.14.9,b Dependenţele dintre argumentele circulare şi hiperbolice, circulare excentrice $\alpha(\theta)$ şi hiperbolice excentrice x_E sau t_E

Din relaţia (14.14), inlocuind variabila centrică α cu funcţia α(θ) se va obţine **variabila hiperbolică t excentrică**, notată **thex(θ)** = **t[α(θ)]** = **t(θ)**, cu ajutorul careia se obţin **FSM-HE neperiodice** prezentate în **figura 14.8**. Variabila hiperbolică excentrică va avea expresia



S(s ∈ [– 1, + 1], **ε = 0**) θ ∈ [– π, 2π]

S(s ∈ [– 1, + 1], **ε = 1**) θ ∈ [– π, 2π]

Fig.14.9,b1 FSM-HE Gudermann excentrice directe de variabilă **excentrică θ**

S(s ∈ [– 1, + 1], **ε = 0**) θ ∈ [– π, 2π]

S(s ∈ [– 1, + 1], **ε = 1**) θ ∈ [– π, 2π]

Fig.**14.9,b2 FSM-HE Gudermann excentrice directe** de variabilă **centrică** α

Funcţia **Gudermann** centrică directă α(x) = gd(x) şi inversă x(α) = gd^{-1}(x)

Funcţia **Gudermann excentrică** **θ(t) = gd(t),** S[s∈ [-1,1], ε = 0]

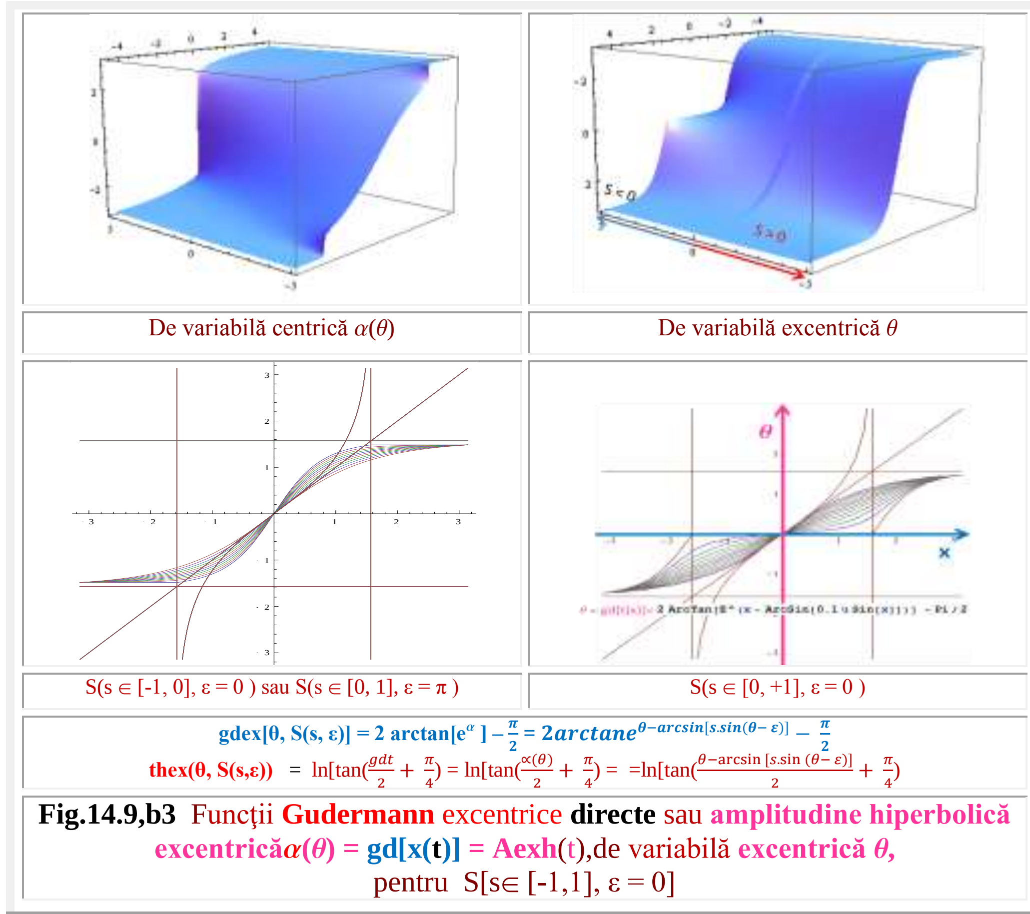
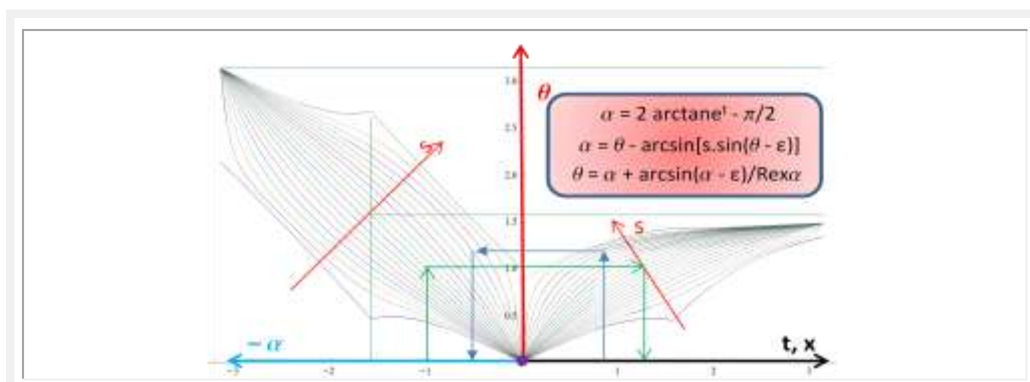


Fig.14.9,b3 Funcţii **Gudermann** excentrice **directe** sau **amplitudine hiperbolică excentrică** $\alpha(\theta)$ = **gd[x(t)]** = **Aexh**(t),de variabilă **excentrică** θ, pentru S[s∈ [-1,1], ε = 0]

(14.17) **thex(θ)** $= t[\alpha(\theta)] = \ln[\tan(\frac{\alpha(\theta)}{2} + \frac{\pi}{4})] = \ln[\tan(\frac{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]}{2} + \frac{\pi}{4})]$
care reprezintă funcţiile **Gudermann inverse excentrice** de variabilă excentrică θ, cu graficele din **figura 14.9,d1**.



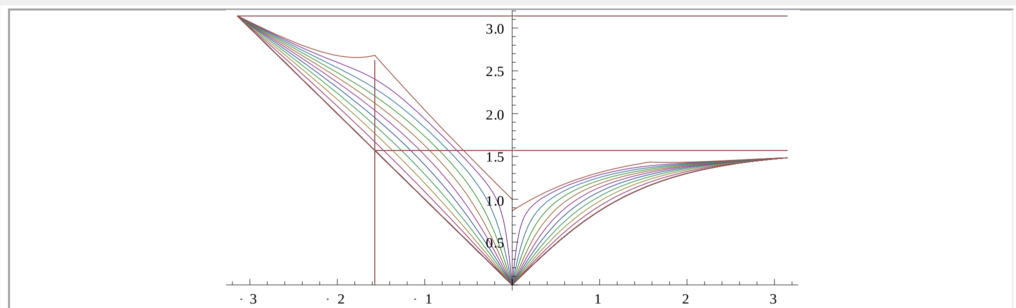


Fig.14.9,b4 Dependenţele dintre t sau x, theta şi alfa pentru s ∈ [-1,1]

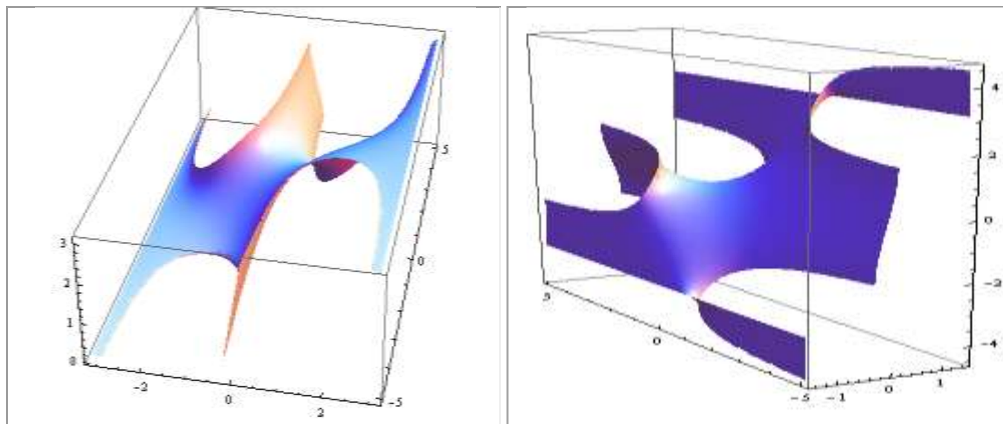
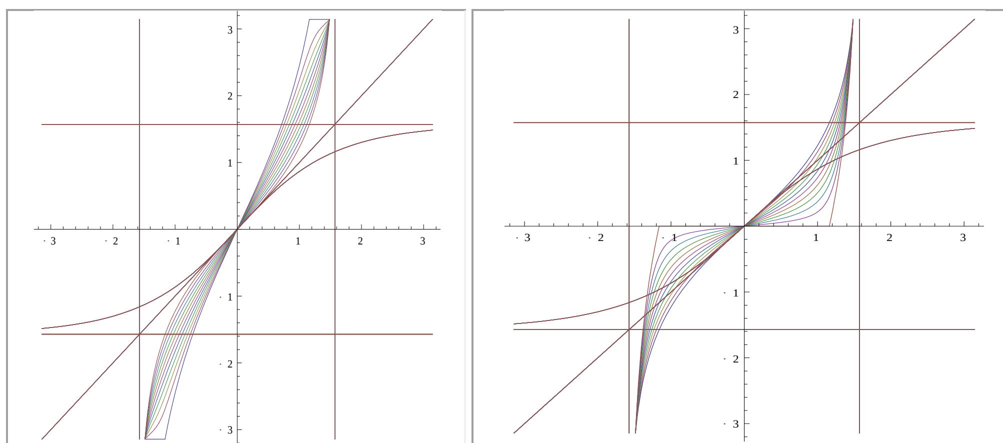
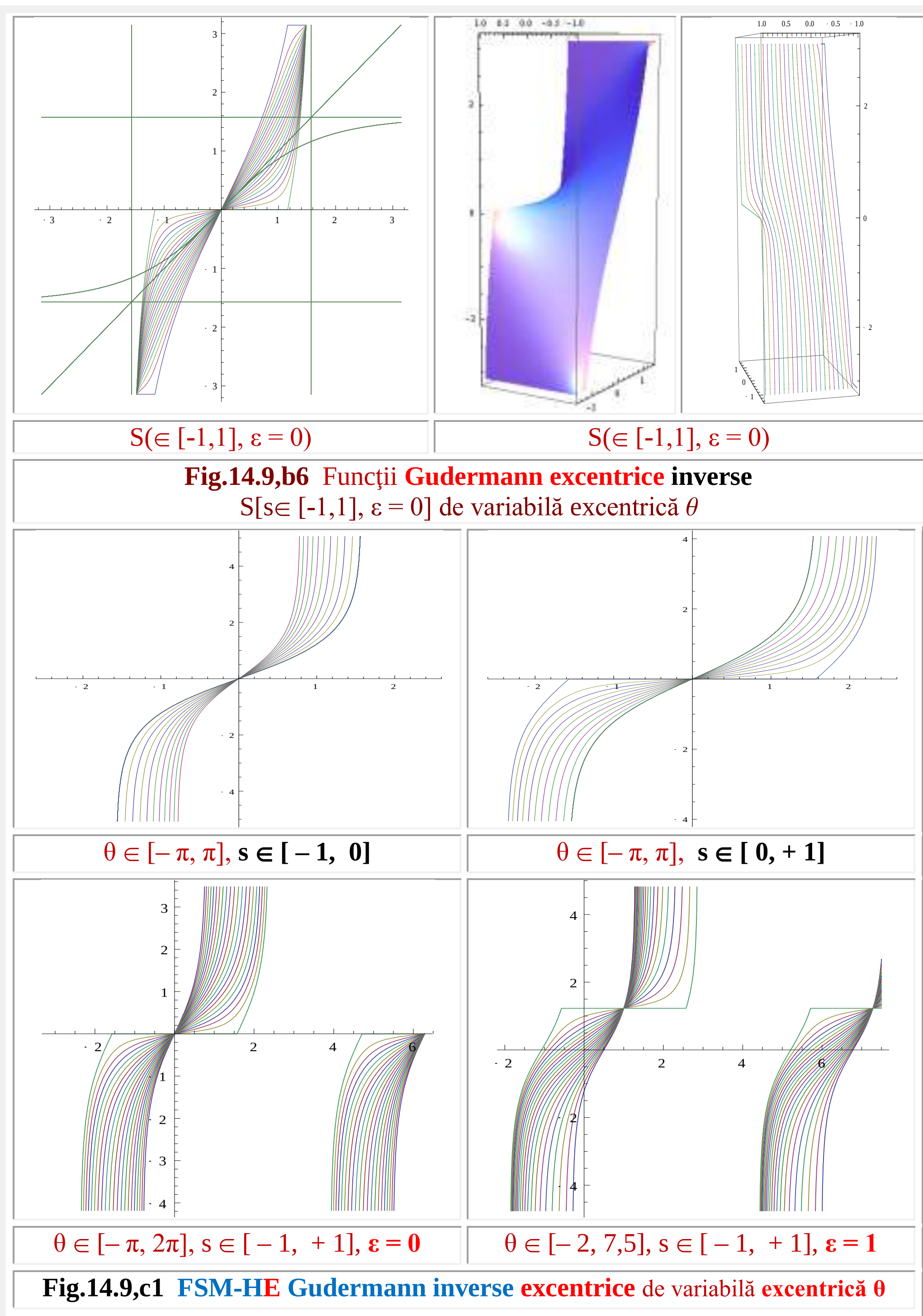


Fig.14.9,b5 Funcţii **Gudermann** excentrice directe (stânga) şi inverse (dreapta) de variabilă **excentrică** θ pentru S(s ∈[-5, +5], ε = 0)



S(s ∈ [-1, 0], ε = 0) sau S(s ∈ [0, 1], ε = π)

S(s ∈ [0, +1], ε = 0)



S(∈ [-1,1], ε = 0)

S(∈ [-1,1], ε = 0)

Fig.14.9,b6 Funcţii **Gudermann excentrice inverse**
S[s∈ [-1,1], ε = 0] de variabilă excentrică θ

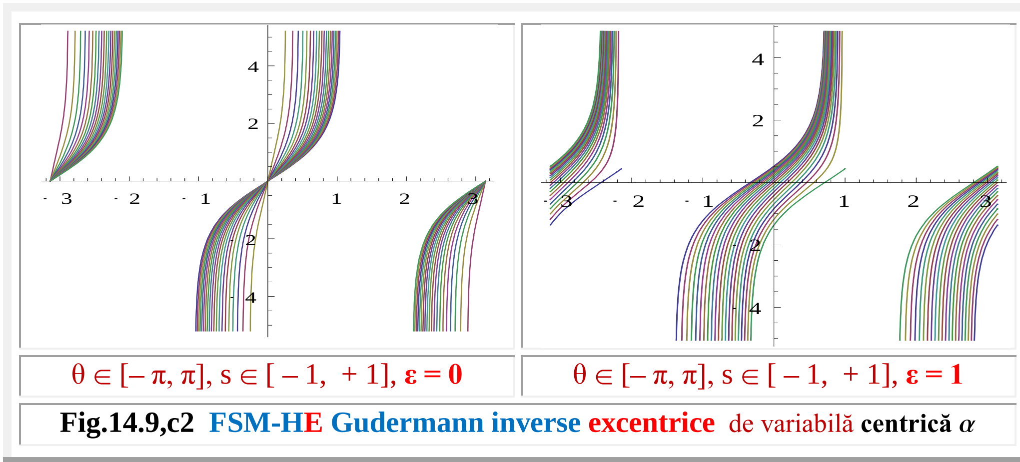
θ ∈ [– π, π], **s ∈ [– 1, 0]**

θ ∈ [– π, π], **s ∈ [0, + 1]**

θ ∈ [– π, 2π], s ∈ [– 1, + 1], **ε = 0**

θ ∈ [– 2, 7,5], s ∈ [– 1, + 1], **ε = 1**

Fig.14.9,c1 FSM-HE Gudermann inverse excentrice de variabilă **excentrică θ**



θ ∈ [– π, π], s ∈ [– 1, + 1], **ε = 0** θ ∈ [– π, π], s ∈ [– 1, + 1], **ε = 1**

Fig.14.9,c2 FSM-HE Gudermann inverse excentrice de variabilă **centrică** α

Amplitudinea hiperbolică este în strânsă legătură cu “**unghiul de paralelism**” $\Pi(t)$ a lui **Lobacevski** conform expresiei

(14.18) $$\text{gd}\,(-\propto) = \Pi(t) - \frac{\pi}{2}$$

Întroducând unghiul α, au loc relaţiile din matematica centrică (**MC**)

(14.19) $$\begin{cases} cht = cosht = \sec(gdt) = sec\alpha \\ sht = sinht = \tan(gdt) = tan\alpha \\ tht = tanht = \sin(gdt) = sin\alpha \end{cases},$$

care rezultă şi comparând (14.2) cu (14.3).

14.7 FSM-HE COSINUS, SINUS ŞI TANGENTĂ PERIODICE (cexhθ, sexhθ, texhθ) ŞI NEPERIODICE (cext, sexht, texht)

Relaţiile anterioare (14.16) dau **FSM -HE periodice**, aşa cum se poate observa din graficele lor din **figura 14.7**, spre deosebire de relaţiile (14.18) care dau **FSM -HE** neperiodice, ca şi cele centrice, clasice.

Acestea sunt prezentate în **figura 14.8**. pe baza realţiilor amintite (14.18) sau pe baza relaţiilor (14.16).

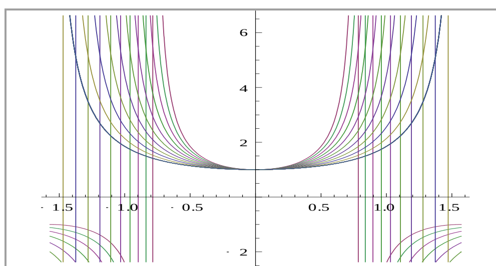
Fiind relaţii diferite, ca şi graficele lor, evident, se pune, firesc, intrebarea care dintre ele sun de fapt **FSM -HE ?** Raspunsul este ca ambele tipuri de **FSM** sunt funcţii hiperbolice excentrice (HE) ; unele de variabilă excentrică hiperbolică t, iar celelalte de variabilă excentrică circulară α(θ). Aşa se explică şi de ce unele nu sunt periodice (cele de t → the(θ)) şi altele sunt (cele de α → α(θ) = aexθ).

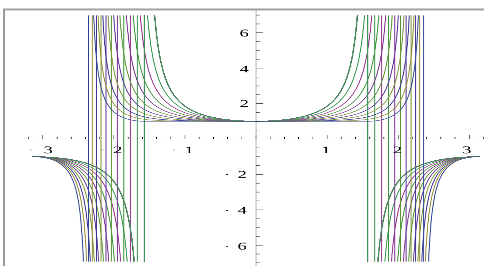
Grupul de relaţii (14.12) permite trecerea de la centric (α) la excentric (θ), prin relaţiile (14.11), ca şi, prin aceasta, la trecerea de la **FHC** la **FSM -HE.**

Astfel, cum x = cexθ = cosα şi y = sexθ = sinα, tot aşa

(14.20) $$\begin{cases} cexht = sec\alpha = secex\theta \\ sexht = tan\alpha = tex\theta \\ texht = sin\alpha = sex\theta \end{cases},$$

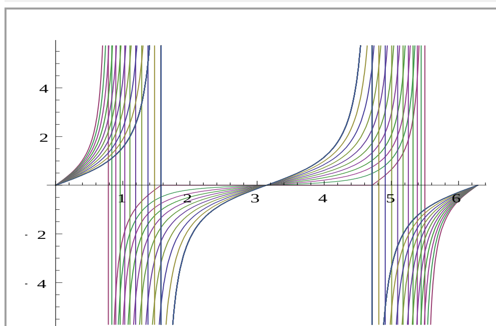
cu graficele din **figura 14.7**,din care, în **figura 14.7,c** se recunoaste **FSM -CE** sexθ din utima relaţie (14.20).

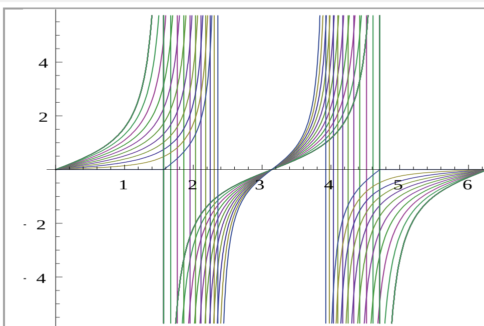




s ∈ [– 1, 0]	s ∈ [0, + 1]

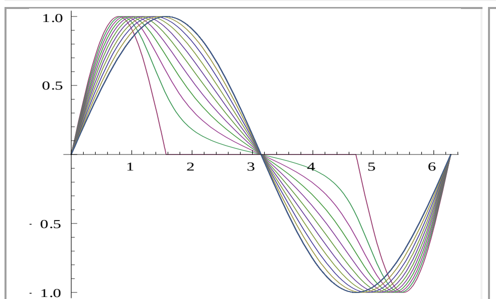
Fig.14.10,a Funcţii **supermatematice** hiperbolice excentrice **periodice** (**FSM-HEP**) de variabilă excentrică circulară θ
Cosinus hiperbolic excentric periodic cexhθ, pentru θ ∈ [0, + 2π]

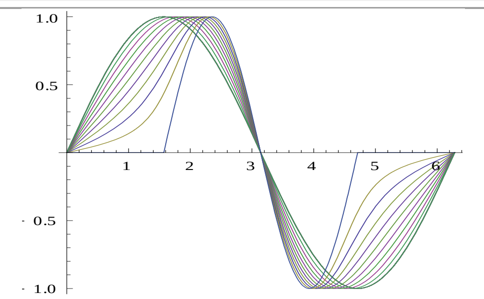




s ∈ [– 1, 0]	s ∈ [0, + 1]

Fig.14.10,b Funcţii **supermatematice** hiperbolice excentrice **periodice** (**FSM-HEP**) de variabilă excentrică circulară θ
Sinus hiperbolic excentric periodic sexhθ, pentru θ ∈ [0, + 2π]





s ∈ [– 1, 0]	s ∈ [0, + 1]

Fig.14.10,c Funcţii **supermatematice** hiperbolice excentrice **periodice** (**FSM-HEP**) de variabilă excentrică circulară θ
Tangentă hiperbolică excentrică periodică texhθ, pentru θ ∈ [0, 2π]

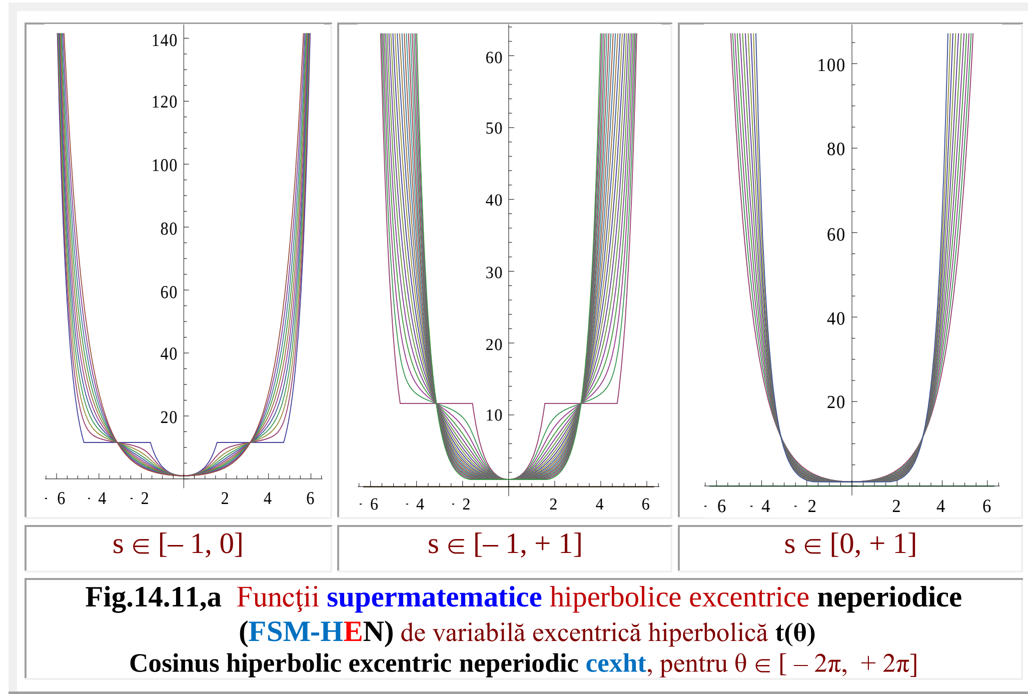


Fig.14.11,a Funcţii **supermatematice** hiperbolice excentrice **neperiodice**
(FSM-HEN) de variabilă excentrică hiperbolică **t(θ)**
Cosinus hiperbolic excentric neperiodic cexht, pentru θ ∈ [– 2π, + 2π]

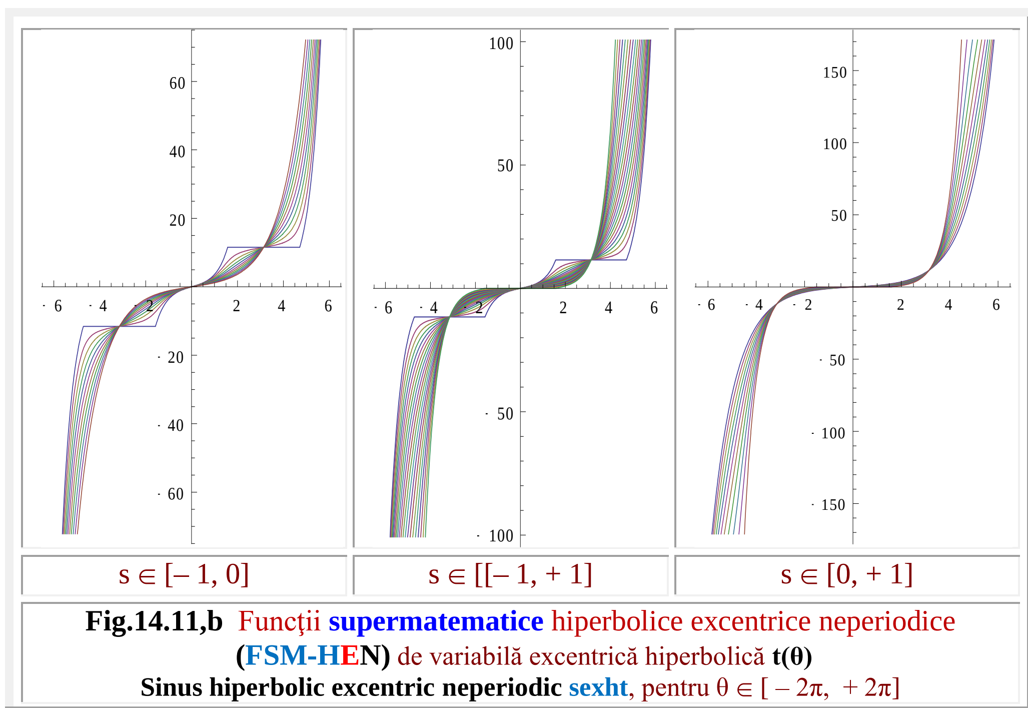
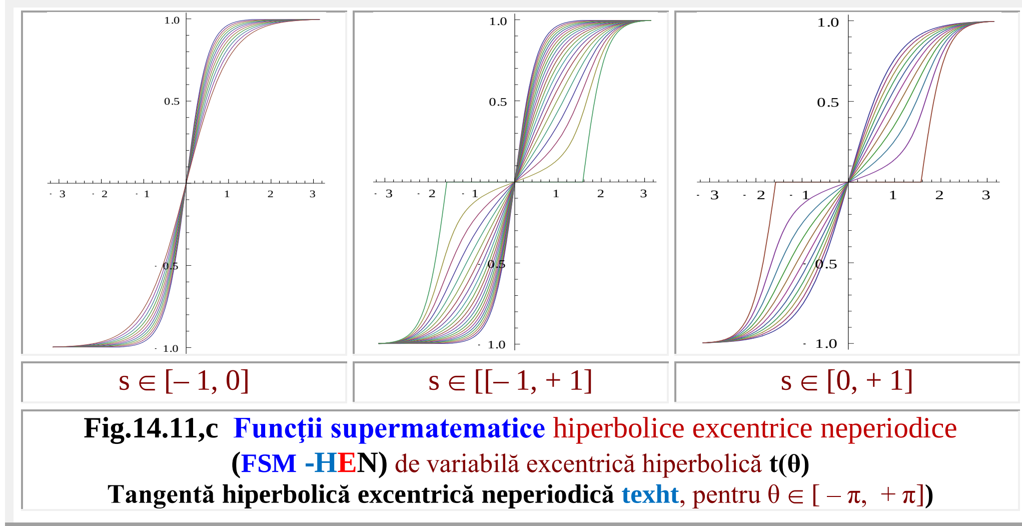


Fig.14.11,b Funcţii **supermatematice** hiperbolice excentrice neperiodice
(FSM-HEN) de variabilă excentrică hiperbolică **t(θ)**
Sinus hiperbolic excentric neperiodic sexht, pentru θ ∈ [– 2π, + 2π]



s ∈ [– 1, 0] s ∈ [[– 1, + 1] s ∈ [0, + 1]

Fig.14.11,c Funcţii supermatematice hiperbolice excentrice neperiodice **(FSM -HEN)** de variabilă excentrică hiperbolică **t(θ)**
Tangentă hiperbolică excentrică neperiodică texht, pentru θ ∈ [– π, + π])

Sau, în general, pentru **FSM - HE** directe de variabilă excentrică x = cexhθ = ch α şi y = sexh θ = shα

$$(14.21)\quad \begin{cases} \begin{cases} X = cexh\theta = ch\alpha = cosh\alpha = cexh[\,\theta - arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]] \\ Y = sexh\theta = sh\alpha = sinh\alpha = \sinh[\,\theta - arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]] \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{Y}{X} = texh\theta = th\alpha = tanh\alpha = sinh[\,\theta - arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]] \\ \frac{X}{Y} = ctexh\theta = cth\alpha = coth\alpha = \coth[\,\theta - arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]] \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{X} = scexh\theta = sech\alpha = sech\alpha = \mathrm{sech}[\,\theta - arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]] \\ \frac{1}{Y} = cscexh\theta = cosech\alpha = csch\alpha = \mathrm{csch}[\,\theta - arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]] \end{cases} \end{cases},$$

cu graficele din **figura 14.8**, doar pentru prima determinare, principală 1, pentru ε = 0, excentricitatea liniară variind pe axa x .

14.8 DEFINIRE CU EXPONENŢIALE A FUNCŢIILOR HIPERBOLICE CENTRICE ŞI EXCENTRICE

Se cunoaşte că funcţiile hiperbolice centrice de variabilă hiperbolică t pot fi determinate cu ajutorul funcţiilor exponenţiale centruice e^t şi e^{-t} astfel

$$(14.22)\quad \begin{cases} cosht = cht = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ sinht = sht = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$$

, iar tangenta, cotangenta şi celelalte funcţii hiperbolice centrice rezultă prin combinarea celor două **FHC** de baza date de relaţiile (14.22)

$$(14.23)\quad \begin{cases} tanht = tht = \frac{sinht}{cosht} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \\ cotht = ctht = \frac{cosht}{sinht} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \end{cases}$$

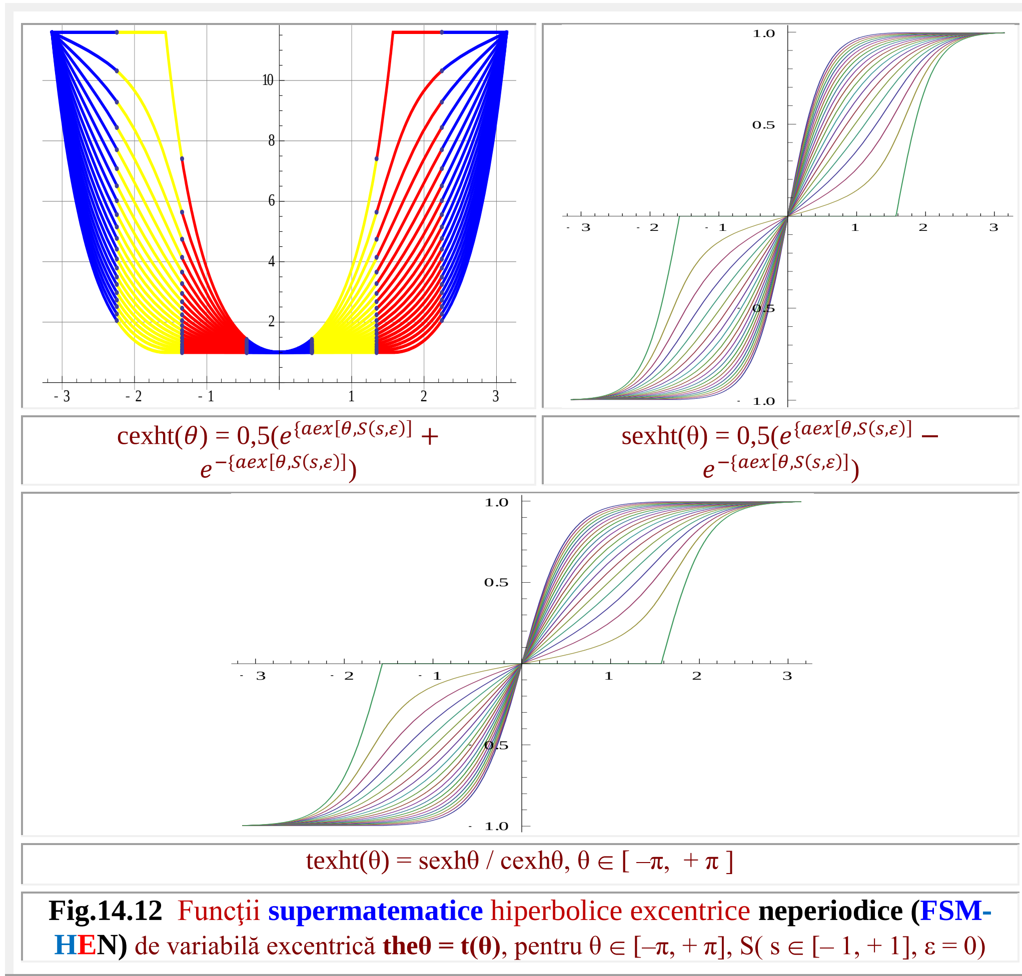


Fig.14.12 Funcţii **supermatematice** hiperbolice excentrice **neperiodice (FSM-HEN)** de variabilă excentrică **theθ = t(θ)**, pentru θ ∈ [–π, + π], S(s ∈ [– 1, + 1], ε = 0)

Utilizând funcţiile exponenţiale excentrice, din § 14.4, în expresiile de definire a funcţiilor hiperbolice centrice (14.22) se vor obţine funcţii hiperbolice excentrice neperiodice (14.24)

$$(14.24)\qquad \begin{cases} \cosh(\text{exext}) = csh(exext) = cexh(the\theta) = cexht \\ \sinh(exext) = ch(exext) = sexh(the\theta) = sexht \end{cases},$$

cu graficele din **figura 14.9**.

Graficele **FSM -HEN** din **figura 14.9** (θ∈ [– 2π, + 2π]) sunt identice cu cele din **figura 14.8**, (θ∈ [– π, + π])) diferind doar intervalul lui θ pe care ele au fost reprezentate.

Funcţiilor **hiperbolice excentrice neperiodice (FSM -HEN)** au mai fost definite, în lucrarea autorului [10], asemănător celor circulare centrice, adică, prin înlocuirea argumentului real centric **t** cu funcţia excentrică t(θ) = thexθ, sau $y_{1,2}(x) = aex_{1,2}[x, S(s, \varepsilon)]$ sau $\alpha_{1,2}(\theta) = aex_{1,2}[\theta, S(s, \varepsilon)]$.

Prin utilizarea **transformatei excentrice** ($\mathbf{TE_{1,2}}$), cum a mai fost denumită **FSM - CE** $\mathbf{aex_{1,2}\theta}$, pentru că realizează trecerea din **MC** în **ME,** s-a trecut din centric în

excentric, **în domeniul circular**. Apoi, prin înlocuirea variabilei reale (notate t, y sau α) cu una pur imaginară (it(θ), i.y(x) sau i.α(θ)) , în expresiile de definire a **FSM -CE** (cex, sex, tex ş.a.), s-a trecut din domeniul circular în cel **hiperbolic**.

Reamintim schema de trecere din centric în excentric prin transformările menţionate pentru funcţiile trigonometrice excentrice **cex** θ şi **sex** θ :

(14.25)
$$\begin{cases} R \overset{PA}{\Longrightarrow} C(O,1) \overset{TE_{1,2}}{\Longrightarrow} C(O,1) \overset{\cos}{\Longrightarrow} [-1,1] \\ R \overset{PA}{\Longrightarrow} C(O,1) \overset{TE_{1,2}}{\Longrightarrow} C(O,1) \overset{\sin}{\Longrightarrow} [-1,1] \end{cases}$$

se obţin din urmatoarele compuneri:

(14.26) $\mathbf{cex}_{1,2}\,\theta = \mathbf{cos} \circ \mathbf{TE}_{1,2} \circ \mathbf{PA}$

(14.27) $\mathbf{sex}_{1,2}\,\theta = \mathbf{sin} \circ \mathbf{TE}_{1,2} \circ \mathbf{PA}$

în care **PA** este **proiecţia de acoperire a cercului unitate C(O,1)** sau a **cercului trigonometric CT**

(14.28) **PA : R** $\Rightarrow$ **C(O,1)** $\equiv$ **CT**

Rezultă, astfel, cosinusul hiperbolic excentric neperiodic cexh[t(θ), S] :

(14.29) $\mathbf{cexh}_{1,2}\,\mathbf{t} \overset{def}{=} \mathbf{ch}[\mathbf{t}_{1,2}(\theta)] = \mathbf{cosh}[\mathbf{t}_{1,2}(\theta)] = \mathbf{cos}\,[\mathbf{i.t}_{1,2}(\theta)]$

şi sinusul hiperbolic excentric neperiodic

(14.30) $\mathbf{i.sexh}_{1,2}\,\mathbf{t} \overset{def}{=} \mathbf{i.sh}[\mathbf{t}_{1,2}(\theta)] = \mathbf{i.sinh}[\mathbf{t}_{1,2}(\theta)] = \mathbf{sin}\,[\mathbf{i.t}_{1,2}(\theta)]$

Dependenţele dintre **t** şi θ, sau dintre α şi θ sau dintre y şi x fiind $\mathbf{TE}_{1,2}$, a fost anterior considerată în relaţiile (14.12).

Proprietaţiile **FCC** se menţin şi la **FHE**, coordonatele punctelor de intersecţie ale dreptei d cu cercul şi cu hiperbola echilateră sunt simultan cosinusul şi, respective, sinusul unghiului la centru α şi cosinusul excentric şi sinusul excentric al unghiului la excentru θ . Rezultă explicit expresiile, în funcţie de t(θ), $\alpha(\theta)$ sau de y = y(x), în care x = θ, y = α şi z = ε:

(14.31) $\mathbf{cexh}_{1,2}$ (x, E) = chx.ch(arcsin(s.sin(x-z))) $\mp$ shx.sh(arcsin(s.sin(x-z)))

(14.32) $\mathbf{sexh}_{1,2}$ (x, E) = shx.ch(arcsin(s.sin(x-z))) $\mp$ chx.sh(arcsin(s.sin(x-z)))

14.9 FUNCŢII RADIAL EXCENTRICE HIPERBOLICE rexh(t, S(s, ε))

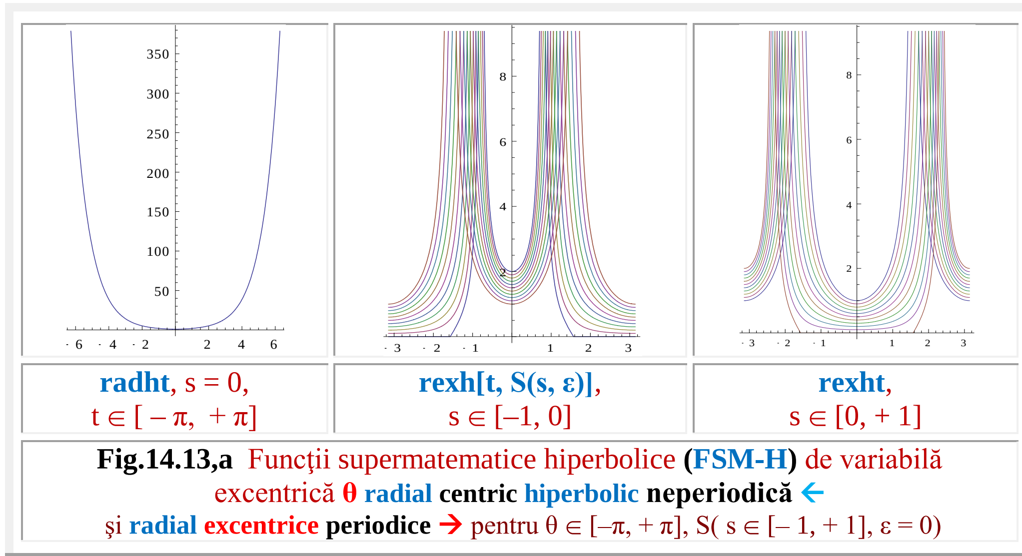
Funcţia **radial excentric hyperbolic rexh** (x,S) se introduce, ca şi în cazul **FSM - CE**, ca distanţă normată, de la excentrul **S(s, ε)** la punctele $\mathbf{M}_{1,2}$ de pe hiperbola echilateră din semiplanul x > 0.Rezultă expresia de definire în cazul funcţiei **hiperbolice radial excentric** enotată, pentru a păstra regulile de notare anterioare cex → cexh, sex → sexh cu rexh [t(θ), S(s, ε)] sau numai rexhθ

(14.33) rexh [t(θ), S(s, ε)] = $\sqrt{(cexht - s.cos\varepsilon)^2 + (sexht - s.sin\varepsilon)^2}$,

cu graficele din **figura 14.10** dreapta (→)

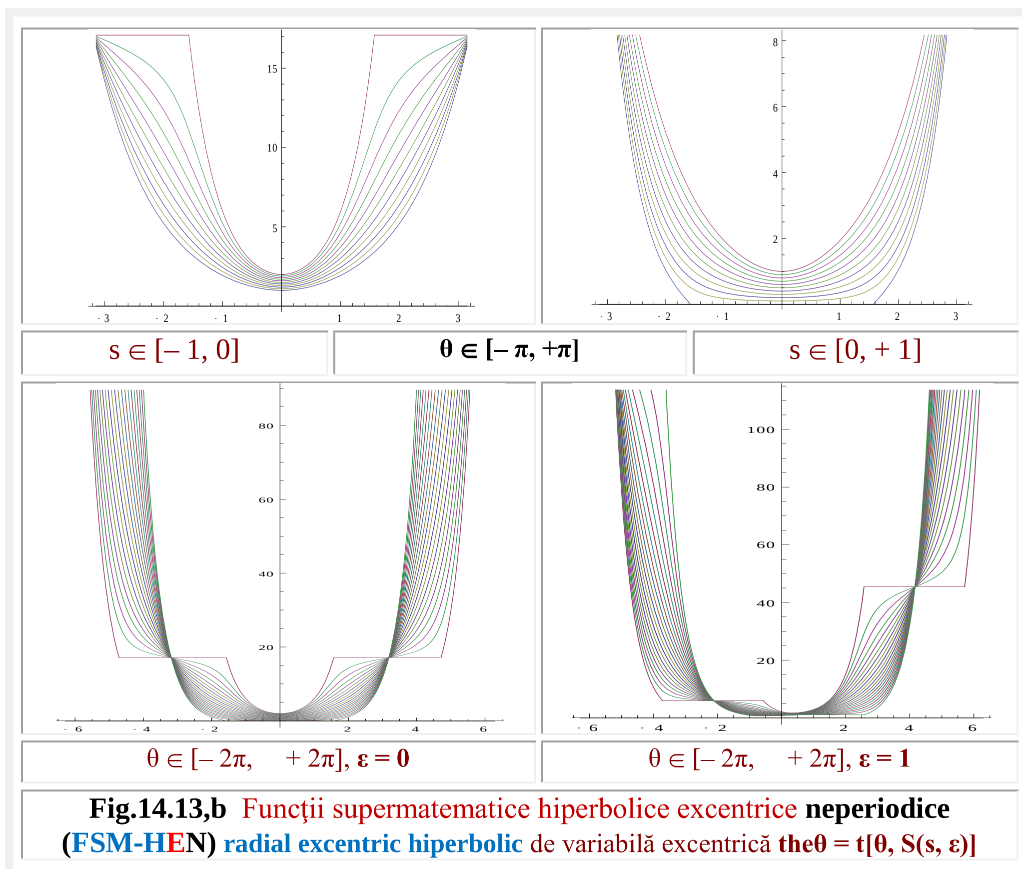
Iar, pentru s = 0, rezultă **FHC** radial centric, notată cu **radht**

(14.34) radht = $\sqrt{cosh^2 t + sinh^2 t}$, cu graficul din **figura 14.10** stânga (←).



radht, s = 0, t ∈ [– π, + π]	**rexh[t, S(s, ε)]**, s ∈ [–1, 0]	**rexht**, s ∈ [0, + 1]

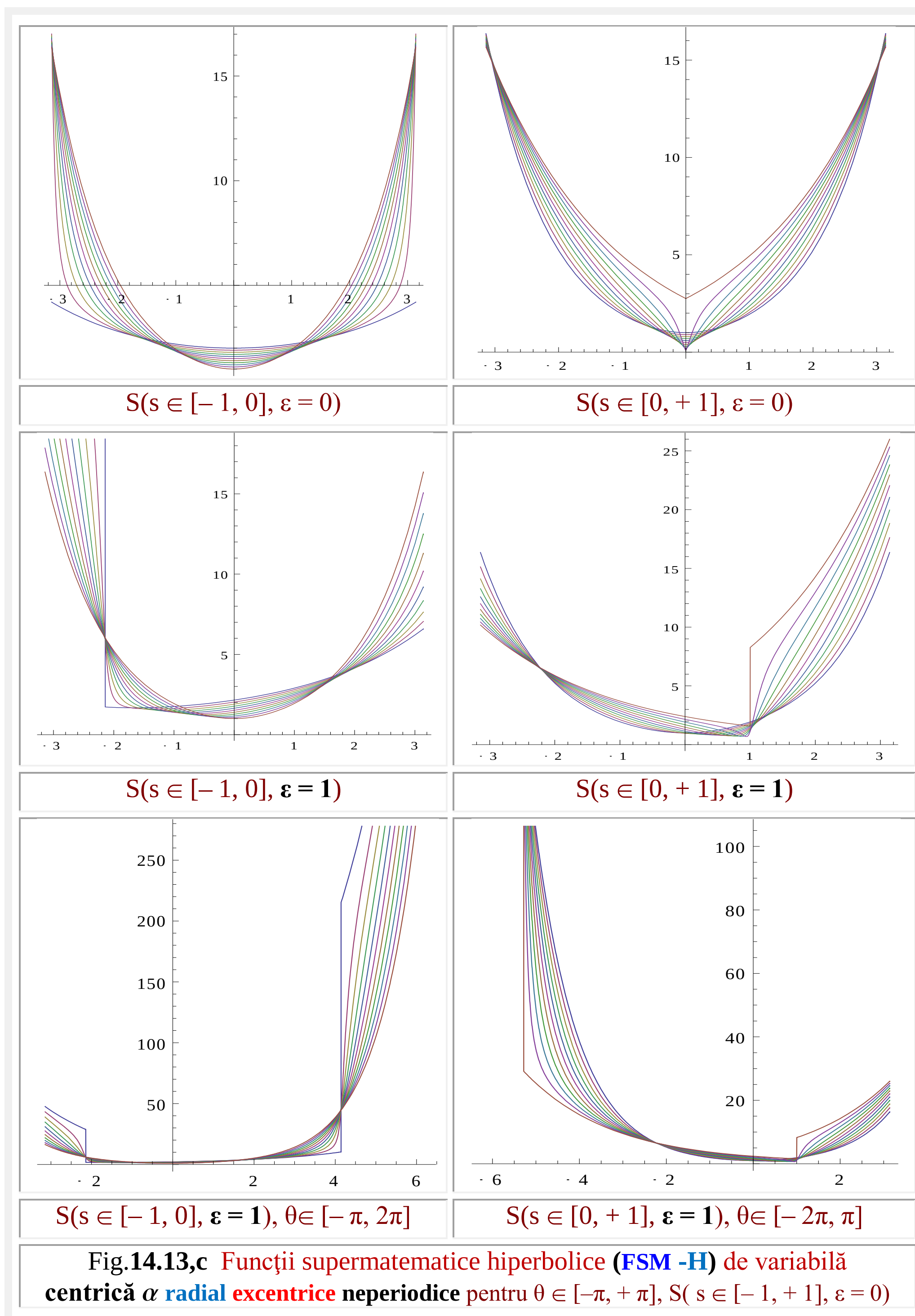
Fig.14.13,a Funcţii supermatematice hiperbolice (**FSM-H**) de variabilă excentrică **θ radial centric hiperbolic neperiodică** ← şi **radial excentrice periodice** → pentru θ ∈ [–π, + π], S(s ∈ [– 1, + 1], ε = 0)



s ∈ [– 1, 0]	**θ ∈ [– π, +π]**	s ∈ [0, + 1]

θ ∈ [– 2π, + 2π], **ε = 0**	θ ∈ [– 2π, + 2π], **ε = 1**

Fig.14.13,b Funcţii supermatematice hiperbolice excentrice **neperiodice** (**FSM-HEN**) **radial excentric hiperbolic** de variabilă excentrică **theθ = t[θ, S(s, ε)]**



S(s ∈ [– 1, 0], ε = 0)

S(s ∈ [0, + 1], ε = 0)

S(s ∈ [– 1, 0], **ε = 1**)

S(s ∈ [0, + 1], **ε = 1**)

S(s ∈ [– 1, 0], **ε = 1**), θ∈ [– π, 2π]

S(s ∈ [0, + 1], **ε = 1**), θ∈ [– 2π, π]

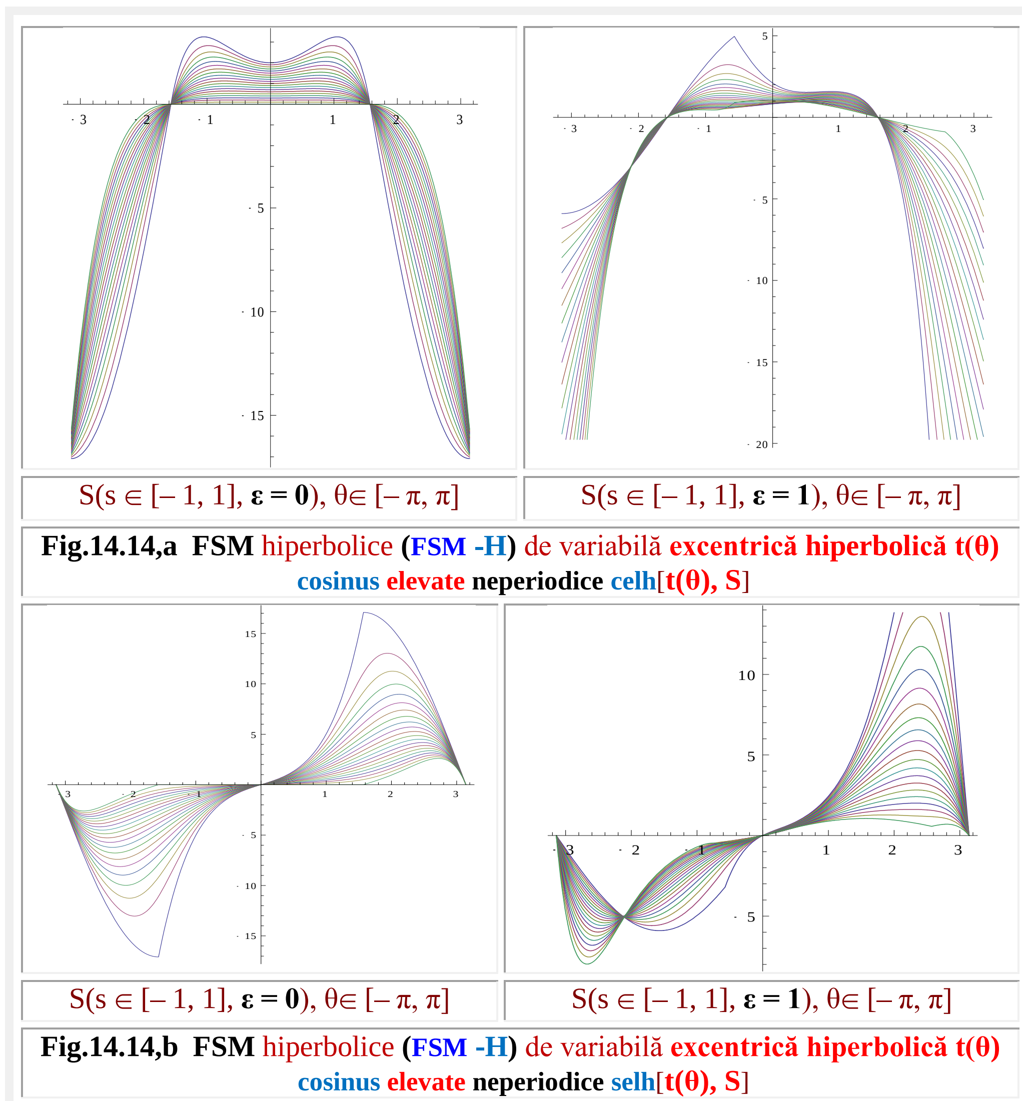
Fig.**14.13,c** Funcţii supermatematice hiperbolice **(FSM -H)** de variabilă **centrică** α **radial excentrice neperiodice** pentru θ ∈ [–π, + π], S(s ∈ [– 1, + 1], ε = 0)

Graficele acestei funcţii, pentru un excentru **S** situat pe axa x, ε = 0, sunt prezentate în **figura 14.10**.

14.10 FUNCŢII HIPERBOLICE ELEVATE celht şi selh

Proiectând aceste segmente normate, pe axele sistemului rectangular drept cu **originea O(s,ε) în S(s,ε)** se obţin, ca şi în cazul **FCEl**, funcţiile **SMH elevate** (**Fig.**14.12) notate cu **celh** (θ, E) şi, respective, **selh**(θ,E) de expresii

(14.35) $\begin{cases} celh = rexh\,cos\theta \\ selh = rexhsin\theta \end{cases}$, cu graficele din **figura 14.12**



S(s ∈ [– 1, 1], **ε = 0**), θ∈ [– π, π] | S(s ∈ [– 1, 1], **ε = 1**), θ∈ [– π, π]

Fig.14.14,a FSM hiperbolice (**FSM -H**) de variabilă **excentrică hiperbolică t(θ)**
cosinus elevate neperiodice celh[t(θ), S]

S(s ∈ [– 1, 1], **ε = 0**), θ∈ [– π, π] | S(s ∈ [– 1, 1], **ε = 1**), θ∈ [– π, π]

Fig.14.14,b FSM hiperbolice (**FSM -H**) de variabilă **excentrică hiperbolică t(θ)**
cosinus elevate neperiodice selh[t(θ), S]

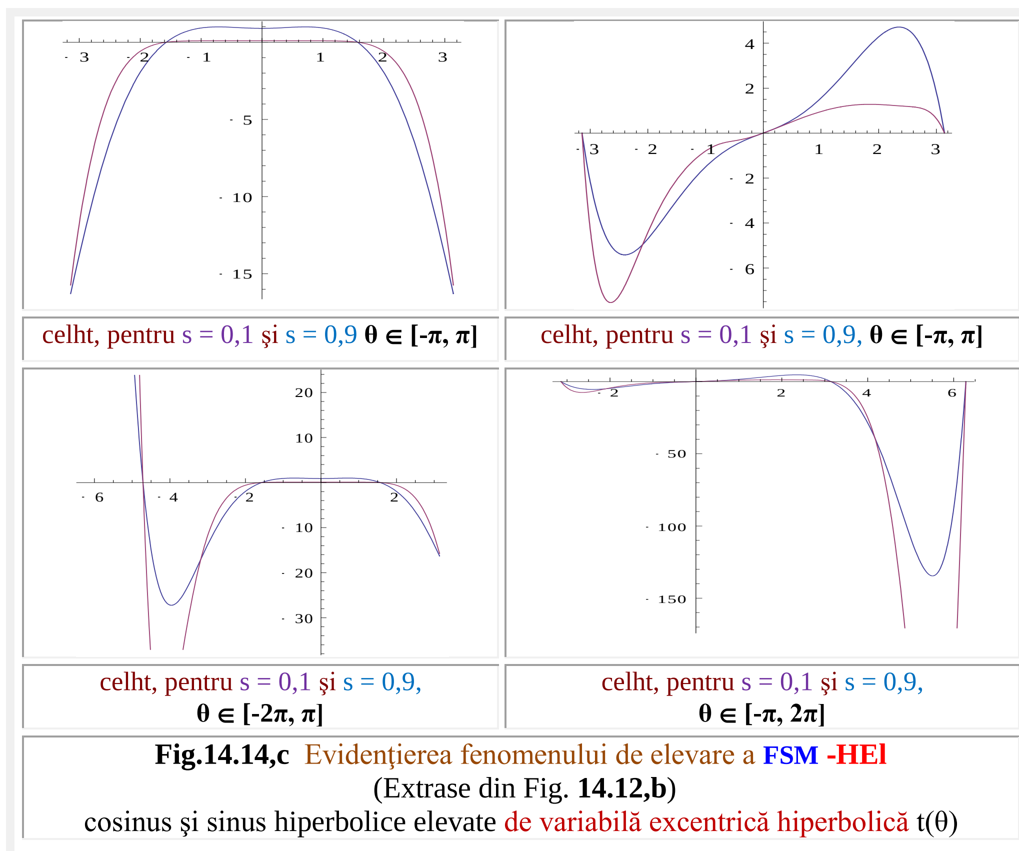


Fig.14.14,c Evidenţierea fenomenului de elevare a **FSM -HEl**
(Extrase din Fig. **14.12,b**)
cosinus şi sinus hiperbolice elevate de variabilă excentrică hiperbolică t(θ)

14. 11 FUNCŢIA DERIVATĂ EXCENTRICĂ HIPERBOLICĂ dexh([t, S(s, ε)]

Funcţia **derivata excentrica hiperbolica dexH** (x,E) se introduce aidoma celor circulare, ca derivată a amplitudinii excentrice hiperbolice aexhθ = gdex[t(θ), s(s, ε)].

Se obţine

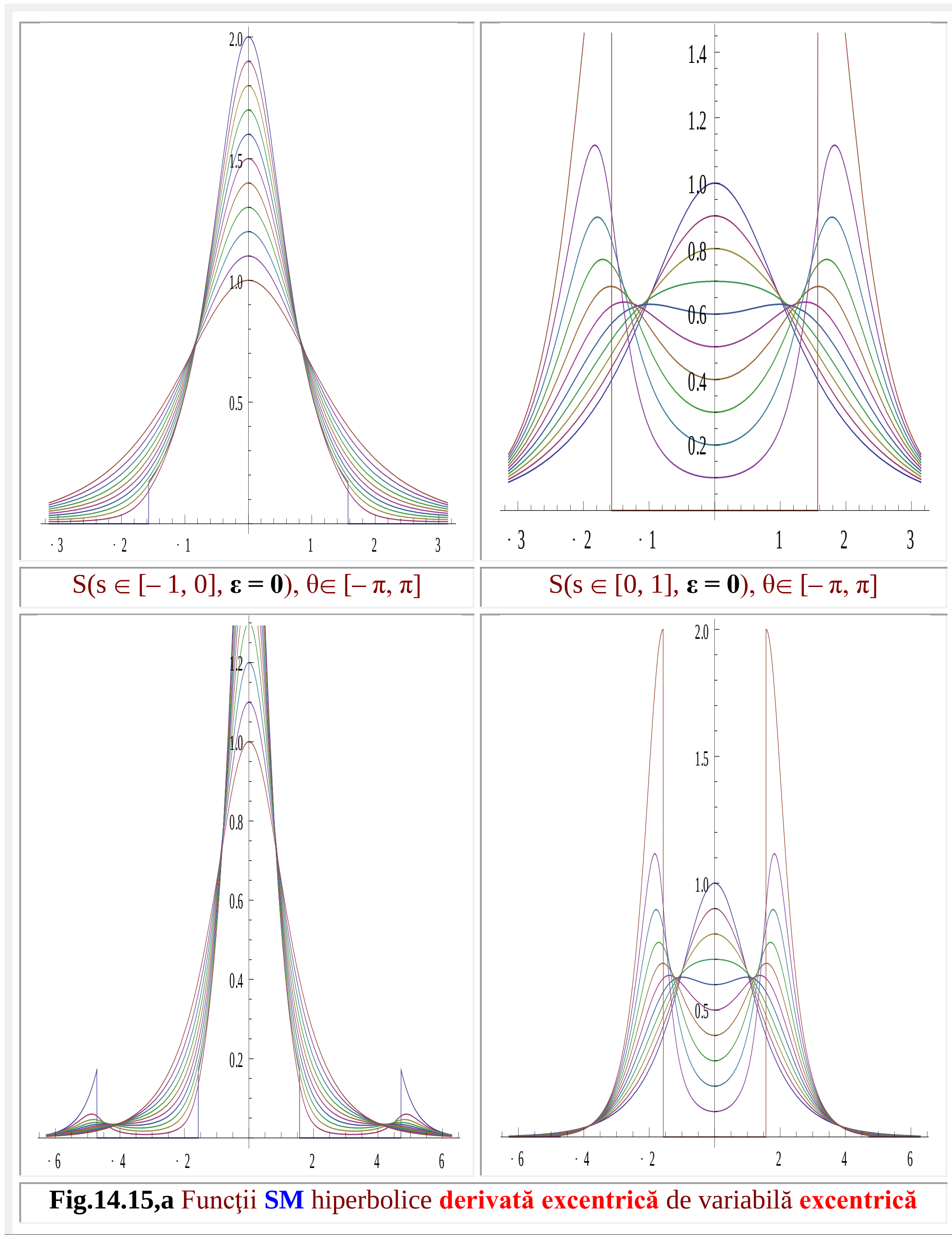
(14.36) $$\mathrm{dexh}(\theta, E) = \frac{d(aexh\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[2arctan\left(e^{\alpha(\theta)}\right) - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{d\alpha}{d\theta}\frac{d}{d\alpha}\left[2arctan\left(e^{\alpha(\theta)}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\mathrm{dexh}(\theta,E) = 2.dex\theta\,\frac{e^{\alpha(\theta)}}{1+e^{\alpha(\theta)}} = 2\left(1-\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}}\right)\frac{e^{(\theta-\arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)])}}{1+e^{(\theta-\arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]}}$$

cu graficele din **figura 14.14**.

Pentru un excentru care evolueaza pe axa x < 0, adică, S(s ∈ [– 1, 0], **ε = 0**), graficele seamănă cu curbele de distribuţie **Gauss** simetrice (Clopotul lui **Gauss**), iar pentru S(s ∈ [0, 1], **ε = 0**), cu curbele de distribuţie a trei grupe diferite de entităţi ca, de exemplu, mulţimea pieselor prelucrate pe trei maşini-unelte diferite şi ulterior amestecate.

Cele de ε ≠ 0, în **figura 14.15** cu ε = 1, sunt asemănătoare curbelor de distribuţie asimetrice, a căror abateri limită, faţa de maximul câmpului de distribuţie sunt de valori diferite.



S(s ∈ [– 1, 0], **ε = 0**), θ∈ [– π, π] | S(s ∈ [0, 1], **ε = 0**), θ∈ [– π, π]

Fig.14.15,a Funcţii **SM** hiperbolice **derivată excentrică** de variabilă **excentrică**

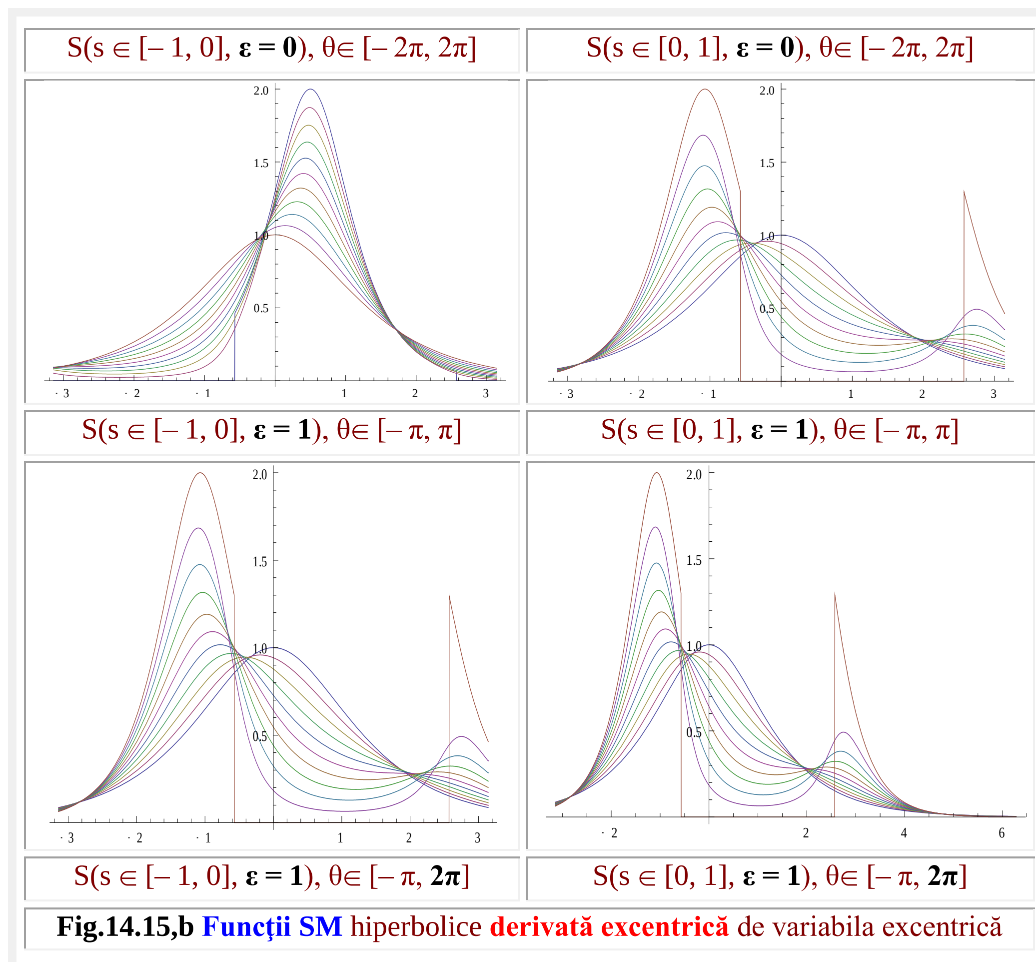


Fig.14.15,b Funcţii SM hiperbolice **derivată excentrică** de variabila excentrică

14. 12 C O N C L U Z I I

Toate **FSM** excentrice, **circulare** şi **hiperbolice**, se pot obţine prin înlocuirea argumentului sau a variabile independente notate cu y, t sau α (y, t, α → argumente centrice) cu funcţia sau variabila y(x), t(θ) sau α(θ), (x, θ → argumente excentrice), adică prin trecerea de la funcţie la o funcţia indusă.

Dependenţa dintre cele două variabile, centrice şi excentrice, se realizează prin funcţiile amplitudine excentrică circulară **y = aex(x) , sau α(θ) = aexθ** şi, respectiv, prin amplitudinea excentrică hiperbolică **t(θ) = gdexθ =aexhθ sau t(α) = Aexh(y) = = Gdex(α, S).**

Aceasta constitue **trecerea de la centric la excentric.**

Trecerile la funcţiile **elevate** şi **exotice** se efectuează prin schimbarea originii O a sistemului de axe de referinţă (O ≡ S), respectiv, şi a poziţiei centrului C al cercului trigonometric (O ≠ C ≠ S). Fiecare dintre aceste transformări, realizează un salt de la o

singură funcţie **din centric**, la o familie cu o infinitate de funcţii **in domeniul excentric**, un salt de la 1 la infinit !

Trecerea inversă, de la excentric la centric, este dată de excentricitatea nulă (s = e = 0) , când S ≡ O ≡ C.

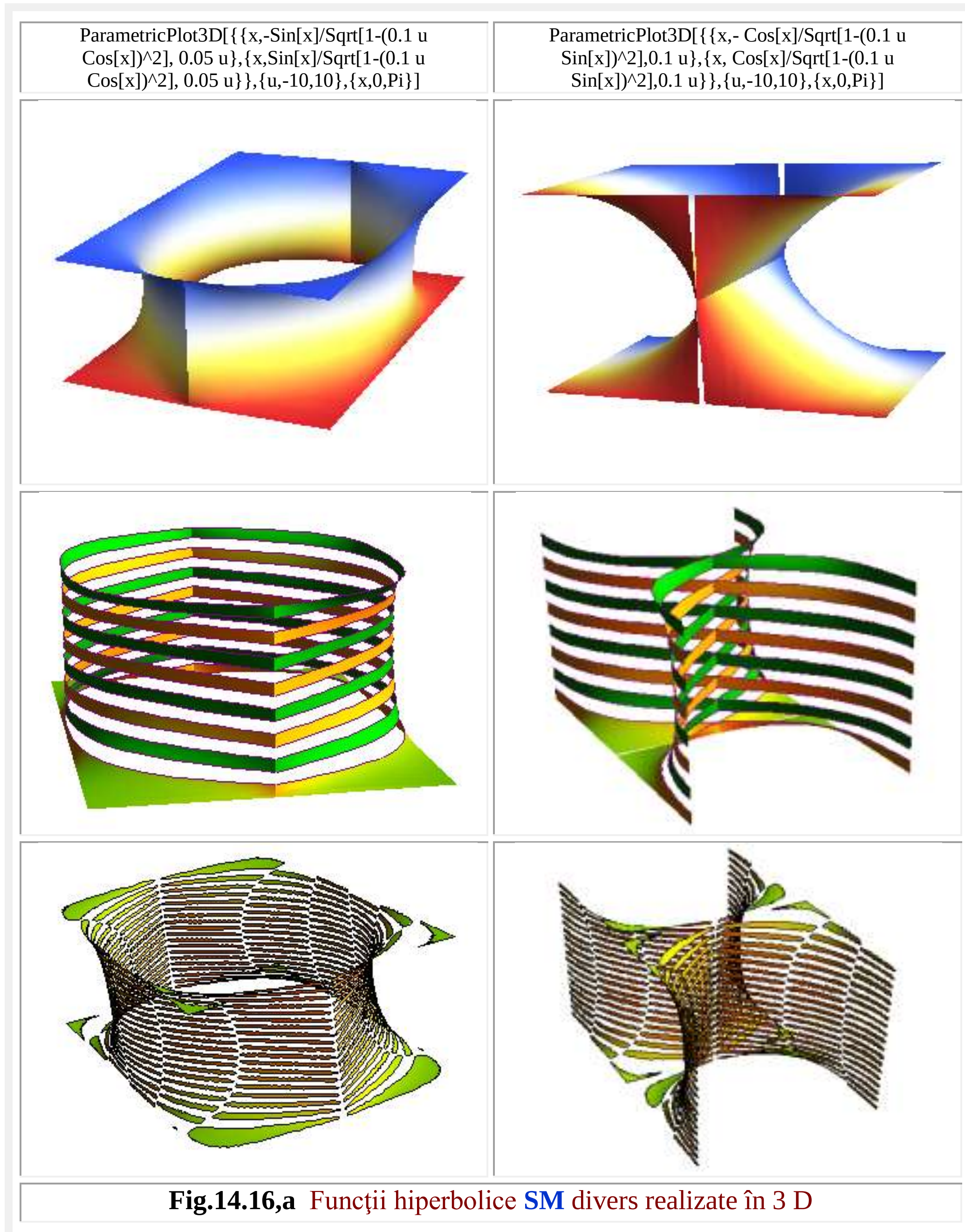


Fig.14.16,a Funcţii hiperbolice **SM** divers realizate în 3 D

Procesul de trecere **de la centric la excentric** poate continua nedefinit, deoarece, înlocuindu-se în **aex** variabila x cu y se obţine o funcţie aex de y sau o funcţie aex de aex, o funcţie excentrică de o altă funcţie excentrică, care se definesc ca **funcţii dublu (sau triplu şi MULTIPLU) excentrice- circulare** şi hiperbolice.

S-a propus notarea lor cu o cifră, de la 2 la n, intercalată înaintea terminaţiei "ex" asfel: **aex**, a2ex, a3ex… **rex**, r2ex, r3ex, …**dex**, d2ex, d3ex,… **cex**, c2ex, c3ex.., **sex** s2ex, s3ex,… ş.a.m.d pentru **FSM-CE** şi aexh, a2exh, a3exh.. şi s2exh, s3exh,... pentru **FSM-HE**;

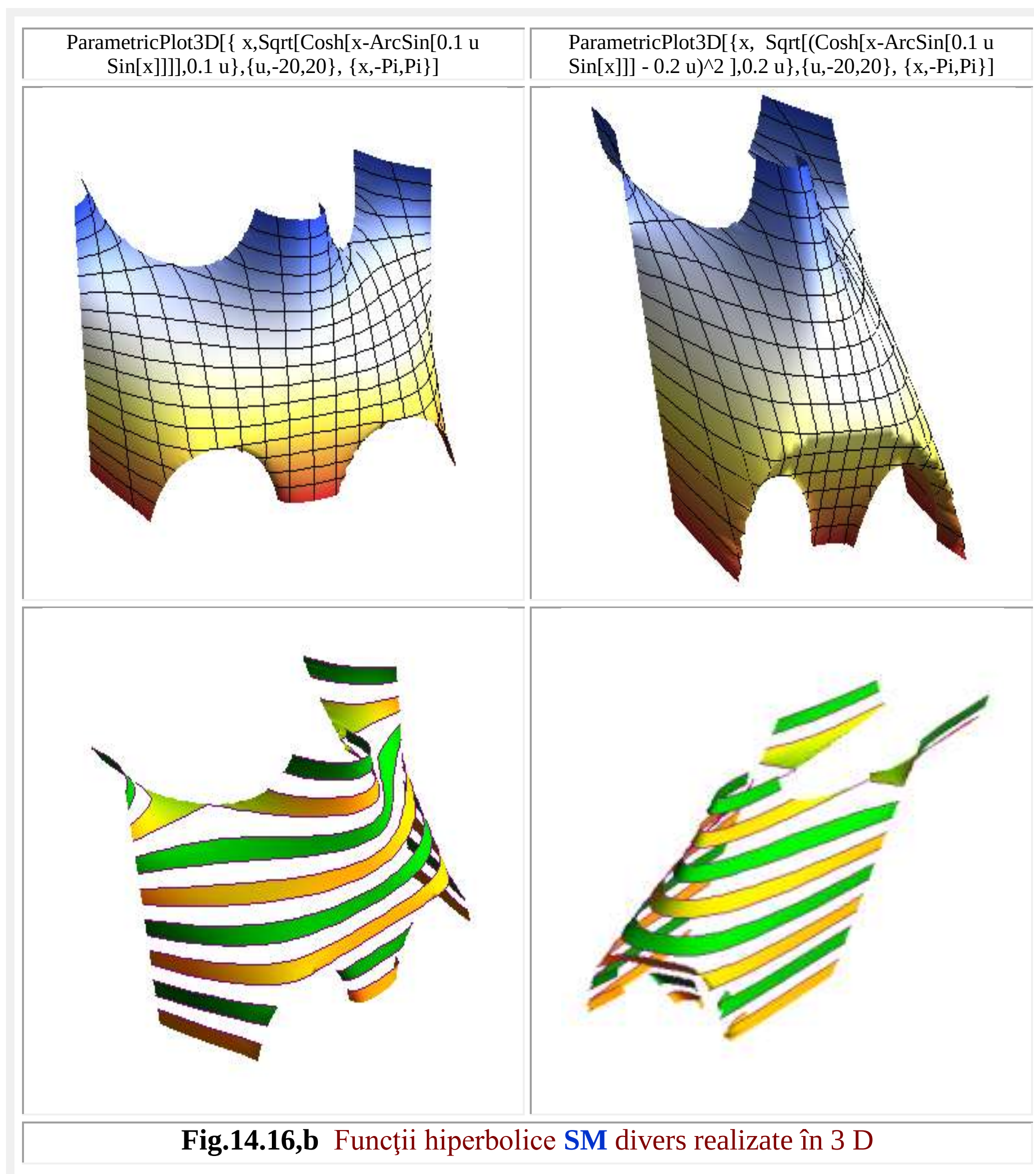
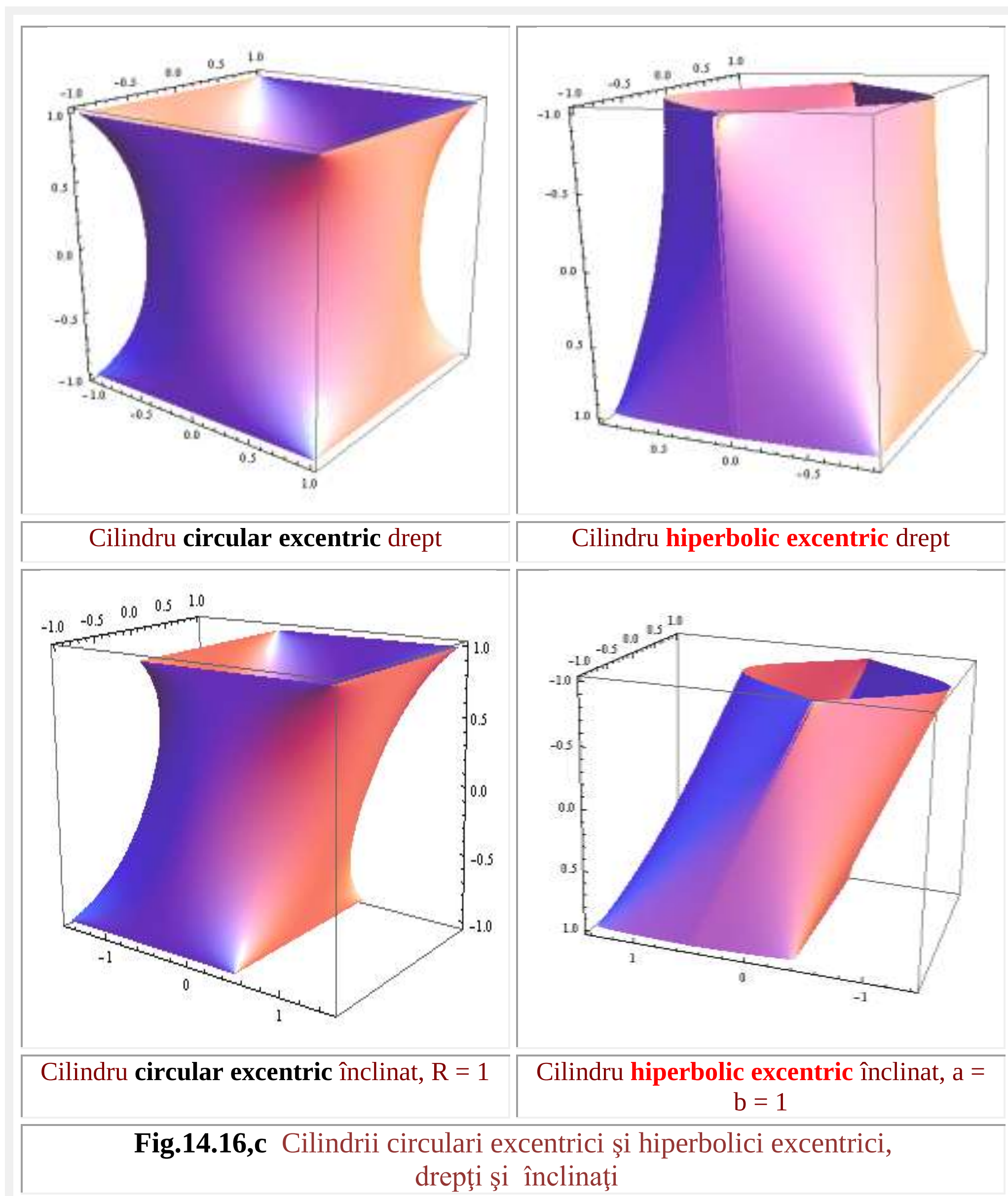


Fig.14.16,b Funcţii hiperbolice **SM** divers realizate în 3 D

Toate aceste funcţii s-au utilizat, cu succes, la soluţionarea unor sisteme mecanice neliniare [20]. Căutându-se noi aplicaţii, s-a simţit nevoia extinderii lor, iar extinderea lor oferă posibilitatea soluţionarii altor aplicaţii, astfel că este greu de prezis **unde, dacă şi când** se va opri acest proces.

Un singur lucru poate fi afirmat cu certitudine, şi anume, că ele se extind cu repeziciune în ştiinta şi în tehnica, în mod deosebil la soluţionarea unor probleme actuale de mare complexitate.



Cilindru **circular excentric** drept

Cilindru **hiperbolic excentric** drept

Cilindru **circular excentric** înclinat, R = 1

Cilindru **hiperbolic excentric** înclinat, a = b = 1

Fig.14.16,c Cilindrii circulari excentrici şi hiperbolici excentrici, drepţi şi înclinaţi

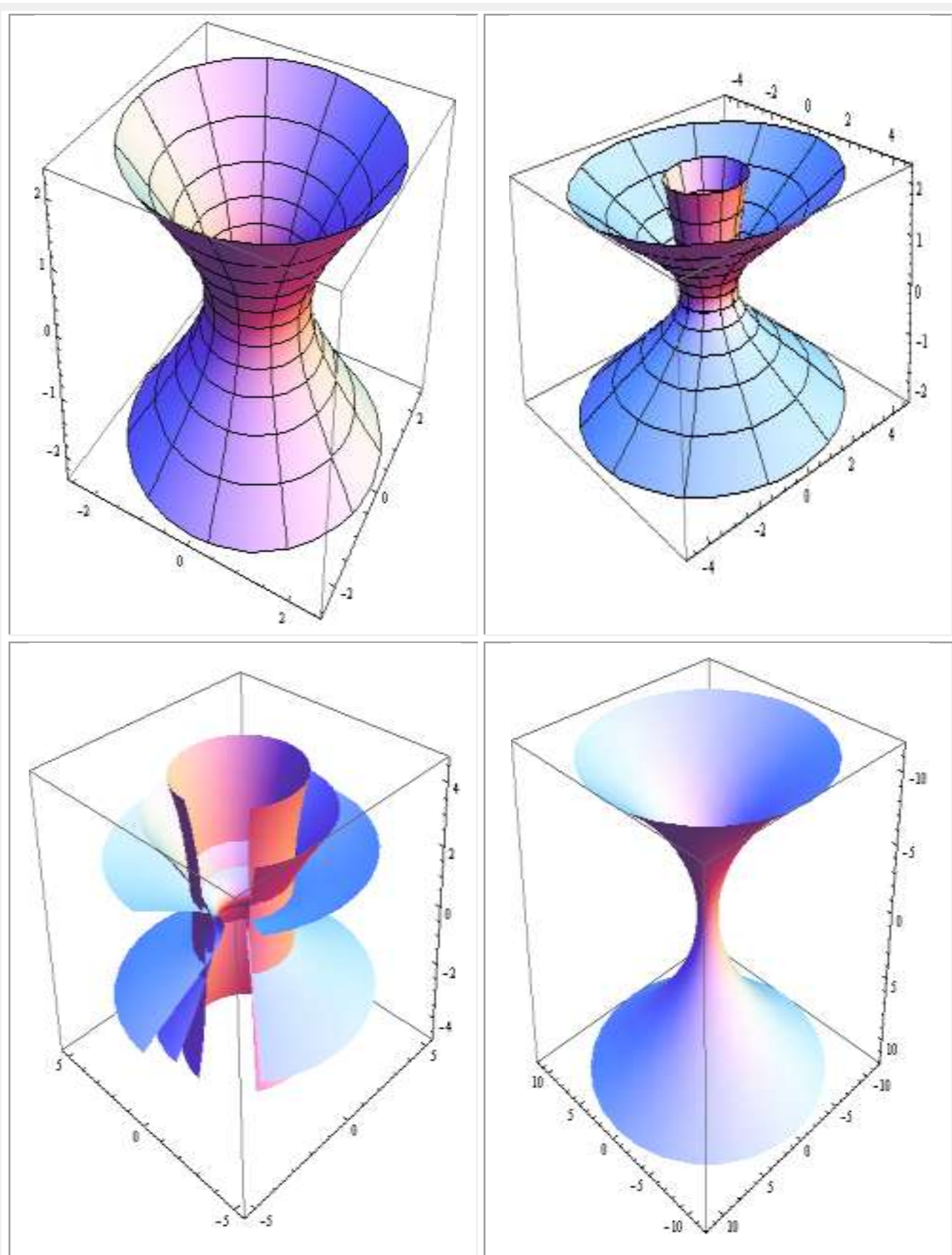


Fig.14.16,d Cilindrii hiperbolici sau **hiperboloizi de raotaţie** drepţi centrici (s = 0) ← stânga - şi excentrici de s = 0,6 – interior - şi s = – 0,6 – exterior → dreapta

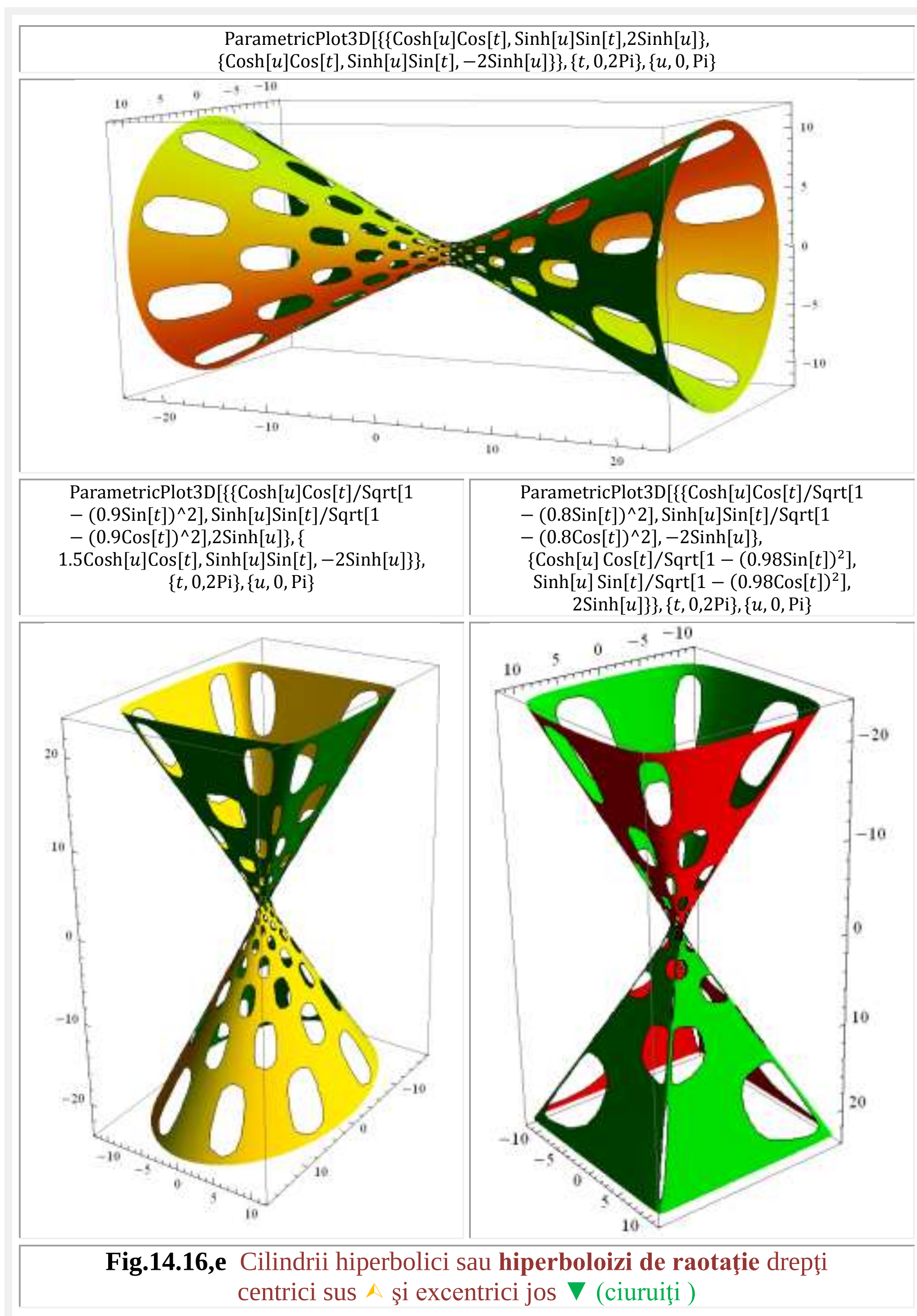


Fig.14.16,e Cilindrii hiperbolici sau **hiperboloizi de raotaţie** drepţi centrici sus ⅄ şi excentrici jos ▼ (ciuruiţi)

Motto: Matematica **EXCENTRICĂ** este **limbajul naturii**.
În **sistemul solar** se vorbeşte în limbajul matematicii **excentrice** de variabilă **centrică**.
În **galaxie** se vorbeşte în limbajul matematicii **excentrice** de variabilă **excentrică** .
Autorul matematicii excentrice

Capitolul 15

FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (FSM-CE) DE VARIABILĂ CENTRICĂ α SAU x

15.1 INTRODUCERE

Din cele expuse, până la prezentul capitol, s-a putut constata că toate **FSM** -CE se bazează pe existenţa punctelor, de coordonate carteziene, $W_{1,2}(x_{12}, y_{1,2})$, aparţinând cercului unitate, sau unui cerc oarecare de raza R, puncte rezultate în urma intersectiei cu o dreapta excentrică turnantă **d**.

Punctele au coordonatele polare $W_{1,2}(1, \alpha_{1,2})$, faţă de centrul **O**(0,0), sau $W_{1,2}(r_{1,2}, \theta_{1,2})$ faţă de polul / excentrul **S**(e,ε) dacă intersecţia s-a făcut cu cercul unitate **CU**(O,1).

Intersecţia cu un cerc oarecare **C**(O,R), al dreptei **d**, care **trece** prin punctul **E** şi este turnantă în jurul excentrului E(e,ε), sunt punctele $W_{1,2}(R_{1,2}, \alpha_{1,2})$ faţă de polul O(0,0) şi $W_{1,2}(R_{1,2}.\ r_{1,2}, \theta_{1,2})$ faţă de excentrul **E** (**Fig.15.1**), în care $r_{1,2} = rex_{1,2}\theta$, **FSM -CE** radial excentric (15.2) de variabilă excentrică θ, sau de variabilă centrică $r_{1,2} = Rex\alpha_{1,2}$.

Ultima specificaţie este importantă, deoarece, o dreaptă poate fi turnantă în jurul unui punct şi dacă nu trece prin acel punct, dar se roteşte în jurul lui, ramânând, de exemplu, în permanenţă tangentă la un cerc, sau la o altă curbă inchisă, care înconjoară acel punct.

S-a constatat că, prin definiţie, coordonatele carteziene ale punctelor $W_{1,2}$ sunt **FSM** -CE

(15.1) $$\begin{cases} x_{1,2} = cex_{1,2}\,\theta = Cex\alpha_{1,2} \rightarrow \text{cosinus excentric} \\ y_{1,2} = sex_{1,2}\theta = Sex\alpha_{1,2} \rightarrow \text{sinus excentric} \end{cases}$$

de variabilă **excentrică θ** şi, respectiv, de variabile **centrice** $\alpha_{1,2}$, iar coordonatele polare $r_{1,2}$ sunt funcţiile noi, introduse în matematică sub denumirea de **FSM** -CE **radial excentric**

(15.2) $$r_{1,2} = \begin{cases} rex_{1,2}\theta = -s\cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - s^2\sin^2\theta} \\ Rex\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{1 + s^2 - 2s\cos(\theta - \varepsilon)} \end{cases}$$

de variabilă motoare excentrică θ şi, respectiv, de variabile motoare centrice $\alpha_{1,2}$.

15.2 VARIABILE UNGHIULARE

Variabila **motoare** este variabila **excentrică θ,** dacă ea antrenează / cauzează **direct** rotaţia dreptei excentrice **d** din excentrul **S** în jurul excentrul **S** şi, prin intersecţia ei cu cercul unitate determină punctele $\mathbf{W_{1,2}}$ şi, astfel, generează **FSM-CE** de variabilă **excentrică**.

Variabial **motoare** este cea **centrică** α_1, dacă, din centrul **O**(0,0), raza vectoare **R = 1** se roteşte cu unghiul α_1 în jurul lui **O**(0,0) şi determină punctul $\mathbf{W_1(1, \alpha_1)}$ de pe cercul unitate şi, prin unirea acestuia cu **S**, roteşte **indirect** dreapta **d** cu unghiul **θ** în jurul excentrului **S** şi determină al doilea punct de intersecţie $\mathbf{W_2}$ de pe cercul unitate şi, totodată, a doua variabilă centrică, nemotoare, α_2, ca şi **FSM-CE** corespunzătoare, de variabilă centrică (Fig.**15.2**).

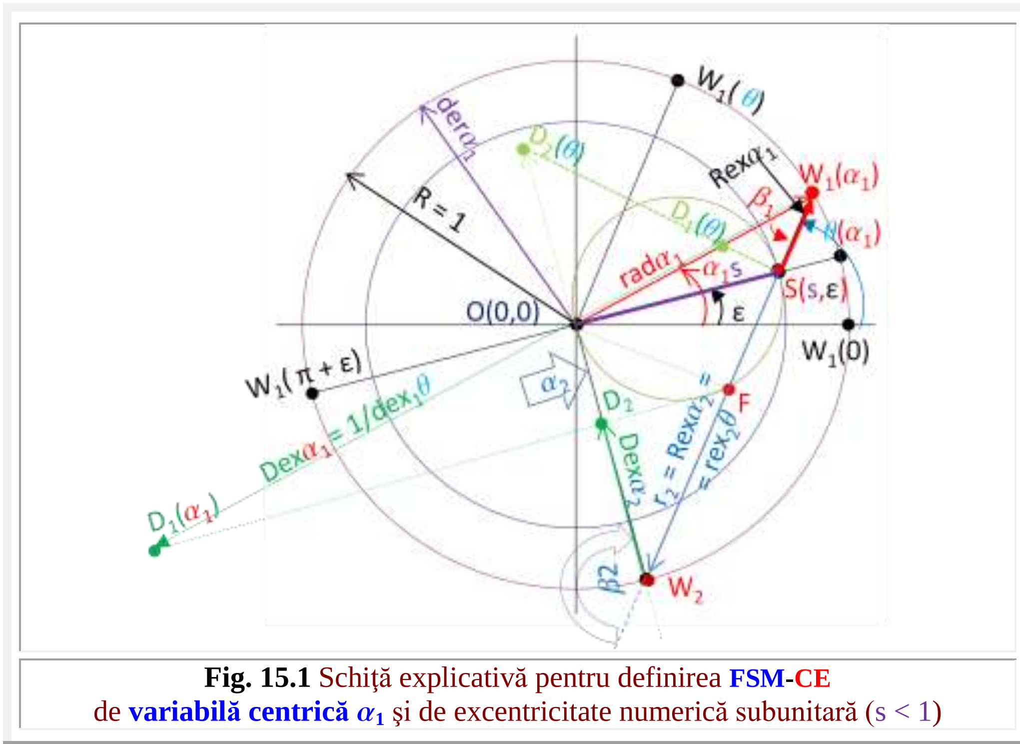


Fig. 15.1 Schiţă explicativă pentru definirea **FSM-CE**
de **variabilă centrică** α_1 şi de excentricitate numerică subunitară (s < 1)

Rezultă ca evidentă observaţia că, indiferent care variabilă unghiulară este motoare, atâta timp cât excentrul **S** este interior cercului unitate, dreapta **d** din **S** şi / sau raza polară **R = 1** din **O**(0,0) intersecteaza cercul unitate şi, în consecinţă, punctele $\mathbf{W_{1,2}}$ există şi, pe cale de consecinţă, există şi familiile de **FSM-CE** de aceste variabile.

Adică, pentru s ∈ [-1,+1], **FSM-CE** există şi **sunt funcţii continue** pentru ambele variabile.

Dacă, excentrul S este **exterior** discului circular unitar (de rază R = 1), situaţia se schimbă radical, în sensul că punctu **W**$_1$(1, $\alpha_1 \equiv \alpha$) există independent de poziţia excentrului **S**, $\forall \propto_1 \equiv \propto \in [-\infty, +\infty] \cup s \in [-\infty, +\infty]$, dar punctele **W**$_{1,2}$, de intersecţie a dreptei **d** din **S,** există **numai** pentru un anumit domeniu **θ ∈ [θ$_i$, θ$_f$];** valorile iniţială **θ$_i$** şi finală **θ$_f$** fiind ale dreptelor **d** de tangenţă la cercul unitate, dintr-un punct (**S**) **exterior** cercului unitate / trigonometric.

In concluzie, avantajul **FSM-CE** de **variabila centrică** consistă în faptul că ele există, sau **sunt continue**, pentru o excentricitate variind pe toată axa reală, adică pentru o excentricitate reală **e** şi numerică **s** → **e**, **s** ∈ [-∞, + ∞], faţă de cele de **variabilă excentrică** care există, sau sunt **continue**, doar în intervalul **s** ∈ [- 1, + 1], respectiv **e** ∈ [-R, +R].

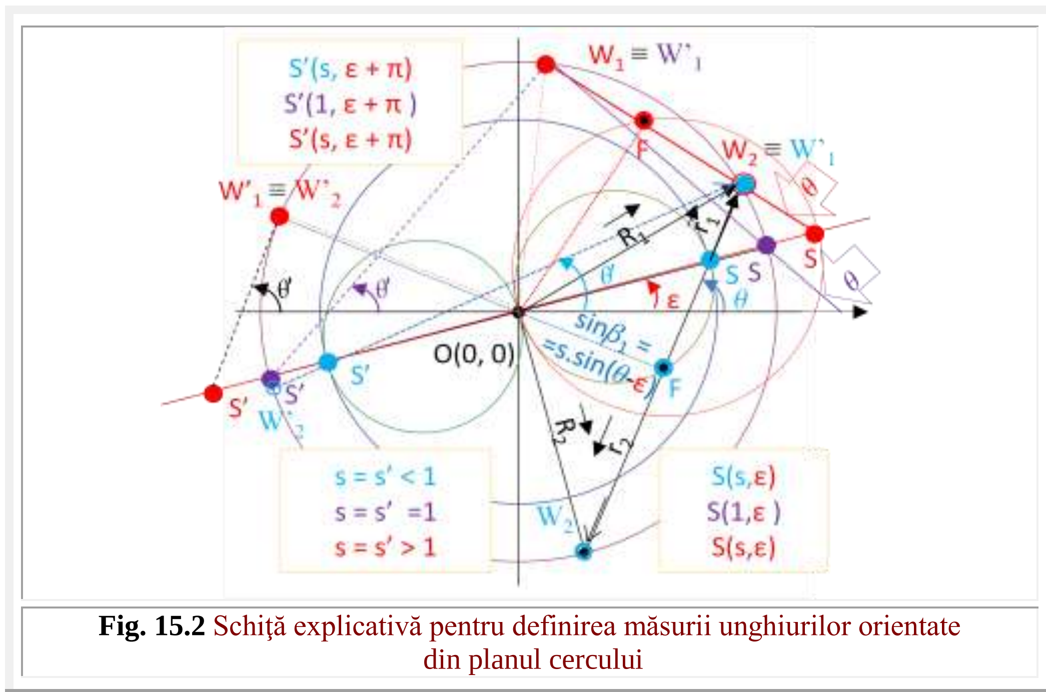


Fig. 15.2 Schiţă explicativă pentru definirea măsurii unghiurilor orientate din planul cercului

15.3 MĂSURA UNGHIURILOR ORIENTATE DIN PLANUL CERCULUI UNITATE

Se ştie că un unghi orientat, notat în multiple moduri, ca de exemplu, variabilele unghiulare centrice, sau argumentele $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$

(14.3) $\sphericalangle \alpha_{1,2} = \widehat{AOW_{1,2}} = \sphericalangle(AO, OW_{1,2}) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OW_{1,2}}}\right) = \left(\widehat{\vec{X}^{+}, \vec{R}_{1,2}}\right)$

are doua laturi: una **iniţială**, în cazul de faţă versorul $\overrightarrow{OA}$ = rad0°, care este versorul axei x pozitive, adică, are sensul axei $x^+ > 0$ şi una **finală OW$_{1,2}$**, sau vectorii de poziţie ai punctelor **W$_{1,2}$** de pe **cercul unitate**, faţă de centrul **O(0,0),** notaţi $\vec{R}_{1,2}$, care sunt şi

ei versorii sau, mai precis, deoarece sunt turnanţi, sunt fazorii direcţiilor $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ notaţi cu **rad**$\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$, precum şi un centru de rotaţie O(0,0).

Măsura unghiului $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ este pozitivă dacă pentru a-l suprapune pe $\vec{x}$ peste $\vec{R}_{1,2}$ este necesară o rotaţie în sens trigonometric pozitiv (sisnistrorum sau levogin) şi negativă în caz contrar (dextrorum sau dextrogin care este sensul de rotaţie al arătătoarelor ceasornicelor).

În acest caz, unghiul **θ** este unghiul dintre versorul axei x, notat **rad0**^{0} şi fazorul semidreptei **d**$^+$ care este notat cu **radθ**.

În **figura 15.2** sunt considerate 6 situaţii distincte: | ± s | < 1, | ± s | = 1şi | ± s | > 1.

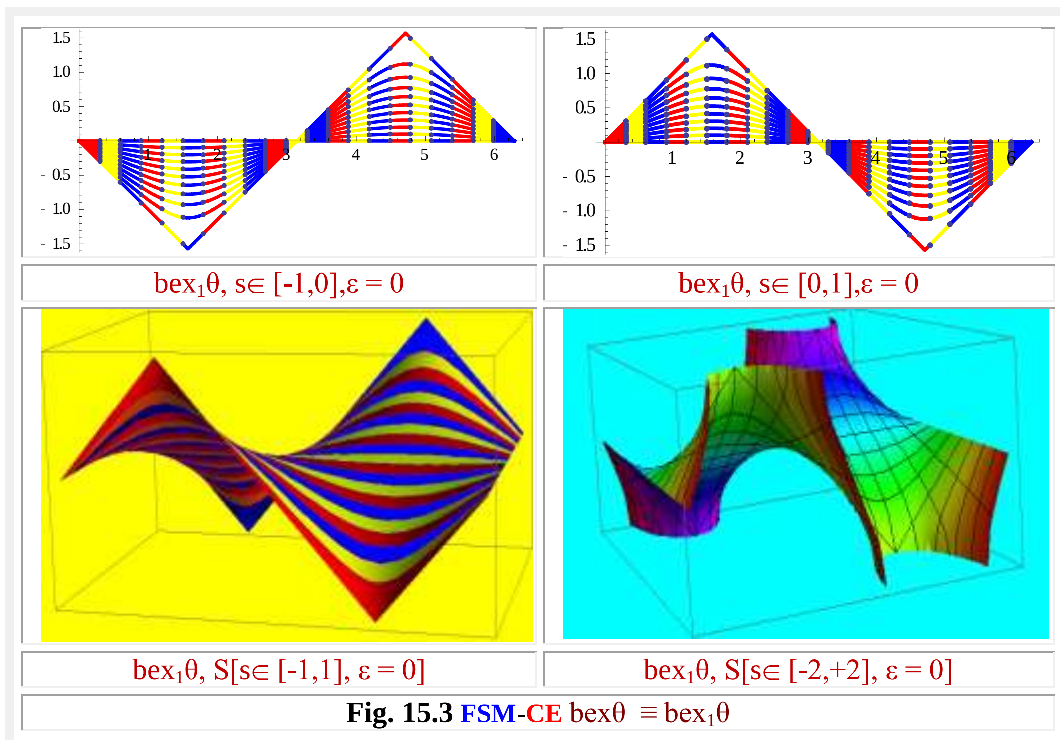
15.4 FSM-CE BETA EXCENTRICE şi FUNCŢII OCTAV GHEORGHIU

O a treia variabilă **unghiulară** este unghiul $\boldsymbol{\beta_{1,2}}$, cu dependenţele cunoscute din volumul I

(15.4) $\alpha_{1,2} + \beta_{1,2} = \theta \rightarrow \beta_{1,2} = \theta - \alpha_{1,2}$,

şi, unele dependenţe mai complete / precise decât în volumul anterior

(15.5) $$\sum \beta_i = \beta_1 + \beta_2 = \begin{cases} +\pi, dacă\ s_x = s.cos\varepsilon > 0, \rightarrow \varepsilon \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -\pi, dacă\ s_x = s.cos\varepsilon < 0, \rightarrow \varepsilon \in [\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$



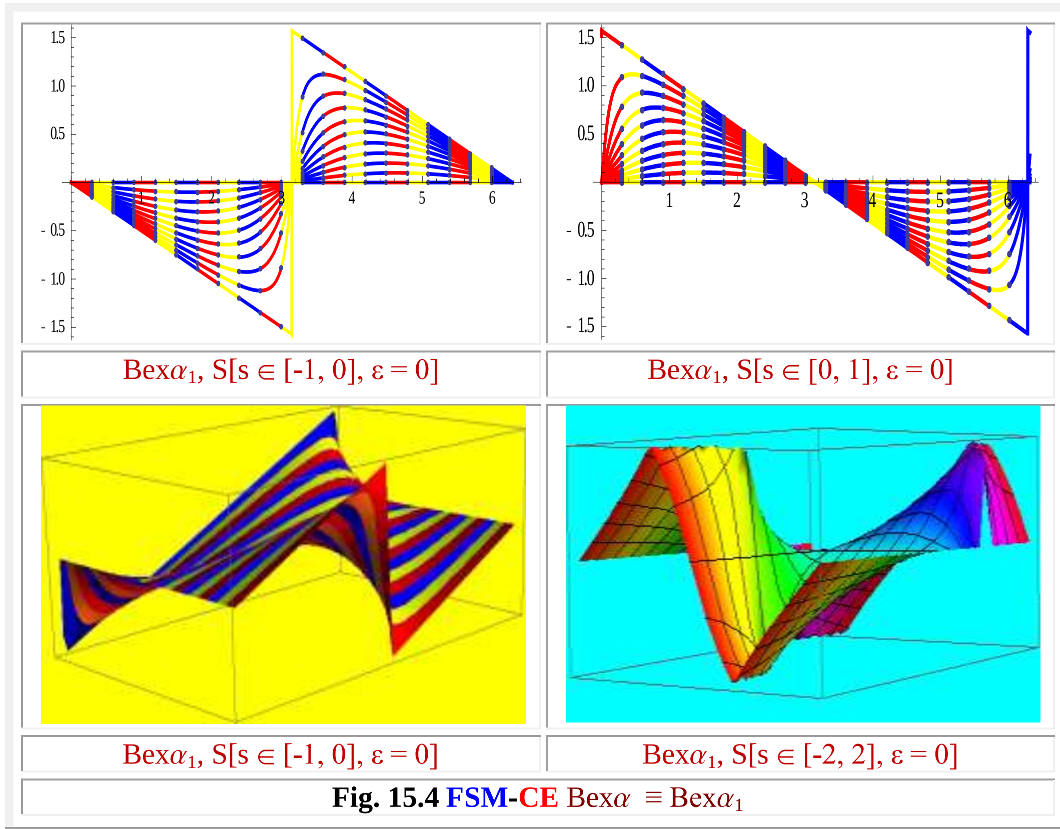
bex$_1$θ, s∈ [-1,0],ε = 0 | bex$_1$θ, s∈ [0,1],ε = 0

bex$_1$θ, S[s∈ [-1,1], ε = 0] | bex$_1$θ, S[s∈ [-2,+2], ε = 0]

Fig. 15.3 **FSM-CE** bexθ ≡ bex$_1$θ

Altfel spus, dacă **S(s,ε)** este în semiplanul pozitiv/drept suma $\sum \beta_i$ este pozitivă, iar dacă **S(s,ε)** este plasat în semiplanul negativ/stâng, suma $\sum \beta_i$ este negativă.

Unghiurile $\boldsymbol{\beta_{1,2}}$ sunt unghiurile dintre versorii **rad**$\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ şi **radθ**, adică dintre vectorii $\vec{R}_{1,2} = 1.\boldsymbol{rad} \propto_{1,2}$ şi $\vec{r}_1$ = **rex$_1$θ.radθ**.



Bexα_1, S[s ∈ [-1, 0], ε = 0] Bexα_1, S[s ∈ [0, 1], ε = 0]

Bexα_1, S[s ∈ [-1, 0], ε = 0] Bexα_1, S[s ∈ [-2, 2], ε = 0]

Fig. 15.4 **FSM-CE** Bexα ≡ Bexα_1

Unghiul $\boldsymbol{\beta_1}$ este unghiul sub care se văd, succesiv, centrul **O** şi excentrul **S** din punctul **W$_1$** de pe cercul unitate, rotindu-ne în **W$_1$** dinspre **O** înspre **S,** oricare ar fi poziţia excentrului **S**, interior sau exterior cercului unitate. Se poate observa că $\boldsymbol{\beta_1} > 0$ pentru **S** în semiplanul pozitiv, adică s_x= s.cosε > 0 şi $\boldsymbol{\beta_1} < 0$ pentru S în semiplanul negativ $s_x < 0$.

În **W$_2$** rotaţia dinspre O spre S schimbă de sens / semn. Ca urmare, pentru s < 1 şi s_x = s.cosε > 0, $\boldsymbol{\beta_1}$ este pozitiv în W_1 şi negativ în W_2, iar pentru $s_x < 0$ semnele / sensurile se inversează.

Expresiile lui $\beta_{1,2}$ în funcţie de cele două variabile sunt denumite, aşa cum s-a mai expus în Vol. I, **FSM-CE beta excentrice** şi sunt, în funcţie de variabila excentrică

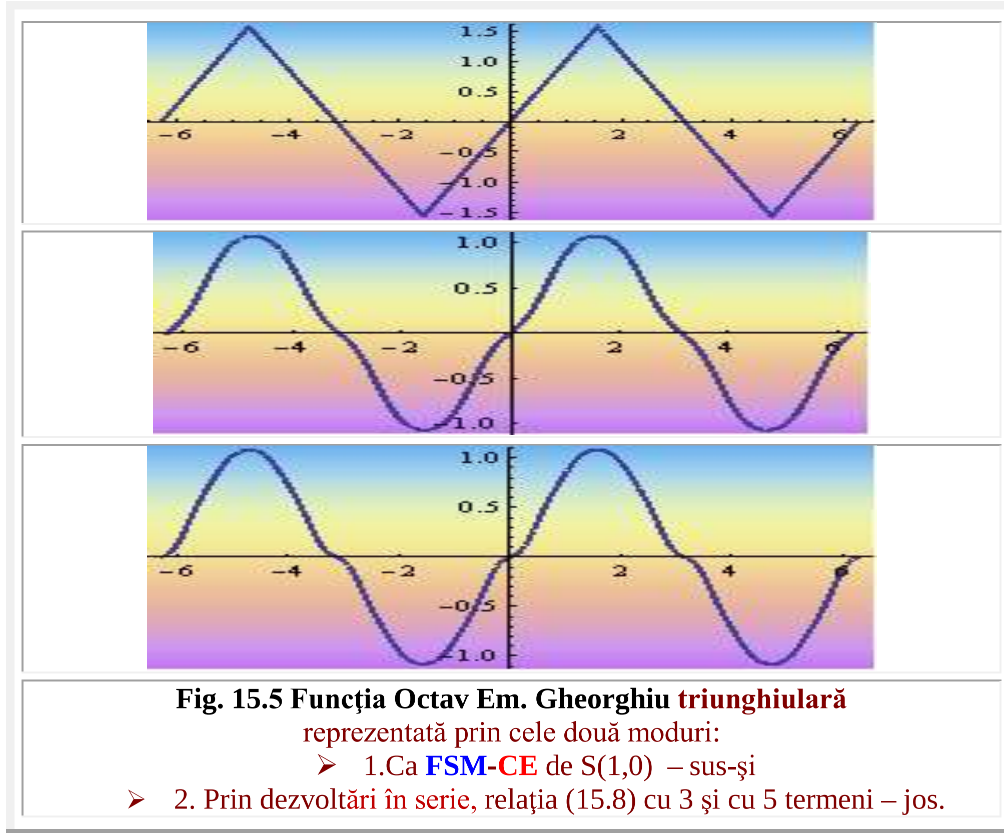


Fig. 15.5 Funcţia Octav Em. Gheorghiu triunghiulară
reprezentată prin cele două moduri:

- 1.Ca **FSM-CE** de S(1,0) – sus-şi
- 2. Prin dezvoltări în serie, relaţia (15.8) cu 3 şi cu 5 termeni – jos.

(15.6)
$$\beta_{1,2}(\theta) = bex_{1,2}\theta \begin{cases} \beta_1(\theta) = bex_1\theta = \arcsin\,[s.\sin\,(\theta - \varepsilon)] \\ \beta_2(\theta) = bex_2(\theta) = \pm\pi - \beta_1(\theta) = \\ = \pm\pi + \arcsin\,[s.\sin\,(\theta - \varepsilon)] \end{cases}$$

În funcţie de **variabila centrică** α ele au expresiile

(15.7)
$$\begin{cases} \beta(\alpha_{1,2}) = Bex\alpha_{1,2} \rightarrow \begin{cases} \beta_{1,2} = Bex\alpha_{1,2} = \beta(\alpha_{1,2}) \\ = arcsin\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}} = \end{cases} \\ = arctan\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{1-scos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n.sinn \propto_{1,2} \end{cases}$$

O altă expresie a unghiurilor $\beta_{1,2}$ se poate obţine şi cu ajutorul funcţiei trigonometrice inverse arccos, dar numai pentru intervalul $\alpha_{1,2} \in$ **[-π, +π]**. Această expresie este

(15.8)
$$\beta(\alpha_{1,2}) = Bex\alpha_{1,2} = arccos\frac{1-s.cos(\propto_{1,2}-\varepsilon)}{Rex\propto_{1,2}}$$

Din motive inexplicabile, graficele **FSM-CE** **bex$_{1,2}\theta$** şi **Bex$\alpha_{1,2}$** au fost omise din volumul precedent, de aceea, profitând de această ocazie, le includem aici, în **figurile 15.3** şi **15.4**, datorită importanţei lor, ieşită din comun, aşa cum se va putea observa.

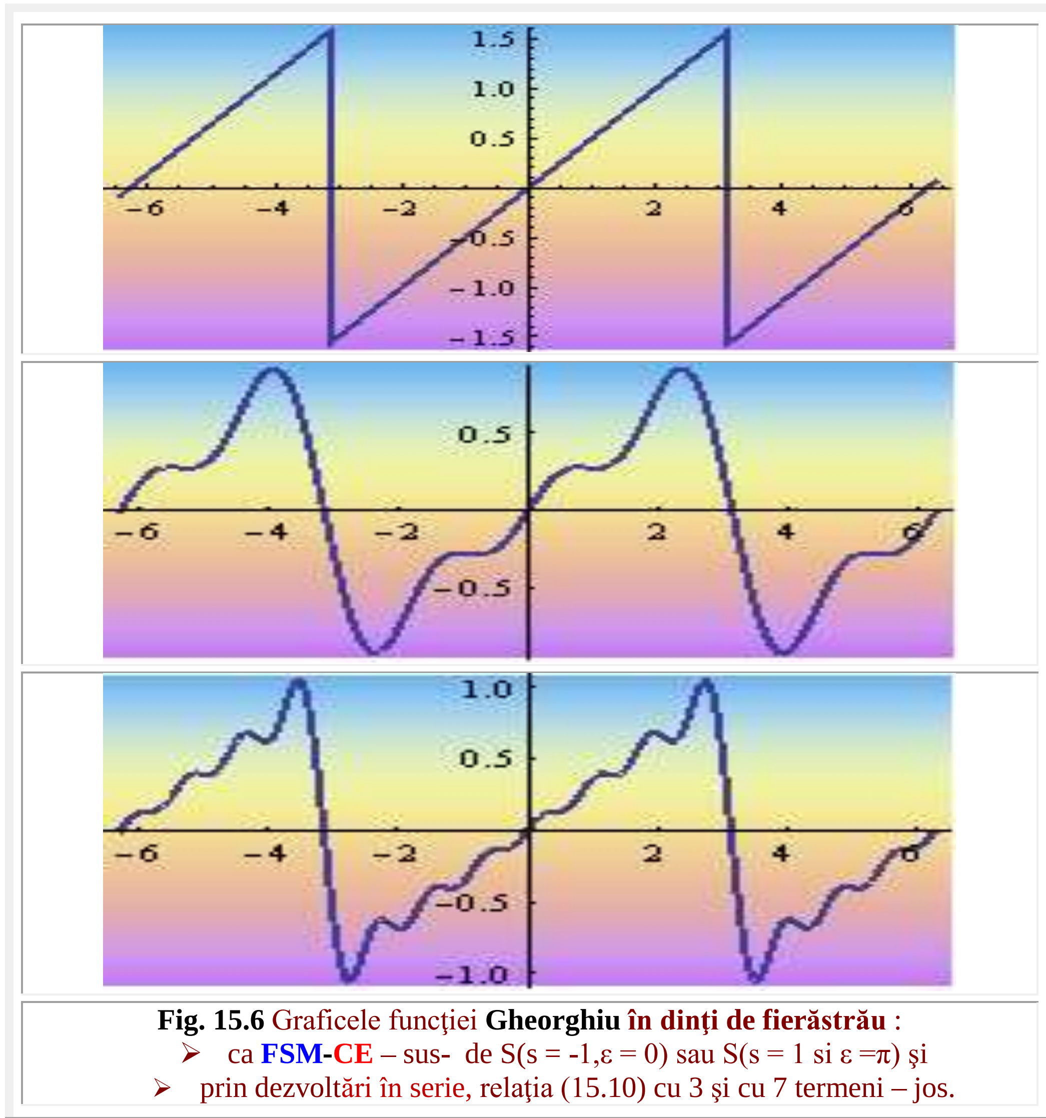


Fig. 15.6 Graficele funcţiei **Gheorghiu** **în dinţi de fierăstrău** :
- ca **FSM-CE** – sus- de S(s = -1,ε = 0) sau S(s = 1 si ε =π) şi
- prin dezvoltări în serie, relaţia (15.10) cu 3 şi cu 7 termeni – jos.

În **figura 15.3** sunt reprezentate graficele **FSM-CE** de variabilă excentrică bex$_1\theta$.

Se observă că ele oscilează în jurul dreptei y = 0, adică a **axei θ**. Din relaţiile **15.6**, rezultă că **bex$_2\theta$** va oscila în jurul dreptei y = ± π, de aceea graficele lor n-au mai

fost reprezentate. În schimb, au fost reprezentate în 3D aceleşi **FSM-CE** pentru excentricitate numerică subunitară s ∈ [-1,1] şi supraunitară s ∈ [-2, 2].

Se observă din figură, că pentru $s^2 > 1$, funcţiile nu mai sunt continue, ci există doar pe intervalele I ∈ [$\theta_i(s)$, $\theta_f(s)$] ± 2π, iar cele de variabilă centrică există şi sunt continue pe toată axa rala a lui s (**Fig. 15.4**). Dacă se face abstracţie de semn, adică se consideră funcţia Abs[bexθ], sau dacă se face abstracţie de prima sau de a doua determinare a funcţiei, considerâdu-se intersecţiile cu dreapta şi nu cu semidreptele dreptei turnante **d**, în jurul excentrului **E** sau **S**, atunci ele devin / sunt de perioadă π.

Un interes deosebit îl reprezintă **FSM-CE bexθ** şi **Bex**α de excentricitate unitară **s = ± 1**, deoarece ele reprezintă funcţii speciale **triunghiulare**, care se exprimă clasic, adică în matematica centrică (MC) prin seria [v. §. Siemens, FORMEL und TABELLEN BUCH für Starkstrom-Ingenieure, SSA, 1960]

(15.8) $$f(t) = \frac{4}{\pi} H \sum_{\nu=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin \nu\omega(t - t_0)\ ,$$

în care, H este amplitudinea maximă, f_a = 0,5000H cu factorul de vârf sau de creastă $\sigma_s = \frac{H}{f_e}$ = 1,7321, f_a este media absolută a funcţiei f(t) şi f_e este media patratică

(15.9) $$f_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\ (valoare\ efectiva)} = 0{,}5774\ H,$$

cu factorul de formă $\sigma_f = \frac{f_e}{f_a}$ = 1,1547.

Cu ajutorul **FSM-CE bexθ** ea se exprimă cu mult **mai simplu** şi **infinit mai exact**, printr-un singur termen [v relaţia(15.7)].

Nu numai din pură curiozitate, s-au prezentat, comparativ, aceaste funcţii, prin cele două metode, în **figura 15. 5**.

Funcţia **Bex**α exprimă exact funcţia **Octav Gheorghiu** **în dinţi de ferăstrău**, funcţie care poate fi reprezentată clasic (in **MC**) prin relaţia:

(15.10) $$f(t) = \frac{2}{\pi} H \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\vartheta+1}}{\vartheta} \sin\vartheta\omega(t - t_0)$$

cu aceleaşi valori, ca şi în cazul anterior, pentru f_a, f_e, σ_s şi σ_f.

Se va prezenta, în paralel aceeaşi funcţie prin cele două metode în **figura 15.6**.

Cu ajutorul **FSM-CE** bexθ pot fi reprezentate soluţiile vibraţiilor neamortizate la rezonanţă, exprimate de ecuaţia diferenţială

(15.11) $$\Delta\ddot{\varphi} + \nu_0^2 . sin\varphi = \varphi_0 . \nu_0^2 . sin\nu_0 t,$$ pentru

$$\nu_0^2 = 16; \quad \varphi_0 . \nu_0^2 = 1{,}6; \quad \omega = 4; D = 0; \quad M = 0, \psi(0) = 0; \ \dot{\psi}(0) = 0$$

cu graficul din [V.§. Siemens, FORMEL und TABELLEN BUCH für Starkstrom-Ingenieure, SSA, 1960, pag. 68], identic cu cel reprezentat de următoarele produse ale **FSM-CE** de excentricitate numerică unitară

(15.12) y(θ) = bex[θ, S(s = 1, ε = 0)]. bex[20.θ, S(s = 1, ε = 0)] sau

(15.13) y(θ) = bex[θ, S(s = 1, ε = 0)]. Sin(20.θ)

cu graficele din **figura 15.7**.

O altă aplicaţie a **FSM-CE** bexθ consistă în reprezentarea funcţiilor speciale **Octav Gheorghiu trapezoidale** (**Fig. 15.8**). Prin dezvoltare în serie trigonometrică, ele pot fi aproximate prin expresia [.§. Siemens, FORMEL und TABELLEN BUCH für Starkstrom-Ingenieure, SSA, 1960, pag. 33]

(15.14) f(t) = $\frac{2HT}{\pi^2 S}\sum_{\vartheta=1,3,5,..}^{\infty}\frac{sin\vartheta\omega S.sin\vartheta\omega(t-t_0)}{\vartheta^2}$, pentru $f_a = H\left[1-\frac{2S}{T}\right]$, $f_e= H\sqrt{\frac{3T-8S}{3T}}$,

în care S = $\frac{T}{12}$, f_a = 0,8333H; f_e = 0,8819 H; σ_s = 1,1339; σ_f = 1,0583.

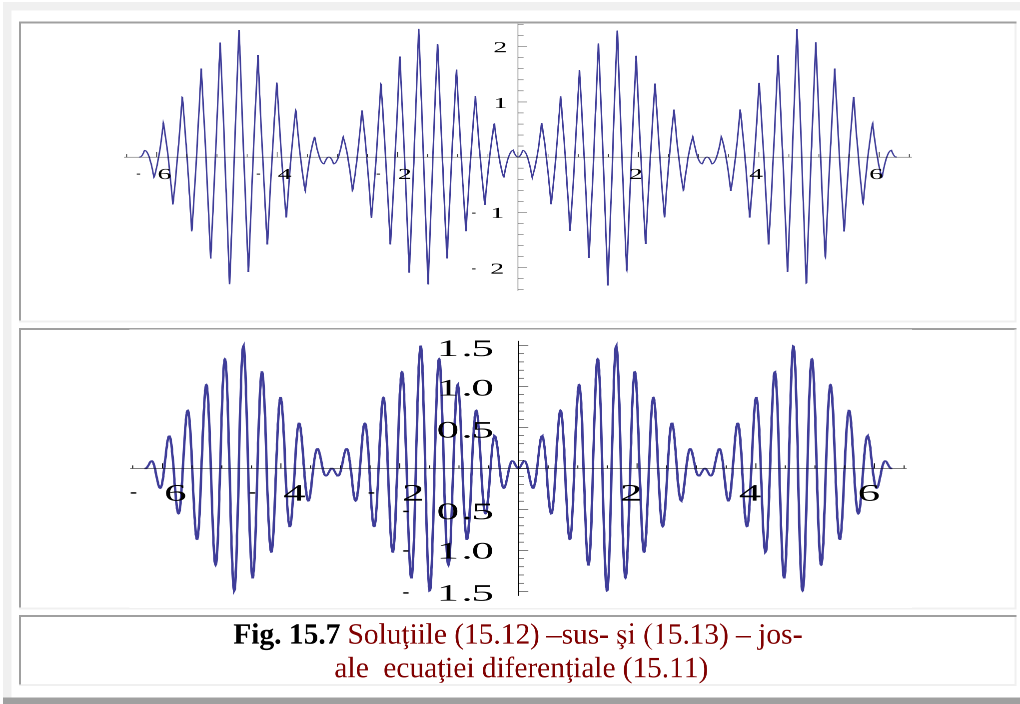


Fig. 15.7 Soluţiile (15.12) –sus- şi (15.13) – jos- ale ecuaţiei diferenţiale (15.11)

Prin utilizarea **FSM-CE** expresia lor este

(15.15) f(t) = bex,[θ, S(1, 0)] – bex[θ – $\frac{\pi}{2}$, S(1,0)] = arcsin[sinθ] – arcsin[sin(θ - $\frac{\pi}{2}$)

Alte funcţii triunghiulare periodice, exprimate cu **FSM-CE** sunt prezentate în **figura 15.9**. împreună cu ecuaţiile lor explicite, adică, prin care **FSM-CE** sunt "traduse" prin **FCC**. Se recunosc **FSM-CE** beta excentrice

bex[$\frac{\theta}{4}$, S(1, 0)], bex[$\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{2}, S(1,0)$], precum şi cosinusul cvadrilob

coq[$\frac{\theta}{4}$, S(1,0)] = $\frac{cos\frac{\theta}{4}}{\sqrt{1-sin^2\frac{\theta}{4}}}$ (v. vol. I, pag. 50 .. 56).

Alte posibilităţi de realizare a unor grafice, formate din segmente de dreaptă, care ar putea fi denumite "drepte segmentate" sau "drepte frânte", sunt prezentate în **figura 15. 10** şi sunt obţinute prin combinarea funcţiilor bexθ şi a derivatelor ei, care sunt

(15.16) $$\frac{d(bex_{1,2}\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\{\arcsin[s(sin(\theta-\varepsilon)]\} =$$
$$= \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2sin^2(\theta-\varepsilon)}} = 1 - dex_{1,2}\theta = 1-\frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta}$$

pentru variabila excentrică , iar pentru variabila centrică, derivata este

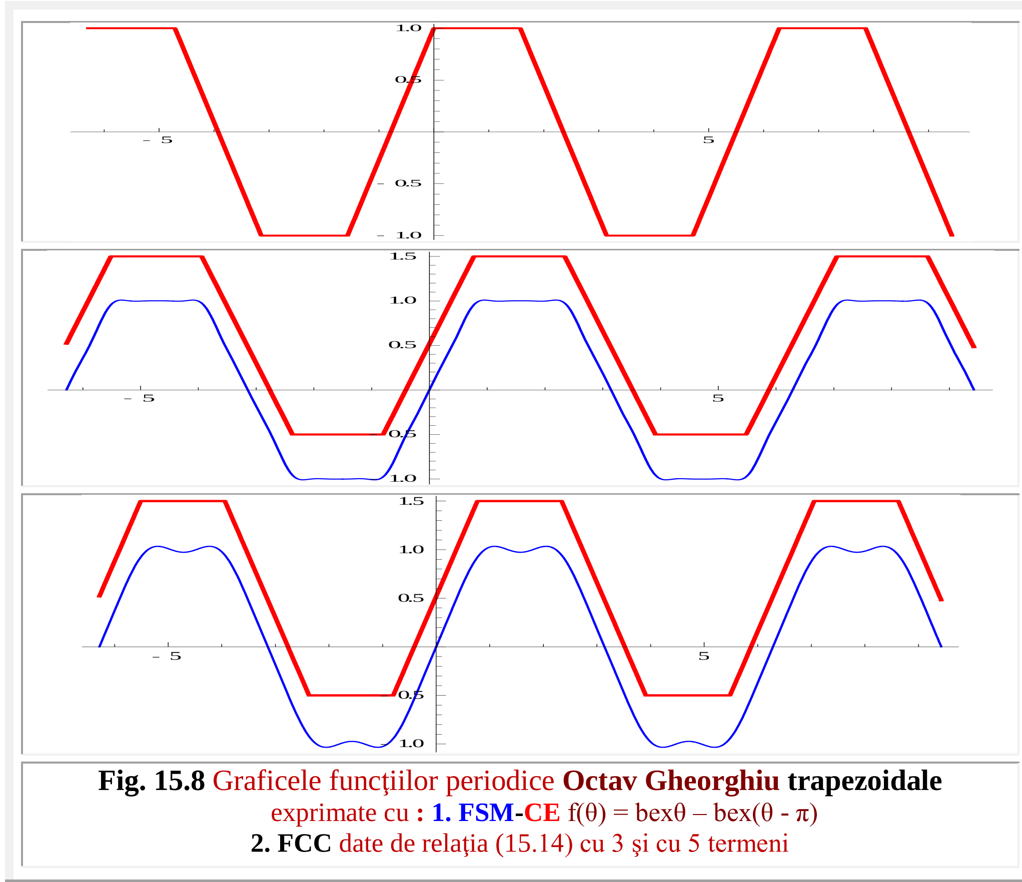
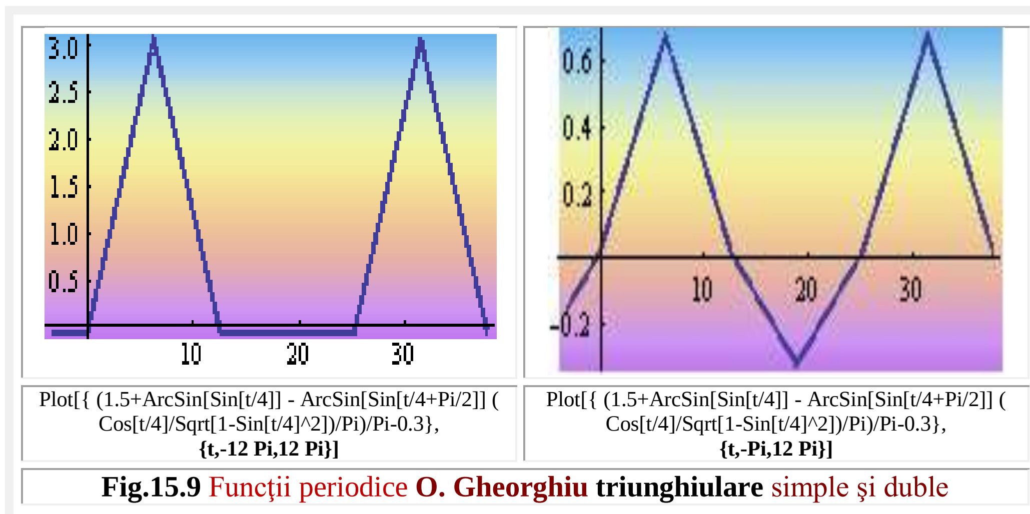


Fig. 15.8 Graficele funcţiilor periodice **Octav Gheorghiu trapezoidale** exprimate cu **: 1. FSM-CE** f(θ) = bexθ – bex(θ - π)
2. FCC date de relaţia (15.14) cu 3 şi cu 5 termeni

(15.17)
$$\frac{d(Bex\propto_{1,2})}{d\propto_{1,2}} = \frac{d}{d\propto_{1,2}}\left\{arcsin\frac{s.\sin(\propto_{1,2}-\varepsilon)}{Rex\alpha_{1,2}}\right\} =$$
$$= \frac{d}{d\propto_{1,2}}\left\{arcsin\frac{s.\sin(\propto_{1,2}-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2.s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}}\right\} =$$
$$= \frac{1-s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{1+s^2-2s.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)} = \mathrm{Dex}\alpha_{1,2} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n cosn \propto_{1,2}$$

Se observă din relaţiile (15.7) şi (15.17) că, atât funcţia bex$\alpha_{1,2}$ cât şi derivata ei reprezintă suma sumei unei infinităţi de termeni şi, de aceea, ea poate reprezenta mult mai exact anumite funcţii speciale, aşa cum s-a putut oserva anterior, decât dezvoltările cu un număr limitat de termeni.

Pentru alte aplicaţii se poate apela la lucrarea **Mircea Şelariu** “SMARANDACHE STEPPED FUNCTIONS” → “Funcţii în trepte **Smarandache**”, SCENTIA MAGNA, An International Journal, Vol.3, N○.1, 2007, ISSN 1556-6706, pag. 81 ... 92, din care se vor prezenta câteva idei în continuare. Vom denumi funcţiile ale căror grafice sunt linii drepte frânte sau sunt formate din segmente de linii drepte funcţii **Octav Gheorgiu** sau pe scurt, funcţii **Gheorghiu (FG).**



Plot[{ (1.5+ArcSin[Sin[t/4]] - ArcSin[Sin[t/4+Pi/2]] (Cos[t/4]/Sqrt[1-Sin[t/4]^2])/Pi)/Pi-0.3}, **{t,-12 Pi,12 Pi}]**	Plot[{ (1.5+ArcSin[Sin[t/4]] - ArcSin[Sin[t/4+Pi/2]] (Cos[t/4]/Sqrt[1-Sin[t/4]^2])/Pi)/Pi-0.3}, **{t,-Pi,12 Pi}]**

Fig.15.9 Funcţii periodice **O. Gheorghiu triunghiulare** simple şi duble

Aceasta, pentru a cinsti memoria excelentului profesor de matematică al Universităţii “**Politehnica**” din Timişoara, **Octavian Emilian Gheorghiu**, asistent al renumitului profesor bucureştean **Grigore C. Moisil,** apoi şeful Catedrei de Matematică I de la Facultatea de Mecanică din Timişoara, urmaş, la şefia Catedrei de Matematică, al profesorului **Valeriu Alaci.**

Am chibzuit mult, foarte mult, până să decid dacă adevărul trebuie spus în orice condiţii şi în oricare imprejurare. Chiar şi intr-o carte de matematică. Cred că trebuie spus, mai ales pentru că matematica, prin excelenţă, cumulează numai adevărurile existente între diversele entităţi, adevăruri despre numere şi despre relaţiile adevărate dintre ele. De aceea, adevărul trebuie spus, oricât de crud ar fi el, şi despre cei ce produc matematică, adică, produc adevăruri.

S-a pensionat cu puţin înainte de 1989, scârbit de relaţiile dintre “oamenii noi”, relaţii de clan, de partid, prin care cei capabili şi merituoşi erau marginalizaţi, produs al socialismului multiateral “dezvoltat”. Păstrate cu “sfinţenie” şi după, de eşalonul doi.

Iar după această dată, când leul s-a depreciat exponenţial, cu exponent puternic negativ, puterea de cumpărare a pensiei tinzând asimptotic spre axa x (y = 0) văzând cu ochii, având şi o soţie nepensionară, a fost obligat să trăiască în condiţii de mizerie greu de descris. A murit flămând !. Profesor universitar, pensionar, în România post decembristă, în acea Românie după care tânjea atât de mult înainte de ’89, a murit, de fapt, de foame ! Incredibil, dar adevărat ! Ce ironie a sorţii !

Aflând de situaţia lui jalnică, mă pregăteam sa-i duc ceaiuri şi zahăr, fără sa-l jignesc, de care au întotdeauna nevoie batrânii, când am aflat că el a decedat deja.

A fost un puternic susţinător al **supermatematicii** şi **Preşedinte de onoare** al **Excentric Clubului Român**, club infiinţat de cei ce, liberi şi nesiliţi de nimeni, acceptă şi promovează noua **matematică excentrică** (**ME**) şi, totodată, **super-matematica SM**.

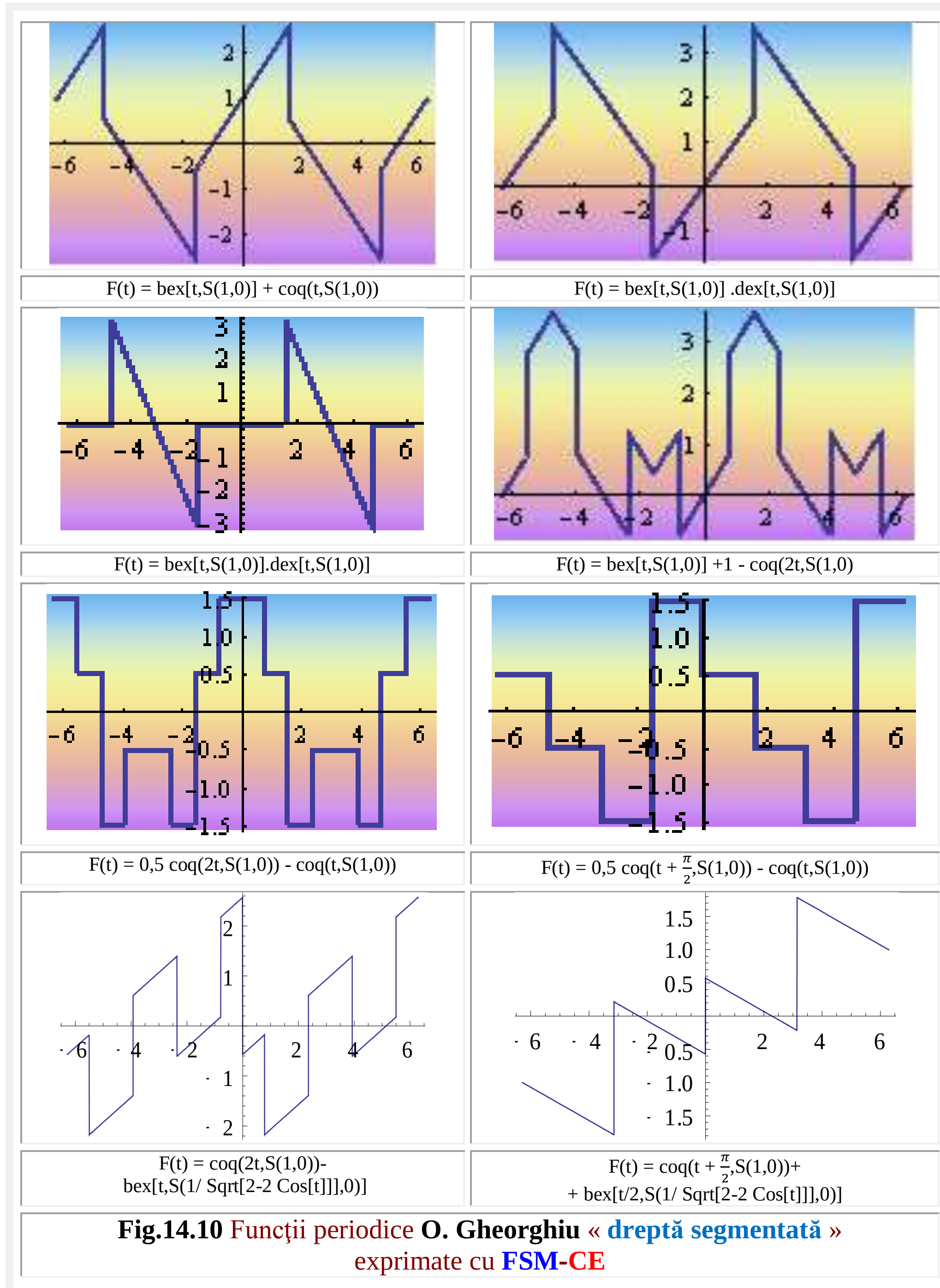


Fig.14.10 Funcţii periodice **O. Gheorghiu** « **dreptă segmentată** » exprimate cu **FSM-CE**

S-a stins un mare matematician. Era atâta de scârbit de ce se întâmplă în jurul lui, scârbă pe care nu se ferea să şi-o exprime voalat, dar nu suficient de voalat, astfel

că atitudinea lui sfidătoare faţă de regim şi exponenţii lui, îi aducea mari prejudicii în epocă de tristă amintire, încât nici nu dorea să facă paradă de cunoştinţe sale vaste şi temeinice de matematică şi pentru că…. nu avea pentru cine.

Cred că este extrem de puţin ceea ce încercăm să facem acum, **postmortem**. Să-i cinstim memori cu nişte funcţii denumite **Octav Em. Gheorghiu**, cum se semna el, şi să evocăm adevărul pentru ca el să fie cunoscut nu numai de cei apropiaţi lui, ci şi de alţii, ca astfel de situaţii penibile, într-o ţara pretins civilizată, să nu se mai repete.

Mă ingrozeşte gândul că în această ţară, pretins civilizată, partidele, fără ideologii, sunt nişte adunături de avari, care nu precupeţesc niciun mijloc pentru câştigarea puterii, ca apoi, sub umbrela neagră a protecţiei "guvernamentale", cu organisme înfiinţate în acest scop, să jefuiasca în linişte ceea ce a mai ramas de jefuit.

Şi, în timp ce haitele se năpustesc şi se luptă asupra prăzii, pentru a muşca o halcă cât mai mare, neatenţi la ce se întâmplă în jurul lor, sau neputincioşi să afle, hienele, alţi excroci, internaţionali, mai stilaţi, mai experimentaţi, mai avizi, dar cu mult mai discreti, trag sforile şi îşi freacă mâinile de bucrie, şi-şi devorează prada cu fulgi cu tot: **România**.

Divide et impera ! Divide şi stăpâneşte ! Mă ingrozeşte gândul că mâine, poimâne, guvernul, profitănd de psihoza de criză, va declara : "Nu mai avem bani de pensii !" Concluzia ? Numai într-o ţară normală, adevărul rostit, face ca o situaţie neplăcută să nu se mai repete….Ceea ce nu e cazul.. Aşa că revenim la "oile" noastre. Dar, cu sentimentul datoriei împlinite !

15.5. FUNCŢII SUPERMATEMATICE ÎN TREPTE

15.5.1 INTRODUCERE

Matematicianul român **Octavian Stănăşilă** susţine că fizica a devenit o ştiinţă odată cu descoperirea lumii analizei matematice. La rândul ei, dezvoltarea fizicii a impus dezvoltarea analizei matematice.

Fizica teoretica şi, cu precadere, în mecanica cuantică, optică, propagarea undelor, diverse fenomene de electromagnetism şi rezolvarea unor probleme de limită au impus introducerea unor noţiuni noi, care ies din cadrul analizei matematice clasice şi a căror justificare nu se mai putea face în acest cadru [Kecs, W., Teodorescu, P.P. "**APLICAŢII ALE TEORIEI DISTRIBUŢIILOR ÎN MECANICĂ**" Editura Academiei Romane, Bucuresti, 1970].

Ceea ce nu înseamnă că, nu va veni un moment, în matematică, în care acest lucru se va putea face. El, momentul, consistă în descoperirea unor complemente de matematică, înglobate în **matematica excentrica** (**ME**), care fac obiectul lucrării de faţă, funcţii care multiplică la infinit toate formele şi obiectele matematice, asigurând o vastă extensie a matematicii clasice / ordinare, care se va numi, în continuare, **matematică centrică** (**MC**).

împreună, adică, reuniunea celor două matematici, formând, ceea ce a fost denumită, aşa cum s-a mai afirmat în volumul I al acestei lucrări, **supermatematică** (**SM**).

15.5.2 REDAREA DERIVATELOR UNOR FUNCŢII

Verbul a reda are trei inţelesuri în limba română. Primul înţeles "a da din nou", în sensul de "a restitui" este cel la care ne referim şi nu "a descrie, a exprima" sau "a reproduce".

Ce restituim ? Restituim unei funcţii (de **s = ± 1**), dintr-o familie de funcţii, de $s \in [-\infty, +\infty]$) , de exemplu, **FSM-CE**

(15.18) $\beta_{1,2}(\theta) = \text{bex}_{1,2}\theta$, $s \in [-\infty, +\infty]$,

derivata ei, care este, aşa cum s-a mai afirmat, **FSM-CE**

(15.19) $d\,\beta_{1,2}(\theta) / d\theta = d[\theta - \alpha_{1,2}(\theta)]/d\theta = 1 - \text{dex}_{1,2}\theta$.

Derivată care există şi pentru s = ± 1, dar pe care **Weierstrass** i-a negat-o, pentru că el intâi a dat valoarea s = ± 1 familiei de funcţii (15.18) şi **apoi a derivat**, pe când succesiunea acestor operaţii este inversă: întâi se derivează familia de funcţii şi, apoi, derivata se particularizează pentru valoarea **s = ± 1**. Eroare scuzabilă, pentru că, la acea dată, nu se ştia că cercul şi pătratul au aceleaşi ecuaţii parametrice; pentru **s = 0** obţinandu-se un **cerc perfect**, iar pentru **s = ± 1** un **pătrat perfect** (**Fig.15.11**).

Această relaţie **SM** simplă, în care, prin modificarea excentricităţii numerice **s** de la 0 la 1 se obţine o transformare / mişcare continuă a cercului în pătrat, este o mişcare internă a **SM.**

Henri Bergson, un mare gânditor, admitea că ("GÂNDIRE ŞI MIŞCARE. Eseuri şi conferinţe", Polirom, Iaşi, 1995, pag. 209) ***" Matematica modernă este tocmai un efort de a înlocui ceea ce este gata făcut cu ceea ce se face, pentru a urmări generarea mărimilor, pentru a surprinde mişcarea nu din exterior şi prin prisma urmărilor ei evidente, ci din interior şi prin tendinţa ei de a schimba, pentru a adopta continuitatea mobilă a desenului lucrurilor ".***

Dar, cu toate acestea, ***i se parea absurdă ideea că cercul şi pătratul pot să facă parte din aceeaşi familie***. Cităm din **H. Bergson** " EVOLUŢIA CREATOARE. Eseuri de ieri şi de azi", Institutul European, 1998, pag. 258 ***"Când am definit cercul mi-am reprezentat fără probleme un cerc negru sau alb, de carton, fier sau cupru, un cerc transparent sau opac – dar nu un cerc pătrat, pentru că legea generării cercului exclude (?) posibilitatea ca să delimitezi această figură prin linii drepte."***

Să delimitezi, da, dar să curbezi o dreaptă şi s-o transformi într-un cerc o ştie toată lumea tehnologică ! Acum o aflǎ şi tagma matematicienilor, deoarece, pornind de la pătrat, care este cercul de **s = ± 1** şi micşorând progresiv, continuu, valoarea excentricităţii numerice de la **s = + 1** spre **s → 0**, colţurile pătratului încep să se rotunjească cu raze de racordare R din ce în ce mai mari, iar când raza **de racordare R** ajunge la valoarea **+ 1**, pentru **s = 0**, cele patru raze de racordare ale colţurilor pătratului vor forma cercul perfect de rază R = 1, care este cercul unitate sau cercul trigonometric. Este "exact" ce se întâmplă la transformarea, prin strunjire din mai multe treceri, a unei bare pătrate în una circulară, cu diferenţa că la strunjire raza R nu este constantă, ci din ce în ce mai mică pe când în matematică ea rămâne constantă.

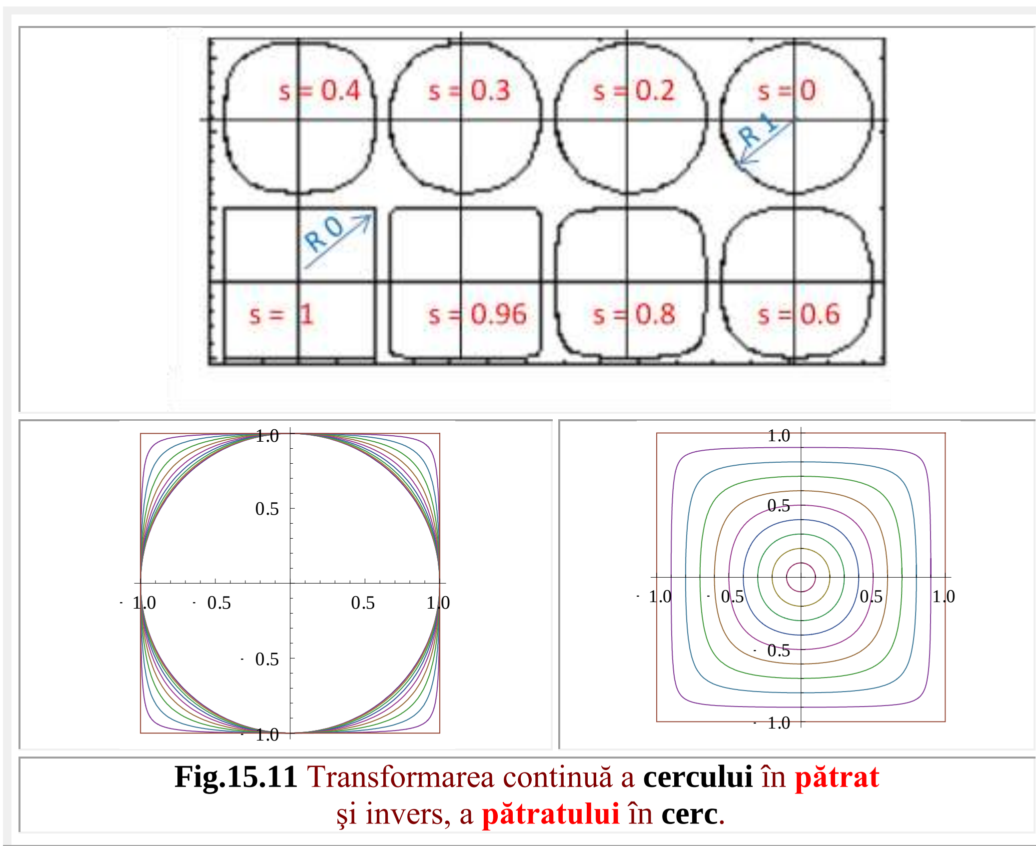


Fig.15.11 Transformarea continuă a **cercului** în **pătrat** şi invers, a **pătratului** în **cerc**.

Modul în care porţiunile / segmentele de dreaptă alternează cu arce de cerc sunt mult mai evidente în **transformarea excentrică**, prezentată în Vol I, §5.1, **Fig. 5.6**, pag. 166, ca inversă a transformării de centrare. Astfel de transformări sunt prezentate în **figura 15.11** şi sunt realizate cu ajutorul **FSM cvadrilobe**, cosinus cvadrilob **coqθ** şi sinus cvadrilob **siqθ** prin ecuaţiile parametrice

(15.20) $$\begin{cases} x = R.siq\theta = R\dfrac{cos\theta}{\sqrt{1-s^2sin^2\theta}} \\ y = R.coq\theta = R\dfrac{sin\theta}{\sqrt{1-s^2cos^2\theta}} \end{cases}.$$

Aceleaşi curbe închise se pot obţine şi cu **FSM-CE** derivată excentrică şi cu ecuaţiile parametrice

(15.21) $$\begin{cases} x = R\ dex\theta \\ y = R.dex(\theta \pm \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

De fapt, aş cum s-a arătat într-o lucrare [Mircea Şelariu, “INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ”, Lucr. Simp. Naţ. al Univ. Gh. Anghel, Drobeta Tr. Severin, 2003, pag. 171…178] **dreapta** nu **este** altceva decât **o strâmbă** de excentricitate numerică **s = 0**, iar **o linie frântă** este o strâmbă de **s = ± 1**. Ca urmare, se poate afirma că transformarea patratului în cerc este o strâmbare / încovoiere a patru

segmente de dreaptă, reciproc perpendiculare, în patru arce de cerc. Şi invers, patratul se obţine prin îndreptarea, continuă şi progresivă, a patru arce de cerc, fiecare arc de cerc de $\frac{\pi}{2}$ fiind rotit cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de cel precedent, în patru segmente de dreaptă.

Faptul că nu oricare funcţie continuă este derivabilă, având drept consecinţă neexistenţa vitezei unui punct material, în fiecare moment al mişcării sale, ceea ce, ***evident, nu corespunde realităţii***, constituie un neajuns sever al **MC**, care afectează unitatea şi generalizarea rezultatelor, ceea ce nu este cazul în **ME**.

In 1872 a apărut o funcţie al cărei grafic este considerat azi **fractal**, când **Karl Weierstrass** a dat un exemplu de funcţie cu proprietatea că este continuă, dar ***nediferenţiabilă***, constatare care i-a oripilat pe matematicieni. **Hermite** declara " ***Je me détourne avec horreur de ces functions continues sans dérivées".***

Pentru exemplificare, se va alege prima funcţie **nicăieri derivabilă**, prezentată de **Weierstrass** [**Schoenberg, J. Isaac**, "**PRIVELIŞTI MATEMATICE**", Editura Tehnică, Bucureşti, 1989, pag.105…115, Cap.11 «Despre curbe **Peano** şi nediferenţiabilitatea lor », **Fig. 11.2**] :

(15.22) $$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi . t)$$, 0 < **a** < 1 şi **b** = 1,3,5 …, (2n-1),

un întreg impar, astfel ca a.b > 1 + 3π/2 = 5,712.

În aceeaşi lucrare, este demonstrată ca fiind nediferenţiabilă şi funcţia trapezoidală, (**Fig. 15.8**) dată de expresia (15.15) care reprezintă o diferenţă a funcţiilor beta excentrice de θ şi de θ + $\frac{\pi}{2}$, ambele de **excentricitate numerică s = 1**.

Familia acestor funcţii, pentru s ∈ [-1, 0] şi s ∈ [0, 1] au graficele din **figura 15.12.**

Va deveni evident faptul că funcţia (15.15) este derivabilă, dacă întâi se derivează familia de funcţii, deci pentru **s ∈ [-1, 1]** şi în derivată, sau <u>după derivare</u>, se dă valoarea particulară de **s = ±1** !! Graficele derivatelor acestor funcţii sunt prezentate în **figura 15.13**, iar în **figura 15.14** sunt prezentate aceleaşi grafice pentru **s = ±1**.

O modificare a exemplului lui **Weierstrass** se obţine prin înlocuirea în (15.22) a lui cosπ.t prin splineul **Euler** liniar E (t), care interpolează pe cosπ.t în toate valorile întregi ale lui t şi se obţine graficul din **figura 15.15,a**. Alăturat, s-a prezentat familia de **funcţii supermatematice excentrice**, de variabilă excentrică θ ≡ t, denumită **bext** şi care este o componentă / termen al funcţiei amplitudine excentrica (**aexθ**), funcţie definită prin relaţia

(12.23) α(θ) = aex θ = θ - β(θ) = θ – bex θ = θ - arc sin [s.sin(θ - ε)],

în care **θ este variabila excentrică** sau unghiul pe care o semidreaptă pozitivă, turnantă în jurul excentrul **E(e, ε)** – sau în jurul punct solar **S(s,ε),** îl face cu axa Ox. (**V.I.Arnold**: « ***Kepler a afirmat că planetele se rotesc în jurul soarelui, pe orbite circulare, însă soarele nu se află în centrul cercurilor*** »). De aici a rezultat denumirea **excentrului S** de **punct solar**. Iar α este variabila centrică sau arcul de cerc, al cercului unitate (R = 1) de la originea arcului A(1,0) la un punct curent pe cerc **W**(1,α) ≡ **W** (r = **rexθ**, θ). **Excentricitatea unitară este s = e/R**, sau distanţa dintre S şi O, iar excentrul **S** şi **E** sunt expulzate din centrul O pe direcţia **ε**.

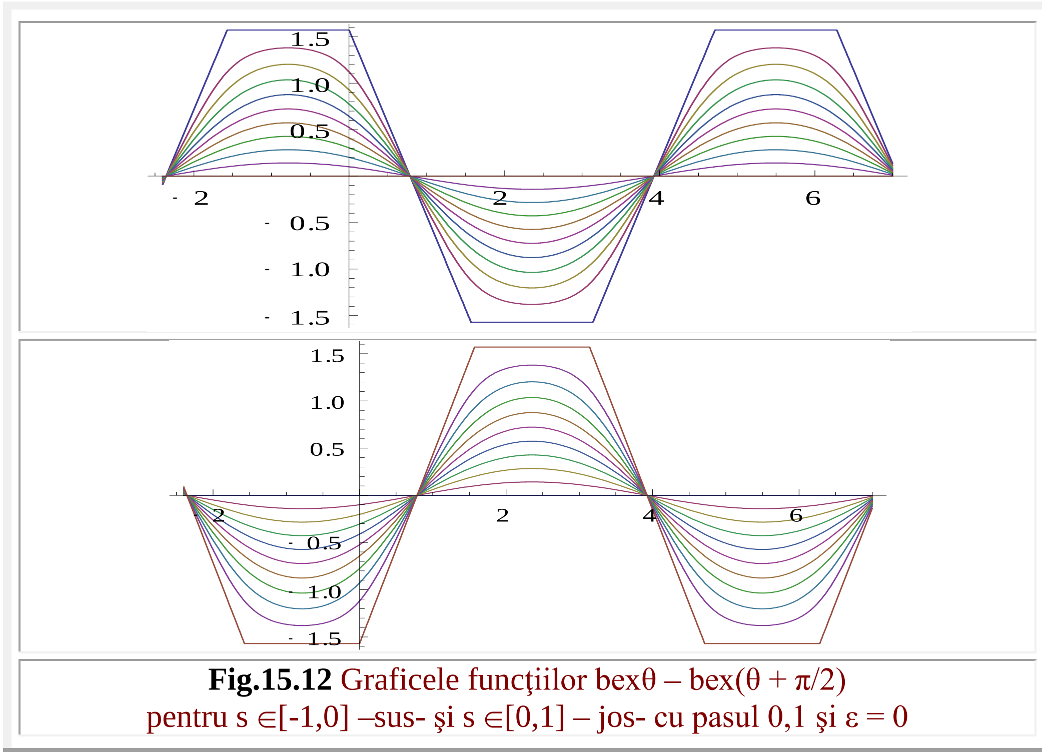


Fig.15.12 Graficele funcţiilor bexθ – bex(θ + π/2) pentru s ∈[-1,0] –sus- şi s ∈[0,1] – jos- cu pasul 0,1 şi ε = 0

Pentru θ → π.t şi un defazaj ε = - π/2 se obţine funcţia sau, mai precis, familia de funcţii beta excentrice

(15.24) bex t = arcsin[s sin(π.t + π/2)],

a căror grafice, de excentricitatea numerica s ∈ [0, 1], cu pasul 0.1, sunt prezentate în **figura 15.15,b**.

Se observă, fară dificultate, că pentru s = 0 → aex t = 0 şi pentru s = ±1, limitele extreme (în grafice) a lui s, se obţine graficul unei funcţii în « **dinţi triunghiulari simetrici** » (**Fig.15.15,a**).

Deoarece, derivata funcţiei aex t este funcţia derivată excentrică **dexθ** :

(15.25) d(aext)/dt = dα/dθ =dex θ = $1-\dfrac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$,

rezultă că, cel de al doilea termen din relaţia (15.25), este tocmai derivata funcţie **bexθ**, adică:

(15.26) d(bex θ)/dθ = $\dfrac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$ = s.coq (π.t + π/2) = - s.(siqπ.t),

care este produsul **excentricităţii numerice s** cu funcţia **cosinus cuadrilob coqθ** [Vol. I, Cap.2, §2.3, pag. 50 .. 56] defazată cu ε = - π/2, astfel că rezultă –s.siqθ, a cărei familii de grafice sunt prezentate în **figura 15.16,b**, pentru s ∈ [0, 1], cu pasul 0.1 şi, în în **figura 15.16,a**, o singur funcţie, pentru s = 1.

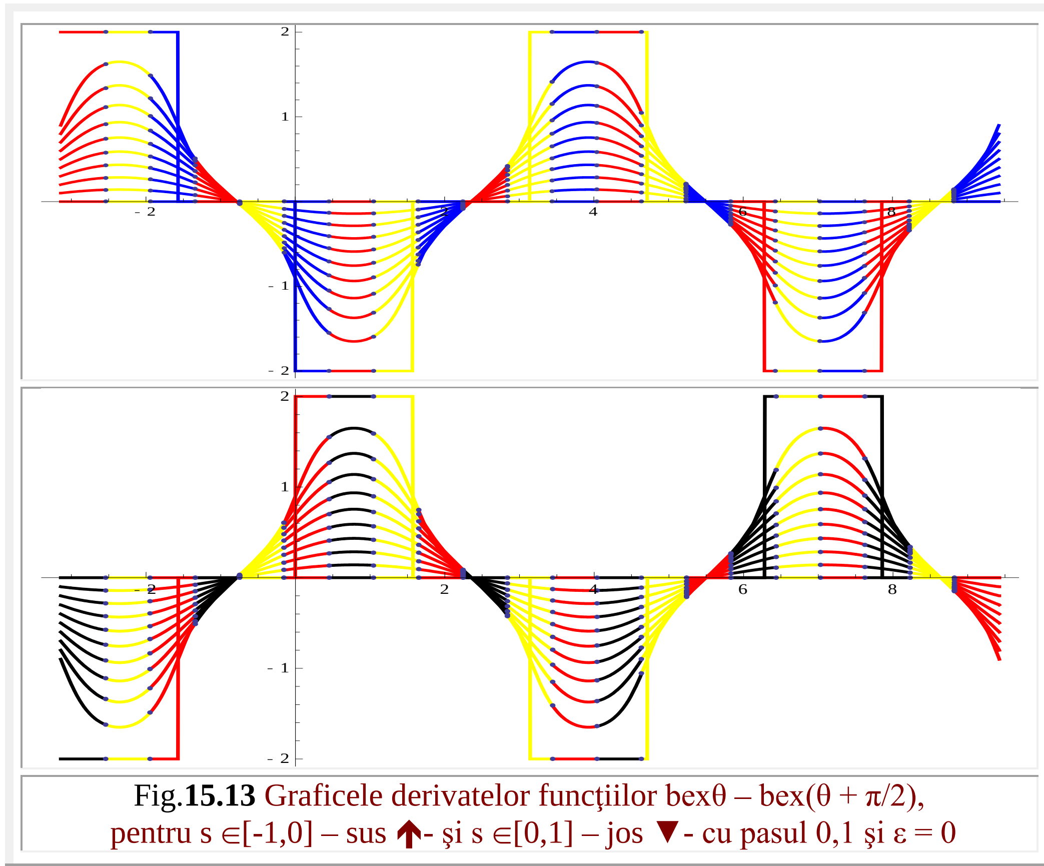
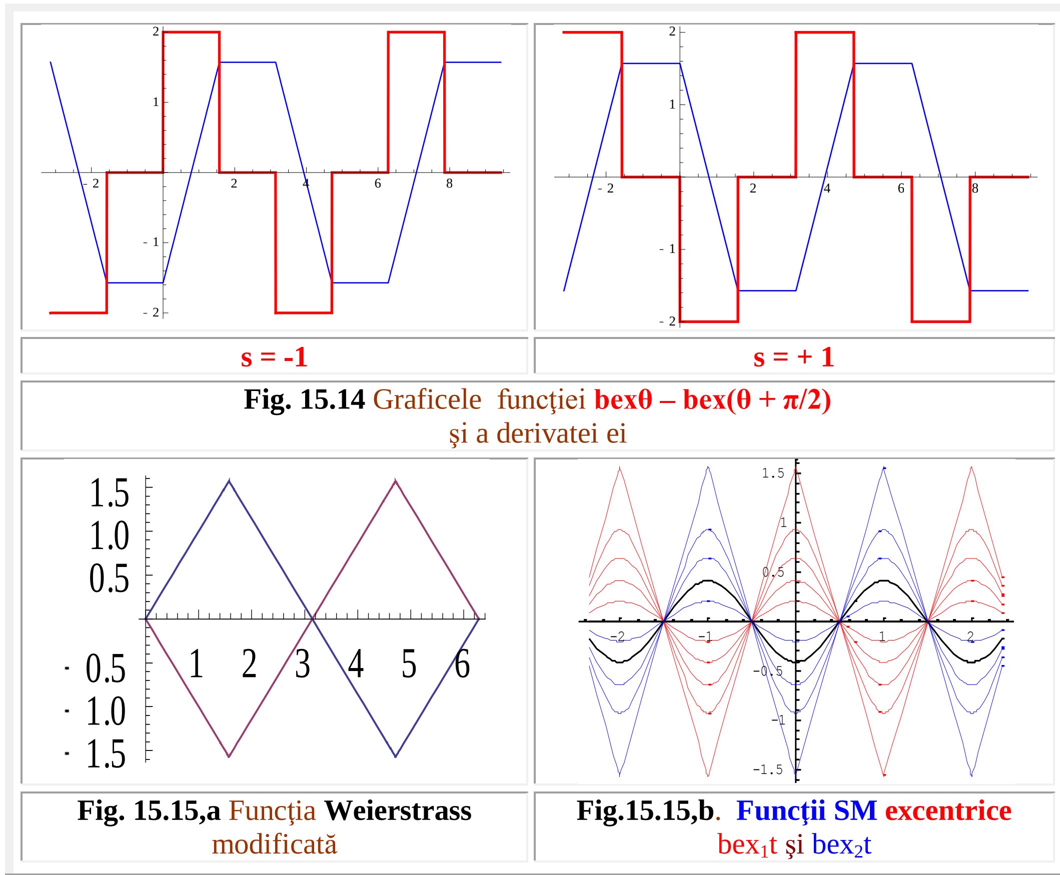


Fig.**15.13** Graficele derivatelor funcţiilor bexθ – bex(θ + π/2), pentru s ∈[-1,0] – sus ↑- şi s ∈[0,1] – jos ▼- cu pasul 0,1 şi ε = 0

Funcţia **sinus cuadrilob** (**siqθ**), pentru excentricitatea numerică **s =1**, reprezintă, în teoria semnalelor, raspunsul unui releu la un semnal sinusoidal, funcţie denumită şi **sinus pătrat** [**Săvescu, M.**, **Constantin,I.**, **Petrescu, T.**, **METODE DE APROXIMARE ÎN ANALIZA CIRCUITELOR ELECTRONICE**, Editura Tehnică, Bucureşti, 1982, pag. 31], fiind chiar funcţia trigonometrică excentrică **sinus excentric**, de excentricitate numerica **s = 1**, definită pe un pătrat, ne rotit cu π/4 ca în cazul funcţiilor pătratice **Alaci,** funcţie introdusă de autor în matematică sub denumirea de sinus cvadrilob / quadrilob – **siqθ** sau sinqθ -, alături de funcţia cosinus cvadrilob / cosinus quadrilob – **coqθ** sau cosqθ - .

Coroborând funcţiile şi derivatele lor, se observă că ele se corespund. Astfel, funcţia **Weierstrass** modificată, din **figura 15.15,a,** privită ca o funcţie **bext** de excentricitate numerică s = 1, **devine complet derivabilă !.**



s = -1 | **s = + 1**

Fig. 15.14 Graficele funcţiei **bexθ – bex(θ + π/2)** şi a derivatei ei

Fig. 15.15,a Funcţia **Weierstrass** modificată

Fig.15.15,b. **Funcţii SM excentrice** bex_1t şi bex_2t

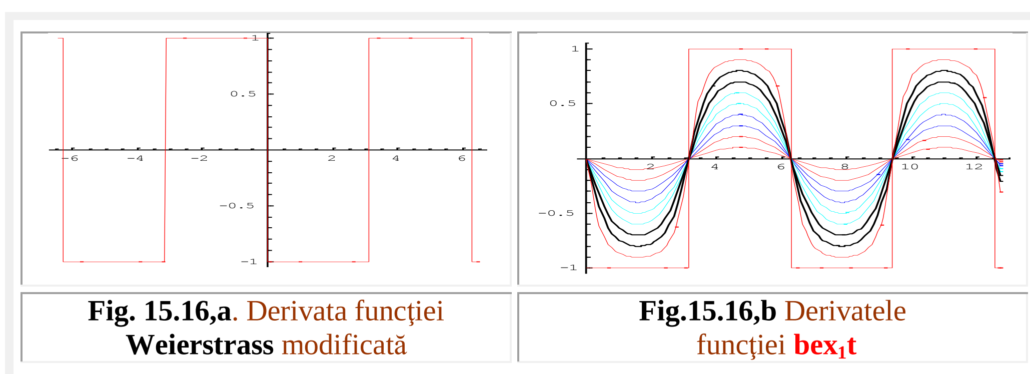


Fig. 15.16,a. Derivata funcţiei **Weierstrass** modificată

Fig.15.16,b Derivatele funcţiei $\mathbf{bex_1t}$

15.5.3 ASUPRA DISTRIBUŢIILOR

În 1926 **P.A.M. Dirac** a introdus, în mecanica cuantică, **"funcţia" delta** (**δ**) care este nulă peste tot, cu excepţia unui punct (în origine luând valoarea ∞), definită prin:

(15.27) $$\delta(x) \overset{d}{=}: \begin{cases} 0, t \neq 0 \\ +\infty, t = 0 \end{cases}$$

şi a cărei integrală este

(15.28) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

Aceeaşi valoare a integralei o are şi fiuncţia **impuls unitar Δ(x, λ)** definită de:

(15.29) $$\Delta(x,\lambda) = \begin{cases} 0, x < -\frac{\lambda}{2} \\ \frac{1}{\lambda}, -\frac{\lambda}{2} \leq x \leq \frac{\lambda}{2} \\ 0, x > \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

Se observă că, pentru **λ → 0,** se obţine funcţia **Dirac δ(x).**

Trebuie menţionat că o definiţie riguroasă a impulsului **Dirac** poate fi dată în cadrul **teoriei distribuţiilor** [**Kecs, W., Teodorescu, P.P**. **APLICAŢII ALE TEORIEI DISTRIBUŢIILOR ÎN MECANICĂ**, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1970] sau a **funcţiilor generalizate**, un capitol al analizei funcţionale.

Impulsul unitar poate fi privit şi ca derivată a funcţiei **treaptă unitară** (ideală), sau a funcţiei **Heaviside** Γ(x), definită prin

(15.30) $$\mathbf{\Gamma}(x) =: \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x > 0 \end{cases},$$

admiţînd, în acest fel, derivabilitatea oricărei funcţii continue pe porţiuni.

Funcţia **rampă unitară** este definită prin :

(15.31) $$\mathbf{R}(x) =: \begin{cases} 0, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$

şi derivata ei este funcţia treaptă unitară ideală (**Heaviside**).

15.5.4 FUNCŢII TREAPTĂ, IMPULS ŞI RAMPĂ UNITARE PERIODICE, EXPRIMATE CA FSM-CE ŞI CA FSM CUADRILOBE EXCENTRICE (FSM-QL)

În **figurile 15.17** şi **15.18** sunt prezentate graficele funcţiilor **cosinus excentric** (**cext**) şi, respectiv, **cosinus cuadrilob** excentric (**coqt**) pentru **excentricităţi numerice s** supraunitare.

Se observă că, odată cu creşterea valorii excentricităţii numerice **s**, domeniul de existenţă a funcţiilor se restrânge la intervalul în care, o dreaptă turnantă, din excentrul **S(s, ε),** exterior cercului unitate, inersectează cercul unitate. Acest interval I este periodic, cu perioada 2π (π, dacă nu se face distincţe între cel două semidrepte) şi este dat de relaţia

(15.32) $I = t_{final} - t_{initial} = 2\gamma = 2\arcsin(1/s)$,

pentru care funcţia

(15.33) $\mathbf{del\theta} = \sqrt{1 - s^2 \sin^2(\theta - \varepsilon)} = 0$,

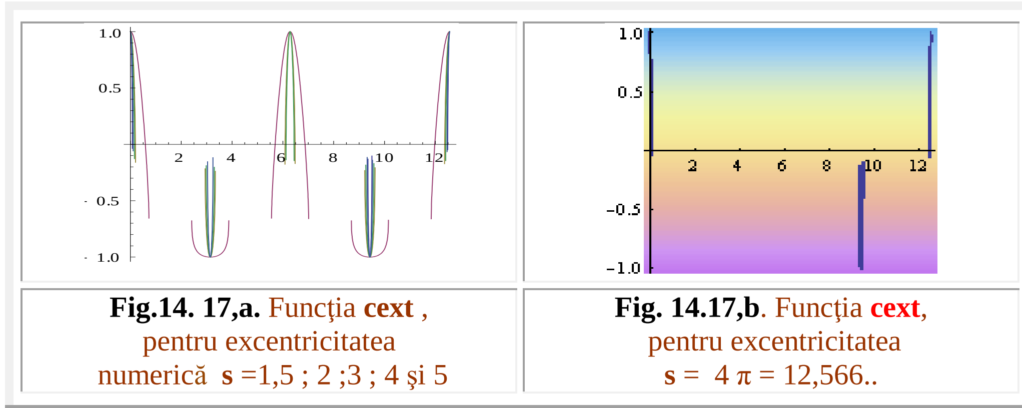


Fig.14. 17,a. Funcţia **cext** , pentru excentricitatea numerică **s** =1,5 ; 2 ;3 ; 4 şi 5

Fig. 14.17,b. Funcţia **cext**, pentru excentricitatea **s** = 4 π = 12,566..

în care

(15.34) $t_{initial} = \pi + \varepsilon - \gamma = \pi$ şi $t_{final} = \pi + \varepsilon + \gamma = \pi$,

variabila excentrică: **t ≡ θ** (mod 2π) astfel că, pentru excentrul **S** tinzând, pe axa x (ε = 0) spre infinit (s → ∞), domeniul I tinde spre zero (I → 0). Rezultă că, la t = π şi s → ∞, funcţia **cex_1t** este un semnal **impuls,** de amplitudine -1, care se repetă periodic cu perioada 2π, iar, a doua determinare - secundară, de indice 2- a funcţiei **cex_2t** = **1** pentru t = 0 + 2kπ (k = 0,1, 2, …), deci şi la t = 2 π, pentru s → ∞, aşa cum rezultă şi din **figura 15.16,a** şi **15.16,b.**

Se vor numi, în continuare, aceste funcţii « **funcţii impuls periodic cext de amplitudine unitate** cu s → ∞ ». Pentru ε = π/2 se vor obţine, asemănător, pentru s → ∞, « **funcţii impuls periodic sext de amplitudine unitate** ».

Deoarece

(15.35) $cex_{1,2}^2 t + sex_{1,2}^2 t = 1$,

unde **$cex_{1,2}t$** = ± 1 → **$sex_{1,2}t$** = 0 şi invers.

De aceea, la t = π, funcţia $sex_1t = 0$ cu perioada 2π şi funcţia

$I(t,s) = \dfrac{1}{sex_1 t} \Rightarrow \infty$, obţinându-se funcţii **impuls unitar periodic**, de amplitudine infinită, asemanătoare funcţiei **Dirac**, doar că este periodică, cu perioada 2π.

Şi funcţia **cosinus cuadrilob** [**Şelariu, Mircea Eugen**, **QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**, The11[th] International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, România, Sept. 27-30, 2005]

(15.36) $\mathbf{coq_1t} = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1 - s^2\sin^2(\theta - \varepsilon)}}$

cu θ ≡ t, pentru s → ∞ are la t = π ± 2kπ, (k = 0, 1, 2, …), a cărui numitor este funcţia delt = 0 şi cos0 = 1, astfel că amplitudinea tinde la infinit şi se obţine, din nou, o funcţie impuls unitar periodică (**Fig.15.17,b**).

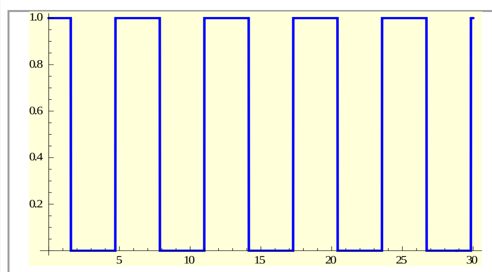


Fig. 15.17,a Funcţia 0.5 + 0.5**coqt**, de excentricitate numerică **s = 1**, ca funcţie **dreptunghiulară periodică** sau funcţie în **treptă unitate periodică**

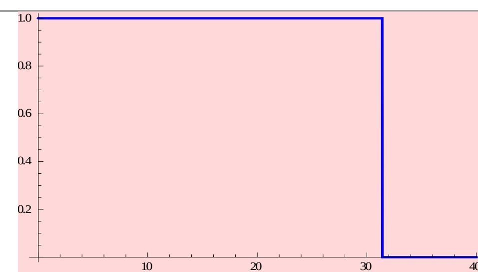


Fig. 15.17,b. Funcţia 0,5 + 0,5**.coq(t/10)** ca funcţie **treaptă unitate periodică,** pentru **s = 1, ε = 0** şi t ≡ θ ∈ [0, 32]

O funcţie **dreptunghiulară** periodică de amplitudine unitate (**Fig.15.17,a**) este dată de funcţia supermatematică **cuadrilobă excentrica** 0,5(1-siq t), defazată cu -π .

(15.37) $$D(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1-\frac{\sin(t+\pi)}{\sqrt{1-s^2\cos^2(t+\pi)}} & ,t \geq 0 \\ 0 & ,t<0 \end{cases},$$

care poate fi denumită **funcţie treaptă unitară periodică**, dacă excentricitatea numerica s = 1.

Dacă t ⟶ t /20, (**Fig.14.17,b**) prima treaptă se prelungeşte de la π la 10 π . Rezultă că pentru t ⟶ t / ∞ ⟶ 0 se obţine o funcţie treaptă unitară pe toată axa t > 0.

O funcţie asemănătoare se poate obţine şi cu funcţia derivată excentrică **dext** de **s = 1** (**Fig. 15.18,a**) cu t ⟶ t /10 şi **ε** = -π (**Fig. 15.18,b**).

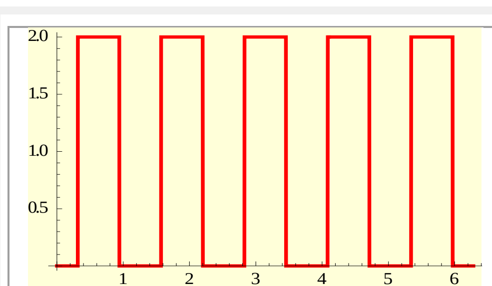


Fig. 15.18,a Funcţia **dext** ca funcţie **treaptă periodică**

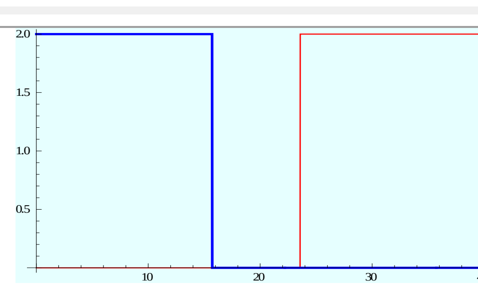


Fig. 15.18,b Funcţii **dext** ca funcţii **treaptă**

O funcţie **rampă unitară ideală** se poate obţine ca o dreaptă trecând prin origine, de coeficient unghiular **m** egal cu unitatea (m = 1).

(15.38) $$y = \begin{cases} mx, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

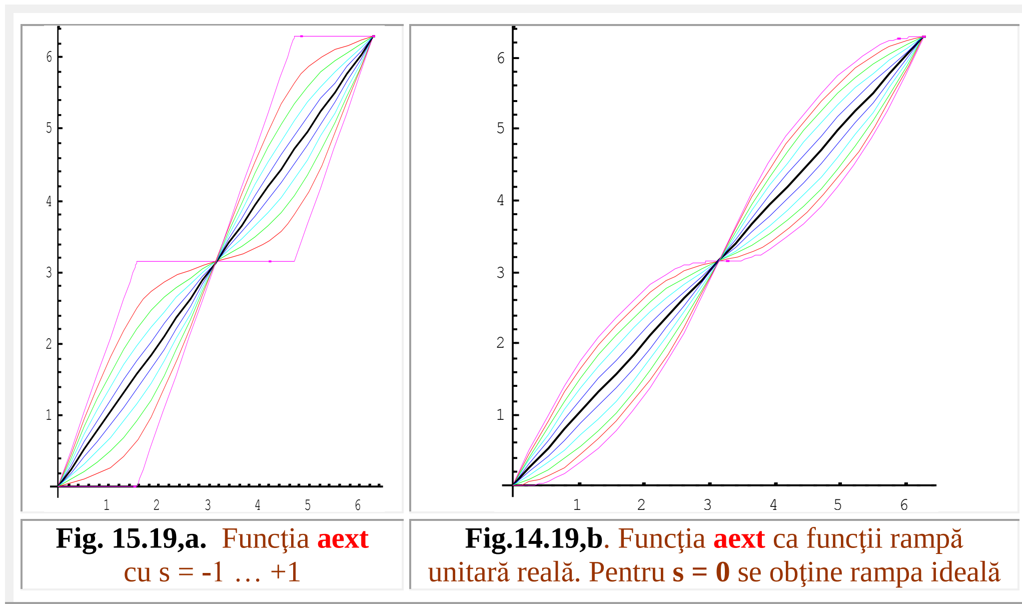


Fig. 15.19,a. Funcţia **aext** cu s = -1 … +1

Fig.14.19,b. Funcţia **aext** ca funcţii rampă unitară reală. Pentru **s = 0** se obţine rampa ideală

O funcţie **rampă unitară reală**, care sa admită anumite abateri faţă de liniaritate, se mai poate obţine ca o **strâmbă** [**Şelariu, Mircea Eugen**, "**ÎNTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ**", Lucr. Simp. Naţ. Univ. "Gh. Anghel", Drobeta Tr. Severin, mai, 2003, pag. 171 … 178] ce trece prin originea O (0,0).

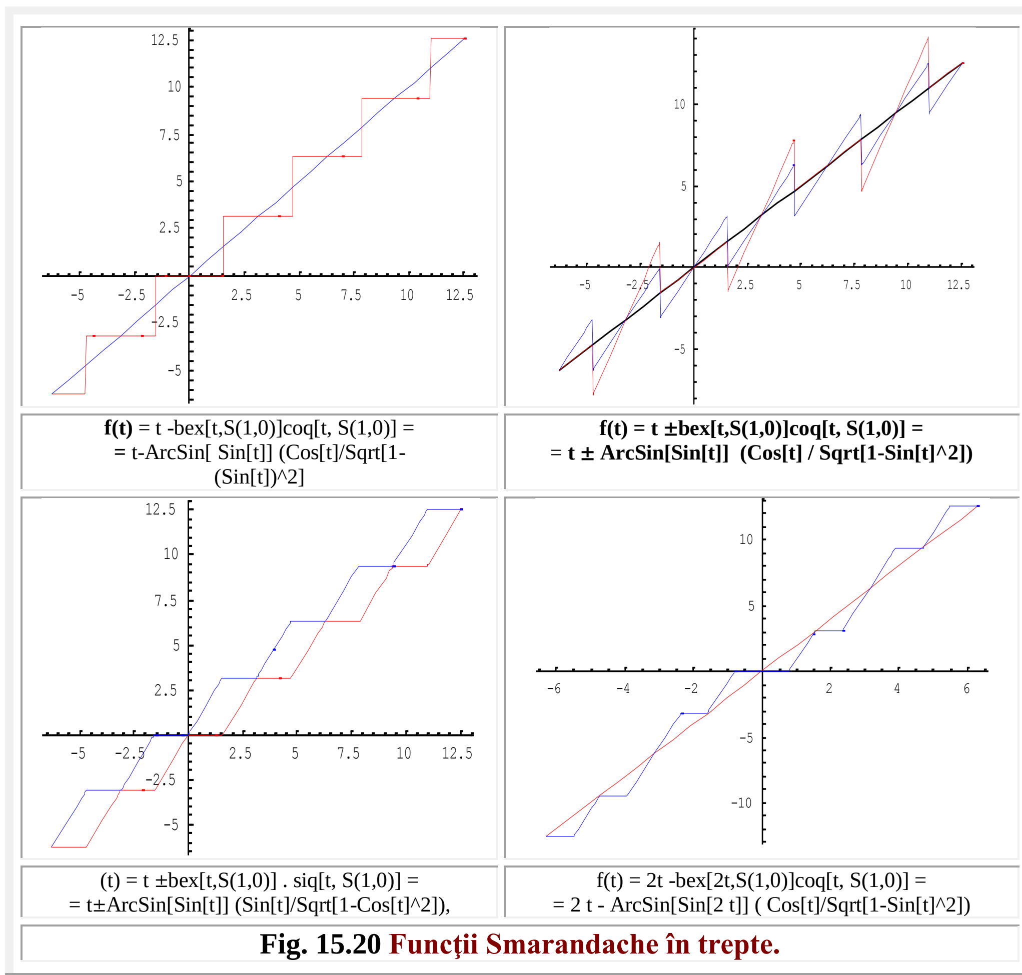
O **familie de strambe**, obţinute pentru s ≠ 0 în intervalul s ∊ [-1,1], sunt prezentate în **figura15.19,a**, în care, pentru s = 0 se obţine o rampă pentru t ∊ [0, ∞].

Funcţii **rampă unitate** se pot obţine prin înlocuirea constantei m = tan α cu variabila m = **tex θ** pentru excentricitate unitară s ∊ [-1, 1].

15.5.5 FUNCŢII SUPERMATEMATICE (FSM) SMARANDACHE ÎN TREPTE

Prin combinarea funcţiilor **rampă excentrice**, de execentricitate numerică **s = 1**,cu funcţii **dreptunghiulare excentrice,** rezultă **funcţii în trepte**, denumite **funcţii în trepte Smarandache**, în onoarea matematicianului român Dr. Math. **Florentin Smarandache** şeful Departamentului de Mathematică de la Universitatea New Mexico, USA.

Câteva funcţii de acest gen, împreună cu relaţiile lor de definiţie sunt prezentate în **figurile 15.20** şi **15.21.**



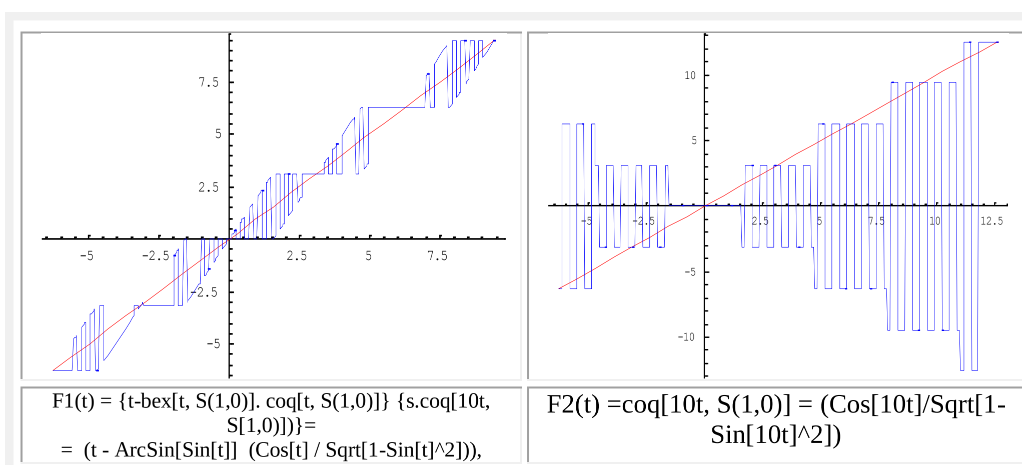
f(t) = t -bex[t,S(1,0)]coq[t, S(1,0)] =
= t-ArcSin[Sin[t]] (Cos[t]/Sqrt[1-(Sin[t])^2]

f(t) = t ±bex[t,S(1,0)]coq[t, S(1,0)] =
= t ± ArcSin[Sin[t]] (Cos[t] / Sqrt[1-Sin[t]^2])

(t) = t ±bex[t,S(1,0)] . siq[t, S(1,0)] =
= t±ArcSin[Sin[t]] (Sin[t]/Sqrt[1-Cos[t]^2]),

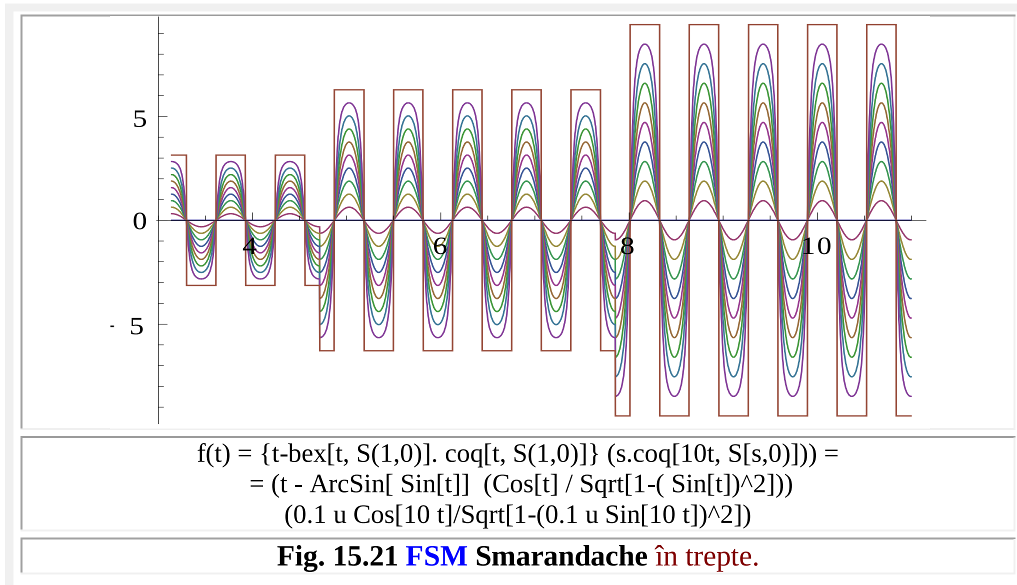
f(t) = 2t -bex[2t,S(1,0)]coq[t, S(1,0)] =
= 2 t - ArcSin[Sin[2 t]] (Cos[t]/Sqrt[1-Sin[t]^2])

Fig. 15.20 Funcţii Smarandache în trepte.



F1(t) = {t-bex[t, S(1,0)]. coq[t, S(1,0)]} {s.coq[10t, S[1,0)])}=
= (t - ArcSin[Sin[t]] (Cos[t] / Sqrt[1-Sin[t]^2])),

F2(t) =coq[10t, S(1,0)] = (Cos[10t]/Sqrt[1-Sin[10t]^2])



f(t) = {t-bex[t, S(1,0)]. coq[t, S(1,0)]} (s.coq[10t, S[s,0)])) =
= (t - ArcSin[Sin[t]] (Cos[t] / Sqrt[1-(Sin[t])^2]))
(0.1 u Cos[10 t]/Sqrt[1-(0.1 u Sin[10 t])^2])

Fig. 15.21 FSM Smarandache în trepte.

15.5.6 FUNCŢII SUPERMATEMATICE ÎN TREPTE

In capitolele anterioare au fost prezentate, cu precădere, **FSM-CE** de variabilă excentrică, variabilă notată cu **θ** sau cu **y**.

Aşa cum s-a putut constata, aceste funcţii sunt continue doar în domeniul în care excentrul **S(s,ε)** nu este exterior discului cercului unitate, adică, pentru excentricitatea numerică **s ≤ 1**, sau, dacă, excentrul **E(e,ε)** nu este exterior discului circular de raza R, adică, pentru o excentricitate rală **e ≤ R**.

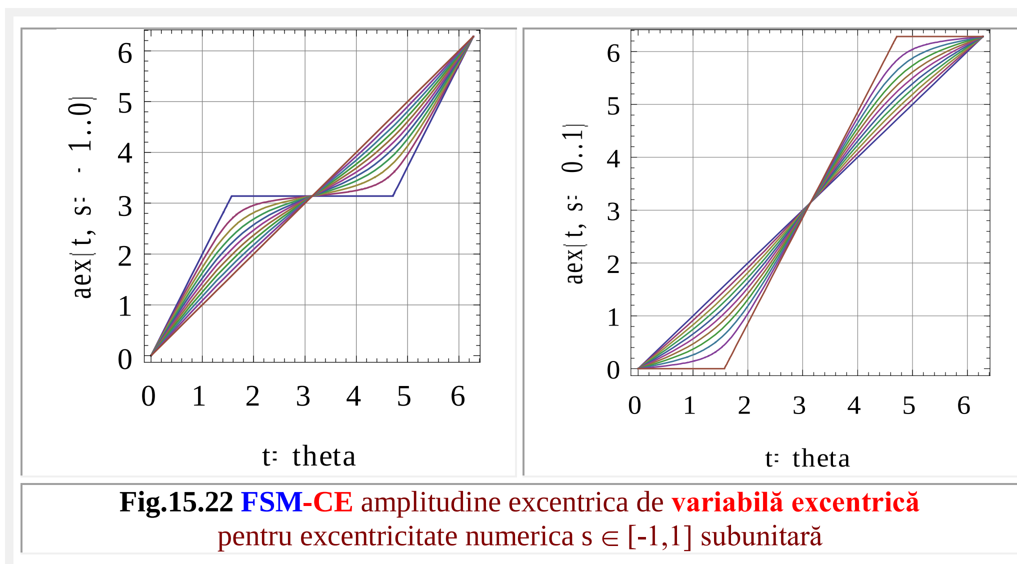


Fig.15.22 FSM-CE amplitudine excentrica de **variabilă excentrică** pentru excentricitate numerica s ∈ [-1,1] subunitară

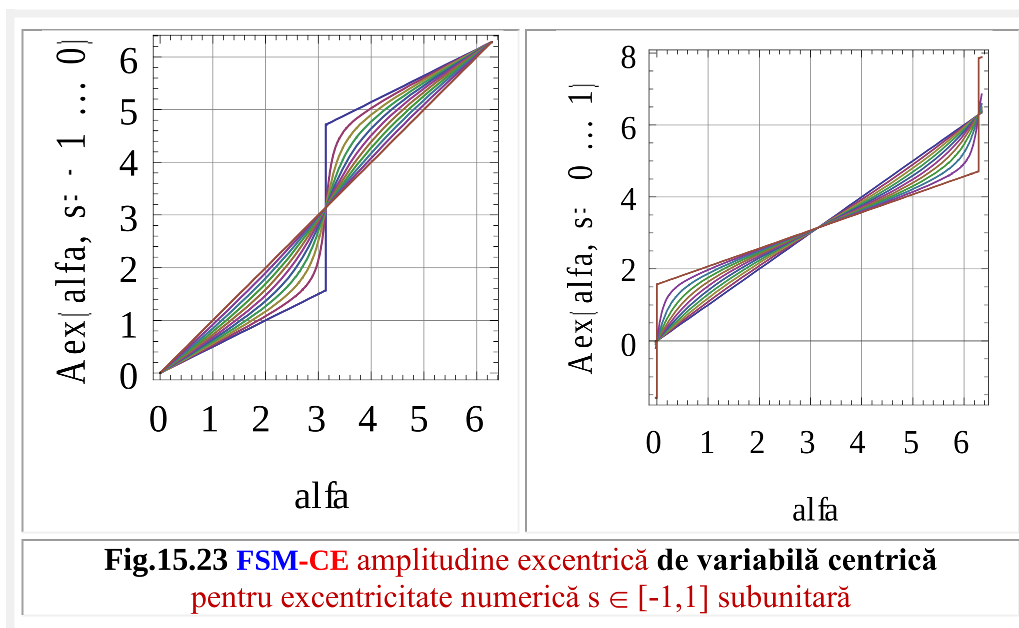


Fig.15.23 FSM-CE amplitudine excentrică **de variabilă centrică** pentru excentricitate numerică s ∈ [-1,1] subunitară

Dependenţele dintre cele două tipuri de variabile motoare au fost numite **FSM-CE amplitudine excentrică**, şi sunt **FSM-CE** amplitudine excentrică de variabilă **excentrică θ**, notată **aex$_{1,2}$θ**, ca şi cele de variabilă centrica α_1, notată, conform convenţiei cu majusculă **Aex$\alpha_{1,2}$**.

Expresiile **FSM-CE amplitudine excentrică** de variabilă **excentrică** sunt

$$(15.39)\qquad \begin{cases} \alpha_{1,2}(\theta) = aex_{1,2}\theta = \theta - \beta_{1,2}(\theta) \\ \qquad\qquad = \theta - bex_{1,2}\theta \end{cases}$$

iar a celor de variabilă **centrică** sunt

$$(15.40)\qquad \theta(\alpha_{1,2}) = Aex\alpha_{1,2} = \begin{cases} \alpha_{1,2} + arcsin\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{Rex\alpha_{1,2}} \\ \alpha_{1,2} + arctan\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha_{1,2})} \end{cases}$$

Graficele lor sunt prezentate în **figura 15.22** şi, respectiv, **15. 23,** pentru excentricitate numerică subunitară s ∈ [-1, 1].

Pentru excentricitate numerică supraunitară, s ∈ [-2, 2], graficele lui **aexθ** sunt prezentate în **figurile 15.24** şi ale lui **Aexα** în **figura 15.25.**

Comparând graficele celor doua familii de **FSM-CE**, se poate observa că cele de variabilă excentrică sunt discontinue, pentru s ∈[1, 2] şi pentru s ∈[-2, -1], în timp ce, cele de variabiă centrică sunt continue şi pentru excentricitatea numerică supraunitară, s > 1, s < – 1 → $s^2 > 1$.

Pentru excentricităţi numerice supraunitare, **FSM-CE** există doar în domeniile în care o dreaptă d = $d^+ \cup d^-$, turnantă în jurul excentrului S sau E, intersectează cercul unitate, respectiv, pe cel de rază R.

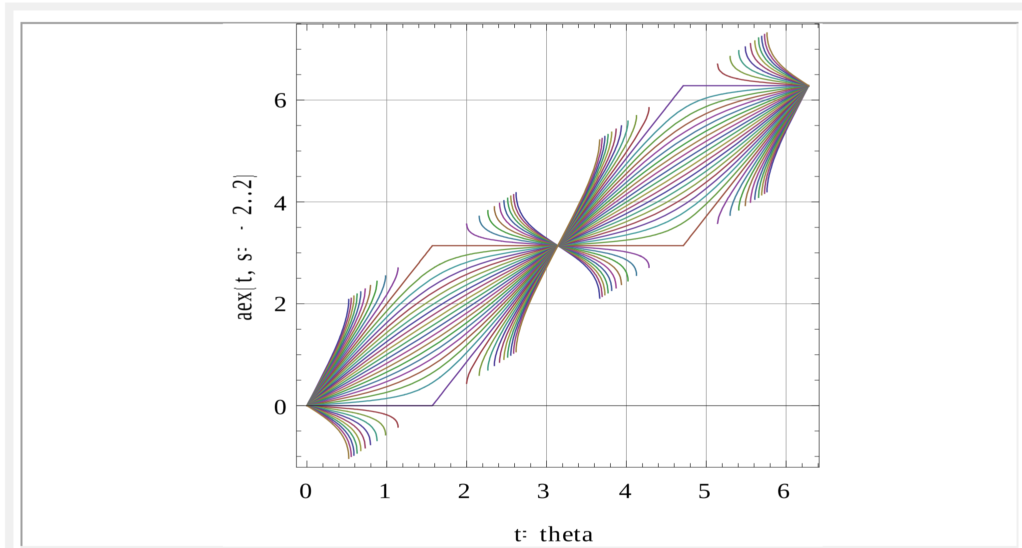


Fig.15.24 FSM-CE amplitudine excentrica **de variabilă excentrică** pentru excentricitate numerica s ∈ [-2, 2] supraunitară

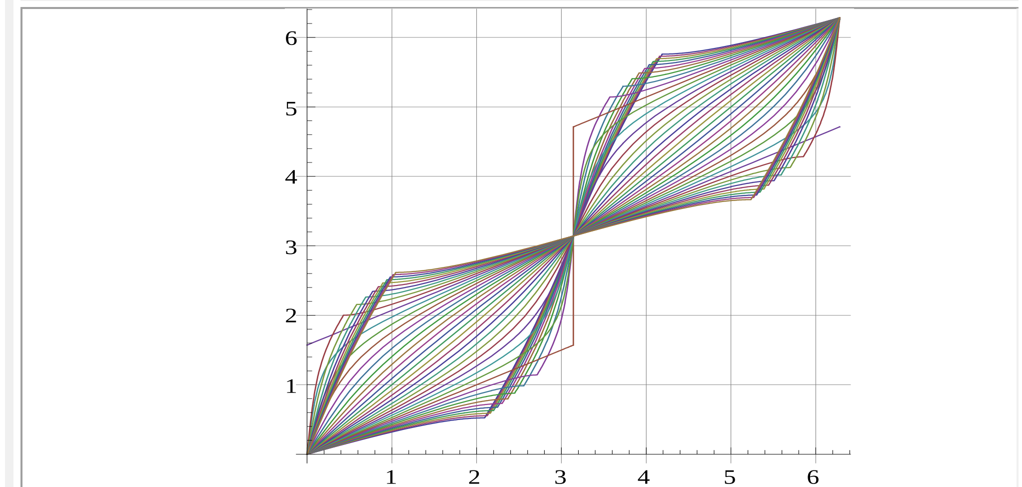


Fig.15.25 FSM-CE amplitudine excentrica **de variabilă centrică** pentru excentricitate numerica s ∈ [-2, 2] supraunitară

Notând cu W_i şi cu W_f cele două puncte de tangenţă ale cercului unitate / trigonometric CU(O,1) cu dreapta **d**, coordonatele polare ale acestor puncte de tangenţă, denumite punct iniţial (W_i) şi punct final (W_f), faţă de centrul O(0,0) sunt

$W_i\,(1,\propto_i)$, $W_f(1,\propto_f)$ iar faţă de excentrul S(s,ε) vor fi $W_i(r_i,\theta_i)$, $W_f(r_f,\theta_f)$ în care, razele polare, din excentrul S, $r_{i,f}$ sunt date de **FSM-CE** radial excentric de **θ** şi, respectiv, de $\alpha_{1,2}$

(15.41) $$r_{i,f\ 1,2} = rex_{1,2}\theta_{i,f} = Rex\alpha_{1,2} = \pm(\sqrt{s^2-1})$$

cu plus pentru prima determinare principală (1→ +) şi cu minus poentru a doua determinare secundară (2 → –).

Din (15.43) rezultă valorile sinusurilor unghiurilor limită excentrice $\theta_{i,f}$, care sunt

(15.42) $$\sin(\pi - \theta_{i,f} + \varepsilon) = \frac{1}{r_{i,f}} \rightarrow$$

din care se deduc valorile unghiulare limită excentrice

(15.43) $$\theta_{i,f} = \pi + \varepsilon - \arcsin\frac{1}{r_{i,f}} = \pi + \varepsilon - \arcsin\frac{1}{\pm(\sqrt{s^2-1})}$$ şi ale celor centrice

(15.44) $$\alpha_{i,f} = \arcsin\frac{r_{i,f\ 1,2}}{s} + \varepsilon = \arcsin\left[\frac{\pm(\sqrt{s^2-1})}{s}\right] + \varepsilon = \arcsin\left[\pm\sqrt{1-\frac{1}{s^2}}\right] + \varepsilon.$$

15.6 VARIANTE DE DEFINIRE A FSM-CE DE VARIABILĂ CENTRICĂ

Există mai multe posibilităţi de definire a **FSM-CE** de variabilă centrică, dintre care, prima variantă este prezentată schematic în **figura 15.26**.

În partea superioară este prezentat cazul excentrului **S(s,ε)** interior discului cercului unitate, adică **s < 1** şi, în partea de jos, cazul excentrului exterior acestuia, adică de **s > 1**. Excentrul **S** corespunde cu centrul cercului unitate C[O(0,0), 1].

Aceasta este o primă varianta posibilă de definire a acestor **funcţii supermatematice circulare** de **variabilă centrică** (**FSM-CE**), care corespunde cu definirea **FSM-CE** de variabilă excentrică, deoarece şi aici cele două determinări ale funcţiilor sunt defazate între ele cu π, atât pentru s < 1 cât şi pentru cazul s > 1 (**Fig. 15.26**), deorece W_1 şi W_2 sunt situate pe aceeaşi dreaptă d, dar, unul pe d^+ şi celălalt pe d^-.

Diferenţa este că, dacă argumentul excentric θ = Ωt variază uniform, pentru Ω = constant, argumentul centric θ(α) variază neuniform, deşi α = Ωt este o variaţie uniformă a argumentului centric α. Dependenţa este dată de relaţia

(15.45) $$\theta(\alpha) = Aex\alpha = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\propto-\varepsilon)}{Rex\alpha} = $$
$$= \Omega.t + \arcsin\frac{s.\sin(\Omega t-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\Omega t-\varepsilon)}}$$

Este evident faptul că coordonatele punctului $P_1(x_1,y_1)$ sunt **FCC** $x_1 = \cos\alpha$ şi $y_1 = \sin\alpha$.

Se observă că pentru cazul s < 1, (**Fig. 15.26,a**) variabila motoare $\alpha = \alpha_1$ determină pe cercul **C'** punctul **P_1**. Acesta, împreună cu excentru **S(s,ε)**, determină dreapta d, dreaptă impărţită de **S** în cele două semidrepte: pozitivă d^+ şi negativă d^-.

Intersecţia dreptei **d** cu cercul unitate **C(O,1)** determină punctele **$W_{1,2}$** şi, prin acestea, **FSM-CE** de variabilă **centrică**.

Mai rezultă din figură că

(15.46) $$\begin{cases} \theta_1(\alpha_1) = \theta(\alpha) = \alpha_1 + \beta_1(\alpha_1) = \alpha + \beta(\alpha) \\ \theta_2(\alpha) = \theta_2(\alpha) + \pi \end{cases}$$

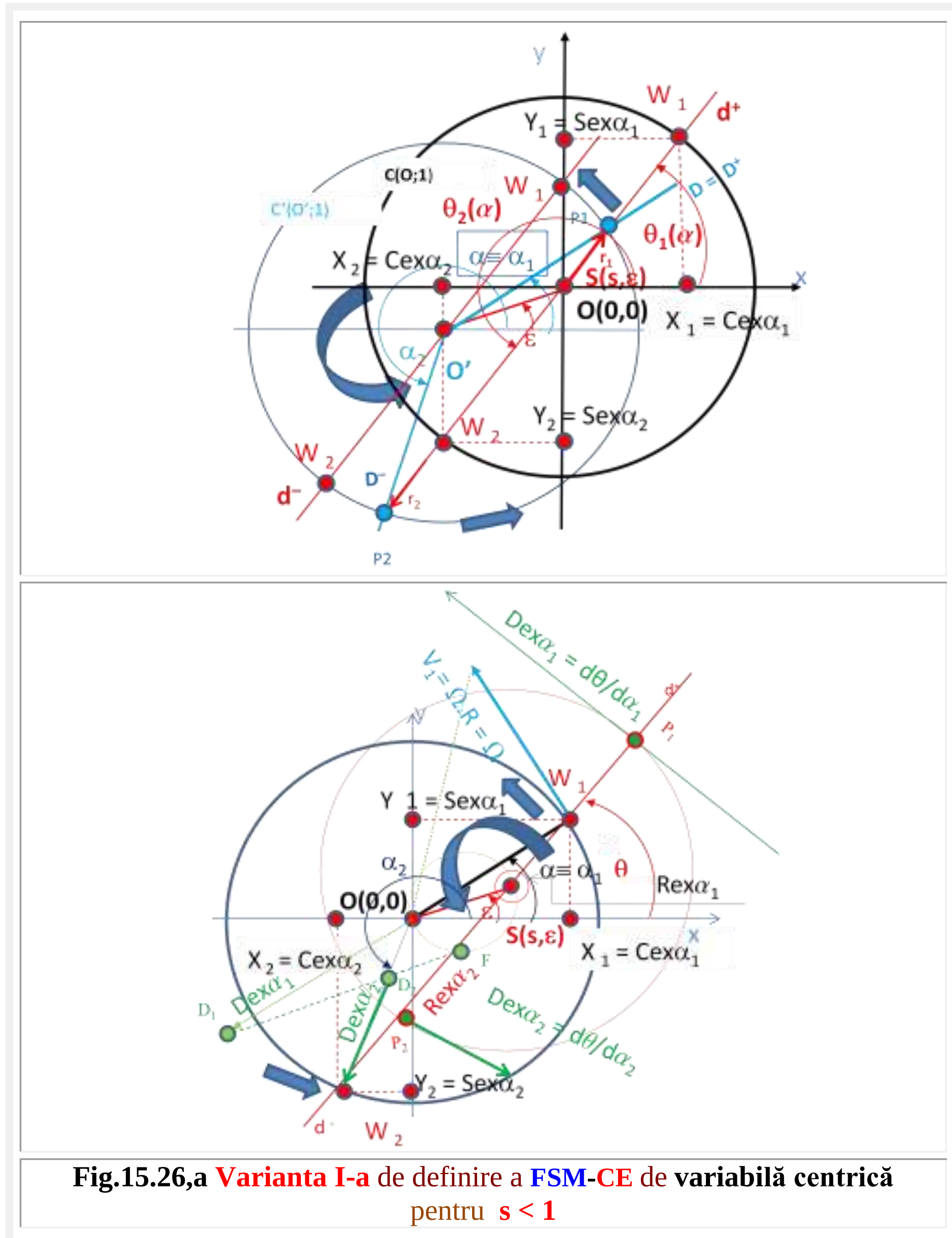


Fig.15.26,a Varianta I-a de definire a **FSM-CE** de **variabilă centrică** pentru **s < 1**

Ca urmare, atât în cazul **FSM-CE** de variabilă excentrică cât şi la cele centrice, determinarea secundară de indice 2 este defazată cu π, faţă de determinarea principală de indice 1, sau fãra indice, aşa cum s-a convenit încă în Vol I a acestei lucrări.

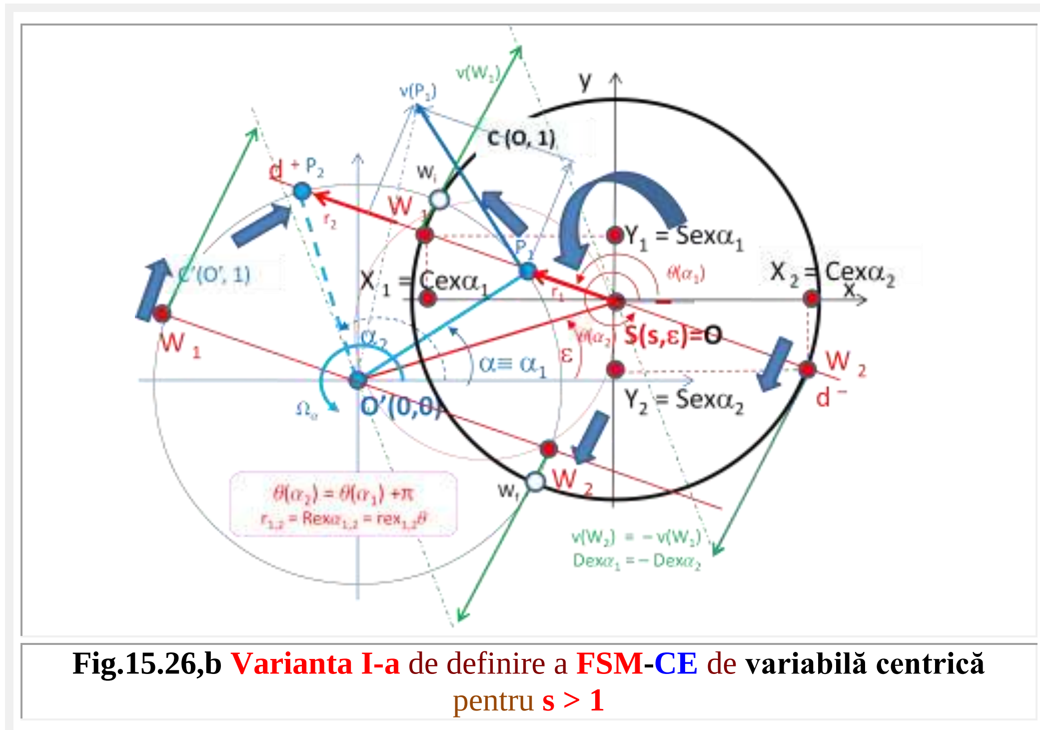


Fig.15.26,b Varianta I-a de definire a **FSM-CE** de **variabilă centrică** pentru **s > 1**

În această primă varianta, se poate renunţa la cel de-al doilea cerc unitate C(S,1)=C(o,1), **FSM-CE** Cexα şi Sexα pot fi la fel de bine reprezentate pe cercul C'(O',1), dicând din O, paralele cu W_1W_2, adică de directie θ(α) cu axa O'x sau Ox, aşa cum s-a marcat suprapus în **figura 15.26**. **FSM-CE** Rexα şi Dexα se reprezintă cel mai simplu direct pe cercul C' cum se arată în **dreapta → figurii 15.26,a**.

Pentru a nu altera concluziile, rezultate pe baza schiţelor, excentrul **S** trebuie plasat întotdeauna în primul cadran centric.

În **ambele variante**, variabila motoare este $\alpha = \alpha_1$.

În **varianta I-a** ea va genera punctul P_1, prin intersecţia cercului unitate C' cu direcţia α_1 a vectorului $\overrightarrow{R_1}$ din O', de modul unitate, vector situat pe dreapta D = $D^+ \cup D^-$ în sensul pozitiv al semidreptei pozitive D^+.

Dreapta centrică D este turnantă în jurul centrului **O'(0,0)** şi trece prin acesta, astfel că semidreapta D^+ va determina punctul P_1 de intersecţie cu cercul

unitate C'(O,1) şi, prin acesta acesta, prima determinare a funcţiilor excentrice de variabilă centrică, de indice **1**. Punctul $\mathbf{W_1}$ cu excentrul **S(s,ε)** va determina dreapta $d = d^+ \cup d^-$ turnantă în jurul lui **S**.

Intersecţia lui C(O,1) cu d^- va determina punctul W_2 şi, prin acesta, a doua determinare, secundară, de indice 2, a **FSM-CE** de variabilă centrică.

Prima variantă are avantajul că punctele $W_{1,2}$ sunt aceleaşi atât pentru **FSM-CE** de variabilă **centrică** $\boldsymbol{\alpha}$ cât şi pentru cele de variabilăn **excentrică θ**, deoarece ele se situează pe aceeaşi dreaptă d; unul pe semidreapta pozitivă d^+ şi celălalt pe semidreapta negativă d^-.

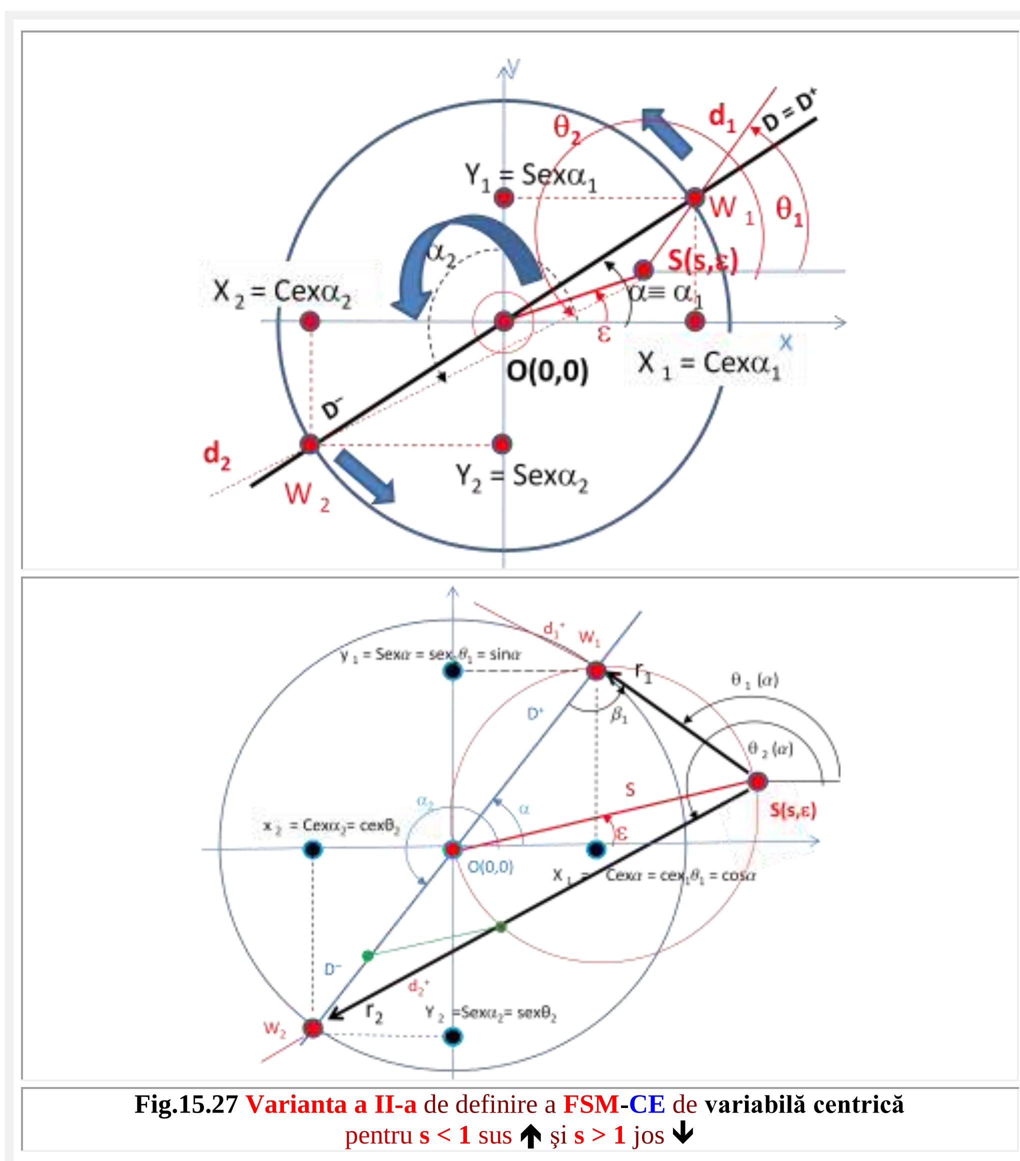


Fig.15.27 Varianta a II-a de definire a **FSM-CE** de **variabilă centrică**
pentru **s < 1** sus ↑ şi **s > 1** jos ↓

Pe cale de consecinţă, valorile **FSM-CE** de variabilă excentrică sunt aceleaşi cu a celor de variabilă centrică. De aceea, având expresiile, **ca funcţii de θ**, a primei determinări ale **FSM-CE,** de indice 1, cele secundare,de indice 2, se vor obţine prin înlocuirea lui θ cu θ + π în expresiile / ecuaţiile primei determinări. Ceea ce se poate aplica numai la **FSM-CE** de variabilă **excentrică θ** !

În această variantă,

(15.47) $\quad rex_{1,2}\theta = Rex\alpha_{1,2}$, aşa cum s-a mai arătat

(15.48) $\quad dex_{1,2}\theta = \frac{1}{Dex\alpha_{1,2}}$ sau

(15.49) $\quad Dex\alpha_{1,2} = \frac{1}{dex_{1,2}\theta}$, aşa cum se va arăta în continuare şi

(15.50) $\quad \begin{cases} Cex\,\alpha_{1,2} = cex_{1,2}\theta \\ Sex\,\alpha_{1,2} = sex_{1,2}\theta' \end{cases}$ pentru acelaşi excentru **S(s,ε)** şi pentru dependenţele

(15.51) $$\begin{cases} \alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}(\theta) = \theta - \beta_{1,2} = \theta - bex_{1,2}\theta = aex_{1,2}\theta \\ \theta = \theta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2} = \alpha_{1,2} + Bex\alpha_{1,2} = Aex\,\alpha_{1,2} \end{cases}$$

În această primă variantă avem un singur **θ** şi două valori α (α_1 şi α_2), dintre care prima este cea motoare. Punctele $\mathbf{W_{1,2}}$, care aparţin dreptei excentrice **d**, au, totuşi, coordonate polare unghiulare diferite

(15.52) $$\begin{cases} \theta' = \theta, & pentru\; W_1 \\ \theta'' = \theta + \pi, & pentru\; W_2 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = -\pi, & pentru\; s < 1 \\ \beta_1 + \beta_2 = \pi, & pentru\; s > 1 \end{cases}$$

Simbolic, se poate scrie dependenţa dintre cele două determinări, de variabilă excentrică θ, în aceasta variantă I

(15.53) $\quad$ (**FSM-CE**)$_2$**θ** = (**FSM-CE**)$_1$(**θ + π**), care se poate verifica şi grafic.

Se observă în figura că, în acest caz, numai pentru s > 1, indicii punctelor $\mathbf{W_{1,2}}$ sunt inverşi cu cei ai punctelor $\mathbf{W_{1,2}}$, din cazul variabilei excentrice şi se inversează şi sensul de rotaţie al punctelor $\mathbf{W_{1,2}}$ pe cercurile unitate.

La rotaţia continuă a dreptei $\mathbf{D^+}$ în sens trigonometric pozitiv, dreapta **d** oscilează, rotindu-se în sens pozitiv pentru P_1 de la M_i la $\mathbf{W_f}$, apoi de la $\mathbf{W_f}$ la $\mathbf{W_i}$ îşi schimbă sensul de rotaţie. În $\mathbf{W_i}$ şi în $\mathbf{W_f}$ punctele $\mathbf{P_1}$ şi $\mathbf{W_1}$ se suprapun. Plecând din acest punct în intervalul $\mathbf{W_iW_f}$, $\mathbf{W_1}$ se va roti pe **C** şi pe **C'** în sens trigonometric pozitiv, ca şi $\mathbf{W_1}$ în cazul **FSM-CE** de **variabilă excentrică**, în care $\mathbf{W_1}$ este punctul care se roteşte pe cerc permanent în sens trigonometric pozitiv, în timp ce $\mathbf{W_2}$ este cel care se roteşte permanent în sens negativ, la o rotaţie pozitivă cu unghiul θ a dreptei **d**.

În varianta I-a, $\boldsymbol{\alpha}$ creşte continuu, astfel că P_1 se roteşte mereu în acelaşi sens pozitiv, în timp ce unghiul θ al dreptei d îşi schimbă semnul în punctele $\mathbf{W_{i,f}}$ (iniţial **i** şi final **f**) de tangenţa ale dreptei **d** din **S** cu cercul unitate. Sensul de rotaţie al lui $\mathbf{W_2}$ este invers sensului de raotaţie al lui $\mathbf{W_1}$.

Cazul **s > 1** corespunde unui mecanism manivelă - culisă oscilantă, care este un subansamblu al mecanismului centric cu parghii cu 6 elemente (v. **Demian T., Tudor D., Grecu E.**, "**MECANISME DE MECANICĂ FINĂ**", EDP, Buc., 1982, Cap.2.2.3. **CINEMATICA ANALITICĂ A UNOR MECANISME UZUALE SIMPLE**, pag. 19…20) în care manivela motoare se roteşte în jurul centrului O(0,0), cu mişcare uniformă şi continuă cu unghiul $\alpha = \Omega.t$, iar o bară, materializează semidreapta $\mathbf{d^+}$,

articulată în punctul **S(s,ε),** care oscileaza cu unghiul **θ**, între punctele $\mathbf{W_i}$ şi $\mathbf{W_f}$, puncte în care îşi schimbă sensul de oscilaţie. Punctul $\mathbf{W_1}$ este materializat de culisa care culiseaza pe bara $\mathbf{d^+}$, articulată în **S**, împreună cu care oscileaza în jurul excentrului **S**.

În teoria mecanismelor, între oricare mărime de ieşire şi oricare marime de intrare se pot stabili dependenţe denumite funcţii de transfer sau de transmitere [15], [16]. Astfel, între **θ** şi α, ca raport

(15.54) $i_R = \frac{\theta}{\alpha}$ se poate stabili **funcţia de transmitere a mărimilor unghiulare** sau a **rotaţiilor** $\mathbf{I_R}$, între r şi R se poate stabili funcţia sau **raportul de transmitere al translaţiilor** $\mathbf{i_T}$ deplasarilor / lungimilor, care se cunoaşte deja că este **FSM-CE** radial excentric

(15.55) $$\mathbf{i_T} = \frac{r}{R} = \frac{R.rex\theta}{R} = \boldsymbol{rex\theta} = \frac{R.Rex\alpha}{R} = \boldsymbol{Rex\alpha}$$

De asemenea, se cunoaşte că raportul diferenţialelor variabilelor este **FSM-CE** derivată excentrică, care, aşa cum s-a mai demonstrat în Vol.I § 6.5 pag.205, reprezintă **expresia generală** a funcţiei de transmitere a **vitezelor unghiulare** ale tuturor mecanismelor plane

(15.56) $$i_\omega = \begin{cases} \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\alpha/dt}{d\theta/dt} = \frac{d\alpha}{d\theta} = dex_{1,2}\theta, pentru\ \boldsymbol{\theta}\ variabilă\ motoare \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\theta/dt}{d\alpha/dt} = \frac{d\theta}{d\alpha} = Dex\alpha_{1,2}, pentru\ \boldsymbol{\alpha}\ variabilă\ motoare \end{cases},$$

cu dependenţa evidentă

(15.57) $$Dex\propto_{1,2} = \frac{1}{dex_{1,2}\theta}$$

Reprezentarea tuturor funcţiilor de transfer ale mecanismelor plane printr-o singură funcţie **SM** simplă (derivată excentrică **dexθ** şi **Dexα**) este o altă realizare de semă a **matematicii excentrice** (**ME**).

Supermatematica pe lângă contribuţiile teoretice la patrimoniul stiinţei are şi o pleiadă de aplicaţii practice, drept contribuţii la patrimoniul tehnic, în acord cu sloganul Prof. dr. **Rothenstein**, profesorul de Fizică de la Politehnica timişoreană, care susţine că "***Teoria sine praxa e cum rota sine axa***".

15.6.1 DETERMINAREA PE BAZA TEORIEI MECANISMELOR A EXPRESIILOR UNOR FSM-CE DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ ŞI CENTRICĂ

Din punct de vedere istoric, Teoria Mecanismelor ca şi Mecanica şi alte multe ştiinţe, care acum sunt ***independente***, s-au desprins din **Matematică**. Acum se va putea constata ca ele pot fi înglobate din nou în ştiinţa mamă din care s-au desprins.

Se consideră mecanismele manivelă motoare - culisă oscilantă, în dreapta, care corespunde cazului **FSM-CE** de variabilă **centrică** $\boldsymbol{\alpha}$**,** pentru **e** > **R** sau **s > 1** şi culisă motoare-manivelă, în partea stângă, ce corespunde cazului **FSM-CE** de variabilă **excentrica θ**, pentru **e** < R sau **s < 1**, prezentate în **figura 15.28**.

În ambele cazuri, punctul **F** ce aparţine cercului de rază **s**/2 şi trece prin punctele **O(0,0)** şi **S(s, ε)** împarte segmentul $\mathbf{W_1W_2}$ în parţi egale, de lungime r, care în funcţie de **θ** sunt

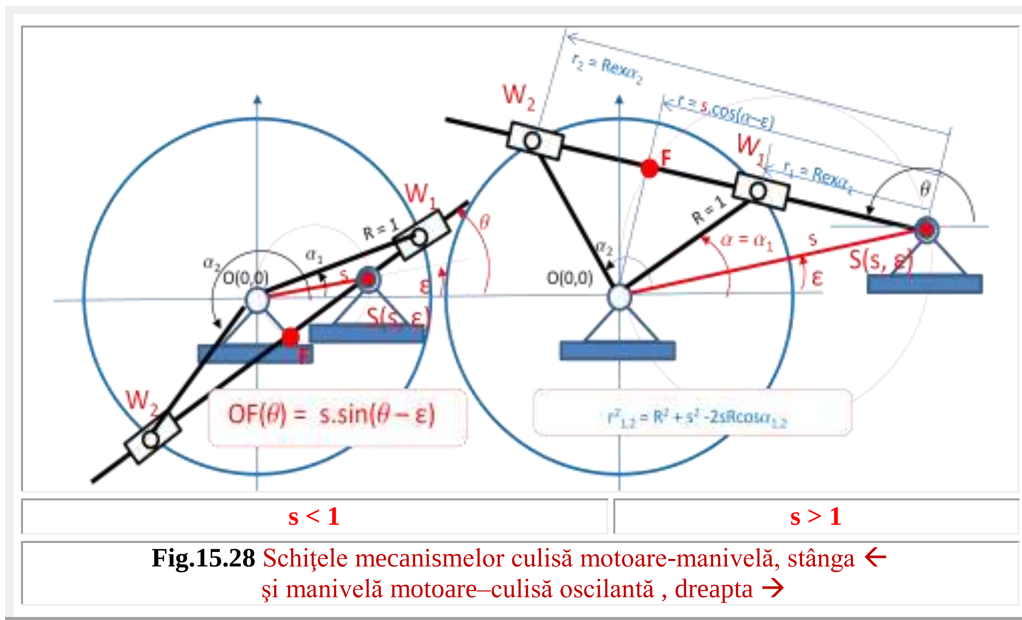
(15.58) $r(\theta) = |\overrightarrow{SF}| \rightarrow \begin{cases} r(\theta, s < 1) = s.\cos(\theta - \varepsilon) \\ r(\theta, s > 1) = s.\cos(\pi - \theta + \varepsilon) = -s.\cos(\theta - \varepsilon) \end{cases}$,

astfel că **FSM-CE** radial excentric de variabilă excentrică sunt

(15.59) $\mathrm{r}_{1,2}(\theta) = \mathrm{rex}_{1,2}\theta = \mathrm{r} \mp \mathrm{SF} = \sqrt{1 - \mathrm{s}^2\sin^2(\theta - \varepsilon)} \mp \mathrm{s}.\cos(\theta - \varepsilon) =$

$= \pm[-s.\cos(\theta - \varepsilon) \pm \sqrt{1 - \mathrm{s}^2\sin^2(\theta - \varepsilon)}]$

Reamintim că, pentru **$s \leq 1$**, **$rex_1\theta$** > **0** şi **$rex_2\theta$** < **0**, iar pentru **$s > 1$** ambele determinări 1 şi 2 sunt pozitive, când semidreapta pozitivă **d^+** intersectează cercul unitate şi negative când semidreapta negativă **d^-** intersecteaza cercul unitate, ceea ce rezultă şi din relaţia (15.58).



s < 1	**s > 1**

Fig.15.28 Schiţele mecanismelor culisă motoare-manivelă, stânga ← şi manivelă motoare–culisă oscilantă , dreapta →

Pentru **FSM-CE** de variabilă centrică $\alpha_{1,2}$, $r_{1,2}$ se determină imediat, cu teorema lui **Pitagora** generalizată, sau teorema cosinusului unghiului $\alpha_{1,2}$ din centrul O(0,0), din triunghiurile oarecare **OSW** $_{1,2}$. Rezultă

(15.60) $r_{1,2}(\propto_{1,2}) = |\overrightarrow{SW_{1,2}}| = \pm\sqrt{1 + s^2 - 2.s.\cos(\propto_{1,2} - \varepsilon)}$

Se observă că, la determinarea realaţiilor **FSM-CE** radial excentric, nu s-a uzat de un sistem de coordonate; unghiurile **θ** şi $\alpha_{1,2}$ putând fi marcate de la oricare reper comun. De aceea s-a mai spus că aceste funcţii sunt independente de originea sistemul de referinţă, $r_{1,2} = |\overrightarrow{SW_{1,2}}|$.

Din teorema sinusurilor în triunghiurile oarecare **OSW**$_{1,2}$, pentru **$s < 1$**, rezultă

(15.61) $\frac{r_{1,2}}{sin\propto_{1,2}} = \frac{1}{\sin[\pi-(\theta-\varepsilon)]} = \frac{s}{sin\beta_{1,2}} = 2Rcirc$ sau

15.7 - Funcţii cosinus şi sinus excentrice de variabilă centrică

(15.61') $$\begin{cases} \frac{r_1}{sin\propto_1} = \frac{1}{\sin(\theta-\varepsilon)} = \frac{s}{sin\beta_1} \\ \frac{r_2}{\sin(2\pi-\propto_2)} = \frac{1}{\sin(\theta-\varepsilon)} = \frac{s}{sin(\pi-\beta_2)} \end{cases} = 2Rcirc\,,$$

în care $\boldsymbol{Rcirc}$ este raza cercului circumscris triunghiului oarecare, considerat la scrierea teoremei lui **Pitagora** generalizate, în cazul de faţă triunghiul $OSW_{1,2}$.

Din egalitățile anterioare, pentru **s < 1**, rezultă **FSM-CE** beta excentice de variabilă excentrică

(15.62) $$\begin{cases} \beta_1(\theta) = bex_1\theta = \arcsin[s.sin(\theta-\varepsilon)] > 0 \\ \beta_2(\theta) = bex_2\theta = -\pi - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon) < 0] \end{cases}$$

Pentru s > 1 se poate scrie

(15.63) $$\begin{cases} \frac{r_1}{\sin(\alpha-\varepsilon)} = \frac{1}{\sin[\pi-\theta+\varepsilon]} = \frac{s}{sin\beta_1} \\ \frac{r_2}{\sin(\alpha_2-\varepsilon)} = \frac{1}{\sin[\pi-\theta+\varepsilon]} = \frac{s}{sin\beta_2} \end{cases} = 2Rcirc$$

din care rezultă **FSM-CE** beta excentrice de variabilă centrică

(15.64) $$\begin{cases} \beta_1(\propto) = Bex\propto_1 = \arcsin\frac{s.sin(\alpha-\varepsilon)}{r_1} = arcsin\frac{s.\sin(\propto-\varepsilon)}{Rex\alpha_1} \\ \beta_2 = Bex\propto_2 = arcsin\frac{s.\sin(\alpha_2-\varepsilon)}{r_2} = arcsin\frac{s.\sin(\alpha_2-\varepsilon)}{Rex\alpha_2} \end{cases}$$

Se observă, fără dificultate din **figura 15.27,** că între unghiuri există dependenţa cunoscută care reprezintă, totodată, **FSM-CE** amplitudie excentrică de variabilă excentrică $\mathbf{aex_{1,2}\theta}$

(15.65) $\alpha_{1,2}(\theta) = \theta - \beta_{1,2}(\theta) = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] = aex_{1,2}\theta$

care poate exprima, totodată, şi funcţia sau raportul de transmitere a rotaţiilor ca funcţie de variabila excentrică θ

(15.66) $$\frac{\propto_{1,2}}{\theta} = 1 - \frac{\arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]}{\theta} = i_R(\theta)$$

Prin derivarea expresiei (15.65) se obţine funcţia sau raportul de transmitere al vitezelor unghiulare, ştiind că $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega 1$, considerată viteza unghiulară de intrare şi $\dot{\alpha}_{1,2} = \frac{d\alpha_{1,2}}{dt} = \omega 2_{1,2}$ drept viteză unghiulară de la ieşirea mecanismului şi, totodată, **FSM-CE** derivată excentrică de variabilă excentrică

(15.67) $$dex_{1,2}\theta = \frac{d\propto_{1,2}}{d\theta} = \frac{d\propto_{1,2}/dt}{d\theta/dt} = \frac{\omega 2_{1,2}}{\omega_1}$$

Rezultă

(15.657') $$dex_{1,2}\theta = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2.sin^2(\theta-\varepsilon)}}$$

Din (15.65) rezultă **FSM-CE** amplitudine excentrică de variabilă centrică $\mathbf{Aex\alpha_{1,2}}$

(15.68) $$\theta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2}(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{Rex\alpha_{1,2}} = \mathbf{Aex\,\alpha_{1,2}}$$

şi utilizând expresia lui $\beta_{1,2}(\alpha_{1,2})$ din (15.64) rezultă raportul sau funcţia de transmitere a rotaţiilor ca funcţie de variabilele centrice $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$

(15.69) $$\frac{\theta(\alpha_{1,2})}{\alpha_{1,2}} = 1 + \frac{1}{\alpha_{1,2}}\arcsin\frac{s.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{Rex\alpha_{1,2}} = i_R(\alpha_{1,2})$$

Este necesară observaţia că, în timp ce funcţiile amplitudine excentrică de variabilă **excentrică** sunt distincte valoric, sau la un anumit moment $t = t_1 \rightarrow aex_1\theta = \alpha_1(\theta) \neq \alpha_2(\theta) = aex_2\theta$, deoarece $\alpha_1(\theta) \neq \alpha_2(\theta)$, cele de variabilă **centrică** au valori egale $Aex\alpha_1 = Aex\alpha_2 = \theta(\alpha)$, deoarece $\theta(\alpha_1) = \theta(\alpha_2) = \theta(\alpha) = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2}$, dar, la valori de timp diferite; în acelaşi moment $t = t_1$ ele fiind defazate între ele cu $\pi - \beta_2$.

Pe baza acestei observaţii se poate concluziona că toate **FSM-CE** de variabilă centrică au cele două determinări, principală 1 şi secundara 2, egale valoric, adică au graficele identice. De aceea se vor prezenta împreună graficele celor două determinări.

Prin derivarea expresiei (15.68) se obţine **FSM-CE** derivată excentrică de variabile centrice

(15.70) $$Dex\alpha_{1,2} = \frac{1 - s.\cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{Rex^2\alpha_{1,2}} = \frac{1 - s.\cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}{1 + s^2 - 2s.\cos(\alpha_{1,2} - \varepsilon)}$$

Şi, astfel, printr-o simplă aplicaţie, s-au determinat cele mai importante **FSM-CE** atât de variabilă excentrică cât şi de variabile centrice. Exemplul ar putea continua cu determinarea funcţiilor cosinus **cex$_{1,2}\theta$** şi **Cex$\alpha_{1,2}$**, sinus **sex$_{1,2}\theta$** şi **Sex$\alpha_{1,2}$** excentrice şi a celor compuse **tex**, **ctex** ş.a. Dar, aceste funcţii se pot determina imediat, pe baza funcţiilor lor induse, ştiind că

(15.71) $$\begin{cases} \begin{cases} cex_{1,2}\theta = \cos[aex_{1,2}\theta] \\ sex_{1,2}\theta = \sin[aex_{1,2}\theta] \end{cases} \\ \begin{cases} tex_{1,2}\theta = \tan[aex_{1,2}\theta] = sex_{1,2}\theta / cex_{1,2}\theta \\ texv_{1,2}\theta = \operatorname{tanv}[aex_{1,2}\theta] = sex_{1,2}\theta / Abs[cex_{1,2}\theta] \end{cases} \\ ş.a.m.d \end{cases}$$

(15.72) $$\begin{cases} \begin{cases} Cex\alpha_{1,2} = \cos[Aex\alpha_{1,2}] \\ Sex\alpha_{1,2} = \sin[Aex\alpha_{1,2}] \end{cases} \\ \begin{cases} Tex\alpha_{1,2} = \tan[Aex\alpha_{1,2}] = Sex\alpha_{1,2} / Cex\alpha_{1,2} \\ Texv\alpha_{1,2} = \operatorname{tanv}[Aex\alpha_{1,2}] = Sex\alpha_{1,2} / Abs[Cex\alpha_{1,2}] \end{cases} \\ ş.a.m.d \end{cases}$$

Simbolic, se poate scrie că

(15.73) $$\begin{cases} (\mathbf{FSM - CE})_{1,2}(\theta) = \mathbf{FCC}[aex_{1,2}\theta] \\ (\boldsymbol{FSM - CE})(\alpha_{1,2}) = \boldsymbol{FCC}[Aex\alpha_{1,2}] \end{cases}$$

Varianta a II-a, prezentate în **figurii 15.27**, este în favoarea **FSM-CE** de variabilă **centrică**, deoarece punctele **W$_{1,2}$** se afla situate pe aceeaşi dreapta **D**, de direcţie $\alpha = \alpha_1$, trecând prin originea şi centrul **O(0,0)** şi turnantă în jurul acestui punct. În acest caz, cunoscându-se expresiile primei determinări, principale de indice **1**, a **FSM-CE** ca funcţii de $\alpha = \alpha_1$, a doua determinare, de indice **2**, se va obţine din expresiile primei determinări, în care se face schimbarea de argument $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1 + \pi = \alpha + \pi$. Deoarece $\mathbf{W_1} \subset \mathbf{D^+}$, iar $\mathbf{W_2} \subset \mathbf{D^-}$.

Dezavantajul variantei a II-a constă în faptul că a doua determinare a **FSM-CE,** de indice **2,** de variabilă centrică nu mai au aceleaşi valori cu cele de variabilă excentrică. Prima determinare, însă, cea principală de indice **1**, va păstra egalitatea valorilor funcţiilor de cele două variabile, deoarece **W$_1$** se află situat pe ambele semidrepte $\mathbf{D^+}$ şi $\mathbf{d_1^+}$, care se intersectează chiar în **W$_1$**.

15.7 - Funcţii cosinus şi sinus excentrice de variabilă centrică

În această variantă, apar două drepte **d_1** şi **d_2**, ce trec prin excentrul **S(s, ε)** şi prin **W_1** şi, respectiv, **W_2** şi, ca urmare, două valori distincte ale variabilei excentrice **θ_1** şi, respectiv, **θ_2** pentru un o singură variabilă motoare α, care este direcţia singurei drepte **D**. Dacă ne referim, însă, la punctele **$W_{1,2}$**, atunci avem, ca şi în cazul anterior

(15.74) $$\begin{cases} \propto' = \propto, & pentru\ W_1 \\ \propto'' = \propto + \pi, & pentru\ W_2 \end{cases}$$

Şi în acest caz, simbolic se poate scrie, ţinând cont de poziţia celor două puncte **$W_{1,2}$** pe dreapta **D**, faţă de originea **O(0,0)** a dreptei, origine care o imparte în cele două semidrepte.

(15.75) **FSM-CE** (α_2) = **FSM-CE** ($\alpha_1 + \pi$).

Oricare ar fi poziţia **excentrului S**, interioară discului cercului unitate (**s < 1**), în ambele variante, pentru un α sau **θ** care cresc, adică **W_1** se roteşte pe cercul unitate în sens trigonometric (sinistrorum sau levogin) şi **W_2** se roteşte în acelaşi sens, pozitiv.

Dacă **S** este exterior cercului unitate (**s > 1**), atunci, punctele **$W_{1,2}$** se rotesc în acelaşi sens, poizitiv, pe cercul unitate.

Notând cu **$W_{i,f}$** punctele de tangenţa ale dreptei **d** din **S** cu cercul unitate, în care cele două puncte **W** nu se mai suprapun, adică, în permanenţă **$W_1 \neq W_2$**, dar unghiurile **$\theta_{1,2}$** au creşterei şi scăderi sincrone. Astfel, din **W_i** şi până în **W_f**, **$\theta_{1,2}$** creşte, apoi, din **W_f** la **W_i**, **$\theta_{1,2}$** scade.

15.7 FUNCŢII COSINUS ŞI SINUS EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ

Se definesc ca funcţii induse în care argumentul / variabila funcţiilor circulare centrice **cos**α şi **sin**α se înlocuieşte cu funcţia amplitudine excentrică de variabilă centrică

(15.76) $$Aex\alpha_{1,2} = \theta(\alpha_{1,2}) = \propto_{1,2} + \beta(\alpha_{1,2})$$

care, pentru s ≤ 1, în **varianta I-a** are expresiile

(15.77) $$\begin{cases} Aex \propto_1 = \theta(\alpha_1) = \propto_1 + \beta_1(\propto_1) = \propto_1 + arcsin\frac{s.\sin(\propto_1 - \varepsilon)}{Rex\alpha_1} = \\ = \alpha + arcsin\frac{s.\sin(\propto - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2 - 2s.\cos(\propto - \varepsilon)}} \\ Aex \propto_2 = \theta(\alpha_2) = \propto_2 + arcsin\frac{s.\sin(\propto_2 - \varepsilon)}{Rex\alpha_2} = \propto + \pi + 2arcsin\frac{s.\sin(\propto - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2 - 2s.\cos(\propto - \varepsilon)}} \\ = Aex\alpha_1 + \pi + \beta_1 \end{cases}$$

în care s-a ţinut cont de egalitatea

(15.78) $$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_1 + \pi + \beta_1 = \theta + \pi + \beta_1 = \theta(\alpha_1) + \beta_1 + \pi$$

Graficele acestor **FSM-CE** de variabilă centrică se vor prezenta defalcat pentru **s > 0** şi pentru **s < 0**, atât pentru excentricităţi numerice subunitare cât şi pentru cele supraunitare.

În relaţia anterioară, s-a folosit egalitatea

(15.79) $$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = -\pi, & pentru\ s \le 1 \\ \beta_1 + \beta_2 = +\pi, & pentru\ s > 1 \end{cases}$$

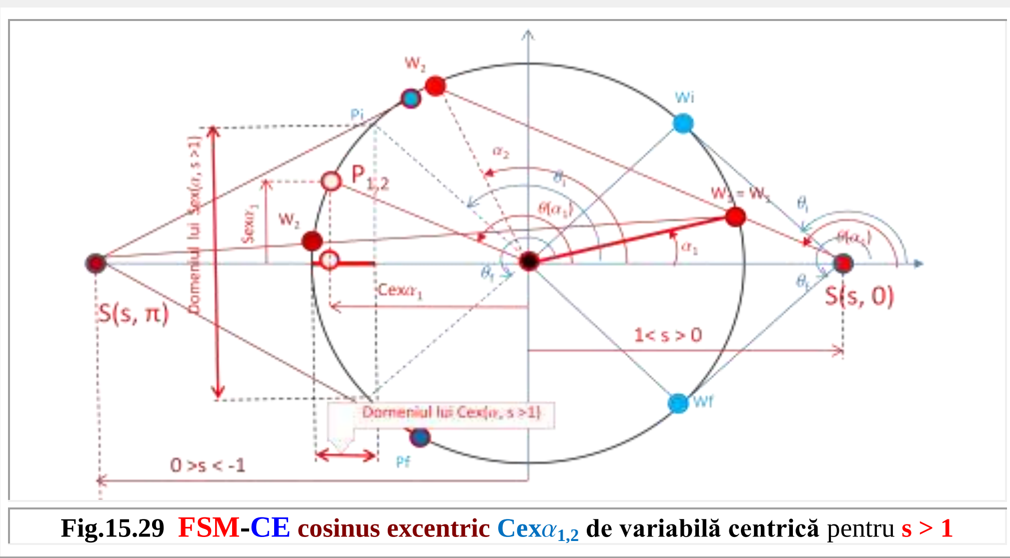


Fig.15.29 FSM-CE cosinus excentric Cex$\alpha_{1,2}$ de variabilă centrică pentru **s > 1**

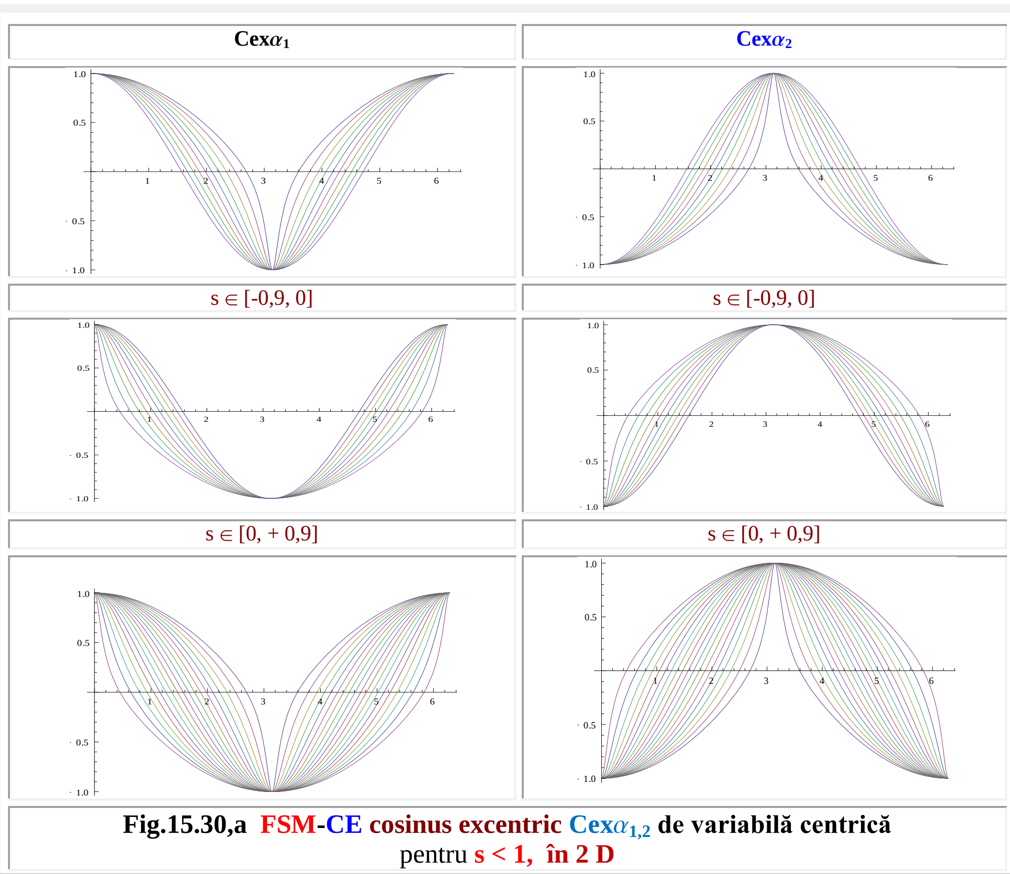
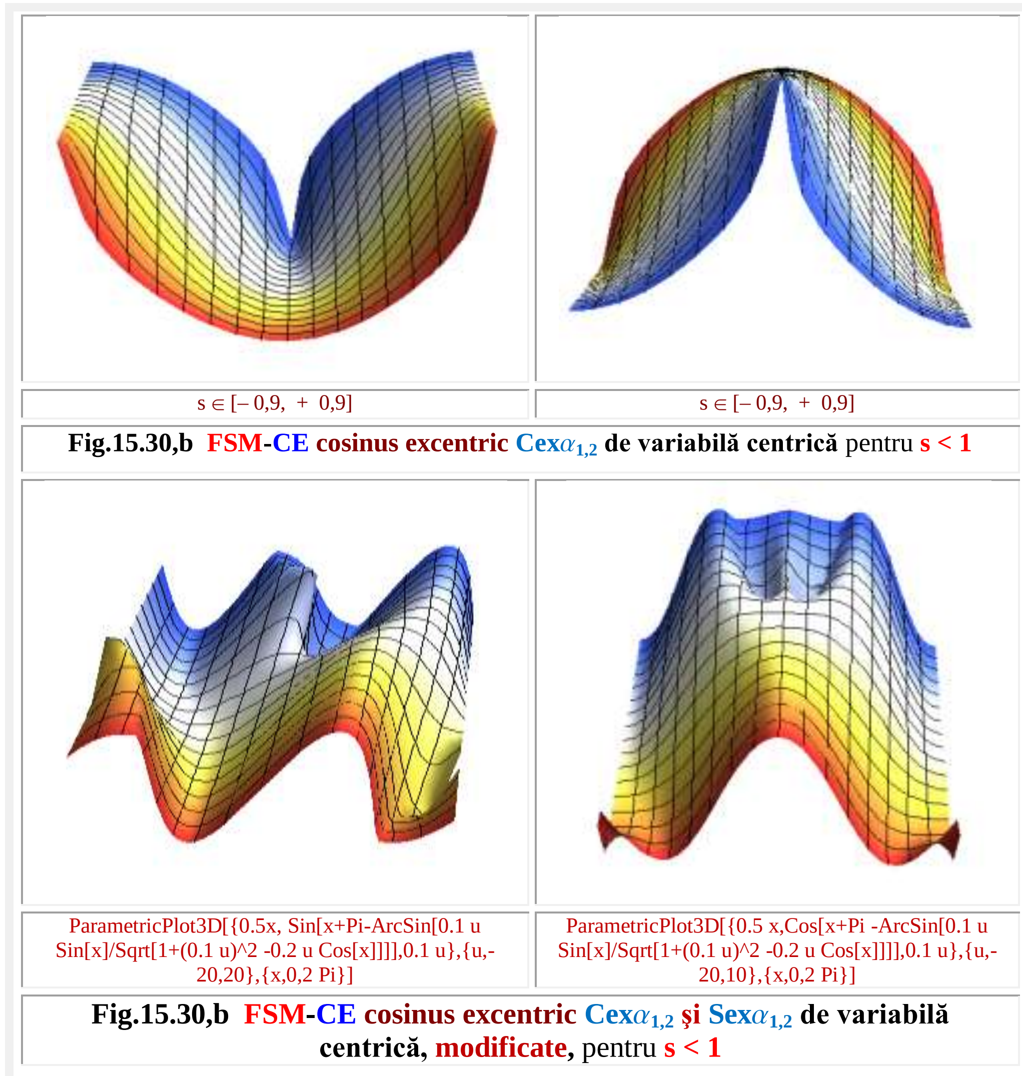


Fig.15.30,a FSM-CE cosinus excentric Cex$\alpha_{1,2}$ de variabilă centrică
pentru **s < 1, în 2 D**



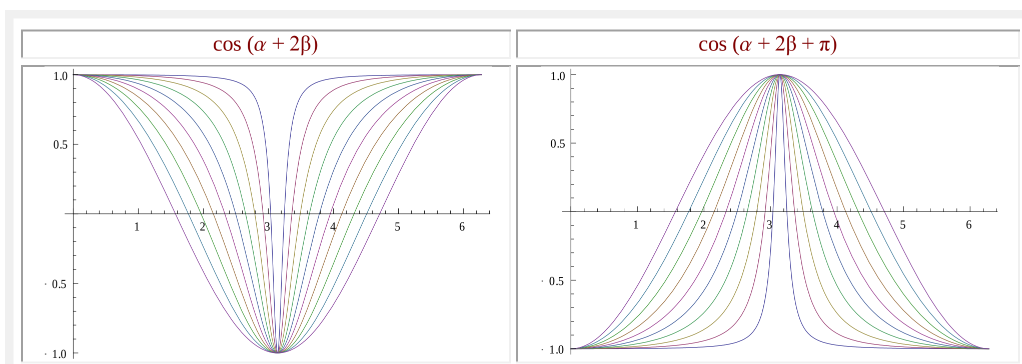
$s \in [-0{,}9,\ +\ 0{,}9]$ $s \in [-0{,}9,\ +\ 0{,}9]$

Fig.15.30,b FSM-CE cosinus excentric Cex$\alpha_{1,2}$ de variabilă centrică pentru **s < 1**

ParametricPlot3D[{0.5x, Sin[x+Pi-ArcSin[0.1 u Sin[x]/Sqrt[1+(0.1 u)^2 -0.2 u Cos[x]]]],0.1 u},{u,-20,20},{x,0,2 Pi}]

ParametricPlot3D[{0.5 x,Cos[x+Pi -ArcSin[0.1 u Sin[x]/Sqrt[1+(0.1 u)^2 -0.2 u Cos[x]]]],0.1 u},{u,-20,10},{x,0,2 Pi}]

Fig.15.30,b FSM-CE cosinus excentric Cex$\alpha_{1,2}$ şi Sex$\alpha_{1,2}$ de variabilă centrică, modificate, pentru **s < 1**



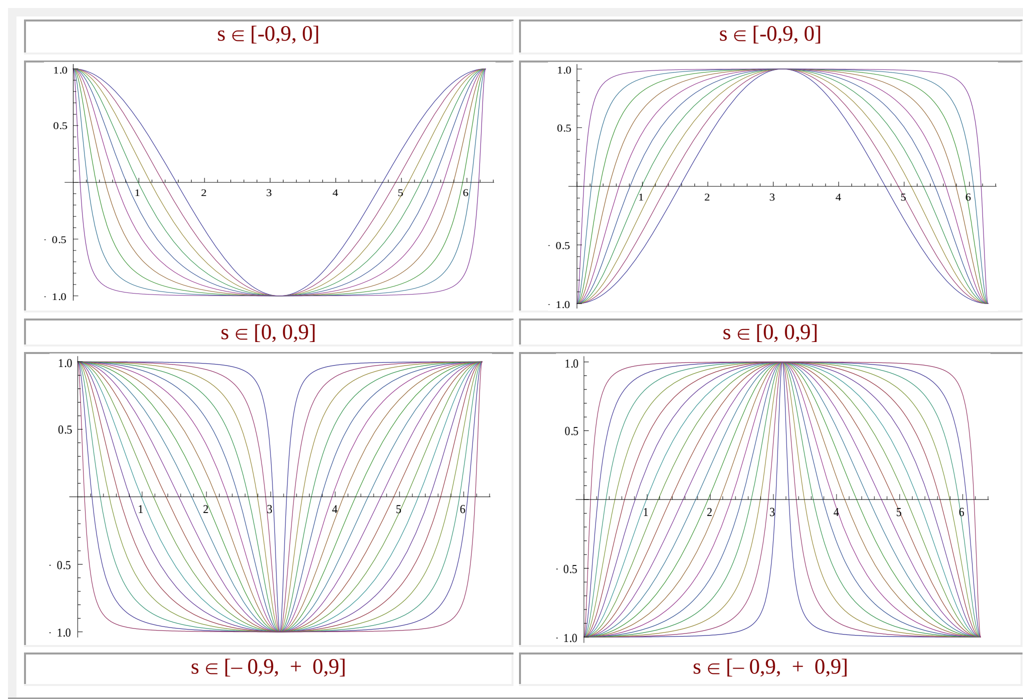
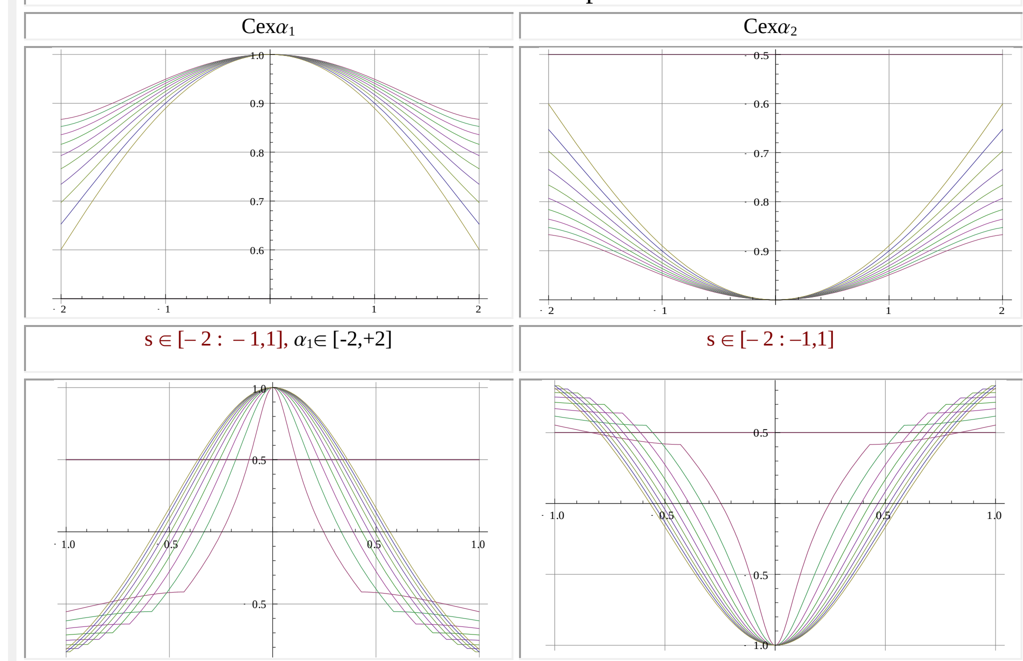


Fig.15.31 FSM-CE cosinus excentric modificat MCex$\alpha_{1,2}$
de variabilă centrică pentru **s < 1**



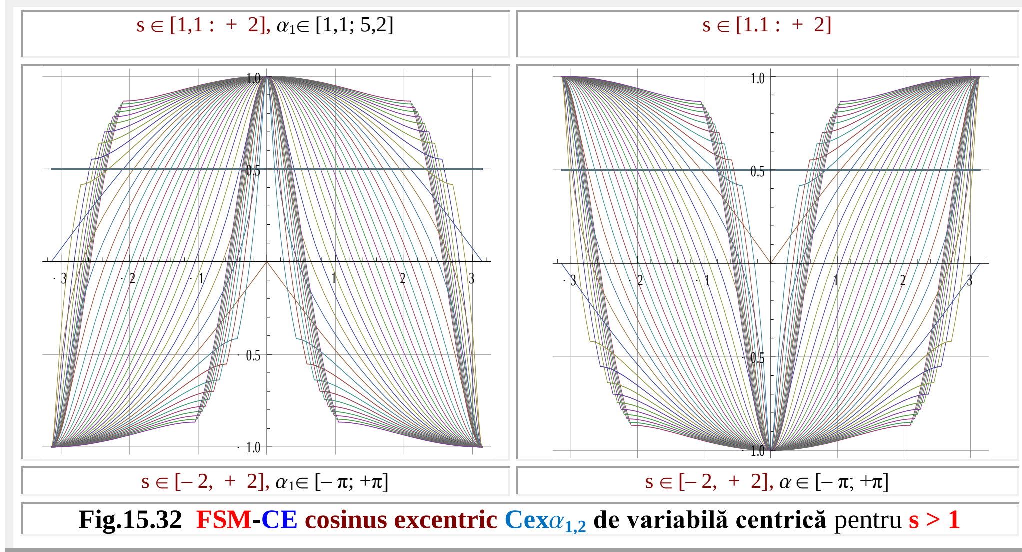


Fig.15.32 FSM-CE cosinus excentric Cex$\alpha_{1,2}$ de variabilă centrică pentru **s > 1**

Deoarece, oricare ar fi excentricul **S(s, ε),** aşa cum au fost definite aceste funcţii de punctele $\mathbf{W_{1,2}}$ situate pe aceeaşi dreapta **d =** $\mathbf{d^+ \cup d^-}$**,** de unghi **θ** cu axa **Ox**, dreaptă ce trece prin excentrul **S(s, ε)** şi este turnantă în jurul excentrului, există în permanenţă egalitatea

(15.80) $$\begin{cases} \theta_1(\alpha_1) = \alpha_1 + \beta(\propto_1) \\ \theta_2(\alpha_2) = \alpha_2 + \beta(\propto_2) = \theta_1(\alpha_1) = \beta(\propto_1) + \pi \end{cases}$$

astfel că cele două determinări ale **FSM-CE** Cex$\alpha_{1,2}$ şi Sex$\alpha_{1,2}$ de **variabilă centrică** sunt defazate, de aceea, în **figura 15.26,** pentru Cexα şi în **figura 15.27,** pentru Sexα, graficele lor, ale celor două determinari, principală **1** şi secundară **2**, au fost reprezentate în paralel. Rezultă

(15.81)
$$\begin{cases} Cex \propto_{1,2} = \cos\left[Aex[\propto_{1,2}, S(s,\varepsilon)]\right] = \begin{cases} Cex \propto_1 = \cos\theta(\alpha_1) = \cos(\propto_1 + \beta_1) \\ Cex \propto_2 = \cos\theta(\alpha_2) = \cos(\propto_2 + \beta_2) = -Cex \propto_1 \end{cases} \\ Sex \propto_{1,2} = \sin\left[Aex[\propto_{1,2}, S(s,\varepsilon)]\right] = \begin{cases} Sex \propto_1 = sin\theta(\alpha_1) = \sin(\propto_1 + \beta_1) \\ Sex \propto_2 = \sin\theta(\alpha_2) = \sin(\propto_2 + \beta_2) = -Sex \propto_1 \end{cases} \end{cases}$$

În **figura 15.31** şi **15.34** sunt prezentate **FSM-CE** modificate în sensul că β a fost înlocuit cu 2β în ecuaţiile de definiţie ale **FSM-CE Cex$\alpha_{1,2}$** şi **Sex$\alpha_{1,2}$**.

Au fost notate cu **MCex$\alpha_{1,2}$** şi **MSex$\alpha_{1,2}$** şi au expresiile

(15.82) $$\begin{cases} \mathrm{MCex}\alpha_{1,2} = \begin{cases} \mathrm{MCex}\alpha_1 = \cos(\propto + 2\beta) \\ \mathrm{MCex}\alpha_2 = \cos(\propto + 2\beta\,\pi +) \end{cases} \\ \mathrm{MSex}\alpha_{1,2} = \begin{cases} \mathrm{MSex}\alpha_1 = \sin(\propto + 2\beta) \\ \mathrm{MSex}\alpha_2 = \sin(\propto + 2\beta\,\pi +) \end{cases} \end{cases}$$

Alte modificări, prezentate împreună cu ecuaţiile lor explicite, sunt prezentate în **figura 15.34**, iar unele aplicaţii practice posibile sunt descrise în **figura 15.35**.

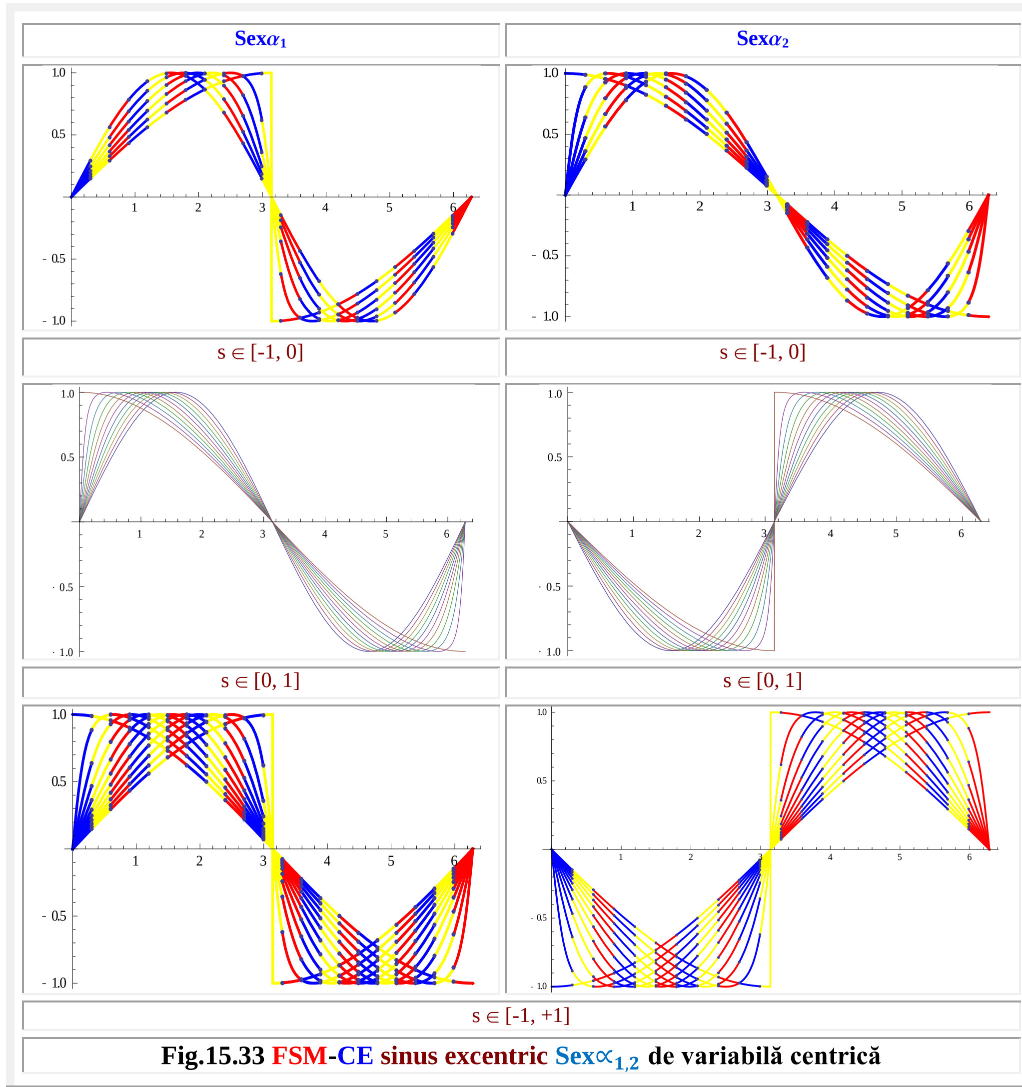
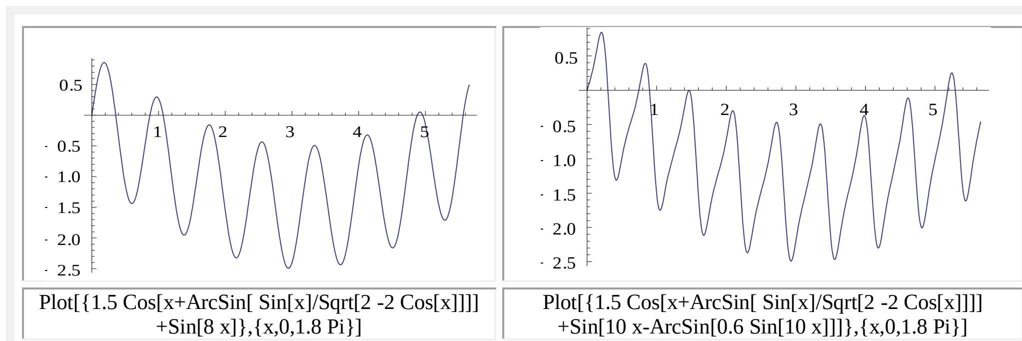


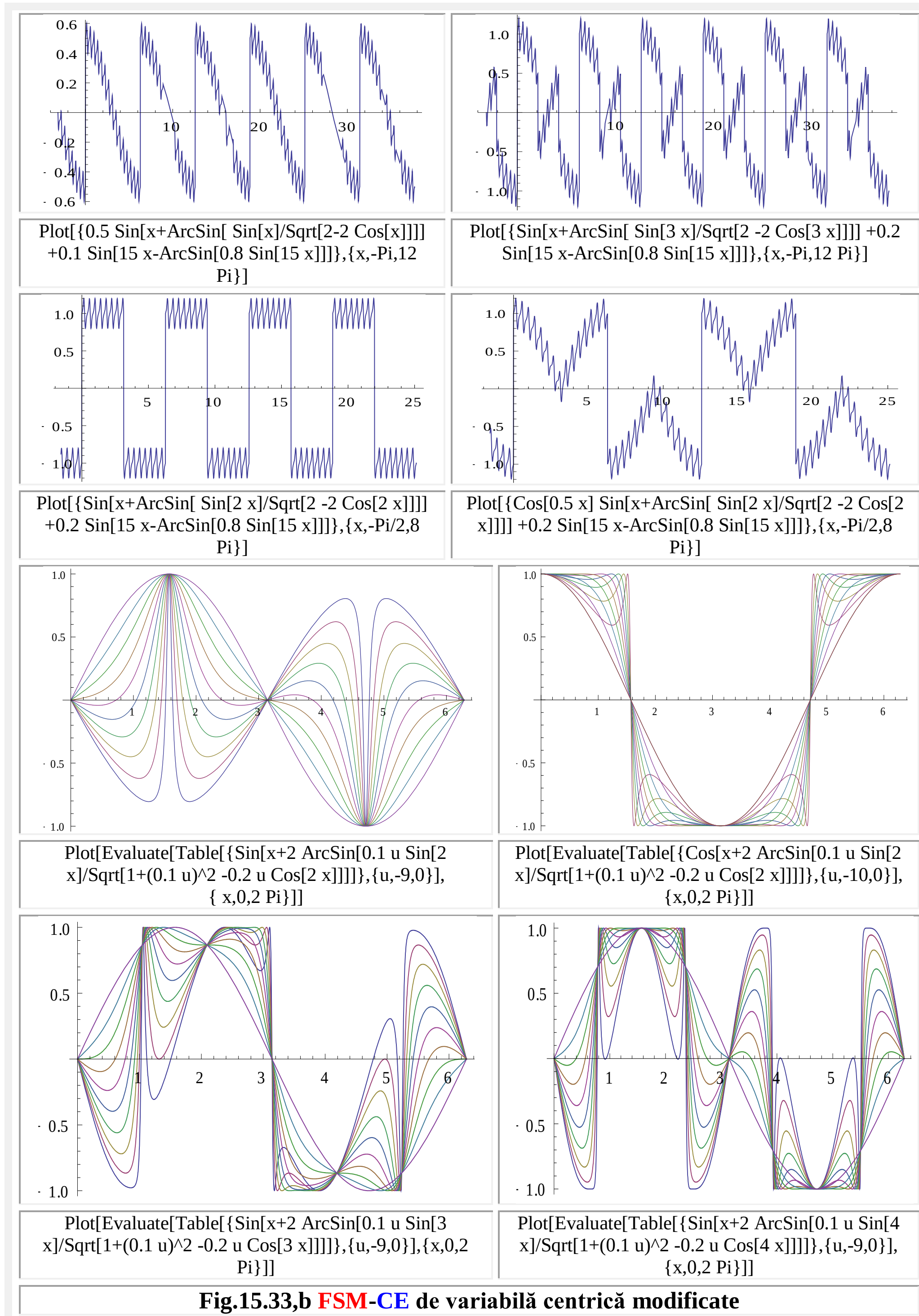
Fig.15.33 FSM-CE sinus excentric Sex$\propto_{1,2}$ de variabilă centrică



Plot[{1.5 Cos[x+ArcSin[Sin[x]/Sqrt[2 -2 Cos[x]]]] +Sin[8 x]},{x,0,1.8 Pi}]

Plot[{1.5 Cos[x+ArcSin[Sin[x]/Sqrt[2 -2 Cos[x]]]] +Sin[10 x-ArcSin[0.6 Sin[10 x]]]},{x,0,1.8 Pi}]

15.7 - Funcţii cosinus şi sinus excentrice de variabilă centrică



Plot[{0.5 Sin[x+ArcSin[Sin[x]/Sqrt[2-2 Cos[x]]]] +0.1 Sin[15 x-ArcSin[0.8 Sin[15 x]]]},{x,-Pi,12 Pi}]

Plot[{Sin[x+ArcSin[Sin[3 x]/Sqrt[2 -2 Cos[3 x]]]] +0.2 Sin[15 x-ArcSin[0.8 Sin[15 x]]]},{x,-Pi,12 Pi}]

Plot[{Sin[x+ArcSin[Sin[2 x]/Sqrt[2 -2 Cos[2 x]]]] +0.2 Sin[15 x-ArcSin[0.8 Sin[15 x]]]},{x,-Pi/2,8 Pi}]

Plot[{Cos[0.5 x] Sin[x+ArcSin[Sin[2 x]/Sqrt[2 -2 Cos[2 x]]]] +0.2 Sin[15 x-ArcSin[0.8 Sin[15 x]]]},{x,-Pi/2,8 Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[x+2 ArcSin[0.1 u Sin[2 x]/Sqrt[1+(0.1 u)^2 -0.2 u Cos[2 x]]]]},{u,-9,0}],{ x,0,2 Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Cos[x+2 ArcSin[0.1 u Sin[2 x]/Sqrt[1+(0.1 u)^2 -0.2 u Cos[2 x]]]]},{u,-10,0}],{x,0,2 Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[x+2 ArcSin[0.1 u Sin[3 x]/Sqrt[1+(0.1 u)^2 -0.2 u Cos[3 x]]]]},{u,-9,0}],{x,0,2 Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[x+2 ArcSin[0.1 u Sin[4 x]/Sqrt[1+(0.1 u)^2 -0.2 u Cos[4 x]]]]},{u,-9,0}],{x,0,2 Pi}]]

Fig.15.33,b FSM-CE de variabilă centrică modificate

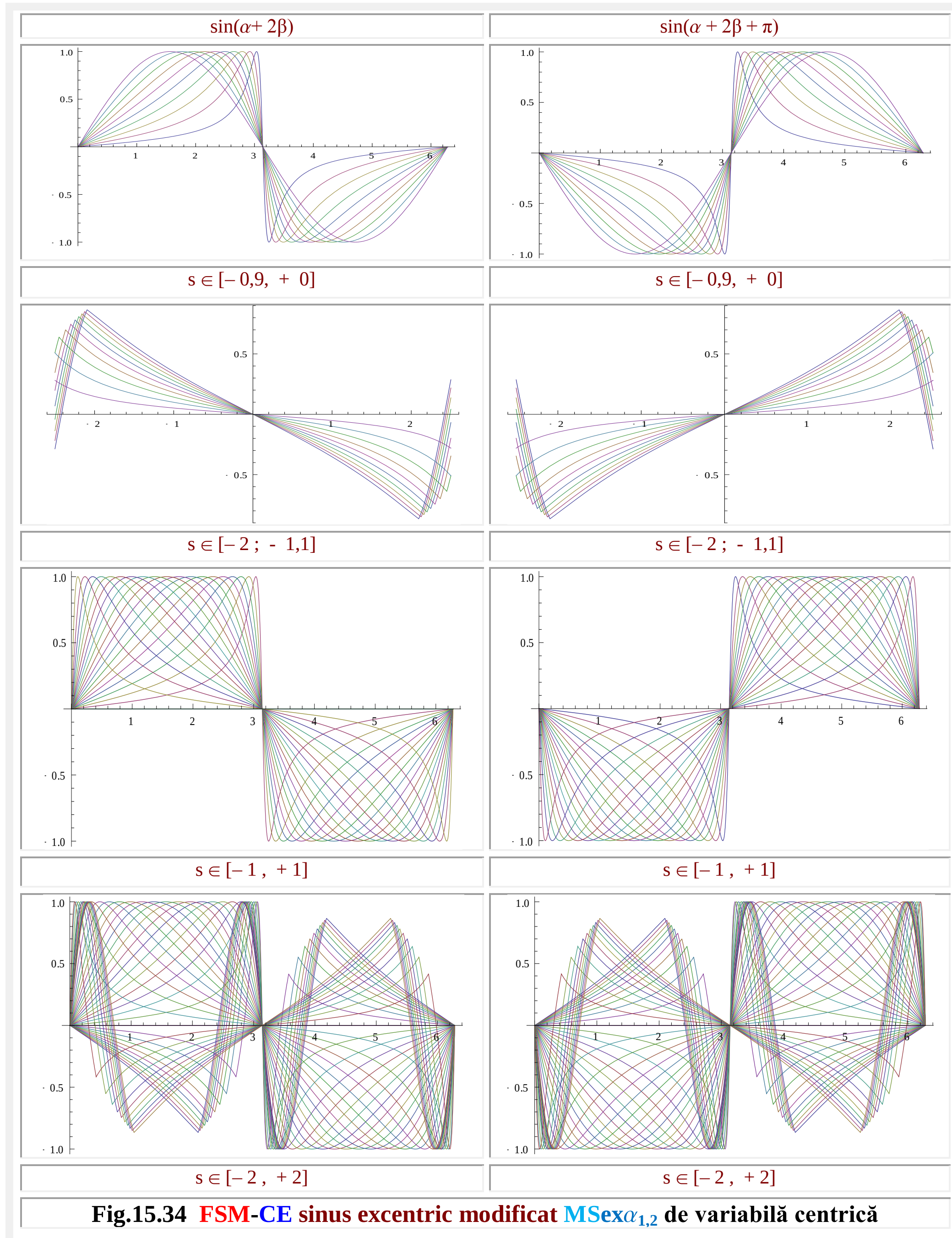


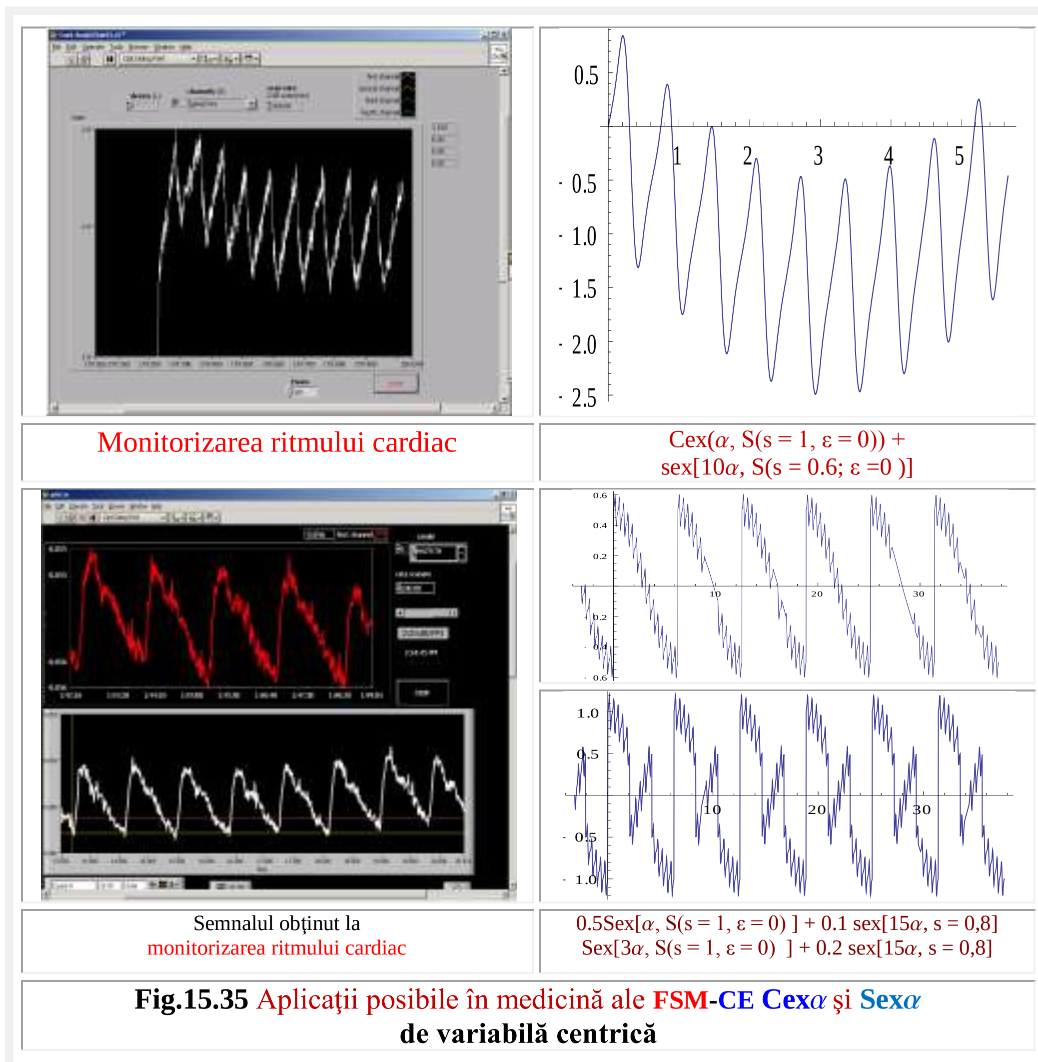
Fig.15.34 FSM-CE sinus excentric modificat MSex$\alpha_{1,2}$ de variabilă centrică

Posibile aplicaţii ele acestor funcţii sunt extrem de multiple, aşa că au fost prezentate, în **figura 15.35**, unele aplicaţii mai deosebite, din domeniul medicinei, cu exemplele concrete preluate de pe website-ul:

15.7 - Funcţii cosinus şi sinus excentrice de variabilă centrică

http://education.inflpr.ro/res/CarteGarabet/Investigarea%20Sistemului%20cardiovascular.pdf.

Prima aplicaţie, a **FSM-CE Cexα,** reprezintă o oscilaţie de frecvanţă mai înaltă, dată de **FSM-CE** de variabilă excentrică **sex10.θ** cu excentricitatea numerică **s = 0,6**, însoţită de "bătăi" de frecvenţă mai joasă, dată de **FSM-CE** de variabilă centrică **Cexα,** cu excentricitatea de **s = 1**.



Monitorizarea ritmului cardiac

Cex(α, S(s = 1, ε = 0)) + sex[10α, S(s = 0.6; ε =0)]

Semnalul obţinut la monitorizarea ritmului cardiac

0.5Sex[α, S(s = 1, ε = 0)] + 0.1 sex[15α, s = 0,8]
Sex[3α, S(s = 1, ε = 0)] + 0.2 sex[15α, s = 0,8]

Fig.15.35 Aplicaţii posibile în medicină ale **FSM-CE Cexα** şi **Sexα** **de variabilă centrică**

A doua aplicaţie, a **FSM-CE Sexα**, reprezintă o oscilaţie de frecvanţă mai înaltă, dată de **FSM-CE** de variabilă excentrică **sex15.θ** cu excentricitatea umerică **s = 0,8** , suprapusă peste o oscilaţie de frecvenţă mai joasă, dată de **FSM-CE** de variabilă centrică **Sexα,** cu excentricitatea de **s = 1**.

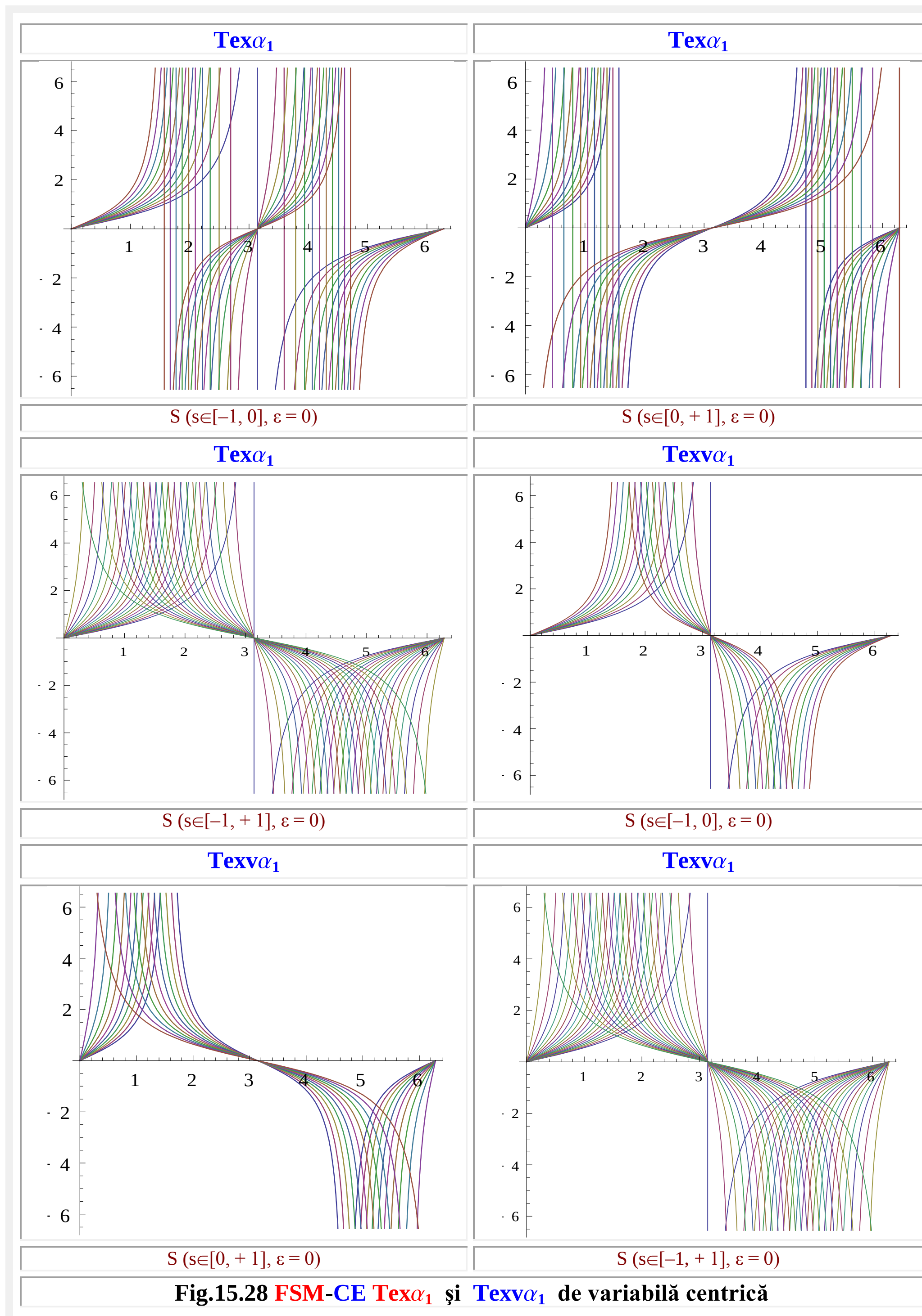


Fig.15.28 FSM-CE Texα_1 şi Texvα_1 de variabilă centrică

15.7 - Funcţii cosinus şi sinus excentrice de variabilă centrică

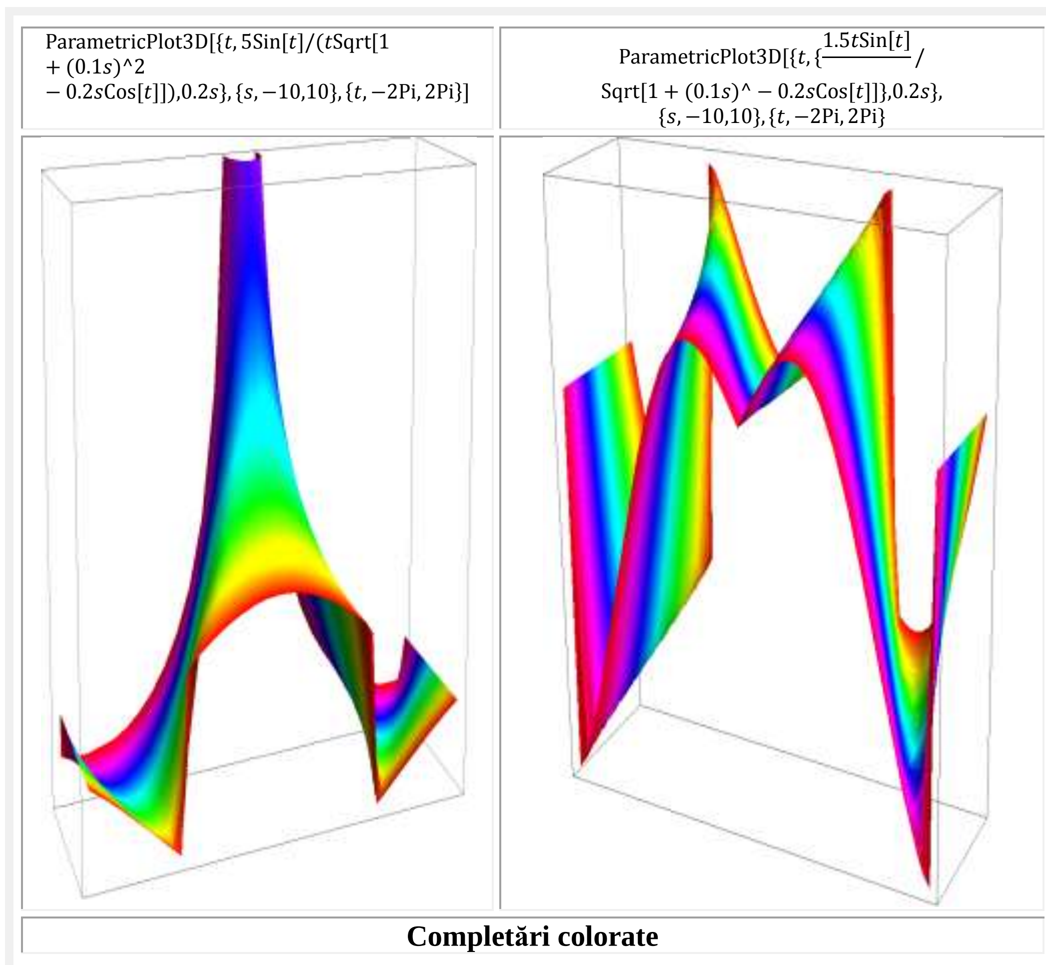
Funcţiile tangentă excentrică de variabilă centrică **Tex$\alpha_{1,2}$** se vor obţine prin raportul **FSM-CE Sex$\alpha_{1,2}$/Ces$\alpha_{1,2}$**, iar tangenta excentrică **Voinoiu,** de variabila centrică prin raportul

(15.82) $$\text{Texv}\alpha_{1,2} = \frac{\text{Sex}\alpha_{1,2}}{Abs[\text{Cex}\alpha_{1,2}]}$$

Reamintim că, în matematica signadforasică a lui **O. Voinoiu**, semnul unei fracţii este dat **exclusiv** de semnul numărătorului !

Cotangenta, secanta şi cosecanta, se definesc la fel ca şi la definirea acestor funcţii în matematica centrică (**MC**). Graficele lor sunt prezentate, în paralel, pentru a fi mai uşor comparate, în **figura 15.29**: **Tex$\alpha_{1,2}$** sus şi **Texv$\alpha_{1,2}$** în josul figurii.

Liniile verticale din graficele **FSM-CE Tex$\alpha_{1,2}$** sunt de prisos, utilizatorul programului, adică autorul, neştiind cum se dă comanda "pen up" în **Mathematica 8** a lui **Stephen Wolfram**. Mea culpa !



Completări colorate

Motto: ” Acela-i matematician pentru care egalitatea $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}dx = \sqrt{\pi}$ este evidentă ca "2 × 2 = 4". **W. Thompson** (**lord Kelvin**) “

Capitolul 16.

METODĂ DE INTEGRARE PRIN DIVIZAREA DIFERENŢIALEI

16.1 I N T R O D U C E R E

Integralele au fost introduse în matematică la sfârşitul secolului al XVII-lea, când **Isaac Newton** şi **Gottfried Wilhelm Leibniz** au definit *teorema fundamentală a calculului integral* care stipulează că **derivarea** şi **integrarea** sunt operaţii inverse. Adică, dacă o **funcţie continuă** este întâi integrată şi apoi derivată, se obţine funcţia originală. O consecinţă importantă, uneori numită *a doua teoremă fundamentală a calculului integral*, permite calculul integralelor folosind o **primitivă** a funcţiei de integrat, denumită şi integrand.

Integralele şi derivatele au devenit uneltele de bază ale **analizei matematice**, cu numeroase aplicaţii în ştiinţă şi tehnologie.

Cele mai cunoscute metode de integrare, cunoscute până în prezent, sau, mai precis, până nu demult, sunt

- Metoda substituţiei sau prin schimbarea variabilei, cu două variante [v. Vasile Dunca, COMPENDIU de algebra şi analiză matematică, Ediţia a II-a, Ed. Multimedia International, 2007, pag 534 ş.u.]
- Metoda integrării prin părţi
- Metoda de integrare a fracţiilor raţionale
- Metoda de integrare a funcţiilor raţionale, algebrice şi trigonometrice (circulare şi hiperbolice **centrice**)
- Metode de integrare a integralelor binome.

16.2 INTEGRAREA PRIN DIVIZAREA FUNCŢIEI INTEGRAND

O funcţie **f** poate fi **divizată** în alte două funcţii ca, de exemplu, în cazul transformărilor produselor **funcţiilor matematice centrice** (**FMC)** trigonometrice directe în sume

$$(16.1)\qquad \begin{cases} cosa.cosb = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ cosa.sinb = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(b-a)) \\ sina.sinb = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \end{cases}$$

Dar, de multe ori, descompunerea / divizarea se realizează în mai multe funcţii, cum este cazul transformării următoarelor produse ale **FMC** în sume

(166.2) $$\begin{cases}\begin{cases} \cos\frac{a}{2}.\cos\frac{ab}{2}.\cos\frac{c}{2} = \frac{1}{4}(\sin a + \sin b + \sin c) \\ \sin a.\sin b.\sin c = \frac{1}{4}(\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c) \end{cases} \\ \begin{cases} \tan a.\tan b.\tan c = \tan + \tan b + \tan c \\ \cot\frac{a}{2}.\cot\frac{b}{2}.\cot\frac{c}{2} = \cot\frac{a}{2} + \cot\frac{b}{2} + \cot\frac{c}{2} \end{cases}\end{cases}$$

Dar şi în cazurile dezvoltării / divizării funcţie în serii de funcţii, a descompunerii / divizării în fracţii simple, ş.m.a.

În cazul divizării în două, adică, f(x) = g(x) ± h(x) şi dacă ele sunt derivabile pe I_x, atunci, pe baza unei proprietăţi ale primitivelor, conform careia integrale sumei şi / sau a diferenţei este egala cu suma, şi / sau respectiv, diferenţa integralelor, se poate afirma că

(16.3) $$\int[g(x) \pm h(x)]dx = \int g(x)dx \pm \int h(x)dx.$$

Simbolic se poate scrie

(16.4) $$\int(g \pm h)dx = \int g.dx \pm \int h.dx$$

şi nu reprezintă altceva decât o metodă de integrare care, pe drept cuvânt, poate fi denumită şi ca o **metodă de integrare prin divizarea** **funcţiei** (integrandului), deoarece f = (g ± h) s-a divizat prin simbolul ± în cele doua funcţii g şi h.

Divizarea unei funcţii în alte două funcţii se poate realiza **prin sumă** lor (semnul +) sau **prin diferenţa** lor (semnul **–**).

În cazul divizării funcţiei într-o infinitate de alte funcţii, aşa cum se cunoaşte de la serile cu termeni alternativi, semnele + şi – sunt cele care pot alterna.

16.3 INTEGRAREA PRIN DIVIZAREA DIFERENŢIALEI

Aşa cum se divizează o funcţie, se poate **diviza** şi o **variabilă**, adică, se poate exprima uneori variabila x prin alte două variabile, de exemplu, x = y ± z, sau, se poate spune că variabila x a fost divizată în variabilele y şi z, rezultând că şi **diferenţiala variabilei dx** s-a **divizat** în dx = dy ± dz, adică

(16.5) $x = y \pm z \quad \rightarrow \quad dx = dy \pm dz$

Metoda de integrare prin **divizarea diferenţialei** este o **metoda nouă** de integrare a funcţiilor trigonometrice, în special, dar nu numai a lor.

Ea a devenit posibilă odată cu descoperirea **funcţiilor supermatematice circulare excentrice** (**FSM – CE**), funcţii ce pot fi, fie de variabilă **excentrica θ** sau **x**, fie de variabilă **centrică $\alpha_{1,2}$** sau **$y_{1,2}$**, în care **z** este unghiul **$\beta_{1,2}$** din punctele **$W_{1,2}$** de pe cercul unitate, sub care se văd **centrul O(0,0)** şi **excentrul S(s,ε)**.

Trecerea / saltul de la o variabilă la alta se realizează foarte simplu, aşa cum s-a putut constata în unele capitole anterioare [Vol I, pag. 7, 24, 25, 26, 128, 129], prin funcţiile **amplitudine excentrică $aex_{1,2}\theta$**, de variabilă excentrică sau prin cea de variabilă centrică **$Aex\alpha_{1,2}$.**

Fiind date funcţiile, care pot fi exprimate simultan prin mai multe variabile, $f_x(x)$, $g_x(x) = g_y(y)$, $h_x(x) = h_z(z)$: I_x, I_y, I_z → R şi funcţiile $F_x(x)$, $G_x(x) = G_y(y)$, $H_x(x) = H_z(z)$: I_x, I_y, I_z → R, astfel ca derivatele lor în funcţie de variabilele x, y şi / sau z,

de la caz la caz, F', G', H' să fie chiar f, g, h, adică, F'(x) = f(x), G'(x) = g(x), G'(y) = g(y), H'(x) = h(x), H'(z) = h(z) atunci F, G, H sunt **primitivele** funcţiilor f, g, h, de aceleaşi variabile x, y şi / sau z, după caz, în condiţile în care F, G, H, sunt derivabile pe intervalele lor **I** în funcţie de variabilele lor de integrare.

După caz, I_x, I_y şi I_z sunt intervalele în care aceste funcţii sunt derivabile în funcţie de variabilele lor de exprimare.

Se ştie că, între variabile unghiulare **excentrică θ** sau **x**, **centrică α** sau **y** şi unghiul $\beta_{1,2}$ sau $z_{1,2}$, cu vârful pe cercul unitate în punctul **$W_{1,2}$(θ, rex$_{1,2}$(θ, E(s,ε))** ≡ **$W_{1,2}$($\alpha_{1,2}$**, 1), exista dependenţele

(16.06) $\theta = \alpha_{1,2} + \beta_{1,2}$ sau $x = y_{1,2} + z_{1,2}$

şi, prin diferenţiere, se obţine

(16.07) $d\theta = d\alpha_{1,2} + d\beta_{1,2}$ sau $dx = dy_{1,2} + dz_{1,2}$.

Fie integrala nedefinită

(16.08) $I_N(x) = \int f(x)dx = F_N(x) + C$ şi, în paralel, integrala definită

(16.08') $I_D(x) = \int_A^B f(x)dx = F(B(x)) - F(A(x))$

Prin divizarea diferenţialei **$d\theta$** sau **dx** ele devin, considerând prima determinare a **FSM**, de indice 1, care, conform uzanţelor, nu se mai scrie / trece

(16.09) $I_N(x) = \int f(x)d(y+z) = \int f(x)dy + \int f(x)dz = I_{N1} + I_{N2}$

(16.09') $I_D(x) = \int_{A(x)}^{B(x)} f(x).d(y+z) = \int_{A(x)}^{B(x)} f(x)dy + \int_{A(x)}^{B(x)} f(x)dz = I_{D1} + I_{D2}$

Exprimând funcţia integrand f(x) odată în funcţie de variabila centrică y, în prima integrală şi ca funcţie de z în cea de a doua integrală, rezultă

(16.10) $I_N(y,z) = \int f(x(y))dy + \int f(x(z))dz = I_1(y) + I_2(z)$

şi, modificând corespunzator limitele de integrare, în integrala definită, rezultă

(16.10') $I_D(y,z) = \int_{A(x(y))}^{B(x(y))} f(y(x))dy + \int_{A(x(z))}^{B(x(z))} f(z(x))dz =$

$= F_D(B(y)) - F_D(A(y)) + F_D(B(z)) - F_D(A(z)) = I_{D1}(y) + I_{D2}(z).$

Integrala I(x) s-a divizat, astfel, şi ea, în două integrale $I_{N1}(y) + I_{N2}(z)$, respectiv în $I_{D1}(y) + I_{D2}(z)$, primele de variabilă **centrică y** şi ultimele de variabilă **z**.

Presupunând că acestea pot fi integrate, rezultă

(16.11) $I_N(y,z) = F_N(y,z) + C = F_{N1}(y) + F_{N2}(z) + C$ şi

(16.11') $I_D(y,z) = F_D(y,z) = F_{D1}(y) + F_{D2}(z)$

în care, se revine automat la variabila excentrică x, deoarece

(16.12) $y = y(x)$ şi $z = z(x)$.

Rezultă, în final, soluţia care, pentru primitivă sau antiderivată [Sireţchi, Gh. "**CALCUL DIFERENTIAL SI INTEGRAL**", Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Buc. 1985, pag. 260] este o funcţie iar pentru integrala definită este un număr.

(16.13) $I_N(x) = F(x) + C$, în care $F(x) = F_1(y(x)) + F_2(z(x))$

(16.13') $I_D(x) = F(B(x)) - F(A(x))$, iar

(16.13") $F(B(x)) = F(B(y(x))) + F(B(z(x))$ şi $F(A(x)) = F(A(y(x))) + F(A(z(x)))$

Metoda se pretează la integrale definite şi, în special, la cele care au limitele de integrale 0, -π, + π, pentru integranzii a căror expresii pot fi exprimate, total sau

parţial, prin **FSM-CE** şi al căror excentru **E(e, ε)** sau **S(s,ε)** se află situat pe axa **x**, adică pentru care **ε = 0** sau **ε = ± π** deoarece, în aceste cazuri, β(0) = β(π) = β(–π) = 0 şi integrala **definită** exprimată în funcţie de variabila β sau z şi de diferenţiala dβ sau dz devine nulă.

16.4 APLICAŢII LA METODA DIVIZĂRII DIFERENŢIALEI

Cel mai simplu şi mai rapid exemplu este al următoarei integrale definite

Aplicaţia 16.5.1: Fie integrala definită

(16. 14) $I_D\,(x) = \int_0^{\pi} \frac{cosx.dx}{\sqrt{1+k^2-2.k.cosx}}$, sau $I_D(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{cos\alpha.d\alpha}{\sqrt{1+s^2-2.s.cos\alpha}}$

în care **S(s = k, ε = 0), θ ≡ x**, şi numitorul integrandului este Rexα, astfel că

(16.14') $I_D = \int_0^{\pi} \frac{cos\alpha.d\alpha}{Rex\alpha}$

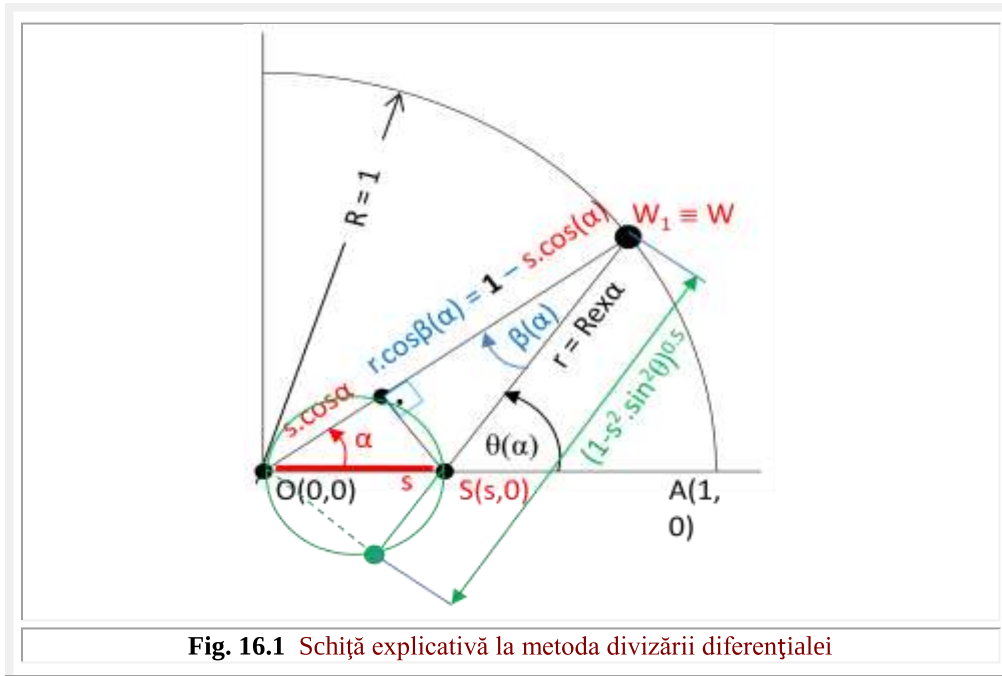


Fig. 16.1 Schiţă explicativă la metoda divizării diferenţialei

Din teoria **FSM-CE** se pot deduce relaţiile, verificabile pe schiţa din **figura 16.1**

(16.15) $$\begin{cases} \cos\beta(\alpha) = \frac{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha} = \frac{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}} \\ \sin\beta(\alpha) = \frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha} = \frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\alpha-\varepsilon)}} \end{cases}$$ şi, din prima relaţie,

rezultă expresia integrandului din (16.09')

(16.16) $f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{Rex\alpha} = \frac{1}{s}\left[\frac{1}{Rex\alpha} - \cos\beta(\alpha)\right]$, astfel că integrala devine

(16.14") $I_D = \frac{1}{s}\int_0^{\pi} [\frac{1}{Rex\propto} - \cos\beta(\alpha)]d\alpha.$

Prin divizarea diferenţialei dα, ştiind că **α** = **θ** – **β** în

(16. 17) d(θ – β) = dθ – dβ şi că, limitele de integrare devin

(16.18) $\begin{cases} \propto = 0 \rightarrow \theta = 0\,,\ \beta = 0 \\ \alpha = \pi \rightarrow \theta = \pi,\ \beta = 0 \end{cases}$ $dacă\ \varepsilon = 0,$ (v. şi schiţa), astfel că,

oricare ar fi expresia integrandului cu diferenţiala dβ, valoarea integralei definite

(16.18') $[F_\beta(B) – F_\beta(A) = F_\beta(0) – F_\beta(0) = 0]$ este nulă.

Integrala I_D devine

(16.19.1) $I_D = \frac{1}{s}[\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{Rex\propto} - \cos\beta(\alpha)\right] d\theta - \int_0^{\pi} [\frac{1}{Rex\propto} - \cos\beta(\alpha)]d\beta] I_{1D} + I_{2D}$,

şi ţinând cont de cele anterior enunţate, $I_{2D} = 0$, astfel că

(16.19.2) $I_D = I_{1D} = \frac{1}{s}\ [\int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{Rex\alpha} + \int_0^{\pi} \frac{d\beta}{Rex\alpha} - \int_0^{\pi} cos\beta(\alpha).d\theta]$

Dar, conform (15.18)

(16.20) $\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} \frac{d\beta}{Rex\alpha} = \int_{\beta=0}^{\beta=0} \frac{d\beta}{Rex\alpha(\beta)} = 0$, oricare ar fi expresia lui Rexα(β).

În acest fel I_D s-a redus la integrala

(16.19-3) $I_D = \frac{1}{s}[\int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{Rex\alpha} - \int_0^{\pi} cos\beta(\theta).d\,\theta] = \frac{1}{s}[2K(k = s) - 2E(k = s)].$

Ştiind că

(16.20) $\int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{Rex\alpha} = 2K(k = s),$ **Râjik**, Tabele de integrale, pag 174, integrala 3.413,1. → BH[67] (5), în care s-a notat k = s = p → $p^2 < 1$), rezultă

(16.19-4) $I_D = \frac{2}{s}[K(s = k) - E(s = k)],$ ceea ce se poate verifica în Râjik la pag 174, integrala 3.413, 3. → BH[67] (7), în care s-a notat k = s = p → $p^2 < 1$.

Anterior, s-a ţinut cont şi de relaţia,

(16.21) $\cos\beta(\alpha) = \cos\beta(\theta) = \sqrt{1 - s^2 sin^2\theta}$, s = k,

(completată cu **verde** în **figura 16.1)**, care este integrandul integralei eliptice de speţa a doua **E(k)**, evident, pentru limitele de integrare 0 şi π/2; **E(k)** fiind un sfert din lungimea circumferinţei **elipsei E_3**, adică arcul elipsei E_3 de la A(θ = 0) la B(θ = π/2). Dar arcul de la A la B este egal cu arcul de la B la A'(θ = π). Astfel că, pentru limitele 0 şi π, rezultă 2E(k); elipsa E_3 (a = 1, b = $\sqrt{1 - k^2}$) fiind simetrică faţă de axa Oy, aşa cum s-a afirmat în capitolul 12.

Aplicaţia 16.5.2

Fie integralele, cea nedefinită

(16. 22) $I_N = \int \frac{dx}{1+k^2-2kcosx}$

şi cea definită, denumita integrala lui **Poisson** [**Radu Bădescu**, **C-tin Maican**, **"INTEGRALE utilizate în mecanică, fizică, tehnică şi calculul lor"**, Ed. Tehnică, Buc. 1968, pag. 368]

(16.22') $I_D = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+k^2-2kcosx}$,

în care excentricitatea numerică $s^2 = k^2 \in [0, 1]$ şi $x \in \{\mathbf{R} - \{n\pi\} \setminus n \in \mathbf{Z}\},\ \forall x.$

Din teoria **FSM-CE**, funcţia de la numitorul integrandului este pătratul funcţie radial excentric de variabila centrică **α ≡ y**, **FSM-CE** notată cu **Rex²α**, în care, excentricitatea numerică **s = k** şi **ε = 0**. Ca urmare, integralele devin, aşa cum s-a văzut şi în exemplul anterior

(16.22-1) $I_N = \int \frac{d\propto}{Rex^2\propto}$ şi

(16.22-1') $I_D = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{Rex^2\alpha}$

Se cunoaşte că θ = α + β → **α = θ – β** şi că **FSM-CE** derivată excentrică de variabilă centrică **Dexα** este, prin definiţie, raportul diferenţialelor variabilelor excentrice şi centrice ($\frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha}$ sau $\frac{dx(y)}{dy}$) şi are expresia (Vol.I, pag. 10 şi Cap.6.4, pag. 199)

(16.23) $\text{Dex}\alpha = \frac{d\theta(\alpha)}{d\propto} = 1 + \frac{d\beta(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1-s.\cos(\propto-\varepsilon)}{1+s^2-2s.\cos(\propto-\varepsilon)} =$
$= \frac{1-s.\cos(\propto-\varepsilon)}{Rex^2\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n.\cos n \propto$

Funcţia supermatematică circulară excentrică (**FSM-CE**) de variabilă centrică **Bexα** are expresiile

(16.24) $\beta(\alpha) \equiv \text{Bex}\alpha = \arcsin\frac{s.\sin(\propto-\varepsilon)}{Rex\alpha} = \arctan\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n}\sin n \propto$

a cărei derivată, a celei de a doua expresii, mai simplu de derivat, fiind exprimată prin arctan, este

(16.25) $\frac{d\beta(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d(Bex\propto)}{d\propto} = \frac{s.\cos(\alpha-\varepsilon) - s^2}{Rex^2\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} s^n.\cos n \propto$

Suma derivatelor lui θ(α) cu β(α) în funcţie de variabila centrică α, adică

(16.26) $\frac{d(\theta+\beta)}{d\alpha} = \frac{d(\alpha+2\beta)}{d\alpha} = 1 + 2\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1-s^2}{Rex^2\alpha} = \frac{d(x+z)}{dy} = 1 + 2\frac{dz}{dy}$
$= \frac{1-s^2}{1+s^2-2s.\cos(\propto-\varepsilon)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} s^n.\cos n \propto = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} k^n \cos ny$

şi reprezintă expresia **nucleului integralei lui Poisson.**

Împarţind şi inmulţind simultan integranzii integralelor (16.22) şi (16.22') cu constanta $(1 – s^2) = (1- k^2)$ şi uzând de notaţiile **supermatematice** (θ ≡ x ,α ≡ y, β ≡ z) integralele devin

(16.22-2) $I_N = \frac{1}{1-s^2}\int \frac{1-s^2}{1+s^2-2s.\cos(\propto-\varepsilon)}\, d\alpha = \frac{1}{1-s^2}\int \frac{1-s^2}{Rex^2\propto} d\alpha$ şi, respectiv

(16.22-2') $I_D = \frac{1}{1-s^2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-s^2}{1+s^2-2s.\cos(\propto-\varepsilon)}\, d\alpha = \frac{1}{1-s^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-s^2}{Rex^2\alpha} d\alpha$

Utilizând în integralele anterioare relaţia (15.26) rezultă

(16.22-3) $I_N = \frac{1}{1-s^2}\int (1 + 2\frac{dz}{dy})dy = \frac{1}{1-s^2}(\int dy + 2\int dz) = \frac{1}{1-s^2}(y + 2z)$

(16.22-3') $I_D = \frac{1}{1-k^2}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + 2\frac{d\beta}{d\alpha})\, d\alpha = \frac{1}{1-s^2}(\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha + 2\int_0^0 d\beta) =$
$= \frac{1}{1-k^2}(y|_{-\pi}^{\pi}) = \frac{2\pi}{1-k^2}$.

În integrala definită I_D s-a ţinut cont de următoarele modificări ale limitelor de integrare:

(16. 27)
$$\begin{cases} \alpha(\theta = \pi) = \pi, \text{ sau } y(x = \pi) = \pi \text{ şi} \\ \beta(\theta = \pi) = 0, \text{sau } z(x = \pi) = 0, \text{ pentru } \varepsilon = 0 \\ \propto (\theta = -\pi) = -\pi, \text{ sau } y(x = -\pi) = -\pi \text{ şi} \\ \beta(x = \pi) = 0 \text{ sau } z(x = \pi) = 0, \text{ pentru } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

aşa cum se poate observa, fără dificultate, pe schiţele explicative din **figura 4.2,a** şi **4.2,b** (Vol. I, ediţia1-a, pag. 107) şi cum se poate deduce şi pe schiţa din **figura 16.1**.

Rezultatul coincide cu cel prezentate în lucrarea citată anterior (R., Bădescu , C-tin., Maican - INTEGRALE, pag. 369), pentru cazul $|s| = |k| < 1$, la rezolvarea căreia s-a transferat problema în spaţiul / planul complex în care s-a utilizat teorema reziduurilor.

Aplicaţia 16.5. 3

Fie integralele

(16.28) $$I_N = \int \frac{\sin\propto . d\propto}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\propto}} = \int \frac{\sin\propto . d\propto}{Rex\propto}$$

(16.28') $$I_D = \int_0^{\pi} \frac{\sin\propto . d\propto}{\sqrt{1+s^2-2s\cos\propto}} = \int_0^{\pi} \frac{\sin\propto . d\propto}{Rex\propto}$$

Derivata **FSM-CE** radial excentric **Rexα** de variabilă **centrică α** este

(16.29) $$\frac{d(Rex\propto)}{d\propto} = \frac{d\sqrt{1+s^2-2s\cos(\propto-\varepsilon)}}{d\alpha} = \frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\propto-\varepsilon)}} = s\frac{\sin(\propto-\varepsilon)}{Rex\alpha} = \sin(\beta(\alpha)),$$

aşa cum rezultă şi din a doua relaţie (16.29).

Utilizând (15.29), cu / pentru **$\varepsilon = 0$**, în (15.28) rezultă

(16.28-1) $$I_N = \frac{1}{s}\int \frac{d(Rex\propto)}{d\propto} d\propto = \frac{1}{s}\int d(Rex\propto) = \frac{Rex\propto}{s} + C,$$

care este expresia integralei nedefinite.

Se cunoaşte modul de determinare a valorii integralei definite I_D când se cunoaşte expresia primitivei integralei nedefinite.

Ştiind că, pentru un excentru plasat pe axa x, în interiorul cercului unitate, adică S(s, 0) cu $s^2 \leq 1$ → **Rex0** = 1- **s** şi **Rexπ** = 1 + **s**, rezultă imediat valoarea integralei definite

(16.28-1') $$I_D = \frac{1}{s}\int_0^{\pi} d(Rex\alpha) = \frac{1}{s}|Rex\alpha|_0^{\pi} = \frac{Rex\pi - Rex0}{s} = \frac{1+s-(1-s)}{s} = \frac{2s}{s} = 2,$$

valoare ce corespunde cu cea prezentată în Râjik, pag. 174, 3.413/3.BH[67](6) pentru $s^2 = p^2 \leq 1$.

Dacă **excentrul S** este plasat pe axa x negativă S(s, π) = S(-s, 0), atunci **Rex0** = 1+ $|s|$ *si* ***Rexπ*** $= 1 - |s|$, astfel că I_D va avea valoarea de $I_D(s<0) = -2$ şi corespunde semnului + de sub semnul radical, adică pentru un integrand de exprsie

(16.30) $$I'_D \rightarrow f'(\alpha) = \frac{d(Rex\propto)}{d\propto} = \frac{\sin\propto}{\sqrt{1+s^2+2s\cos(\propto-\varepsilon)}}$$

Pentru un excentru **S(s,ε)** plasat în exteriorul cercului unitate, adica pentru $s^2 = p^2 \geq 1$, prin scoaterea forţată a excentricităţii **s** de sub semnul radical, expresia integrandului devine

(16.31) $$I''_D \rightarrow f'(\alpha) = \frac{d(Rex\propto)}{d\propto} = \frac{1}{s}\frac{\sin\propto}{\sqrt{1+s'^2-2s'\cos(\propto-\varepsilon)}},$$

în care noua excentricitate numerică este

(16.32) $s'^2 = \frac{1}{s^2} \leq 1$, iar integrala definită ia forma

(16.28'-2') $I''_D = \frac{1}{s}\int_0^{\pi} \frac{sin\alpha . d\alpha}{Rex(\alpha,\ S'(s',\varepsilon))}$

În acest caz, valoarea integralei va fi

(16.28'-3') $I''_D = \begin{cases} \frac{2}{s}, & dac\breve{a}\ \varepsilon = 0,\ \ sau\ dac\breve{a}\ \ s' > 0 \\ -\frac{2}{s}, & dac\breve{a}\ \varepsilon = \pi,\ \ sau\ dac\breve{a}\ s' < 0 \end{cases}$,

valoare care, deasemenea coincide cu cele din literatura de specialitate (Râjik, pag. 174, 3.413, 3 ; BH[67] (6)) pentru s = p, $p^2 \geq 1$.

Aplicaţia 16.5.4-1

Ţinând cont de relaţia (16.29), rezultă că oricare integrală, definită sau nedefinită, a cărui integrand este de forma (16.28) se poate scrie sub forma

(16.33) $I_D=\int_0^{\pi} f\left(\frac{sin\alpha}{\sqrt{1+s^2-2scos\alpha}}\right) d\alpha = \int_0^{\pi} f\left(\frac{sin\alpha}{Rex\alpha}\right) d\alpha = \int_0^{\pi} f(sin\beta(\alpha))\, d\alpha =$
$= \int_0^{\pi} f\big(sin\beta(\alpha)\big). d(\theta - \beta)$

Dacă limitele de integrare sunt 0 şi ± π şi ε = 0 sau ε = ± π, atunci β(0) = β(±π) = 0 şi rezultă

(15.33-2) $I_{D2} = \int_0^{0} f(sin\beta(\alpha))\, d\beta\ = 0$ şi ţinând cont de egalitatea

(16. 34) cosβ(α) = cosβ(θ) = s.sinθ rezultă că

(15.33-1) $I_D = I_{D1} = \int_0^{\propto\, =\, \pi} f(sin\beta(\alpha))\, d\theta = \int_0^{\theta(\alpha)=\,\pi+\beta} f(sin\beta(\theta))\,.\, d\theta =$
$= \int_0^{\pi+\,\beta} f\big(sin\beta(\theta)\big). d\theta = \int_0^{\pi+\,\beta} f(s.\,sin\theta). d\theta,$ în care

(16.35) $\beta \rightarrow \begin{cases} \beta(\theta) = \ \arcsin[s.\sin(\theta -\ \varepsilon)] \\ \beta(\alpha) = \begin{cases} arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\,\varepsilon)}{Rex\alpha} \\ arctan\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\,\varepsilon)} \end{cases} \text{sau} \end{cases}$

Aplicaţia 16.5.4-2

Dacă integrala definită este de forma

(16.36) $I_D=\int_0^{\pi} f\left(\frac{sin^2\alpha}{1+s^2-2scos\alpha}\right) d\alpha = \int_0^{\pi} f\left(\frac{sin^2\alpha}{Rex^2\alpha}\right) d\alpha = \int_0^{\pi} f\big(sin^2\beta(\alpha)\big)\, d(\theta-\beta)$
$\int_0^{\pi} f\big(sin^2\beta(\alpha)\big)\, d\alpha =$

şi va rezulta

(16.36-1) $I_D = \begin{cases} \int_0^{\pi} f(sin^2\alpha)d\alpha, & [s^2\ = p^2\ \leq 1] \\ \int_0^{\pi} f(\frac{sin^2\alpha}{s^2})\, d\alpha, & [s^2\ =\ p^2 \geq 1] \end{cases}$, rezultat consemnat

şi in Râjik pag. 147, 3.036.1 La 228 (6), cu mici greşeli / inversiuni (Ed. Tehnica, Buc. 1955) privind inversarea valorilor excentricităţilor numerice.

Acum, pe baza rezultatelor de la aplicaţia **16.4-1,** se poate merge mai departe şi se poate scrie

(16.36-2) $$I_D = \begin{cases} \int_0^{\pi+\beta} f(s^2.sin^2\theta).d\theta, & [s^2 = p^2 \leq 1] \\ \int_0^{\pi+\beta} f(sin^2\theta).d\theta, & [s^2 = p^2 \geq 1] \end{cases}$$

Aplicaţia 16.5.4-3

Se ştie [Râjik, pag. 54, 1.447, F II 559] că relaţiile (16.23) sunt sumele

(16.23’) $$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} s^n cosn \propto = \frac{1-s.cos\propto}{Rex^2\propto} = Dex\alpha \\ \sum_{n=1}^{\infty} s^n sinn \propto = \frac{s.sin\propto}{Rex^2\propto} = \frac{1}{Rex\propto}\frac{d(Rex\propto)}{d\propto} = \frac{d(lnRex\propto)}{d\propto} \end{cases}$$

şi, deasemenea, că

(16.37) $$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} sinn \propto = arctan\frac{s.sin\propto}{1-s.cos\propto} = \beta(\alpha) = Bex\alpha = arcsin\frac{s.sin\propto}{Rex\propto} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} cosn \propto = ln\frac{1}{Rex\propto} = -= lnRex \propto, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{2n-1}}{2n-1} \cos(2n-1) \propto = \frac{1}{4} ln\frac{Rex^2[\propto,S(s,\varepsilon=\pi)]}{Rex^2[\alpha,S(s,\varepsilon=0)]} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{2n-1}}{2n-1} \sin(2n-1) \propto = \frac{1}{2} arctan\frac{2s.sin\propto}{1-s^2} \\ pentru \ \propto \in [0,2\pi], \ s^2 \leq 1 \rightarrow \ \varepsilon = 0 \ sau \ \pi \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{2n-1}}{2n-1} \sin(2n-1) \propto = \frac{1}{2} arctan\frac{2s.sin\propto}{1-s} \ şi \ pentru \ \alpha \in [0,\pi]: \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{s^{sn-1}}{2n-1} \sin(2n-1) \propto = \frac{1}{4} ln\frac{Rex^2[\propto,S(s,\varepsilon=\pi)]}{Rex^2[\alpha,S(s,\varepsilon=0)]} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{s^{sn-1}}{2n-1} \cos(2n-1) \propto = \frac{1}{2} arctan\frac{2s.cos\propto}{1-s^2} \end{cases}$$

Ca urmare

Aplicaţia 16.6-1

(16.38) $$I_N = \int \frac{1-s.cos\propto}{Rex^2\propto} d\propto = \int \sum_{n=0}^{\infty} s^n cosn \propto .d\propto = \propto + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} sinn \propto = \alpha + +Bex \propto$$

Sau, mai simplu, direct, fără divizarea / dezvoltarea funcţiei, ştiind că expresia **FSM-CE** derivată excentrică, de variabvilă centrică, este **Dexα** $= \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{1-s.cos\propto}{Rex^2\propto}$ [v. Vol.I, Ed.1-a, pag. 10, pag.26, pag.176 relaţia (5.89)]

(16.38’) $$I_N = \int \frac{1-s.cos\propto}{Rex^2\propto} d\propto = \int Dex \propto .d\propto = \int \frac{d\theta}{d\alpha} d\alpha = \int d\theta = \theta(\propto) = \alpha + \beta(\propto)$$

Cunoscându-se expresia primitivei integralei nedefinite, integralele definite de acelaşi integrand se calculează extrem de simplu.

Astfel dacă limitele de integrare sunt

(16.39) $$I_{D1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-s.cos\propto}{Rex^2\propto} d\propto = (\theta(\alpha))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\alpha + \beta(\alpha))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \begin{cases} \propto + arcsin\frac{s.sin\propto}{Rex\propto}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + arcsin\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \\ (\alpha + arctan\frac{s.sin\alpha}{1-s.cos\alpha}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + arctans \end{cases}$$, cele două valori fiind egale, deoarece, se cunoaşte relaţia dintre sinus şi tangentă sins = $\pm\frac{tans}{\sqrt{1+tan^2s}}$.

Pentru alte limite de integrare, valoarea intedralei definite I_{D1} se va afla la fel de simplu.

Aplicaţia 16.6-2

(16.40) $I_N = \int\frac{s.sin\propto}{Rex^2\propto} = \int\sum_{n=1}^{\infty} s^n sinn\propto = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int sinn\propto.d\propto =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} s^n \frac{1}{n}(-cosn\propto) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}cosn\propto = \ln(Rex\propto).$

Şi în acest caz, integrala nedefinită se poate soluţiona şi fără divizarea / descompunerea integrandului, pe baza ultimei relaţii (16. 10'), adică

(16.40') $I_N = \int\frac{s.sin\propto}{Rex^2\propto}d\propto = \int\frac{d(lnRex\propto)}{d\propto}d\alpha = \int d[(\ln(Rex\propto)] = \ln(Rex\propto) =$

$= \ln(\sqrt{1+s^2-2s.cos\propto})$

Integrala definită va fi

(16.41) $I_{D2} = \int_0^{\pi}\frac{s.sin\propto}{Rex^2\propto}d\propto = \ln(\sqrt{1+s^2-2s.cos\propto})\Big|_{-\pi}^{\pi}$ = ln(Rexπ) – ln(Rex0) =

$= \ln(\sqrt{1+s^2+2s}) - \ln(\sqrt{1+s^2-2s}) = \ln(\frac{Rex\pi}{Rex0}) = ln\frac{1+s}{1-s} = \ln\frac{-Rex_2 0}{Rex_1 0} = \ln\frac{Rex_1\pi}{-Rex_2\pi}$

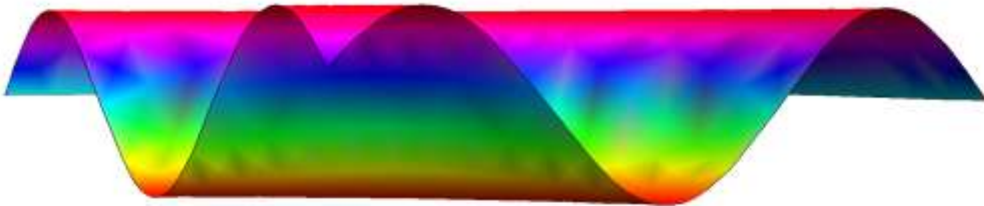
în care s-au utilizat şi cele două determinări ale funcţiei radial excentric de variabilă centrică.

Deoarece, pentru $\propto = 0$ → θ = 0 şi pentru α = π → θ = π, în ambele limite β(0) = β(π) = 0, ca urmare $Rex_{1,2}\,\alpha = rex_{1,2}\,\theta$ şi se poate scrie

(15.41') $I_{D2} = \ln\frac{-Rex_2 0}{Rex_1 0} = \ln\frac{Rex_1\pi}{-Rex_2\pi} = \ln\frac{-rex_2 0}{rex_1 0} = \ln\frac{rex_1\pi}{-rex_2\pi}$.

Lăsăm cititorului placerea de-a descoperii noi aplicaţii ale metodei divizării diferenţialei, intrucât, în analiza matematică, **integrala** unei funcţii este o generalizare a noţiunilor de arie, masă, volum şi sumă.

În lucrarea [39], autorul a avut privilegiul de-a publica, alături de reputatul matematician dr. math. **Florentin Smmarandache**, seful Departamentului de Matematică al Universitaţii New Mexico (USA) unele integrale din cele anterior expuse, rezolvate direct.



Motto "Atât timp cât legile matematicii se referă la realitate;
acestea nu sunt sigure; atâta timp cât acestea sunt sigure,
nu se referă la realitate "
Albert Einstein (1871-1955)

Capitolul 17

FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE BETA EXCENTRICE bex θ SOLUŢII ALE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE (SOβ)

17.1 INTRODUCERE

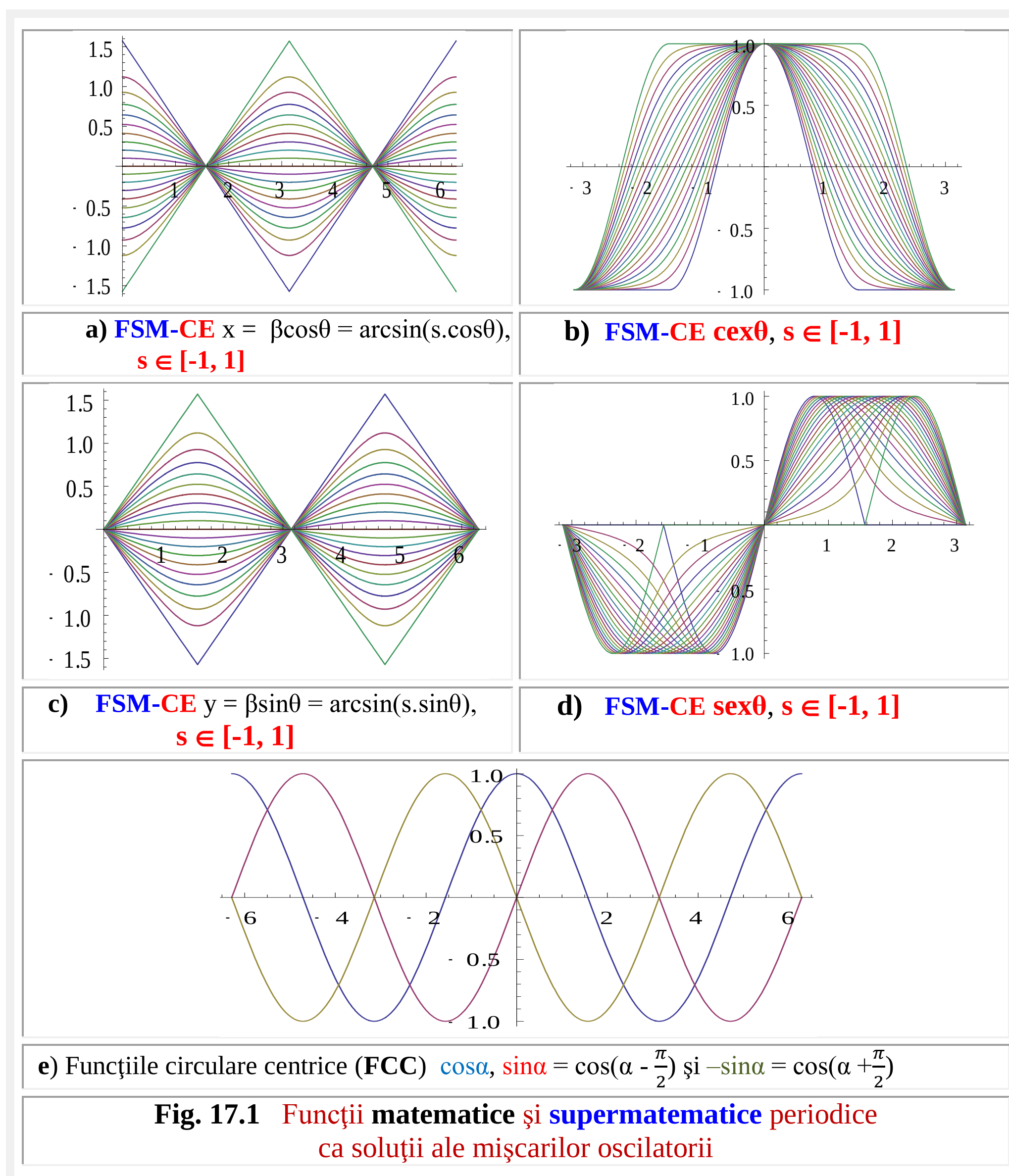
Funcţiile supermatematice beta excentrice au făcut obiectul lucrarii dlui Dr. ing. **Dumitru Bălă** " SUPERMATHEMATICAL – ŞELARIU FUNCTIONS BETA ECCENTRIC bex*θ* SOLUTIONS OF SOME OSCILLATORY NOON-LINIAR SYSTEMS (SO*β*), sustinută la "Proceedings of the 2^{nd} World Congress on Science, Economics, and Culture", 25-29 August 2008, New York.

Oricare funcţie periodică poate, în principiu, descrie, evident, o mişcare oscilantă. Funcţiile circulare centrice (**FCC**) cosinus (cosα) şi sinus (sinα) centrice descriu, fără dificultate, mişcările oscilatorii ale sistemelor liniare; **matematica centrică** (**MC**) fiind **matematica sistemelor ideale**, **perfecte, liniare**, în timp ce, **matematica excentrică** (**ME**) este **matematica sistemelor reale, imperfecte, neliniare**. Reuniunea lor reprezintă, după cum se ştie, **supermatematica** (**SM**).

Unele **funcţii supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**), de variabilă centrică **cexθ** şi **sexθ** [5] cât şi cele de variabilă centrică **Cexα** şi **Sexα** [8], sunt demonstrate, deja, ca soluţii ale unor sisteme vibrante de caracteristici elastice statice neliniare (**CESNL**). Şi funcţiile cuadrilobe [10] s-au dovedit a fi soluţii ale unor sisteme oscilante neliniare, asemănătoare cu caracteristicile elastice statice ale sistemelor lui **Duffing** ($ax \pm bx^3$), care reprezintă o dezvoltare în serii de puteri, dar vibraţiile cvadrilobe asigură un termen ($\pm cx^5$) al dezvoltarii în plus.

Funcţiile supermatematice realizează o extindere vastă (infinită) a funcţilor periodice, fără să înlocuiasca cercul unitate / trigonometric cu alte curbe închise, aşa cum se cunosc foarte multe încercări în matematica centrică (**MC**) descrise succint în [Vol.I, Cap 2: Funcţii patratice şi rombice **Alaci Valeriu**; funcţii poligonale **Enulescu**, funcţii transtrigonometrice **Malvina Baica** şi **Mircea Cârdu** ş.a.].

Noile functii periodice, componente ale complementelor de matematică şi ale **matematicii excentrice** (**ME**), care reunite cu **MC** alcătuiesc ceea ce s-a denumit **supermatematică** (**SM** = **MC** ∪ **ME**), s-au dovedit deja ca soluţii ale descrierii unor mişcări periodice ale unor sisteme vibrante neliniare, mai greu de descris cu funcţiile existente în **MC**.



a) **FSM-CE** x = βcosθ = arcsin(s.cosθ), **s ∈ [-1, 1]**

b) **FSM-CE cexθ, s ∈ [-1, 1]**

c) **FSM-CE** y = βsinθ = arcsin(s.sinθ), **s ∈ [-1, 1]**

d) **FSM-CE sexθ, s ∈ [-1, 1]**

e) Funcţiile circulare centrice (**FCC**) cosα, sinα = cos(α - $\frac{\pi}{2}$) şi –sinα = cos(α +$\frac{\pi}{2}$)

Fig. 17.1 Funcţii **matematice** şi **supermatematice** periodice ca soluţii ale mişcarilor oscilatorii

In **figurile 1,a** şi **b** sunt prezentate **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**)

(17.1) $Y = \beta sex(\theta) \equiv bex\theta = \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]$,

denumită **beta-sinus** şi notată **βsex(θ,S(s,ε)),** în care **S(s,ε)** este excentrul, corespunzător cercului unitate, **s = e/R** este excentricitatea numerică, **e** excentricitatea reală, corespunzatoare unui cerc de raza oarecare R şi **ε** este direcţia pe care a fost expulzat polul **S(s,ε)** din O(0,0) şi denumit **excentru S(s,ε)**, precum şi funcţia **complementară**

(17.2) $X = \beta cex(\theta) \equiv bex(\theta + \pi/2) = \arcsin[s.\sin[\theta+\pi/2 - \varepsilon] = \arcsin[s.\cos(\theta-\varepsilon)] =$

$= \arcsin[s.\cos(\theta-\varepsilon)]$.

Aşa cum cosθ şi cos(θ - π/2) = sinθ (**Fig.1,e**) sunt soluţii ale unor sisteme vibrante liniare, tot aşa, cele doua funcţii prezentate anterior, cu graficele din **figura 1,a** şi **1,b** pot fi soluţii ale unor sisteme vibrante a căror proprietăţi vor fi deduse în continuare.

17.2 SEMNIFICAŢIILE GEOMETRICE ALE FSM-CE βcexθ şi βsexθ

Prin intersectarea cercului unitate C(O,1) cu o dreaptă turnantă în jurul excentrului unitate S(s, ε) apar punctele de intersecţie $\mathbf{W_1}$ şi $\mathbf{W_2}$, notate concentrat $\mathbf{W_{1,2}}$.

Coordonatele carteziene ale acestor puncte, ca funcţii de variabla excentrică **θ**, sunt funcţiile **supermatematice** circulare excentrice(**FSM-CE**)

(17.3) $x_{1,2} = cex_{1,2}\theta = \cos\alpha_{1,2}$ şi

(17.4) $y_{1,2} = sex_{1,2}\theta = \sin\alpha_{1,2}$

echivalentele funcţiilor cosinus şi sinus, de variabile centrice, în care $\boldsymbol{\alpha_{1,2}}$ sunt unghiurile din O(0,0), corespondente din **MC**.

FSM-CE cosinus şi sinus excentrice, atât cele de variabilă excentrică **cexθ** şi **sexθ**, [5] cât şi cele de variabilă centrică **Cexα** şi Sexα [8], sunt soluţii ale unor sisteme oscilante de caracteristici elastice statice neliniare. Există, însă, multe alte **FSM-CE** care sunt soluţii ale unor astfel de sisteme oscilante, toate fiind incluse în sistemul oscilaţiilor excentrice (**SOE**), denumire dată acestor sisteme de Prof. dr. math. **Emilia Petrişor**, autoarea **extinderii haosului**de la **haosul centric** la **haosul excentric**, [23], [24], [25] prin simpla înlocuire a **FCC cosα** şi **sinα** cu **FSM-CE** corespondente **cexθ** şi **sexθ.** Lucrarea ei **[23]** s-a bucurat de foarte mare interes la o conferinţă dedicată haosului de la Budapesta.

Ca fapt divers, prezentam o comparaţie între cele două tipuri de haos: în **figura 17.2,a1,** haosul **centric**, iar în **figurile 17.2,a2** şi **Fig. 17.2,a3** (extrase din lucrarea Techno-Art of Şelariu Supermathematocs Functions, Ed. ARP -American Research Press) cele **excentrice**. Lasăm cititorului plăcerea de a sesiza diferenţele care au fost sesizate în cadrul conferinţei de la Budapesta :”Numai haosul excentric este cu adevărat haos (caus)”.

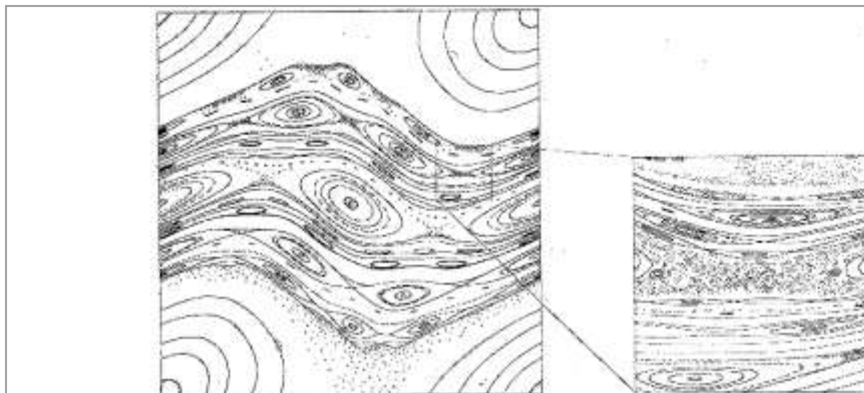


Fig. 17.2,a1 **Haos (chaos) centric** Orbite stabile (regulate şi haotice.)
V. I. Arnold, „Huygens şi Burrow, Newton si Hooke", „ Primul pas de la Analiza matematica la Teoria catastrofelor, de la evolventa la cuasicristale" Editura (Nauka) de Ştiinte Fizico-Matematice , Moscova,

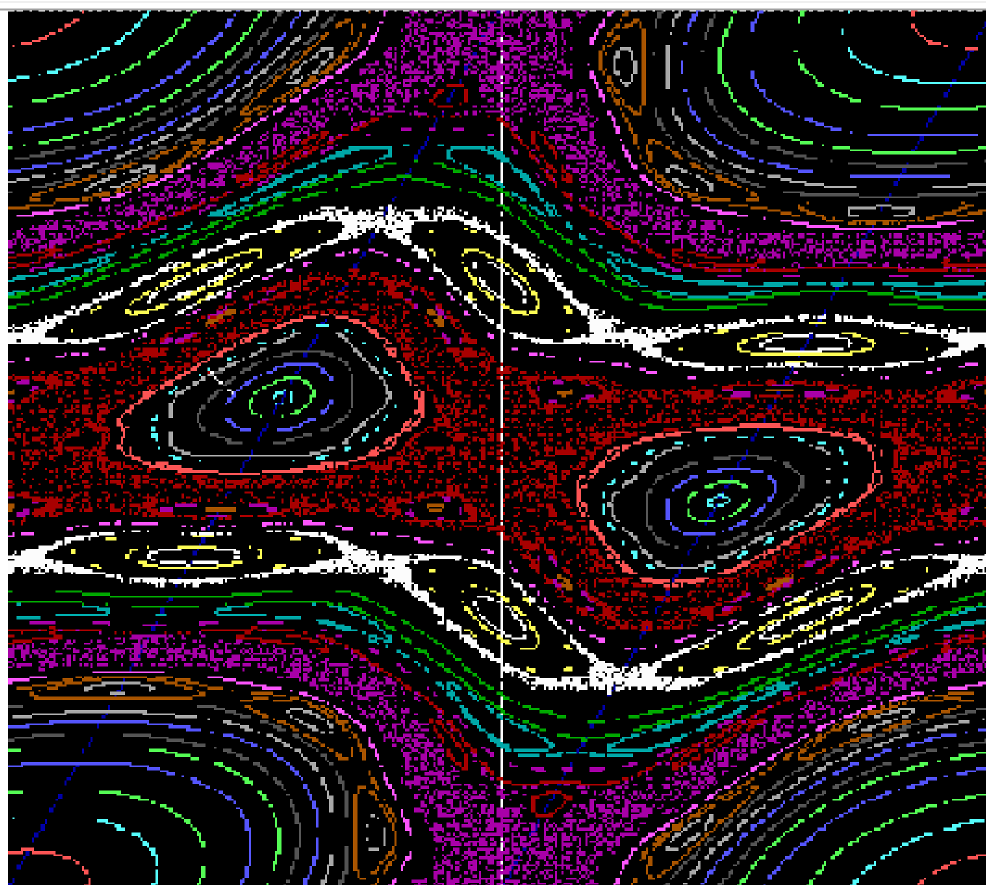


Fig. 17.2,a2 Haosul excentric 1 al Emiliei Petrişor

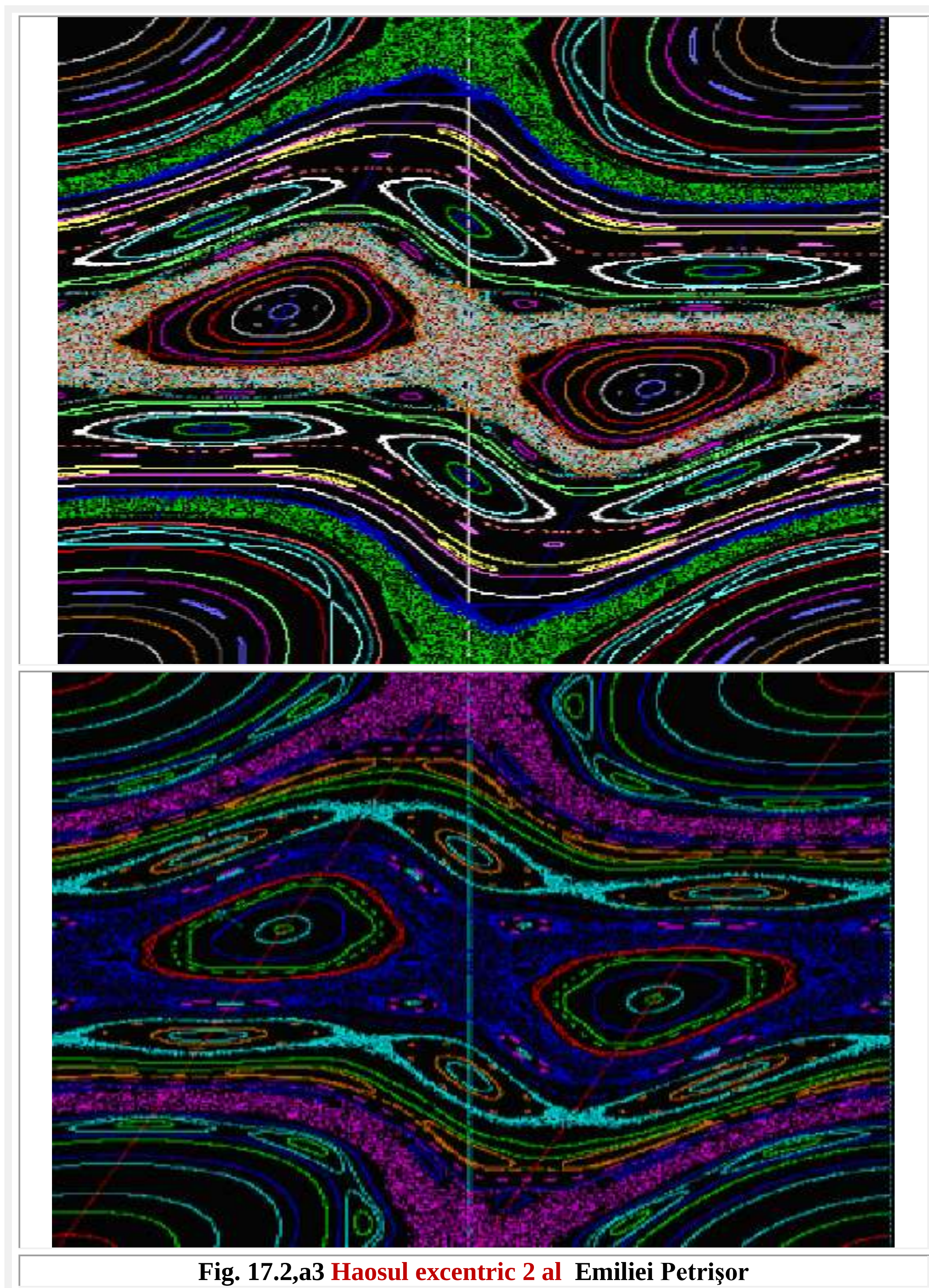


Fig. 17.2,a3 Haosul excentric 2 al Emiliei Petrişor

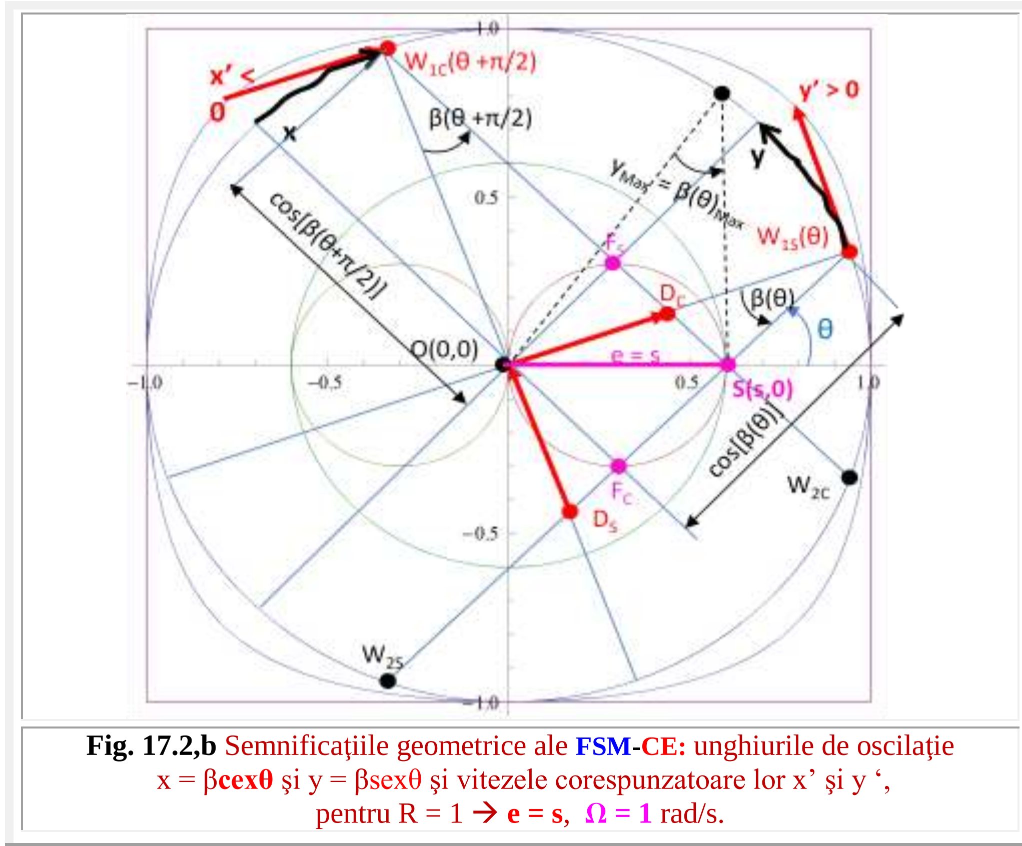


Fig. 17.2,b Semnificaţiile geometrice ale **FSM-CE:** unghiurile de oscilaţie $x = \beta cex\theta$ şi $y = \beta sex\theta$ şi vitezele corespunzatoare lor x' şi y ', pentru R = 1 → **e = s**, **Ω = 1** rad/s.

În cadrul **SOE** se înscriu oscilaţiile în **modul** ale funcţiilor radial excentric de variabilă excentrică **$rex_{1,2}\theta$**, cât şi cele de variabilă centrică **$Rex\alpha_{1,2}$**, care sunt reprezentate de razele vectoare excentrice $\overrightarrow{r_{1,2}} = \overrightarrow{EW_{1,2}}$ şi care nu au echivalent în **MC,** deoarece, în **MC** în condiţiile **e = s = 0**, modulul vectorului $\left|\overrightarrow{R_{1,2}(\alpha_{1,2})}\right| = \left|\overrightarrow{OW_{1,2}}\right|$ = const. = 1.

17.3 ELONGAŢIA, VITEZA ŞI ACCELERAŢIA MIŞCĂRILOR OSCILATORII ALE SISTEMELOR OSCILANTE β (SOβ)

În **ME** se operează cu trei unghiuri, sau variabile: la **centru α**, la **excentru θ** şi **unghiul β** cu vârful pe cercul unitate, în punctul **W**, dacă direcţia **ε** de expulzare a excentrului **S(s,ε)** din centrul **O(0,0)** este pe direcţia axei abscisei **ε = 0**, cum se va considera în continuare.

Unghiul β poate fi exprimat în funcţie de **variabila centrică β(α)** sau de **variabila excentrică β(θ).** În prezenta lucrare se consideră funcţiile de variabilă **excentrică θ** şi sistemul oscilant va fi denumit sistem oscilant **β(θ)** şi va fi notat cu (**SOβ**).

Fie oscilaţiile unghiulare ale unghiului β(θ) = bexθ date de **FSM-CE**

(17.5) $$\begin{cases} x = \beta cex\theta = \arcsin(s.cos\theta) \\ y = \beta sex\theta = \arcsin(s.sin\theta) \end{cases}, s\in[-1,+1] \Rightarrow x, y: \mathbb{R} \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

de acelaşi excentru fix S(s,ε), astfel că **s = ε** = constante, în care semidreapta $\mathbf{d}^+$ se roteşte în jurul excentrului **S(s,0)** cu viteza unghiulară constanta **Ω = 1** rad/s, adică **θ** = Ω.t şi $\dot{\theta} = \Omega = 1$ $iar\ \ddot{\theta} = 0$ (**Fig.17.2**)

Vitezele de oscilaţie ale unghiurilor x, y = f[β(Ω.t)] sunt

(17.6)

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{d(\beta cex\theta)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\left(bex\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{d\theta} = \Omega\frac{d(\arcsin(s.cos\theta))}{d\theta} = \\ = -\Omega.\frac{s.sin\theta}{\sqrt{1-s^2.cos^2\theta}} = -\Omega s.siq\theta \\ \dot{y} = \frac{d(\beta sex\theta)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d(bex\theta)}{d\theta} = \Omega.\frac{d[\arcsin(s.sin\theta)]}{d\theta} = \Omega.\frac{s.cos\theta}{\sqrt{1-s^2sin^2\theta}} \\ = \Omega.s.coq\theta \end{cases}.$$

În expresiile derivatelor / vitezelor se evidenţiază **FSM-CE** cosinus (**coqθ**) şi sinus (**siqθ**) **cvadrilobe**, introduse în matematică şi prezentate pe larg în lucrarea[10] şi în Vol.I, Ed.1-a, Cap.2, împreună cu curbele închise denumite **trilobe**, **cuadrilobe** şi **n-lobe** sau **polilobe**.

Acceleraţiile mişcărilor de oscilaţie se obţin ca a doua derivată a unghiurilor de oscilaţie sau prima derivata a vitezelor de oscilaţie, astfel

(17.7) $$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\Omega^2.s(1-s^2)cos\theta}{(1-s^2.cos^2\theta)^{1,5}} \\ \ddot{y} = -\frac{\Omega^2.s(1-s^2)sin\theta}{(1-s^2.sin^2\theta)^{1,5}} \end{cases}$$

17.4 ECUAŢIA DIFERENŢIALĂ A OSCILAŢIILOR

Matricea Wronskiană este

(17.8) $$W = \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta cex\theta & \beta sex\theta \\ -\Omega.s.siq\theta & \Omega.s.coq\theta \end{vmatrix} = \Omega.s.\begin{vmatrix} \beta cex\theta & \beta sex\theta \\ -siq\theta & coq\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \Omega.s(\beta cex\theta.coq\theta + \beta sex\theta.siq\theta) =$$

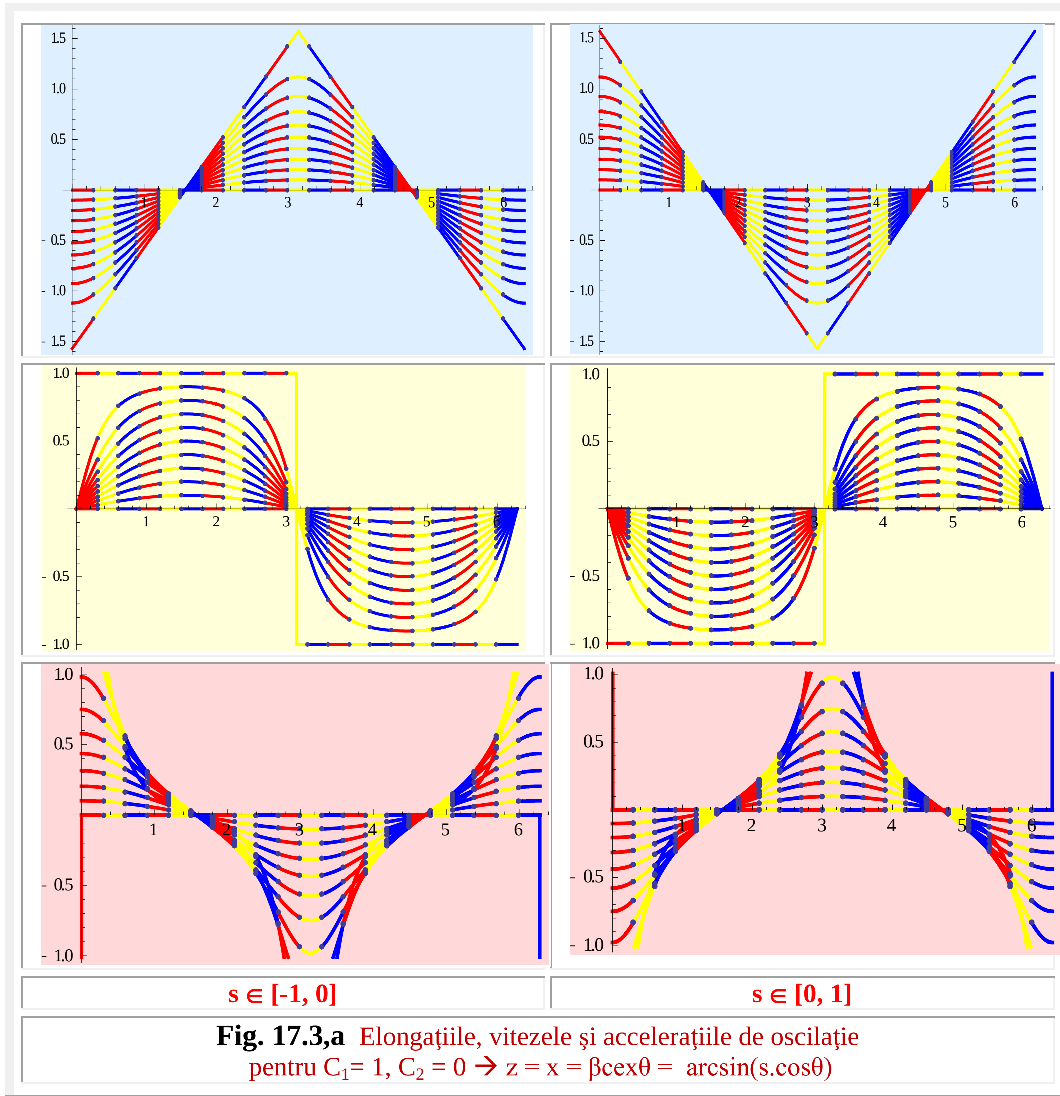
$$= \Omega.s.(\arcsin(s.cos\theta).cos\theta + \arcsin(s.sin\theta).sin\theta)$$

şi pentru s ≠ 0 → W ≠ 0

Expresia (17.8) este reprezentată prin familia de curbe din figura 17.**4** şi se poate deduce şi verifica grafic că, pentru ε = 0, s ∈ [-1,+1] → β(θ) ∈$[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ şi W ≠ 0 pentru s ≠ 0. Pentru s = e = 0 → S ≡ O(0,0) → β(θ) = constant = 0 , ∀(θ), θ ∈ [-∞, +∞] , θ(t) = α (t) → β(t) = constant = 0 şi oscilaţia unghiului β încetează.

Ca urmare, cu excepţia s = 0, când W ≡ 0, W ≠ 0 şi ecuaţia diferenţială a sistemului oscilant este dată de determinantul

(17.9) $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0,$$ cu soluţia generală



s ∈ [-1, 0] s ∈ [0, 1]

Fig. 17.3,a Elongaţiile, vitezele şi acceleraţiile de oscilaţie pentru $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ → $z = x = \beta cex\theta =$ arcsin(s.cosθ)

(17.10) $$z(\theta(t)) = C_1 \beta cex\theta + C_2.\beta sex\theta = C_1.\beta cex\Omega.t + C_2.\beta sex\Omega.t$$

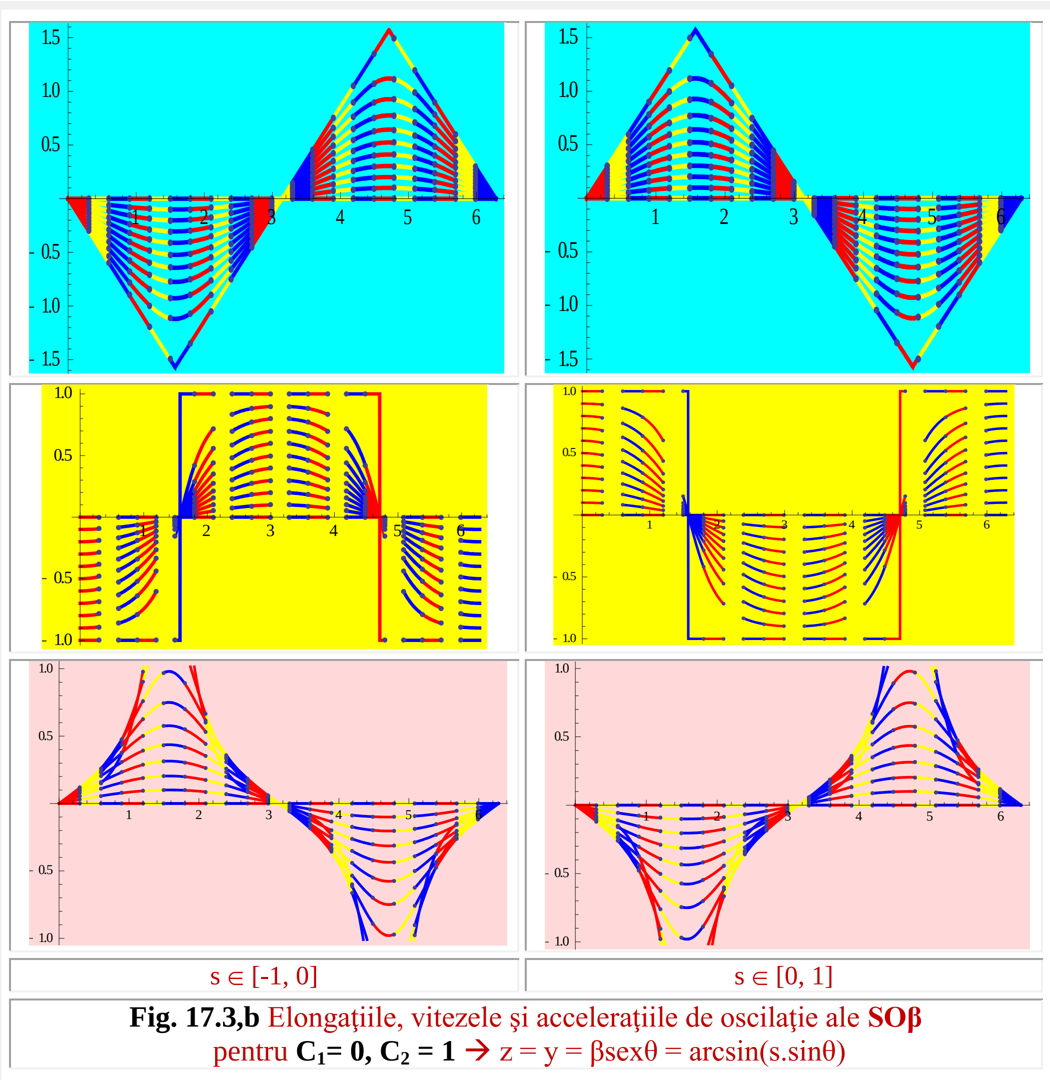
Pentru $C_1 = C_2 = 1$

(17.11) $$z = \beta cex\Omega.t + \beta sex\Omega.t$$ cu graficele din **figurile 17.3**.

Pentru $C_2 = 0$ şi $C_1 = 1$, graficele sunt redate în **figura 17.1,a**, iar pentru $C_1 = 0$ şi $C_2 = 1$ graficele sunt redate în **figura 17.1,b**.

Vitezele pentru $C_1 = C_2 = 1$, $\Omega = 1$ rad/s sunt reprezentate în figura 17.**3,c** de relaţia

(17.12) $$\dot{z}(t) = = \Omega.s.\left(-\frac{C_2 sin\theta}{\sqrt{1-s^2cos^2\theta}} + \frac{C_1 cos\theta}{\sqrt{1-s^2.sin^2\theta}}\right) = \Omega s.(-C_1 siq\theta + C_2 coq\theta$$



s ∈ [-1, 0] | s ∈ [0, 1]

Fig. 17.3,b Elongaţiile, vitezele şi acceleraţiile de oscilaţie ale **SOβ** pentru $\mathbf{C_1 = 0, C_2 = 1}$ → z = y = βsexθ = arcsin(s.sinθ)

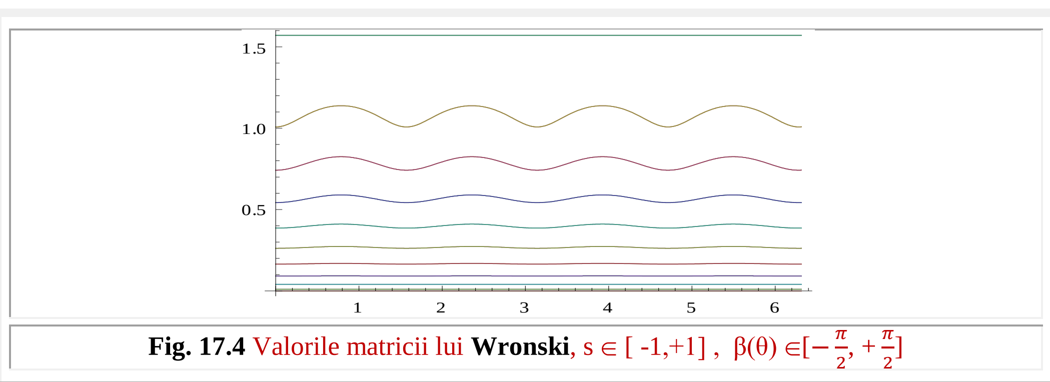


Fig. 17.4 Valorile matricii lui **Wronski**, s ∈ [-1,+1] , β(θ) ∈$[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

17.5 TRAIECTORII ÎN PLANUL FAZELOR

Amplitudinea sau elongaţia maximă de oscilaţie se obţine în punctele $\theta = \pm \pi$ pentru x şi $\theta = \pm \pi/2$ pentru y, aşa cum rezultă din relaţiile (17.1) şi (17.2) ca şi din **figura 17.2,b.**

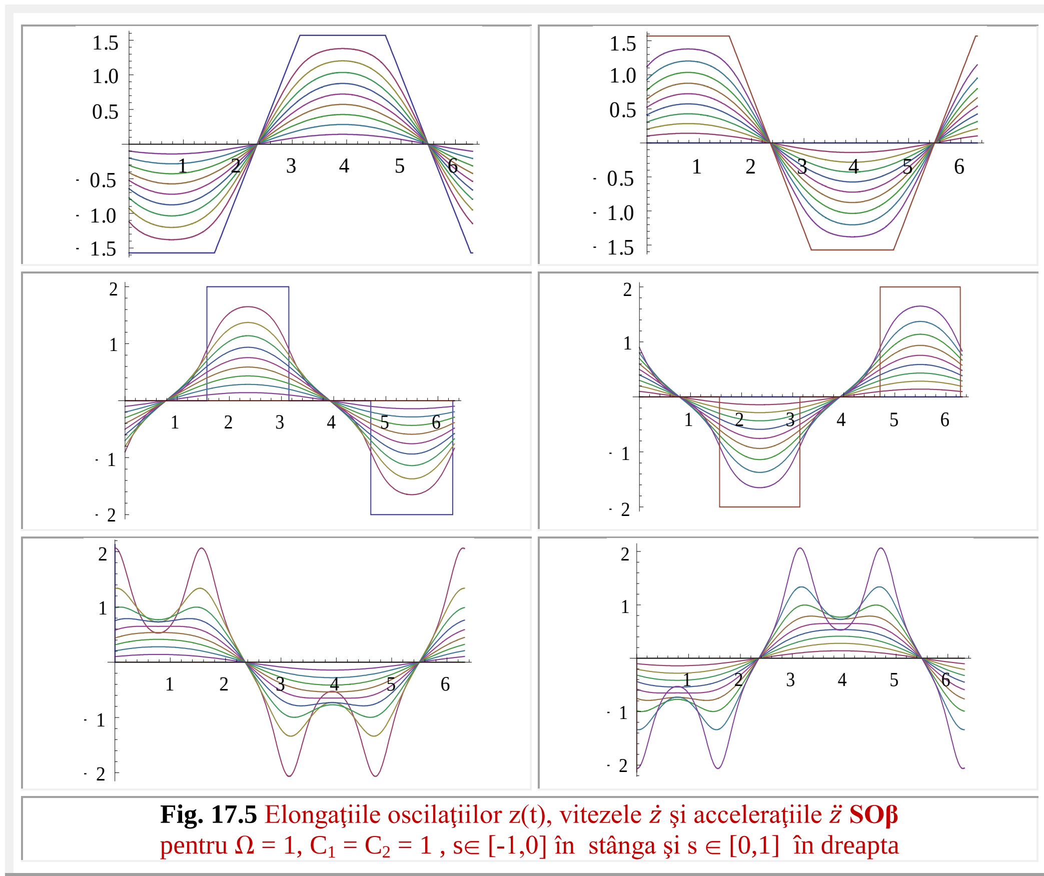


Fig. 17.5 Elongaţiile oscilaţiilor z(t), vitezele $\dot{z}$ şi acceleraţiile $\ddot{z}$ **SOβ** pentru $\Omega = 1$, $C_1 = C_2 = 1$, $s \in [-1,0]$ în stânga şi $s \in [0,1]$ în dreapta

Unghiul $y = \beta(\theta)$, pentru $\varepsilon = 0$, creşte de la 0, în $\theta = 0$, la β_{Max}, în $\theta = \pi/2$, apoi începe să scadă din nou la 0 în $\theta = \pi$. De aceea, în $\theta = \pi/2$ şi $\theta = 3\pi/2$ vitezele schimbă de semn. Acelaşi lucru se întampla cu $x = \beta(\theta + \pi/2)$ în punctele $\theta = 0$ şi $\theta = \pi$.

Vitezele variabile V_C = R.Ω.dex(θ+π/2) şi V_S = R.Ω.dexθ, de rotaţie a punctelor $\mathbf{W_C}$ şi $\mathbf{W_S}$ pe cercul C(O,R), sunt date de **FSM-CE** dex (θ + π/2) şi respectiv, dexθ ale caror expresii sunt

(17.13) $$\text{dex}\theta = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$$

şi, geometric, reprezintă distanţa de la punctul $\mathbf{W_S}$ la $\mathbf{D_S}$ din **figura 17.2,b**.

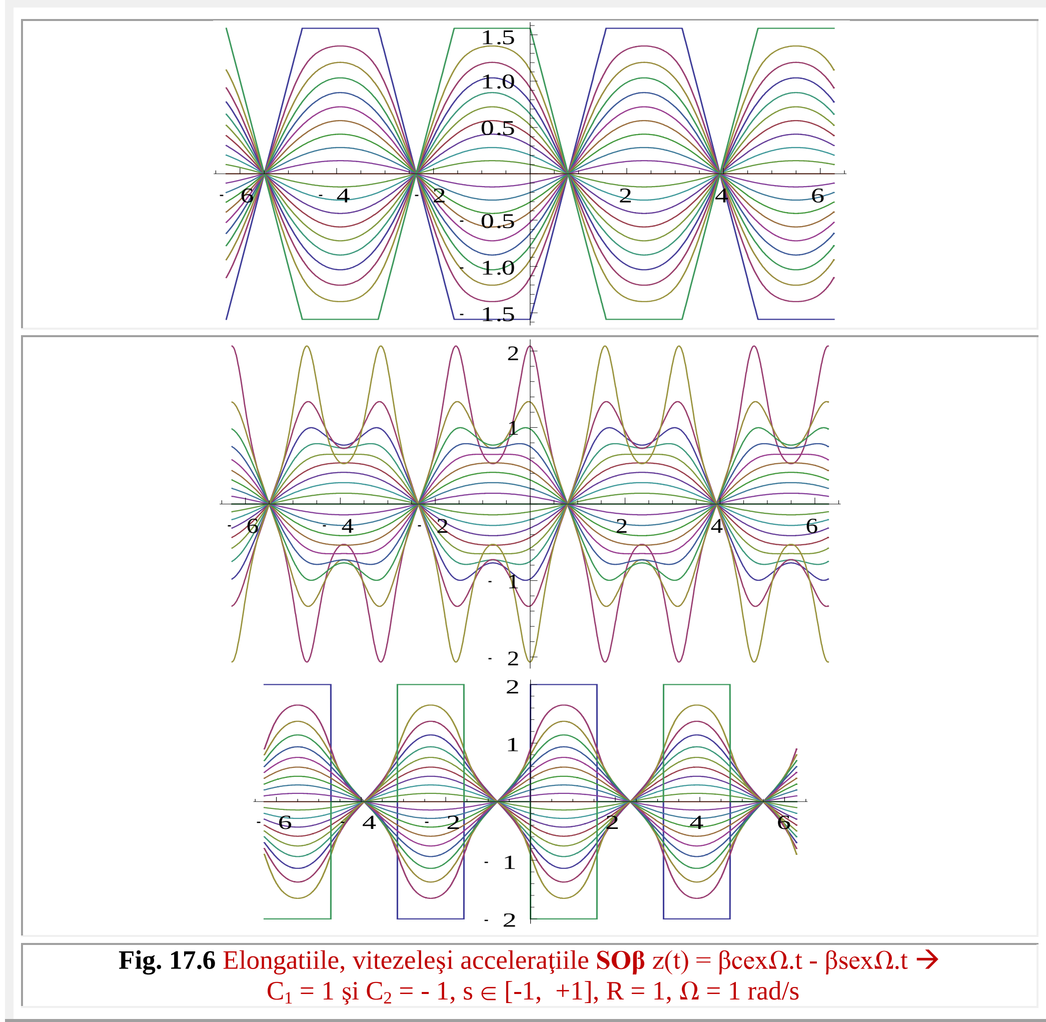


Fig. 17.6 Elongatiile, vitezeleşi acceleraţiile **SOβ** z(t) = βcexΩ.t - βsexΩ.t → C_1 = 1 şi C_2 = - 1, s ∈ [-1, +1], R = 1, Ω = 1 rad/s

Din relaţia (17.13) se observă că, al doilea termen al relaţiei reprezintă tocmai viteza $\dot{y}$, aşa cum se poate observa şi din a doua relaţie (17.6). Ca urmare, modulul vitezei $\dot{y}$ este dat de diastanţa $\overline{\boldsymbol{OD_S}}$ şi vitezele **SOβ** mai pot fi exprimate de relaţiile

(17.14) $$\begin{cases} \dot{x} = \Omega[1 - dex\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)] \\ \dot{y} = \Omega[1 - dex\theta] \end{cases},$$

relaţii care stabilesc o legatură dintre vitezele de rotaţie ale punctelor **W**, în mişcarea circulară excentrică şi vitezele de oscilaţie ale aceloraşi puncte, sau ale direcţiei **radiale excentrice**, faţă de direcţia **radială centrică** - de-o parte şi de alta a dreaptei ce trece prin O(0,0) -. În consecinţă, prin derivarea relaţiilor (17.14), acceleraţiile

oscilaţiilor **Soβ** sunt aceleaşi cu acceleraţiile **mişcării circulare excentrice** (**MCE**), introdusă în mecanică prin lucrarea [14].

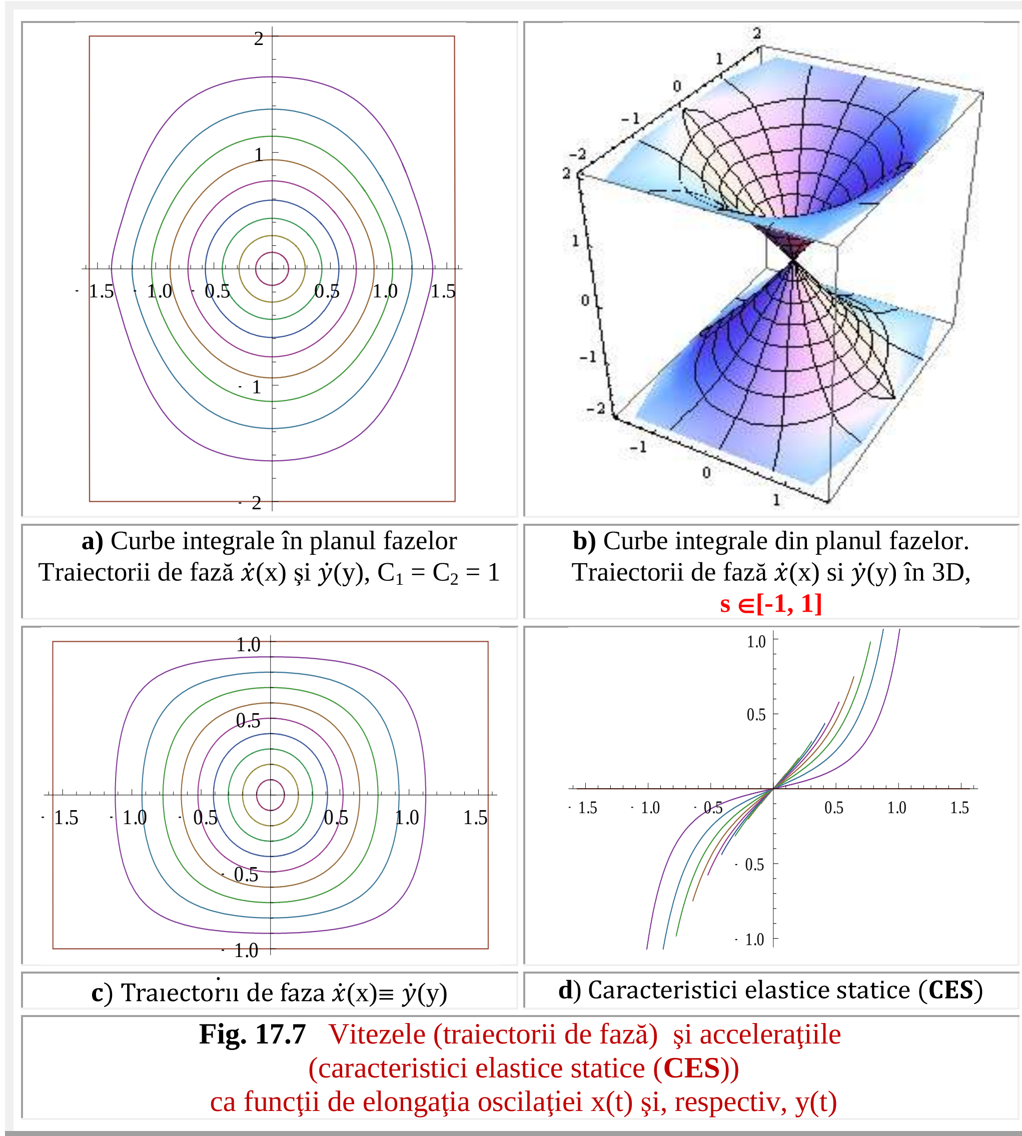


Fig. 17.7 Vitezele (traiectorii de fază) şi acceleraţiile (caracteristici elastice statice (**CES**)) ca funcţii de elongaţia oscilaţiei x(t) şi, respectiv, y(t)

(17.15)

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{d[\Omega dex\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)]}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d[\Omega dex(\theta+\frac{\pi}{2})]}{d\theta} = -\Omega^{2} \dfrac{s(1-s^2)\sin\,(\theta+\frac{\pi}{2}}{[1-s^2.sin^2(\theta+\frac{\pi}{2}]^{1.5}} = -\Omega^2 \dfrac{s(1-s^2)cos\theta}{(1-s^2.cos\theta)^{1.5}} \\ \ddot{y} = \dfrac{d[\Omega dex\theta]}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d[\Omega dex\theta]}{d\theta} = -\Omega^{2} \dfrac{s(1-s^2)sin\theta}{(1-s^2.sin^2\theta)^{1.5}} \end{cases}$$

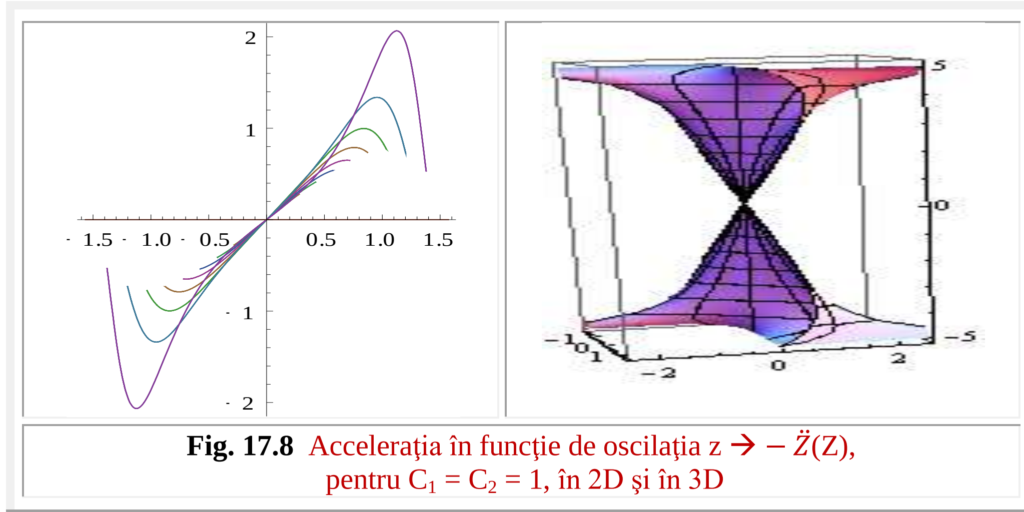


Fig. 17.8 Acceleraţia în funcţie de oscilaţia z → $-\ddot{Z}$(Z), pentru $C_1 = C_2 = 1$, în 2D şi în 3D

Derivatele **FSM-CE dexθ** sunt date în lucrarile [1], [2], [3], [4],[14] ş.a. şi au expresiile (17.15).

Acceleraţiile mişcării oscilatorii a **SOβ** sunt

(17.16) $$\ddot{z}(t) = -\Omega^2.s(1-s^2)\left[C_1\frac{\cos\theta.}{(1-s^2.\cos^2\theta)^{1,5}} + C_2\frac{\sin\theta}{(1-s^2.\sin^2\theta)^{1.5}}\right]$$

cu graficele din **figura 17.5**, pentru $C_1 = C_2 = 1$, împreuna cu elongaţiile şi vitezele de oscilaţie.

Deoarece elongaţiile diferă semnificativ de deplasările din **mişcarea circulară excentrică** (**MCE**), curbele integrale din planul fazelor, care se exprimă în funcţie de elongaţii, diferă şi ele semnificativ de cele din mişcarea circulară excentrică (**MCE**).

În **figura 17.5** sunt redate curbele integrale din planul fazelor, pentru fiecare oscilaţie x şi y separat, curbele lor fiind identice.

Din **figura 17.5,a** se observă că pentru excentricitate **s = e = 0** oscilaţia încetează, iar pentru valori mici ale excentricităţii **s** sau **e** curbele integrale din planul fazelor se apropie de cerc, adică de oscilaţii liniare, în timp ce, pentru valori ridicate ale excentricităţii numerice **s** sau a celei reale **e** oscilaţiile sunt puternic neliniare. Ceea ce se observa şi mai bine în **figura 17.5b** direct pe **CES** care sunt, pentru **SOβ, CES** tari sau progresive.

17.6 CARACTERISTICI ELASTICE STATICE ALE SOβ

In **figura** 17.**4** sunt prezentate aceleaşi curbe din planul fazelor, dar pentru soluţia $z = C_1x + C_2\, y$, cu $C_1 = C_2 = 1$, iar în **figura** 17.**8** sunt prezentate **CES** care, aşa cum se observă, sunt puternic neliniare, pentru amplitudini ale elongaţiilor mari, trecând în domenii cu rigiditate negativă.

Din **figura 17.7,b,** în care curbele integrale din planul fazelor sunt reprezentate în 3D, se observă că ele sunt aceleaşi, atât pentru **s ∈ [-1, 0]** cât şi pentru **s ∈ [0, +1].**

17.7 CONCLUZII

Importanţa studiului oscilatiilor **SOβ** consistă în asemănarea lor cu vibraţiile libere ale sistemelor cu **CES Dűffing** (Fel = kx - β x^3), pentru β < 0 .

Intradevăr, dezvoltand în serii de puteri una dintre funcţiile care exprimă elongaţia **SOβ**, de exemplu pe y = arcsinu = arcsin[s.sinθ] se obţine

(17.14) $$y = \arcsin u = u + \frac{1}{2.3}u^3 + \frac{1.3}{2.4.5}u^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}u^7 + \cdots =$$
$$= u + 0.166666\, u^3 + 0{,}00297619\, u^7 + \ldots$$

şi se observă că primii doi termeni sunt identici cu cei din **CES Dűffing** pentru k = 1: (x + βx^3).

Înlocuind pe u cu expresia u = s.sinθ = sinβ(θ) se observă că, dacă **s ∈ [-1,+1],** θ ∈ [0, 2Pi] → β(θ) ∈ [-π/2, +π/2]→ u ∈ [-1, +1] şi se deduce că vibraţia are loc pentru amplitudini u subunitare.

Motto : ” Un om creativ este motivat de dorinţa de a realiza ceva,
şi nu de dorinţa de a-i invinge pe ceilalţi.”   Ayn Rand”

Capitolul 18

FUNCŢII SUPERMATEMATICE PE CONICE (CENTRICE, EXCENTRICE, ELEVATE ŞI EXOTICE)

18.1 DESPRE CON CIRCULAR DREPT şi CONICE, CENTRICE şi EXCENTRICE

Conul circular drept este corpul geometric obţinut prin rotaţia completă (2π) a unui triunghi dreptunghic în jurul unei catete ale sale.

Mantaua conului circular drept, este **suprafaţa generată** a conului, rezultată oprin rotirea uneia din cele două drepte, oricare, concurente într-un punct, punct ce va fi numit **vârful** conului.

Conicele matematice sunt **curbele** care rezultă din intersectarea unor **plane** cu suprafaţa exterioară sau **mantaua** unui con circular drept. Forma acestor curbe poate să difere destul de mult, în funcţie de poziţia planului faţă de axa conului **Fig.18.1,a**.

Rezultă că, prin conice sunt denumite, de fapt, o familie (**gen** sau **tipuri**) de familii de curbe foarte diferite, numite în mod obişnuit „**conice**”. Ele au fost studiate din antichitate, de exemplu de **Apollonius** din Perga, cel care a distrus / spart imaginea grecilor despre perfecţiunea **cercului**, introducând în matematică **elipsa**, **parabola** şi **hiperbola**, în sec. III î.e.n.

18.2 GENURI sau TIPURI DE CONICE

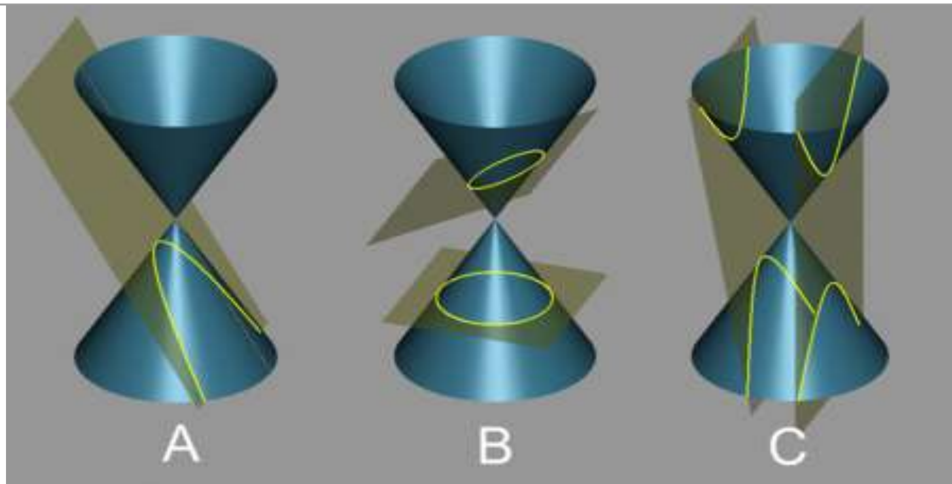
Din intersecţia unui plan cu un con circular drept apar două tipuri de curbe: **închise**, ca **cercul şi elipsa** şi **deschise**, ca **parabola şi hiperbola**.

În cazul în care se generază o **curbă închisă**, aceasta va fi un **cerc**, dacă planul este perpendicular pe axa de simetrie a conului. Şi o **elipsă**, dacă planul nu este perpendicular pe axa de simetrie şi intersectează două generatoare diametral opuse ale conului (cazul particular, în care planul este perpendicular pe axa conului, fiind **cercul**) cazul **B** din **figura 18.1,a.** În celelalte cazuri posibile, va apărea o **parabolă**, dacă planul este paralel cu generatoarea conului şi situat la o distanţă de axa conului mai mică decât raza cercului de bază (**Fig.18.1,a**, cazul **A**), sau o hiperbolă (**Fig.18.1,a** cazul **C**), dacă planul are o înclinare mai mare decât unghiul de înclinare al generatoarelor faţă de axa conului. În cazul hiperbolei apar de fapt două curbe deschise (uneori una dintre ele este ignorată). În general sunt ignorate de asemenea cazurile în care planul trece prin vârful conului, ori unghiul la vârf al conului este de 90 de grade.

Odată cu apariţia **supermatematicii** (1978 → [1]) fiecare obiect matematic s-a multiplicat de la unu la infinit, astfel că şi **conul circular drept** a suferit aceleaşi transformări, unele dintre ele fiind reprezentate în **figura 18.1,b**.

Aşa cum s-a arătat în Vol I, **supermatematica** nu face distincţie între cerc şi pătrat sau între elipsă şi dreptunghi, ambele curbe fiind obţinute cu aceleaşi ecuaţii parametrice; diferind doar valoarea **excentricităţii numerice s**, care, pentru formele centrice (**cerc, elipsă**) are valoarea **zero**, iar pentru formele excentrice (**pătrat, dreptunghi**) are valoarea **± 1**.

Conice pe con circular drept centric (s = 0) (Sursa Wikipedia şi **COLEGIUL NAŢIONAL "ANA ASLAN" TIMIŞOARA)**



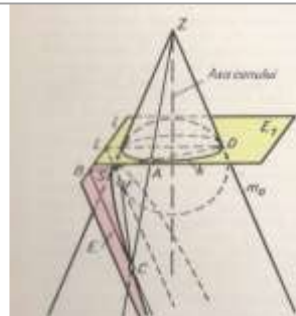
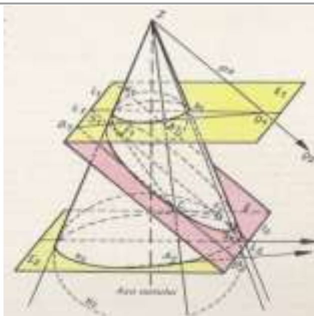
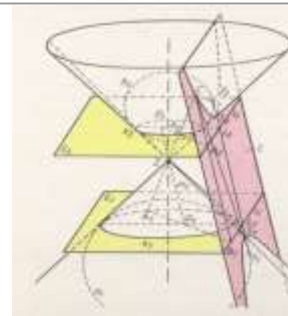
Parabola ca secţiune conică	**Elipsa** ca secţiune conică	**Hiperbola** ca secţiune conică
		

Fig.18.1,a Secţiuni conice (Sursa: Mica Enciclopedie Matematică, Ed.Tehnică, Buc. 1980)

În **figura 18.1,b**, pentru **s = 0** s-a obţinut un **con clasic**, pentru **s = 0,8** un con cu baza o excentrică circulară de excentricitate numerică **s = 0,8**, sau un pătrat cu

colţurile rotunjite şi cu laturile uşor curbate, iar pentru **s = ± 1**, conul a degenerat într-o **piramidă** cu baza un pătrat perfect !. Dacă, în **2D**, s-au şters graniţele dintre **cerc** şi **pătrat**, **cerc** şi **triunghi** ş.a., în **3D** s-au şters graniţele dintre **sferă** (**s = 0**) şi **cub** (**s = ± 1**), dintre **con** şi **piramidă** ş.a., dacă excentricitatea numerică este constantă, sau dacă excentrul **S(s,ε)** este un **punct fix** în plan.

Dacă excentrul **S(s,ε)** este un **punct mobil**, adică, excentricitatea numerică **s** este variabilă, atunci se obţin forme **3D** (corpuri / obiecte geometrice) **hibride**, inexistente anterior în matematica ordinară centrică.

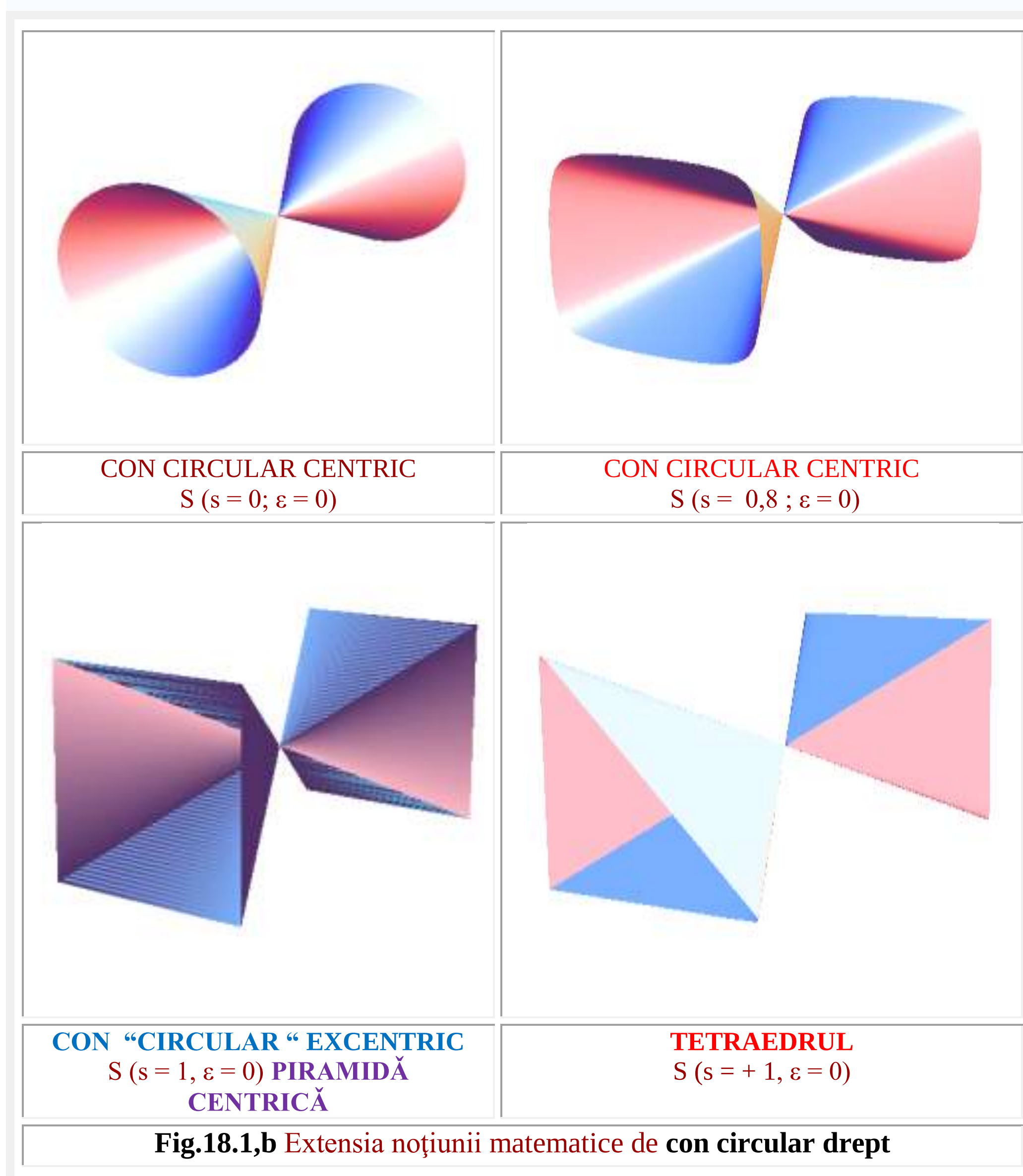


Fig.18.1,b Extensia noţiunii matematice de **con circular drept**

Astfel de obiecte **3D hibride** sunt prezentate în **figura 18.1,c**, şi ele sunt: **cono - piramida**, **sfero - cubul**, **cono - tetraedrul** ş.a. prezentate împreună cu proiecţiile lor pe 3 plane reciproc perpendiculare.

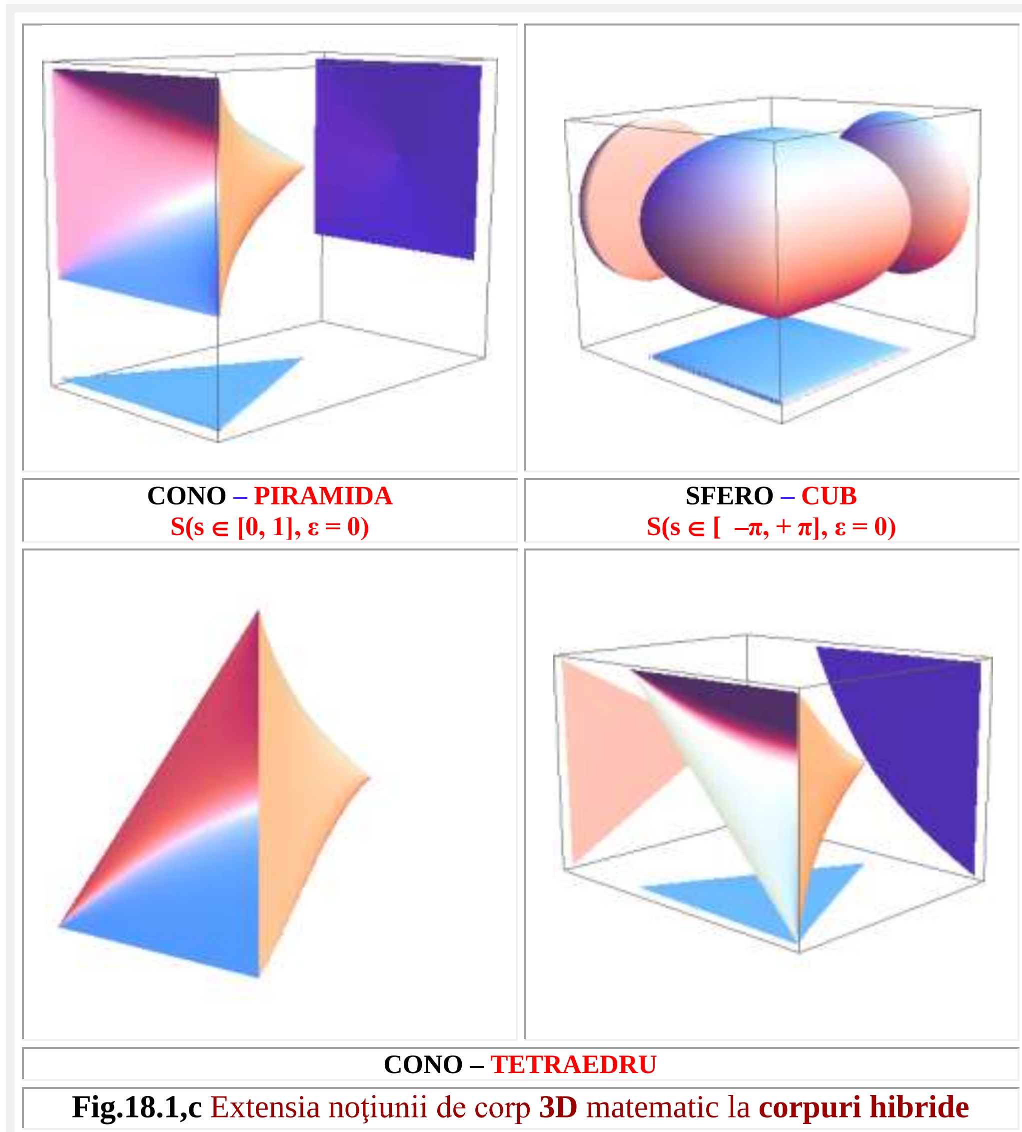


Fig.18.1,c Extensia noţiunii de corp **3D** matematic la **corpuri hibride**

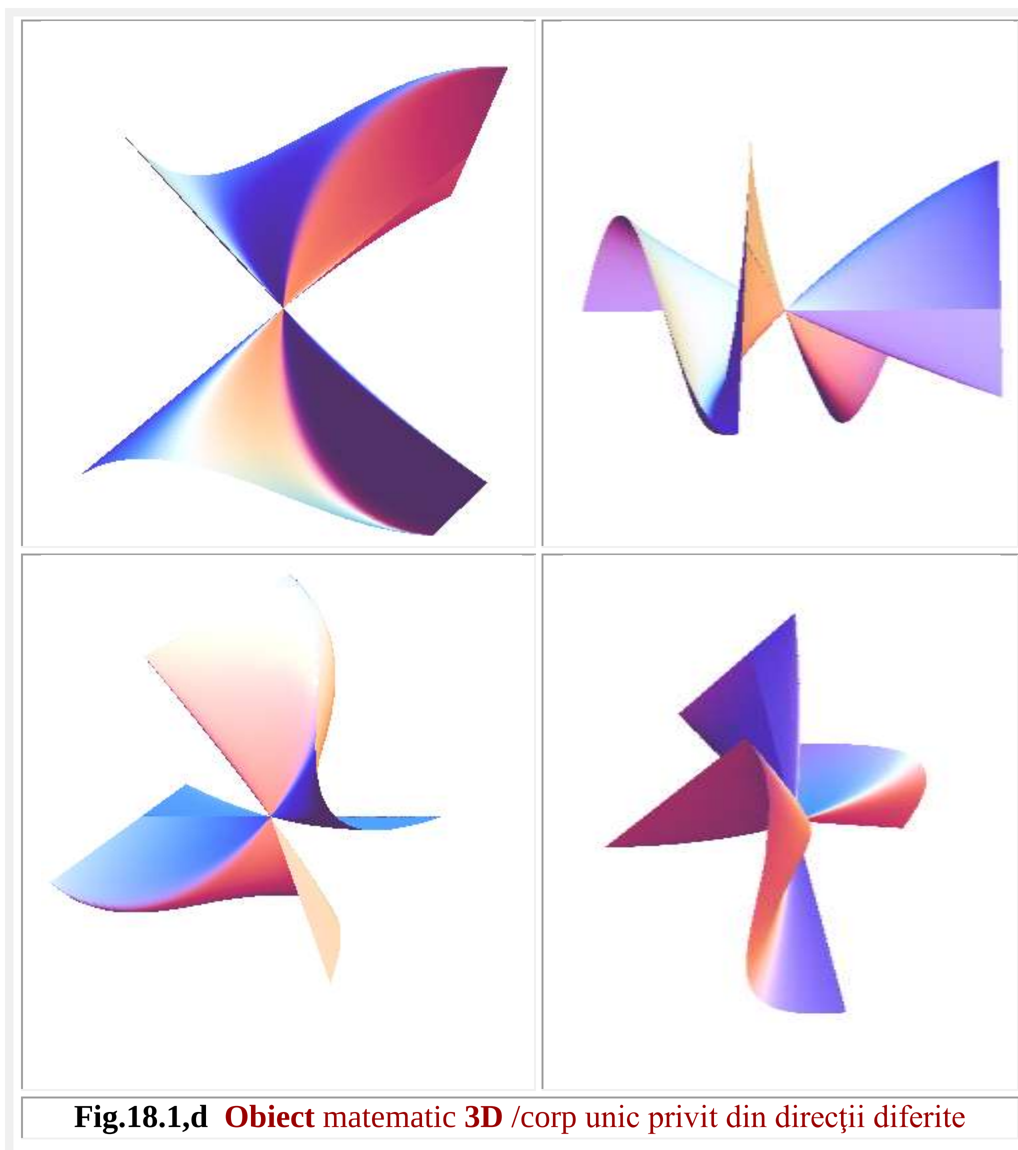


Fig.18.1,d **Obiect** matematic **3D** /corp unic privit din direcţii diferite

Modul simplu de reprezentare a unor obiecte complexe, inclusiv a unor obiecte tehnice, cu ajutorul **noilor funcţii supermatematice**, a facilitat şi încurajat apariţia matematicii concretului util, vizual, al unor noi posibilitaţi **CAD - CAM** denumite **SM – CAD - CAM**, care pot realiza o economie considerabilă de memorie şi de putere de calcul.

Urmărind şi să insuflăm proiectanţilor de structuri şi creatorilor de forme constructive o sensibilitate pentru **formele geometrice supermatematice** mai atractive şi să le imbogaţim repertoriul acestor forme, ca o sursă de inspiraţie pentru căutarile lor viitoare / ulterioare, prezentăm în continuare şi alte transformări excentrice de

suprafeţe şi de corpuri, realizate cu ajutorul **FSM-CE** ca cel din **figura 18.1,d**.

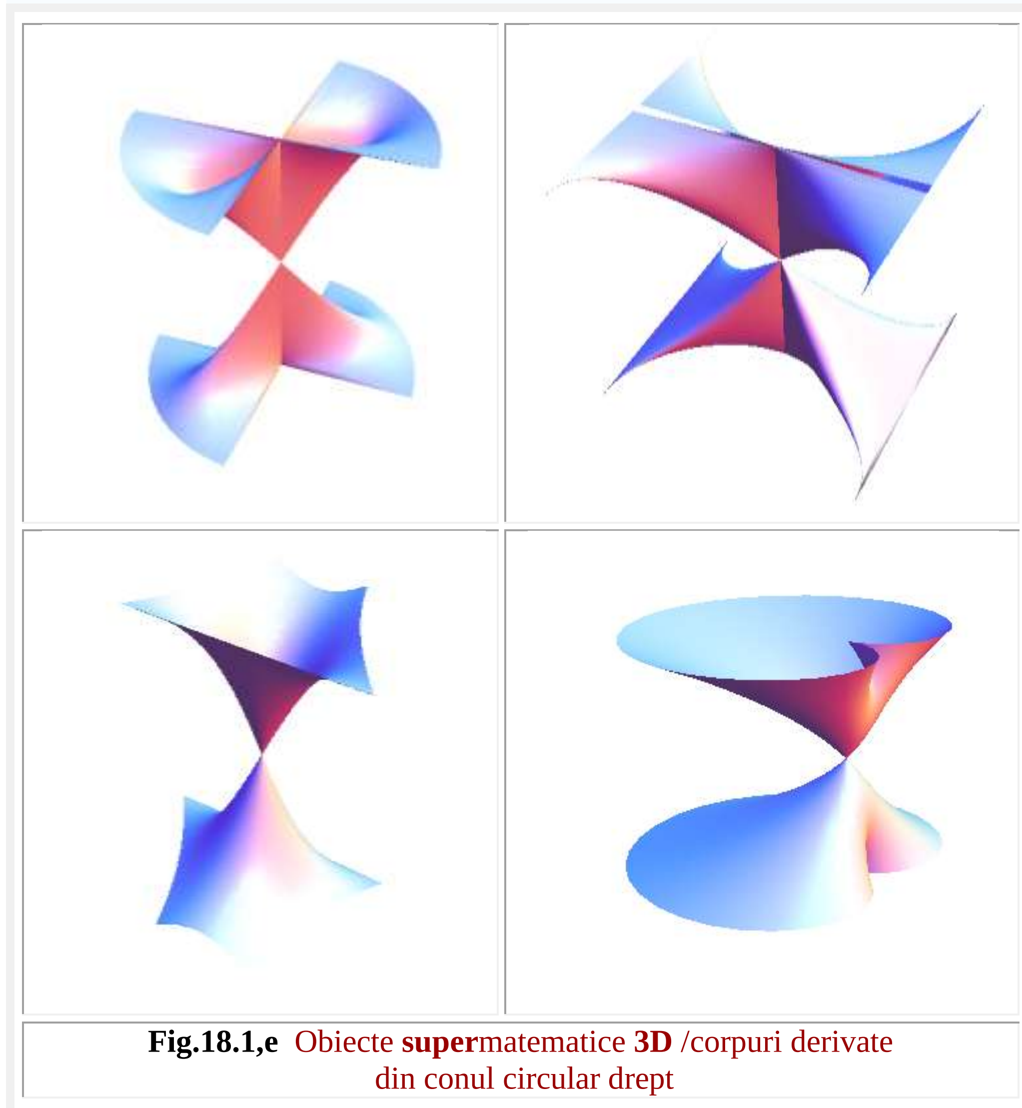


Fig.18.1,e Obiecte **super**matematice **3D** /corpuri derivate din conul circular drept

Şi acest obiect matematic are la bază **FSM-CE** radial excentric de variabilă excentrică, ecuaţiile parametrice ale obiectului **3D** fiind

(18.1) $\begin{cases} x = rex\,(\theta, S) \\ y = s.sin\theta.sin3\theta, \\ z = -s \end{cases}$ pentru excentrul **S(s ∈ [–1, + 1], ε = 0), θ** ∈ [0, 2π]

Nici aceste **conuri supermatematice** (**Fig.18.1,e** şi **Fig.18.1,f**) nu sunt lipsite de unele atribute artistice, din care cauză, considerăm noi, şi-au câştigat dreptul de etalare în această lucrare.

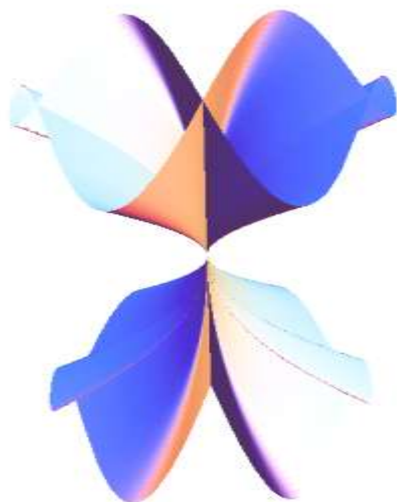
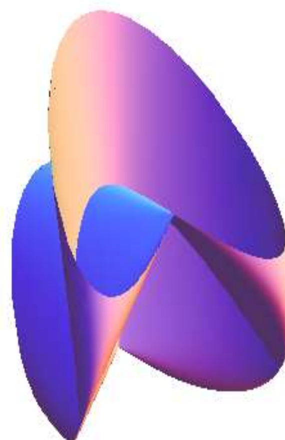
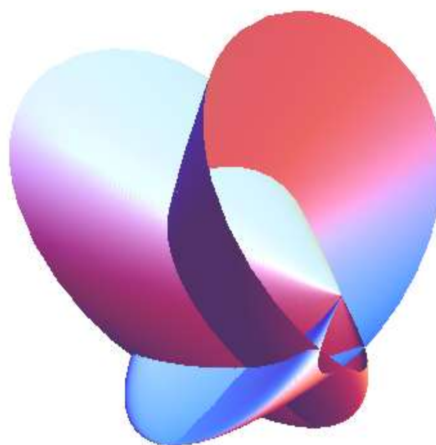
ParametricPlot3D[{{(0.1 u) Sin[3 t] Cos[t], (0.1 u)^2 Sin[t], -0.1 u}} , {u,-10,10},{t,0,2 Pi}, PlotPoints→40, PlotStyle→ Specularity [White,50], Mesh→None, Axes→False, Boxed→False]	ParametricPlot3D[{{(0.1 u Cos[t]+Sqrt[1-(0.1 u Sin[t])^2]) Cos[2 t], (0.1 u Cos[t]+Sqrt[1-(0.1 u Sin[t])^2]) Sin[t], -0.1 u}}, {u,-10,10},{t,0,2 Pi}]
	
ParametricPlot3D[{{Sqrt[1-(0.1 u)^2 -0.2 u Cos[t]] Cos[2 t], (0.1 u Cos[t]+Sqrt[1-(0.1 u Sin[t])^2]) Sin[3 t], -0.1 u}},{u,-10,10},{t,0,2 Pi	ParametricPlot3D[{{(0.1 u Cos[t]+Sqrt[1-(0.1 u Sin[t])^2]) Cos[2 t], (0.1 u Cos[t]+Sqrt[1-(0.1 u Sin[t])^2]) Sin[3 t], -0.1 u}},{u,-10,10},{t,0,2 Pi}]
	

Fig.18.1,f Obiecte **supermatematice 3D,**
corpuri derivate din conul circular drept

18.3 REPREZENTAREA CONICELOR CIRCULARE CENTRICE

În coordonate carteziene, conicele sunt reprezentate de mulţimea punctelor care satisfac următoarea ecuaţie:

(18.2) $$F(X,Y) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Genul şi natura conicei se determină prin axaminarea determinanţilor

(18.3) $$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

(18.4) $$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

numiţi invarianţi.

Clasificarea conicelor în funcţie de valorile invarianţilor este prezentată în **tabelul 18.1**.

CLASIFICAREA CONICELOR			Tabelul 18.1
Genul conicei	**INVARIANŢII**	**NATURA CONICEI**	**FORMA ECUAŢIEI**
$\delta > 0$ **ELIPSĂ**	$A.\Delta < 0$ sau $C.\Delta < 0$	**ELIPSĂ** reală	$P^2 + Q^2 - 1 = 0$
	$A.\Delta > 0$ sau $C.\Delta > 0$	ELIPSĂ imaginară	$P^2 + Q^2 + 1 = 0$
	$\Delta = 0$	Drepte imaginare	$P^2 + Q^2 = 0$
$\delta < 0$ **HIPERBOLĂ**	$\Delta \neq 0$	**HIPERBOLĂ**	$P^2 + Q^2 - 1 = 0$
	$\Delta = 0$	Două drepte concurente reale	$P^2 - Q^2 = 0$
$\delta = 0$ **PARABOLĂ**	$\Delta \neq 0$	**PARABOLĂ**	$P^2 + Q^2 = 0$
	$\Delta = 0$	Două drepte paralele	$P^2 - 1 = 0$

Atunci:

- dacă $B^2 - 4AC < 0$, ecuaţia reprezintă o elipsă reală, dacă are soluţii, iar dacă, de exemplu $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nu are nicio soluţie, reprezintă o elipsă imaginară; dacă $A = C$ şi $B = 0$, ecuaţia reprezintă un cerc;
- dacă $B^2 - 4AC = 0$, se obţine o parabolă;
- dacă $B^2 - 4AC > 0$, ecuaţia reprezintă o hiperbolă;
- dacă şi $A + B = 0$, avem o hiperbolă dreaptă (v. Cap. 2.5 Funcţiile pseudo - hiperbolice ale lui **Eugn Vişa**, Vol I, pag.62 ... 65) sau două drepte concurente reale.

A şi B sunt coeficienţi polinomiali, nu lungimile axelor geometrice ale curbelor a şi b.

Schimbând coordonatele, se poate ajunge la ecuaţiile binecunoscute ale acestor curbe (restricţionate însă la a fi simetrice faţă de una sau ambele axe ale sistemului de coordonate):

Tabelul 18.2

PARAMETRII CONICELOR

CONICA	Semi-axa mare a	Semiaxa mică b	Parametrul $p=\frac{b^2}{a}$	Excentricitatea Reală $e \equiv c$	Excentricitatea Numerică $k \equiv \epsilon = \frac{e}{a}$
CERC	R	R	R	0	0
CERC UNITATE	1	1	1	0	0
ELIPSA	a	b	$\frac{b^2}{a}$	$\sqrt{a^2-b^2}$	$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
ELIPSA UNITATE	1	$\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$	$\frac{1}{1-k^2}$	$\frac{i.k}{\sqrt{1-k^2}}$	k ∈ (0, 1)
PARABOLA	–	–	p	–	1
PARABOLA UNITATE	–	–	1	–	1
HIPERBOLA	a	b	p	$\sqrt{a^2+b^2}$	k > 1
HIPERBOLA UNITATE	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
	ECHILATERĂ				

(18.5)

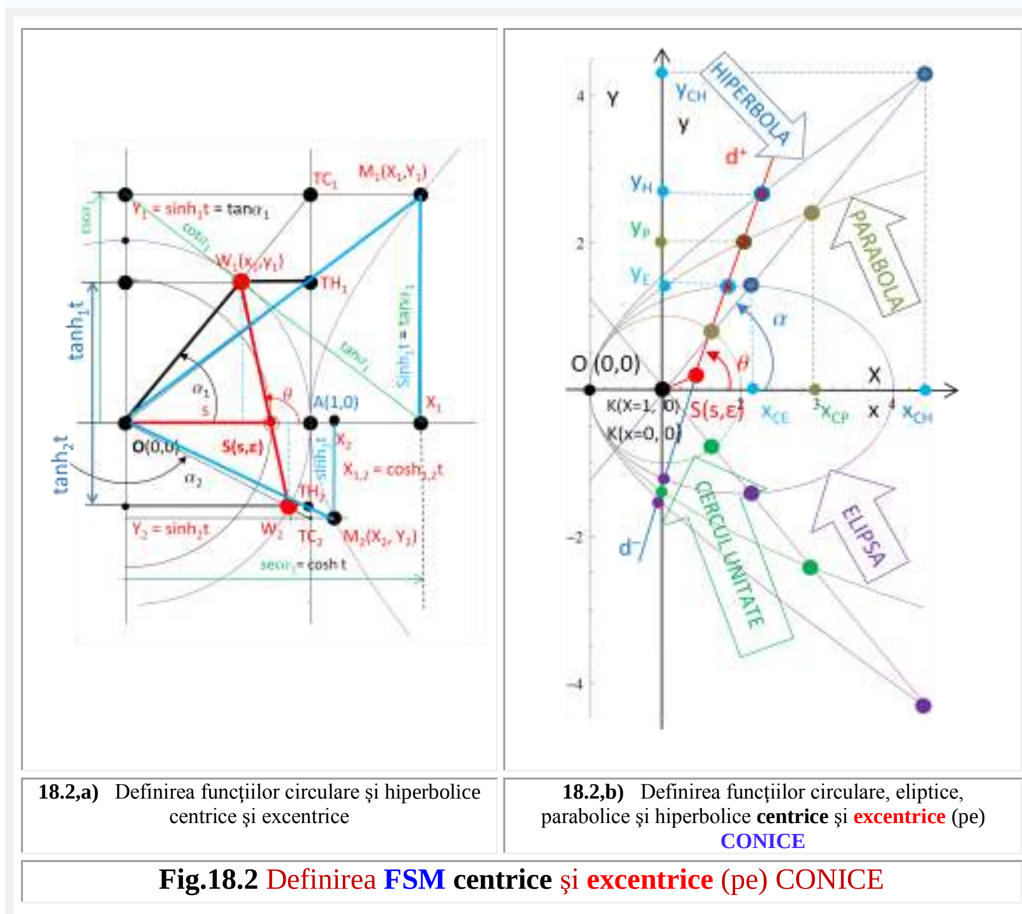
- Cerc: $x^2 + y^2 = a^2$
- Elipsă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Parabolă $y^2 = 4ax$:
- Hiperbolă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Scrise parametrizat, ecuaţiile sunt:

(18.6)

- Cerc: $\begin{cases} X = a.cos\theta \\ Y = a.sin\theta \end{cases}$
- Elipsă: $\begin{cases} X = \ a.cos\theta \\ y = \ b.sin\theta \end{cases}$,
- Parabolă: $\begin{cases} X = a.t^2 \\ Y = 2at \end{cases}$,
- Hiperbolă: $\begin{cases} X = \ a.sec\theta \\ Y = btan\theta \end{cases}$, sau $\begin{cases} X = \ \pm a.coshu, \\ y = b.sinhu \end{cases}$.

18.4 FUNCŢII (PE) CONICE CENTRICE

O parte dintre funcţiile reprezentate pe conice sunt funcţii periodice, precum, de exemplu, cele pe cerc şi pe elipsă, iar altele, ca de exemplu funcţiile hiprbolice, nu sunt periodice, iar funcţii „trigonometrice" pe parabolă încă n-au fost definite, nici măcar neperiodice, exceptând funcţia „polinom de gradul doi" denumită şi „funcţie parabolică".



18.2,a) Definirea funcţiilor circulare şi hiperbolice centrice şi excentrice

18.2,b) Definirea funcţiilor circulare, eliptice, parabolice şi hiperbolice **centrice** şi **excentrice** (pe) **CONICE**

Fig.18.2 Definirea **FSM** **centrice** şi **excentrice** (pe) CONICE

Ecuaţia polară a tuturor conicelor, cu polul în vârful conicelor **V** ≡ **O** este

(18.6) $$R = \frac{2.b^2 cos\psi}{a(1-k^2\, cos^2\psi)} \quad \text{sau} \quad R = 2p\frac{cos\psi}{1-k^2 cos^2\psi}$$

în care **R** este raza polară din vârful şi originea **V (0,0) ≡ O(0,0)** (**Fig.2,b**) şi ψ este unghiul polar din **V**, iar a, **b**, **p** şi **k** sunt parametrii conicelor, daţi în **tabelul 18.2.**

Prin proiecţia razei polare R pe cele două axe X şi Y cu originea în V(0,0) se obţin ecuaţiile parametrice ale conicelor cu originea axelor în vârful lor V(0,0)

(18.7) $$\begin{cases} X = R.cos\psi = \dfrac{2.b^2 cos^2\psi}{a(1-k^2\, cos^2\psi)} = 2p\dfrac{cos^2\psi}{1-k^2 cos^2\psi} \\ Y = R\, sin\psi = \dfrac{2.b^2 cos\psi.sin\psi}{a(1-k^2\, cos^2\psi)} = 2p\dfrac{cos\psi sin\psi}{1-k^2 cos^2\psi} = \dfrac{b^2.sin2\psi}{a(1-k^2\, cos^2\psi)} = p\dfrac{sin2\psi}{1-k^2\, cos^2\psi} \end{cases}$$

Ele ar putea fi denumite cosinusul şi, respectiv, sinusul conicelor şi ar putea fi notate cu

(18.8) $$\begin{cases} X = cocv[\psi, p, k] \\ Y = sicv[\psi, p, k] \end{cases}$$

în care **co** şi **si** provin de la **co**sinus şi, respectiv de la **si**nus, iar **c** de la **c**onice şi **v** de la polul din **v**ârful V(0,0). Numai că, în acest fel, pentru cerc, de exemplu, funcţiile nu se corespund cu cele clasice centrice **cosα** şi **sinα** care au polul în centrul cercului O (0,0) la o distanţă egală cu unitatea de vârful V(–1,0) în sistemul de coordonate xOy cu originea în O(0,0), paralel cu sistermul de coordonate considerat antrior **XVY**.

Dacă, în (18.7), se introduc valorile din **tabelul 2** pentru cercul unitate / trigonometric (k = 0, p = 1), se obţin funcţiile **trigonometrice centrice** cu polul în vârful V(–1,0)

(18.9) $$\begin{cases} X = 2cos^2\psi \\ Y = sin2\psi \end{cases}$$

Se ştie că **unghiul α**, cu vârful în centrul cercului unitate O(0,0), este dublul unghiului ψ, din vârful V(–1,0), care aparţine / (este situat) cercului unitate, adică

(18.10) $$\alpha = 2\psi.$$

Legătura dintre cele două sisteme este

(18.11) $$\begin{cases} X = 1 + x = 1 + cex[\theta = \psi, S(1,\pi)] \\ Y = y = sex[\theta = \psi, S(1,\pi)] \end{cases}, \quad \text{sau}$$

$$\begin{cases} x = X - 1 = 2cos^2\psi - 1 = cos^2\psi - sin^2\psi = cos2\psi = \boldsymbol{cos\alpha} \\ y = Y = sin2\psi = \boldsymbol{sin\alpha} \end{cases}$$

Şi, aşa cum era de aşteptat, s-au obţinut funcţiile circulare centrice (**FCC) cosα** şi **sinα**, ca o verificare a veridicităţii ecuaţiilor (18.7).

Ca urmare, ecuaţiile generale parametrice ale **conicelor centrice circulare** drepte cu originea O(0,0) în **centrul cercului unitate** vor fi date de expresiile

(18.12) $$\begin{cases} x(\alpha) = X(\psi) - 1 \\ y(\alpha) = Y(\psi) \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x(\propto) = \boldsymbol{coc} \propto = \dfrac{(2p+k^2)cos^2\frac{\propto}{2} - 1}{1-k^2 cos^2\frac{\propto}{2}} \\ y(\propto) = \boldsymbol{sic} \propto = \dfrac{b^2.sin\propto}{a(1-k^2\, cos^2\frac{\propto}{2})} = p\dfrac{sin\propto}{1-k^2\, cos^2\frac{\propto}{2}} \end{cases}$$

Rezultă ca **sinusul** (***sicα***) şi **cosinusul** (***cocα***) pe conice centrice unitare depinde de argumentul ***α***, care este un arc de cerc, pentru **toate** conicele şi de doi parametri **p** şi **k** (**Tab.2**).

Se ştie că o conică este definită de parametrul **2p** şi de excentricitatea numerică $\epsilon \equiv k$, astfel că aceşti doi parametri fac distincţia dintre conicele pe care s-au definit aceste funcţii, personificându-le.

Ecuaţiile noilor funcţii (pe) conice, generalizate şi particularizate pe diversele conice, pe baza cărora sunt exprimate graficele lor, sunt prezentate concentrat în **tabelul 3**.

RELAŢIILE DE CALCUL ALE FUNCŢIILOR (PE) CONICE UNITATE							Tabelul 18.3
GENERALIZATE							
Tip ELIPTIC				**Tip HIPERBOLIC**			
Nota-ţia	**Ecuaţia**	p	k	Notaţia	**Ecuaţia**	p	k
coce α	$\frac{\frac{2+k^2-k^4}{1-k^2}cos^2\frac{\propto}{2}-1}{1-k^2cos^2\frac{\propto}{2}}$	$\frac{1}{1-k^2}$	0…2	coch α	$\frac{(2+k^2)cos^2\frac{\propto}{2}-1}{1-k^2cos^2\frac{\propto}{2}}$	1	0…2
sice α	$\frac{sin\propto\frac{1}{1-k^2}}{1-k^2cos^2\frac{\propto}{2}}$	$\frac{1}{1-k^2}$	0…2	sich α	$\frac{sin\propto}{1-k^2cos^2\frac{\propto}{2}}$	1	0…2
SPECIFICE / PERSONALIZATE							
COSINUS				**SINUS**			
Notaţia	**Ecuaţia**	p	k	Notaţia	**Ecuaţia**	p	k
cos α	cos α	1	0	sin α	sin α	1	0
coe α	$\frac{\frac{2+k^2-k^4}{1-k^2}cos^2\frac{\propto}{2}-1}{1-k^2cos^2\frac{\propto}{2}}$	$\frac{1}{1-k^2}$	0,1… 0.9	sie α	$\frac{sin\propto\frac{1}{1-k^2}}{1-k^2cos^2\frac{\propto}{2}}$	$\frac{1}{1-k^2}$	0,1…0.9
coh α	$\frac{(2+k^2)cos^2\frac{\propto}{2}-1}{1-k^2cos^2\frac{\propto}{2}}$	1	1,1… 2	sih α	$\frac{sin\propto}{1-k^2cos^2\frac{\propto}{2}}$	1	1,1…2
cop α	$\frac{3cos^2\frac{\propto}{2}-1}{sin^2\frac{\propto}{2}}$	1	1	sip α	$\frac{2sin\propto}{1-cos\propto}$	1	1

Funcţiile **cosinus** (pe) conice unitate sunt prezentate în **figura 18.3**.

Cele **generale**, prezentate în partea superioară a figurii, adică pentru **excentricităţi numerice k**, care acoperă toate conicele **k ∈ [-1,5; +1,5],** nu şi toate hiprbolele centrice, fără să ţină seama că excentricitatea numerică, separă între ele diversele conice (v. **Tab. 2**).

Ele au fost separate în două categorii: de tip **eliptic** şi de tip **hiperbolic**.

Pentru **p = 1** ele au fost denumite de **tip hiperbolic**, deoarece hiperbola unitate are **p = 1**.

Cele de **tip eliptic** au parametrul **p** egal cu acela al elipsei unitate (a = 1, b = $1/\sqrt{1-k^2}$), adică

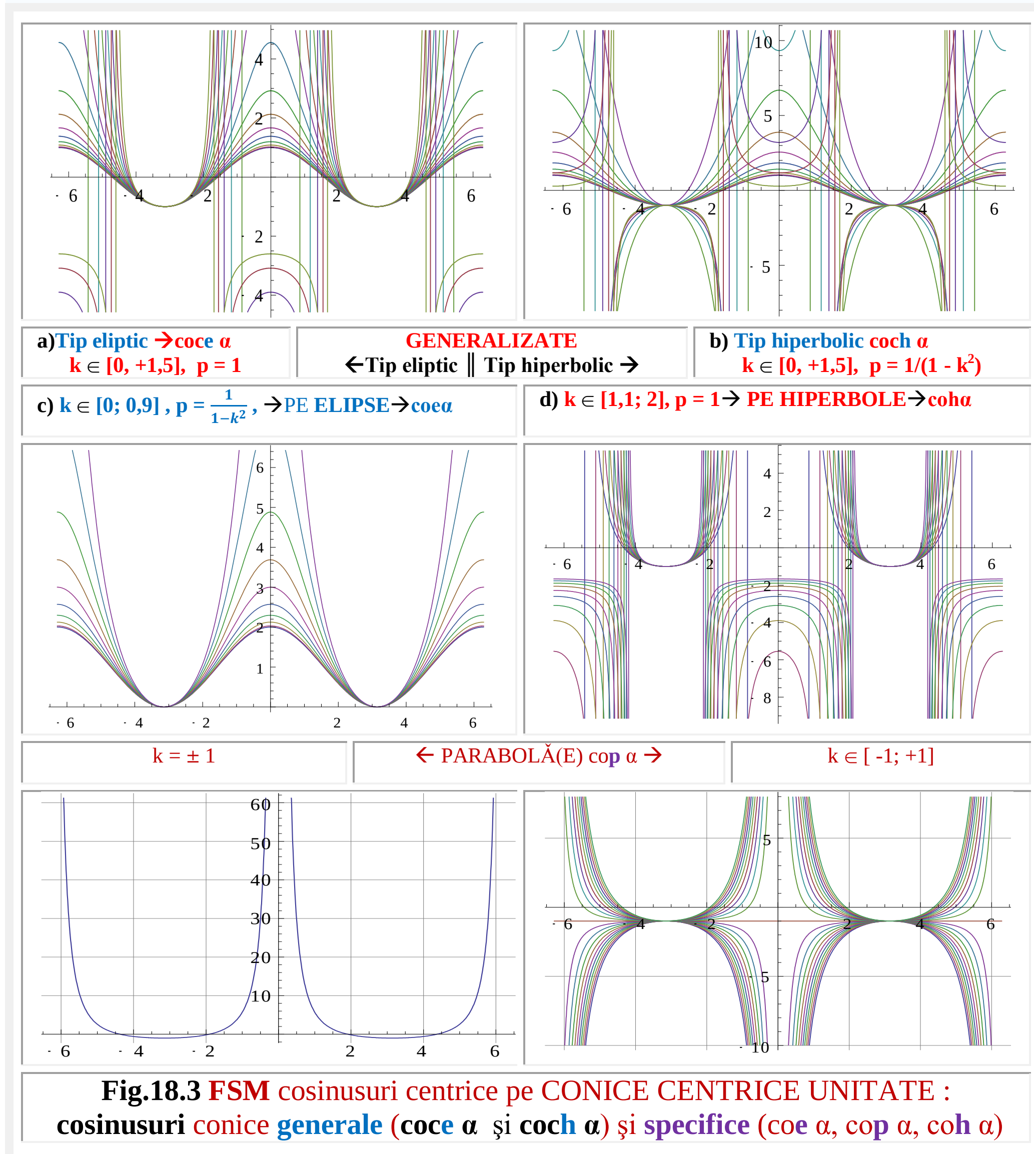


Fig.18.3 FSM cosinusuri centrice pe CONICE CENTRICE UNITATE : **cosinusuri** conice **generale** (**coce α** şi **coch α**) şi **specifice** (coe α, cop α, coh α)

(18.13) $$p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$$

În cadrul **figurii 18.3** sunt prezentate şi funcţiile cosinus specifice diverselor conice cum sunt cosinusurile conice **specifice**, obţinute prin personalizarea valorilor parametrului **p** şi a excentricităţii numerice **k** în prima relaţie (18.12), cu valorile din **tabelul 3**: Pe elipse sau **eliptice** în stânga şi pe hiperbole sau **hiperbolice** în dreapta.

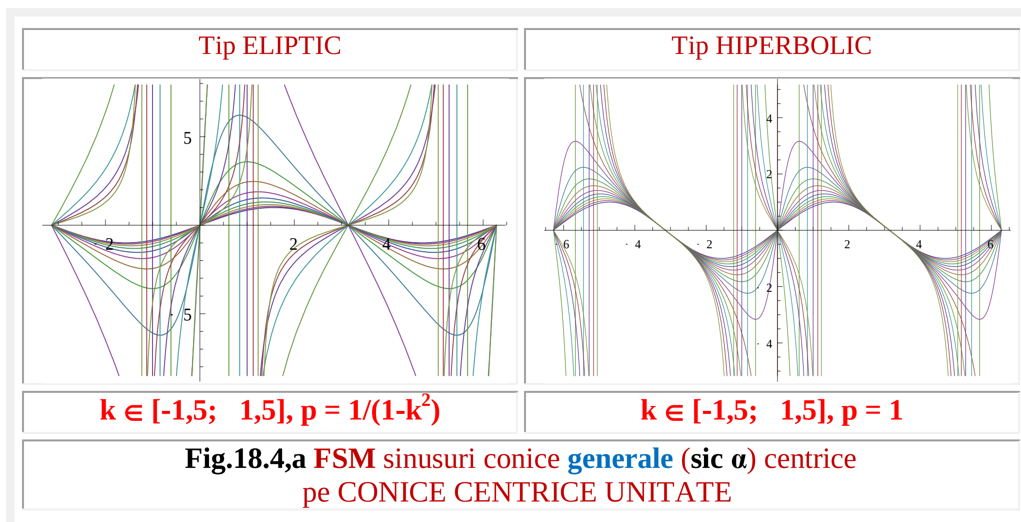


Fig.18.4,a FSM sinusuri conice **generale** (**sic α**) centrice
pe CONICE CENTRICE UNITATE

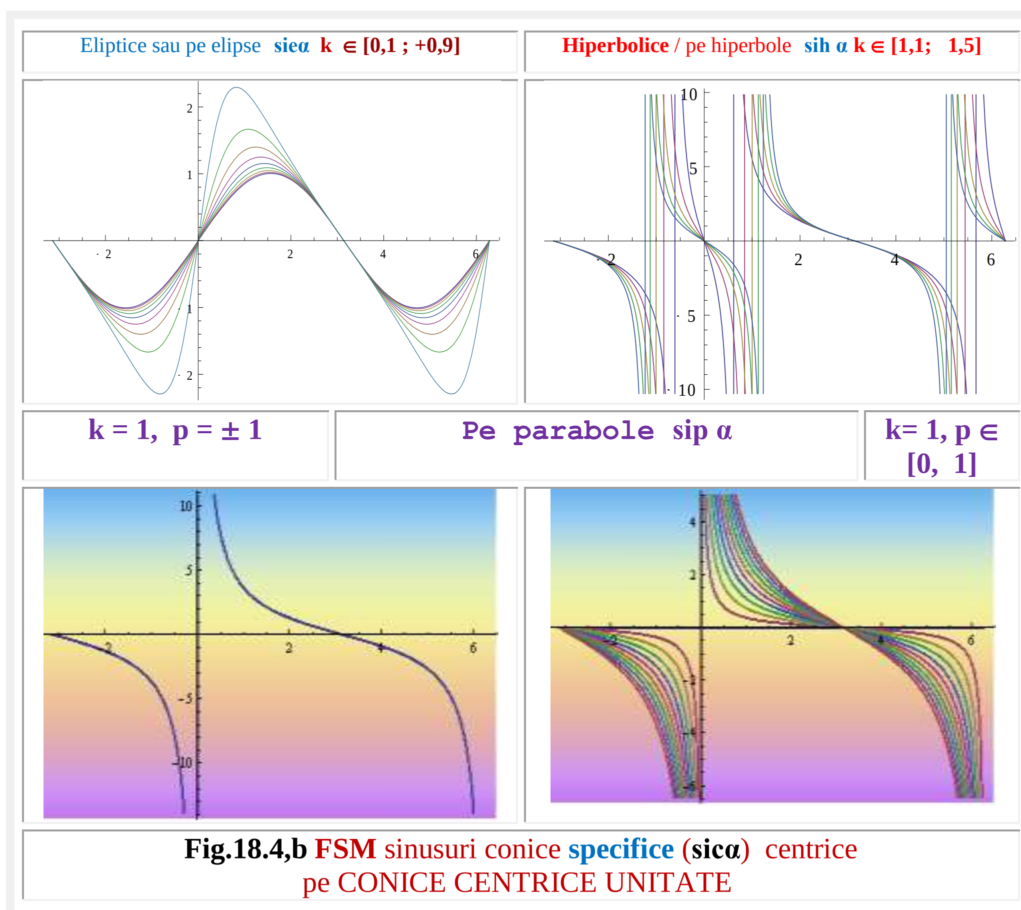


Fig.18.4,b FSM sinusuri conice **specifice** (**sicα**) centrice
pe CONICE CENTRICE UNITATE

Aşa cum rezultă din ecuaţiile (18.12), atât cosinusul cât şi sinusul pe conice depind de pătratul lui **k**, astfel că se obţin aceleaşi grafice şi pentru valorile negative ale excentricităţii numerice **k**.

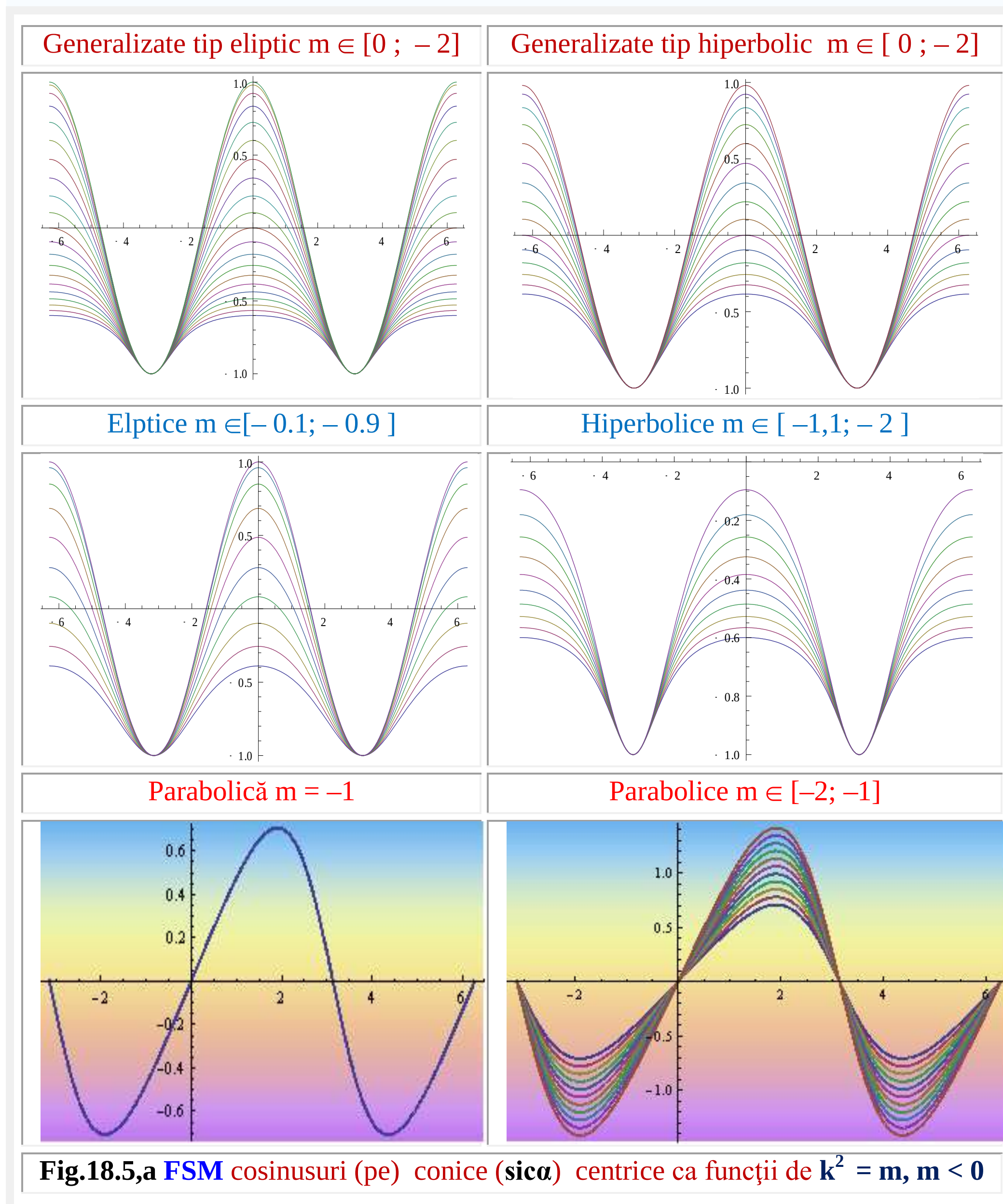


Fig.18.5,a FSM cosinusuri (pe) conice (**sicα**) centrice ca funcţii de $\mathbf{k^2 = m, m < 0}$

Dacă se vrea să se obţină şi alte valori / grafice se poate proceda ca şi în cazul **funcţiilor eliptice Jacobi** înlocuind $k^2 = m$, astfel că, în acest caz, $m < 0 \rightarrow -k^2$, aşa cum sunt prezentate graficele din **figura 18.5,a** şi **18.5,b**.

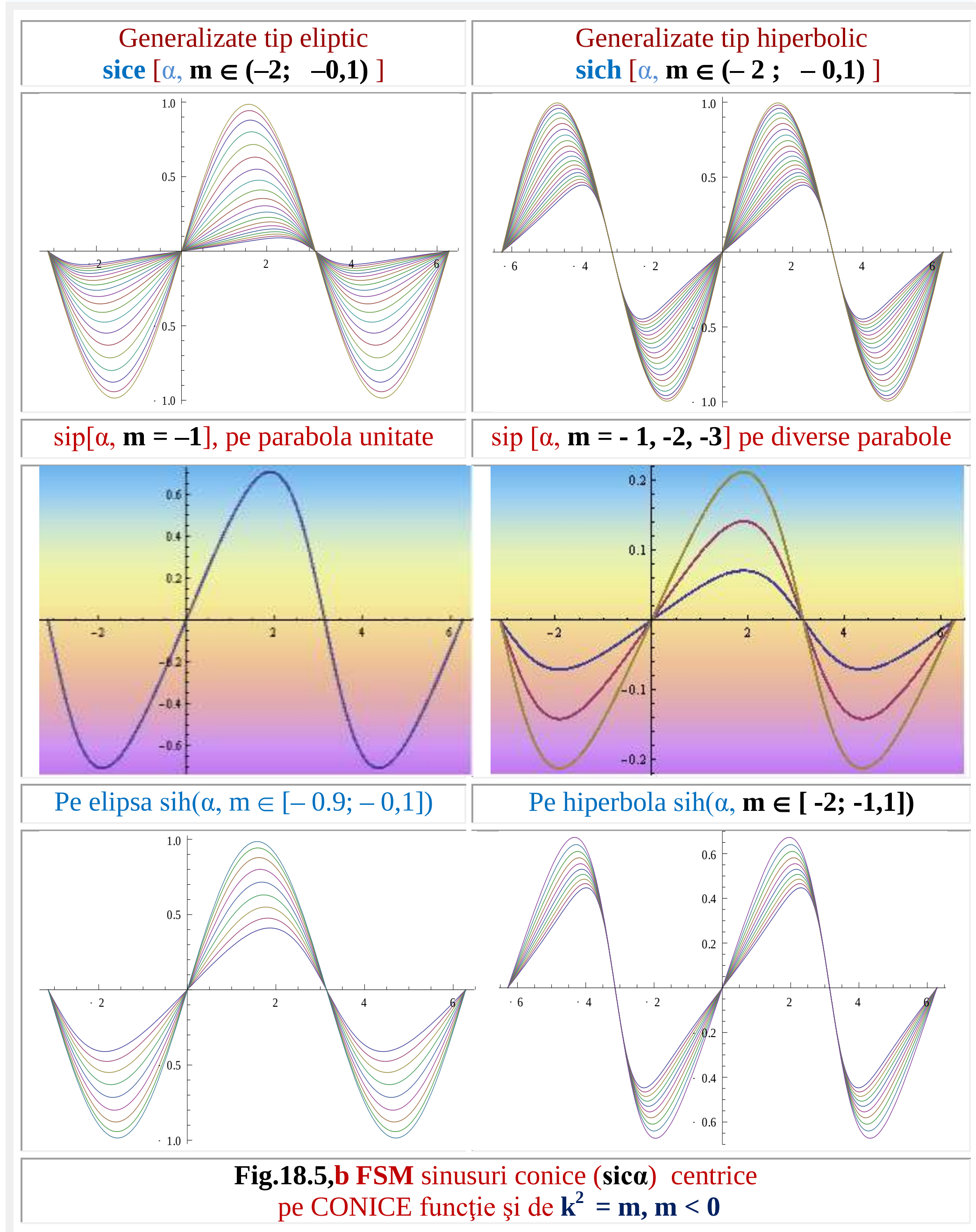


Fig.18.5,b FSM sinusuri conice (**sicα**) centrice pe CONICE funcţie şi de $\mathbf{k^2 = m, m < 0}$

Se poate observa că funcţiile cosinus conic (**FCoCo**) reprezintă câte o familie, în cazul celor eliptice şi hiperbolice, corespunzătoare familiilor de elipse şi de hiperbole rezultate pentru valorile excentricitatii **k**, iar cele circulare şi parabolice sunt unice, reprezentate de câte o singură funcţie.

Dacă funcţiile pe cercul unitate pot fi multiplicate, prin înlocuirea razei R = 1 cu raza unor cercuri oarecare **R** $\subset \mathbb{R}^+$, la fel, şi cele parabolice pot fi multiplicate prin trecerea de la **p = 1** la **p** $\subset \mathbb{R}^+$, aşa cum s-a prezentat în partea dreaptă a figurii, pastrând excentricitatea numerică la valoarea unei parabole de k = 1.

S-a procedat la fel şi în cazul funcţiilor sinus parabolic **sip α** din partea inferioară a **figurii 18.4,b** în care sunt prezentate funcţiile (pe) conice personalizat

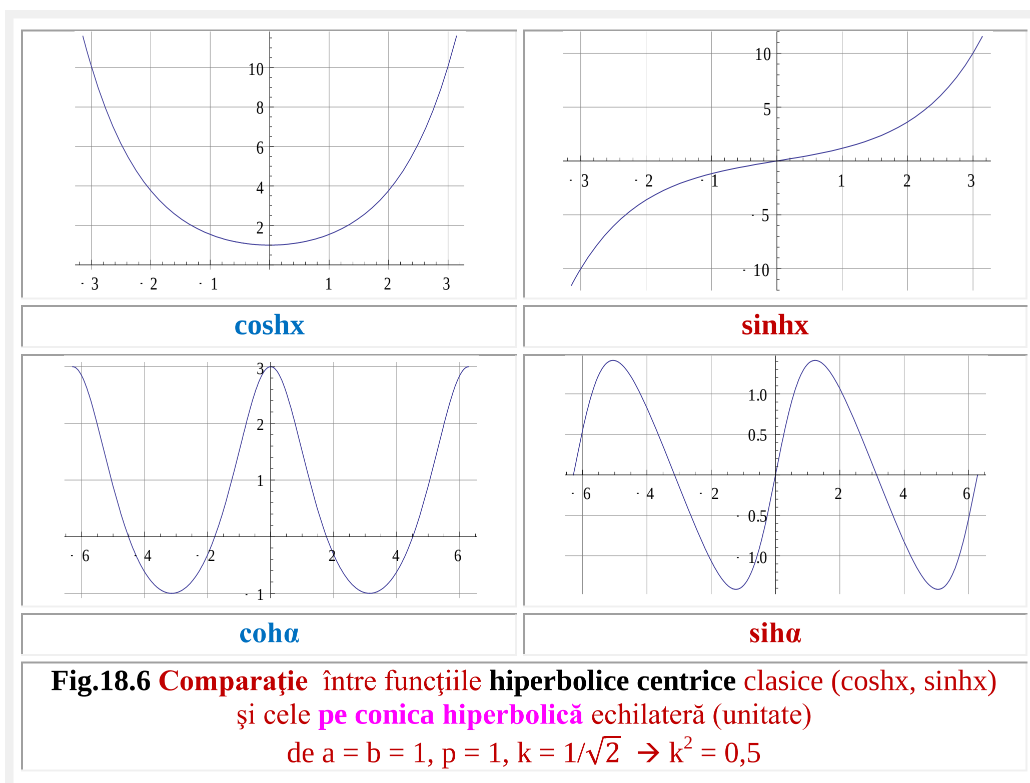


Fig.18.6 Comparaţie între funcţiile **hiperbolice centrice** clasice (coshx, sinhx) şi cele **pe conica hiperbolică** echilateră (unitate) de a = b = 1, p = 1, k = $1/\sqrt{2}$ → k^2 = 0,5

Figura 18.4,a redă graficele **FSM** sinus (pe) conice generale sau generalizate, în sensul că excentricitatea **k** nu este personalizată pe diversele conice, ci poate fi cuprinsă, teoretic, în intervalul **k ∈ [–∞, +∞].**

Deoarece graficele sunt aceleaşi pentru k > 0 şi k < 0, intervalul / domeniul se poate reduce la **k ∈[0, +∞],** nu şi domeniul lui m = k^2 dar, practic, el este ales k ∈ [0, 2] sau, în majoritatea cazurilor, chiar mai redus k ∈ [0; 1,5], pentru a putea discerne diversele curbe din domeniul hiperbolic (k > 1).

Se observă din **figura 18.4,a** că apar, în ambele tipuri, curbe asemănătoare ca formă, dar de valori diferite, cât şi curbe identice personalizate, prezentate în **figura**

18.4,b: sieα la cele de tip eliptic şi **sihα** la cele de tip hiperbolic, aşa cum este şi normal, deoarece unele funcţii personalizate, ca cele relevate, sunt conţinute în funcţiile generalizate.

În partea superioară a **figurii 18.4,b** sunt prezentate funcţiile sinus (pe) conice pe elipse **sie α**, asemănătoare unor funcţii cunoscute în literatura sub denumirea de sinus înclinat, în stânga şi cele hiperbolice, în dreapta. În partea inferioară sunt prezentate funcţiile sinus (pe parabolă) parabolic – **sip α**- pentru parabola unitate, în stânga şi, în dreapta, pentru alte parabole de p ∈ [0, 1] şi k = 1.

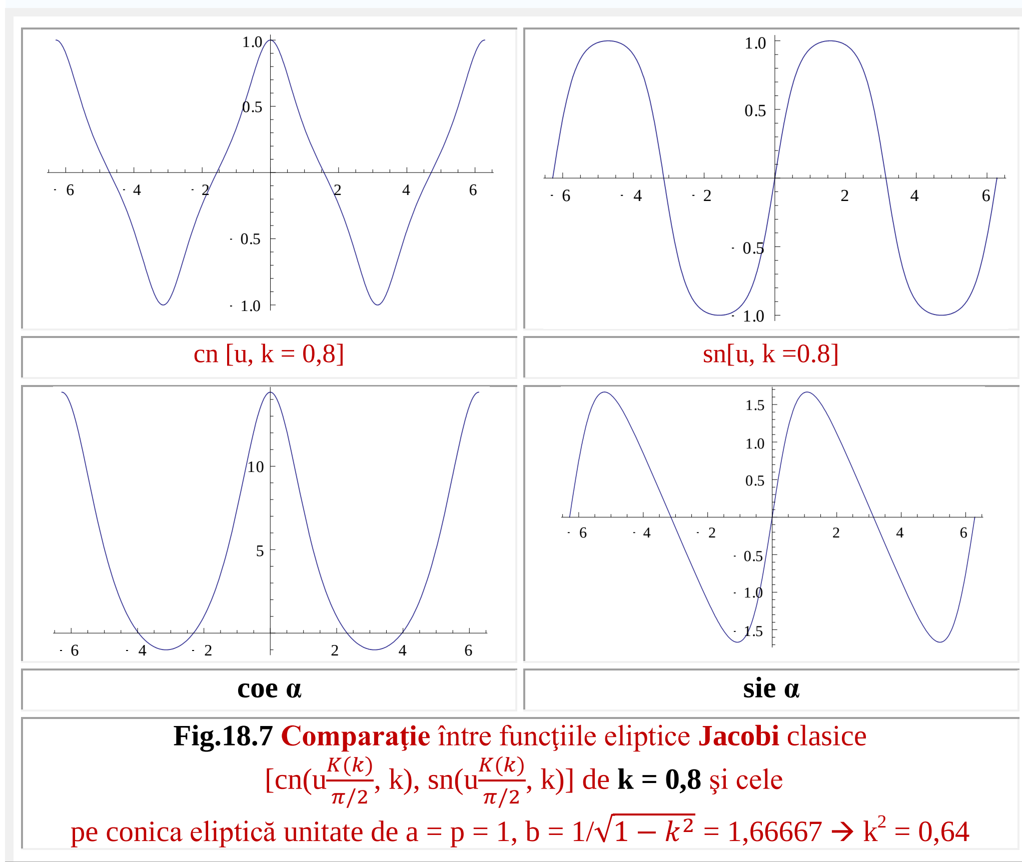
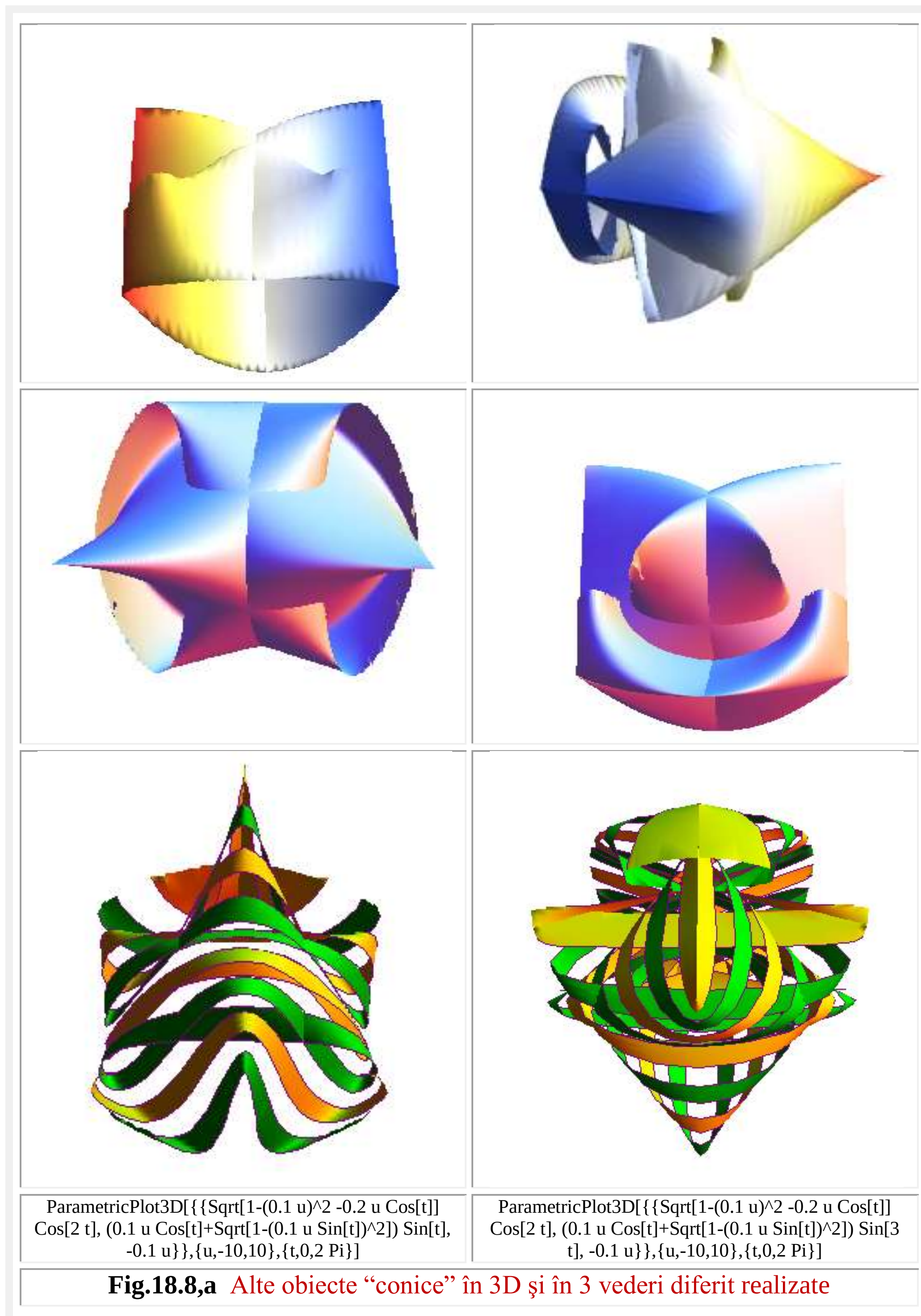


Fig.18.7 Comparaţie între funcţiile eliptice **Jacobi** clasice $[cn(u\frac{K(k)}{\pi/2}, k), sn(u\frac{K(k)}{\pi/2}, k)]$ de **k = 0,8** şi cele pe conica eliptică unitate de a = p = 1, $b = 1/\sqrt{1-k^2}$ = 1,66667 → k^2 = 0,64

Figura 18.4,a prezintă graficele funcţiilor sinus generalizate (pe) conice de tip eliptic, în stânga, şi de tip hiperbolic, în dreapta.

Figura 18.6 prezintă comparaţia, grafică, între funcţiile hiperboloce clasice **coshx, sinhx** şi cele noi pe conica hiperbolă ecghilateră (a = 1, b = 1) **coh α, sih α** şi pentru k^2 = 0,5.

Marele avantaj al **FSM** conice hiperbolice consistă în faptul ca ele sunt periodice, de perioadă 2π, deoarece argumentul lor este un **arc de cerc** spre deosebire de cele clasice care au ca argument **o suprafaţă**, ceea ce va facilita întroducerea noilor funcţii conice **excentrice** (**§ 18.5**).



ParametricPlot3D[{{Sqrt[1-(0.1 u)^2 -0.2 u Cos[t]] Cos[2 t], (0.1 u Cos[t]+Sqrt[1-(0.1 u Sin[t])^2]) Sin[t], -0.1 u}},{u,-10,10},{t,0,2 Pi}]

ParametricPlot3D[{{Sqrt[1-(0.1 u)^2 -0.2 u Cos[t]] Cos[2 t], (0.1 u Cos[t]+Sqrt[1-(0.1 u Sin[t])^2]) Sin[3 t], -0.1 u}},{u,-10,10},{t,0,2 Pi}]

Fig.18.8,a Alte obiecte “conice” în 3D şi în 3 vederi diferit realizate

Comparaţia între **funcţiile eliptice Jacobi cn(u,k)**, **sn(u,k)** şi cele **SM** pe conica eliptică unitate (a= 1, b = $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$) **coeα**, **sieα** pentru o excentricitate şi, în acelaşi timp un modul, **k = 0,8**, sunt prezentate în **figura 18.7**.

Reamintim că **funcţiile eliptice Jacobi** de argument **u** au perioada **4K(k)** şi, prin modificarea variabilei **u** → **u**$\frac{K(k)}{\pi/2}$ ele devin funcţii de perioada 2π, ca cele din **figura 18.7**.

18.5 C O N C L U Z I I

Deoarece **funcţiile (matematice)** sunt uneltele / sculele matematicii şi ale matematicianului cu ajutorul cărora se pot releva diversele suprafeţe necunoscute şi noi forme de cunoaştere din natură, îmbogaţirea domeniului cu noi unelte / funcţii matematice este o activitatea a căror roade / rezultate se vor putea observa doar în viitor, dupa utilizarea lor practică. Despre importanţa lor, îl lăsăm pe un specialist să se pronunţe.

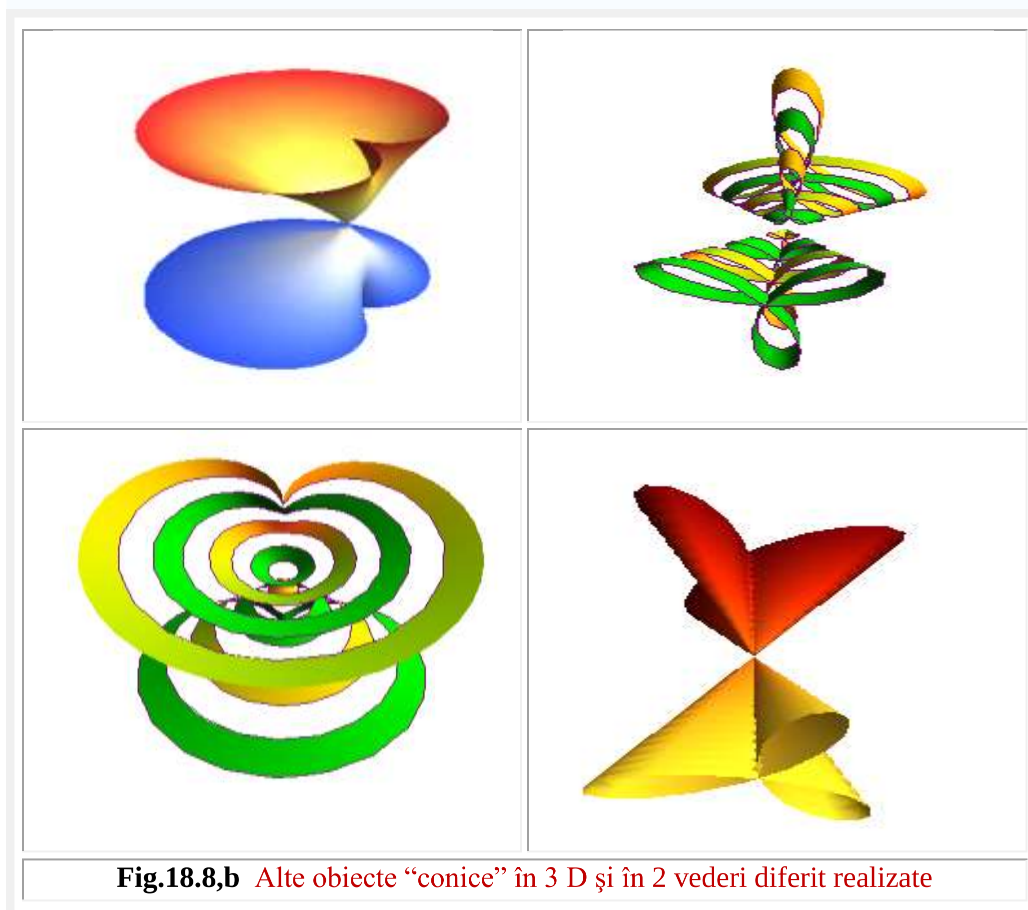
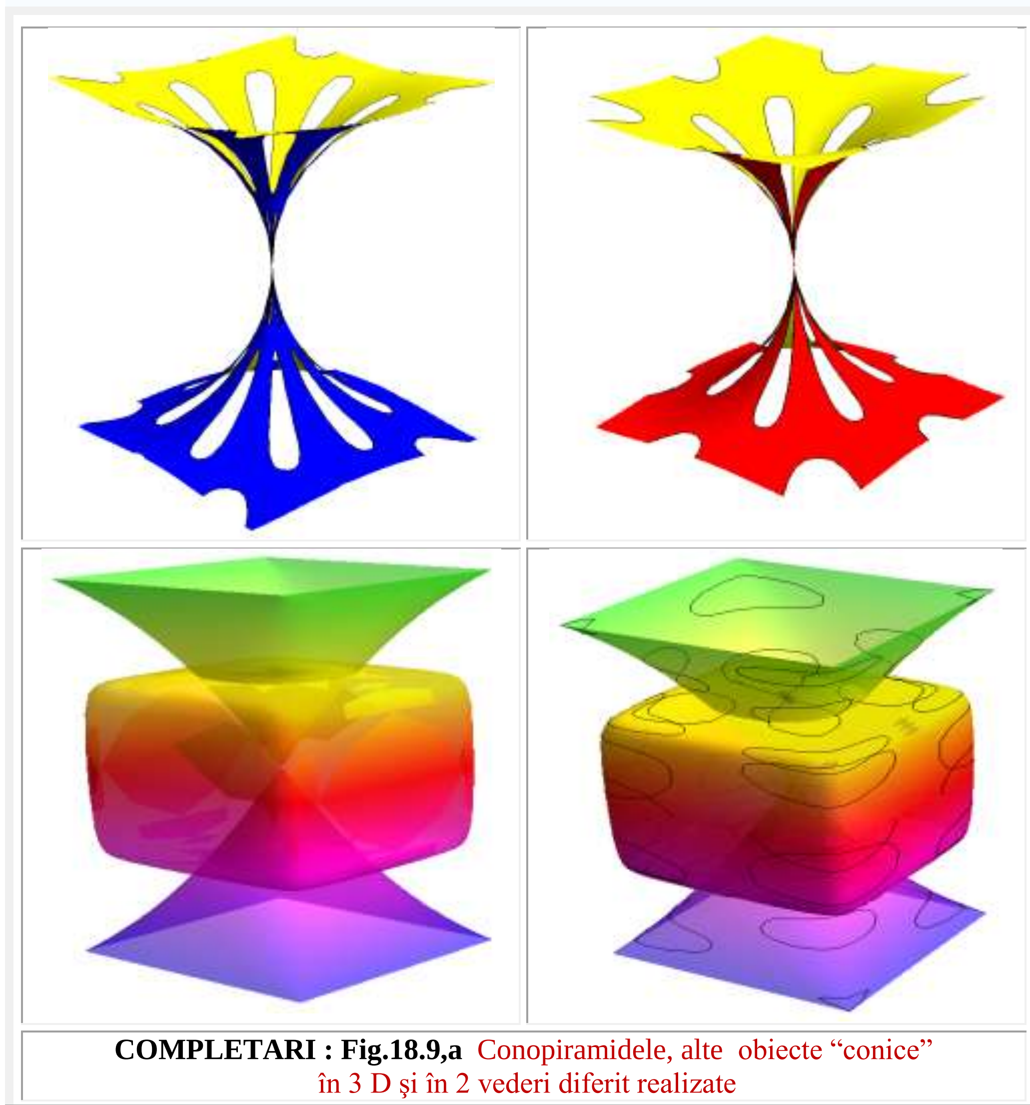


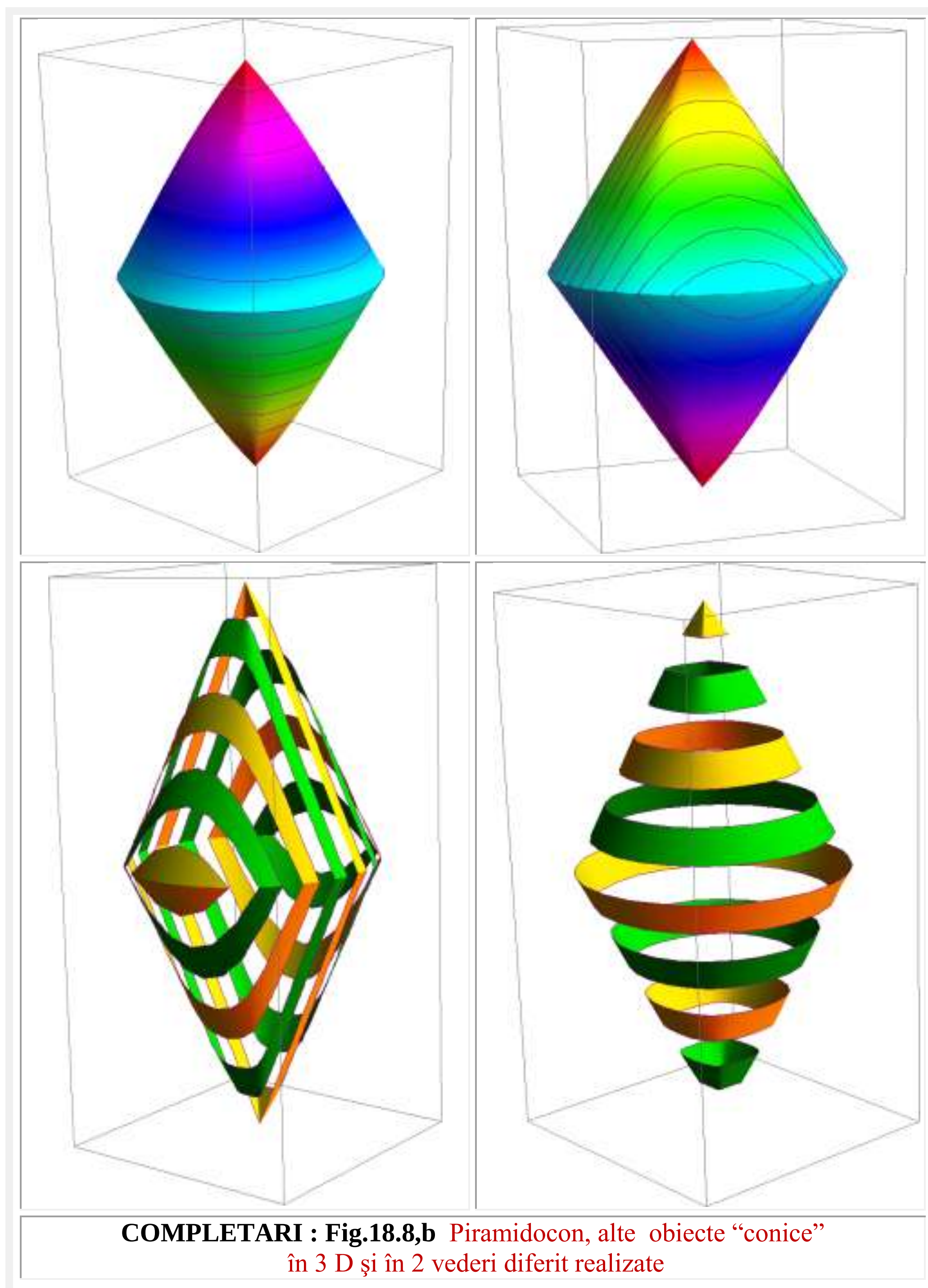
Fig.18.8,b Alte obiecte "conice" în 3 D şi în 2 vederi diferit realizate

Marele matematician român **Simion Stoilov** spunea ”***Analiza matematică****, această* ***ramură fundamentală a ştiintei****, s-a născut şi s-a dezvoltat, în mare parte, din nevoile directe ale studiului diverselor forme ale naturii. Noţiunea de* ***funcţie****, care ocupă în analiza matematică* ***locul central****, constitue substratul general, abstract, al oricarei legi a naturii, iar varietatea claselor de funcţii pe care le studiază corespund diverselor tipuri de asemenea legi”*

Subscriind la aceste idei, considerând că prelucrarea formelor din natură va necesita şi în viitor alte multe unelte matematice, vom continua cu etinderea şi în domeniul excentric a funcţiilor (pe) conice centrice prezentate.



COMPLETARI : Fig.18.9,a Conopiramidele, alte obiecte “conice” în 3 D şi în 2 vederi diferit realizate



COMPLETARI : Fig.18.8,b Piramidocon, alte obiecte “conice” în 3 D şi în 2 vederi diferit realizate

Motto: "Este adevărat că domnul **Fourier** este de părere că obiectul principal al matematicii este utilitatea publică şi explicaţia fenomenelor naturii, dar … singurul scop final al ştiinţei este onoarea spiritului omenesc şi, în această privinţă, o chestiune privind numerele are tot atâta preţ ca şi o chestiune privind alcătuirea lumii".

Karl Gustav Jacob Jacobi

Capitolul 19

FUNCŢII ELIPTICE SUPERMATEMATICE DE ARC DE CERC

19.1 INTRODUCERE

Sunt cunoscute **funcţiile eliptice Jacobi cn(u,k), sn(u,k), dn(u,k)** şi altele, obţinute prin combinarea acestora, de modul **k** şi a căror argument, notat cu **u,** reprezintă arcul de elipsă de semiaxa mare **a** = $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ şi semiaxă mică **b** =1, elipsă **rotită** cu ± π/2 şi de excentricitate liniară **c** egală cu excentricitatea numerică $\epsilon = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ şi, extrem de important, egală cu modulul **k** sau parametrul integralelor şi a funcţiilor eliptice.

În acest capitol se vor prezenta **noi funcţii eliptice**, foarte asemănătoare cu cele clasice, **exprimate în funcţie de arcul cercului unitate α şi nu de arcul de elipsă u**.

Cosinusul eliptic nou, denumit şi **supermatematic** (**SM**), pentru a se distinge de funcţiile clasice **Jacobi**, este notat cu **ce(α, k)** iar **sinusul eliptic SM** cu **se(α, k)**. Ele se disting, totodată, şi de funcţiile eliptice pe conice (**coeα** şi **sieα**) prezentate într-un capitolul anterior (Cap.**18**).

Ca şi funcţiile eliptice **Jacobi**, ele pot fi de mare ajutor în exprimarea anumitor mărimi de vibraţie ale unor sisteme oscilante neliniare de caracteristici elastice (**CES**) progresive (tari) şi / sau regresive (moi).

19.2 DEFINIREA ELIPSELOR UNITATE

Elipsele unitate au fie semiaxa mare **a** egală cu unitatea (a = 1), pentru ca proiecţiile punctelor de pe elipse, pe axa x, să se înscrie în ecartul/domeniul x ∈ [–1, +1], denumite **elipse unitate pe** (direcţia) **x**, notate **Ux**, fie semiaxa mică **b** egală cu unitatea (b = 1) pentru ca proiecţiile pe axa y să se înscrie în ecartul / domeniul y ∈[–1, +1], notate cu **Uy**. Al doilea tip de elipse se pot obţine prin rotirea primei elipse, de a = 1, cu unghiul ψ = $\pm\frac{\pi}{2}$.

Fie elipsele de a =$1/\sqrt{1-k^2}$, b = 1 şi excentricitate liniară **c** şi numerică **ϵ**

(19.1) $\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}} = k \in [0{,}1;\ 0{,}9]$, în care excentricitatea reală **c** este

(19.2) $c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{1-k^2}\right)-1} = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

Elipsele unitate se bucură de proprietatea foarte importantă că au excentricitatea numerică ϵ egală cu modulul **k** al integralelor şi al **funcţiilor eliptice Jacobi**.

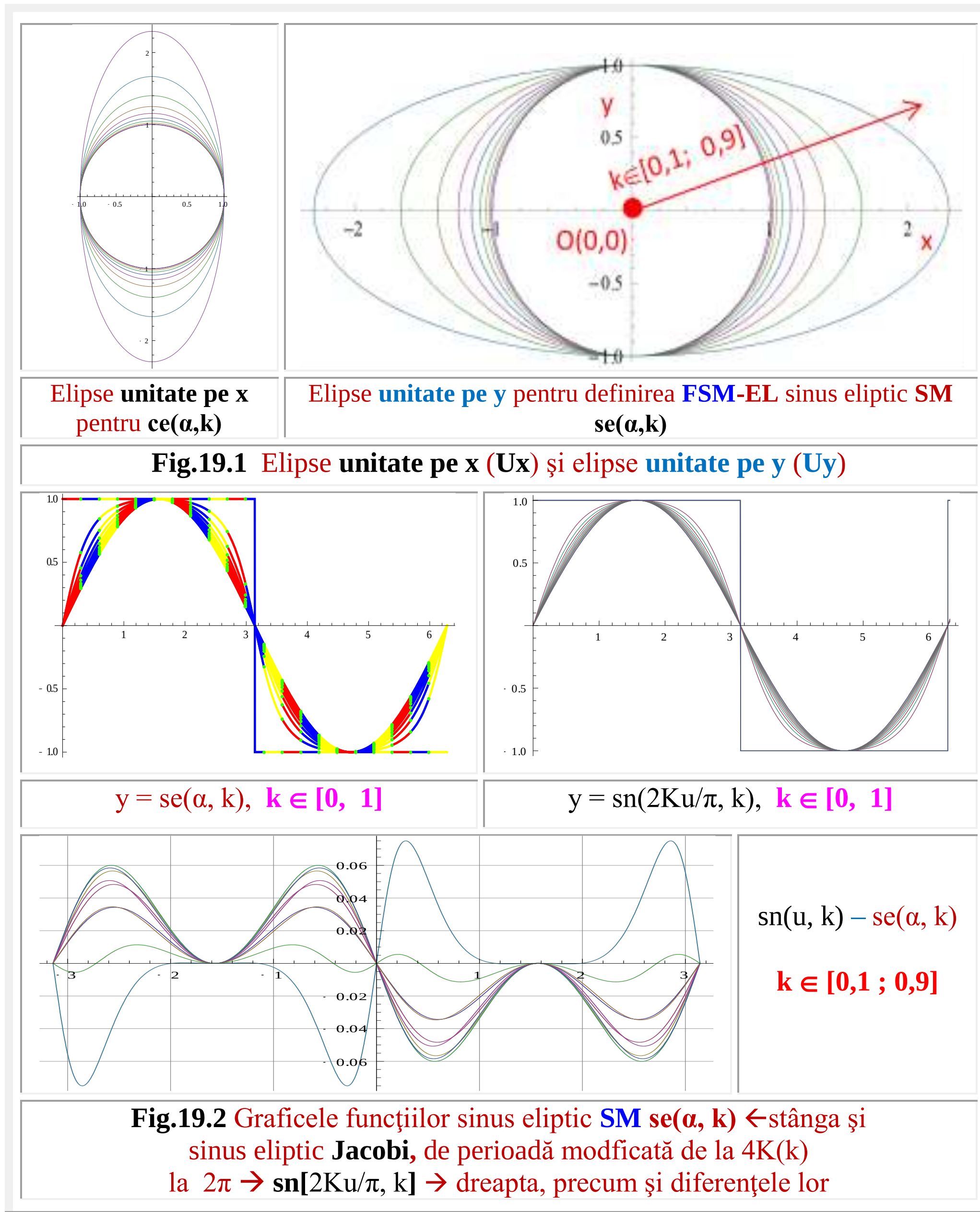


Fig.19.1 Elipse **unitate pe x** (**Ux**) şi elipse **unitate pe y** (**Uy**)

Fig.19.2 Graficele funcţiilor sinus eliptic **SM se(α, k)** ←stânga şi sinus eliptic **Jacobi,** de perioadă modficată de la 4K(k) la 2π → **sn**[2Ku/π, k**]** → dreapta, precum şi diferenţele lor

Ecuaţia, în coordonate polare, ale elipselor, cu polul în centrul elipselor O(0,0), care este şi originea unui sistem de coordonate rectangular drept xOy, este, pentru ϵ = **k**

(v. **Mica Enciclopedie Matematică** (**MEM**), Ed. Tehnică, Buc. 1980, pag. 391)

(19.3) $$r = \frac{b}{\sqrt{1-k^2 cos^2\propto}}$$

Elipsele unitate **pe y**, notate **Uy**, vor avea ecuaţiile polare

(19.4) $$r_{Uy} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 cos^2\propto}},$$

iar elipsele unitate **pe x**, rotite cu $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$, notate **Ux** vor avea $\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \sin\alpha$, astfel că ecuaţiile lor polare sunt

(19.5) $$r_{Ux} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 sin^2\propto}}$$ şi sunt prezentate în **figura 19.1**, pe baza acestor ecuaţii, pentru valorile k ∈ [0; 1], α ∈ [0, 2π] sau α∈ [–π, + π].

Pentru k = 0, se obţine cercul unitate, iar pentru k = 1 elipsele degenerează în două drepte paralele: paralele cu axa **y** pentru ecuaţiile (19.5) şi tangente la cercul unitate şi paralele cu axa **x**, în cazul ecuaţie (19.4) şi tangente la acelaşi cerc unitate **Euler**.

Pentru k > 1 se obţin hiperbole.

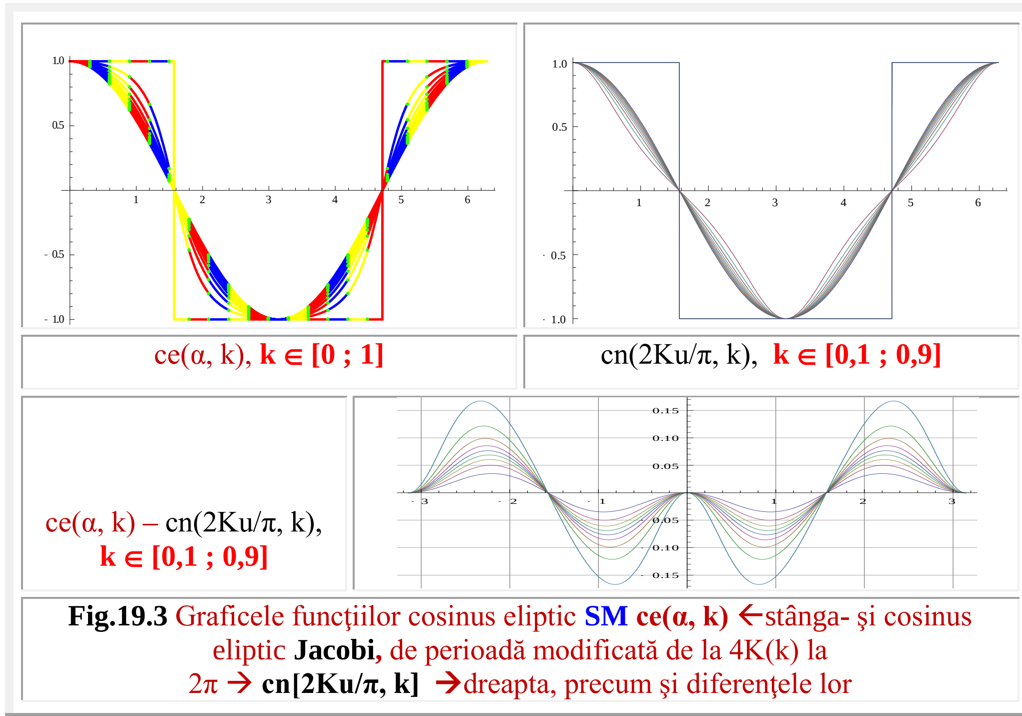


Fig.19.3 Graficele funcţiilor cosinus eliptic **SM** **ce(α, k)** ←stânga- şi cosinus eliptic **Jacobi,** de perioadă modificată de la 4K(k) la 2π → **cn[2Ku/π, k]** →dreapta, precum şi diferenţele lor

19.3 DEFINIREA FUNCŢIILOR ELIPTICE SM

Prin definiţie, proiecţia pe axa y a razei polare $\boldsymbol{r_{Uy}}$ va fi numită funcţie **sinus eliptic SM**, de argument **arcul circular α** al cercului unitate **Euler** şi de modulul sau parametrul **k**, care este, totodată (19.1), şi excentricitatea numerică liniară a elipselor, funcţie notată **se(α, k)** având expresia simplă

(19.6) $se(\propto, k) \stackrel{d}{=} \frac{sin\propto}{\sqrt{1-k^2cos^2\propto}}$ şi graficele din **figura 19.2**, în care, pentru comparaţie s-a prezentat, în paralel, şi funcţia eliptică clasică **Jacobi** sn(2Ku/π , k), de perioadă modificată de la 4K(k) la 2π.

Cosinusurile eliptice SM ale elipselor (19.3), proiectate pe axa x, vor fi

(19.7) **ce**(α, **k**) $\stackrel{d}{=} \frac{cos\propto}{\sqrt{1-k^2sin^2\propto}}$, cu graficele din **figura 19.3**, în care, de asemenea, a fost prezentată şi funcţia eliptică **Jacobi** cn(2Ku/π, k).

19.4 UNELE PROPRIETĂŢI ALE FUNCŢIILOR ELIPTICE SM

Diferenţele, prezentate în **figurile 19.2** şi **19.3,** au doar relevanţă informativă, deoarece noile funcţii eliptice **SM** (**FESM**) nu au fost introduse în matematică pentru aproximarea celor clasice, deşi ele o pot face, practic, cu suficientă precizie, aşa cum ilustrează diferenţele.

Acceptarea lor în matematică o considerăm necesara pentru diversificarea funcţiilor de acest gen, nu pentru a fi mai multe, ci pentru îmbogăţirea matematicii cu noi unelte matematice, capabile să rezolve exact, noi probleme, noi sisteme oscilante / vibrante neliniare.

Se observă, fără dificultate, că

(19.8) $ce(\alpha + \frac{\pi}{2}, k) = se(\alpha, k)$, sau

(19.9) $ce(\frac{\pi}{2} - \alpha, k) = se(\alpha, k)$ cele doua funcţii, ce(α, k) şi se(α, k), fiind funcţii de unghiuri complementare (**cofuncţii**), ca şi sinα-cosα, tanα-cotα, secα-cscα şi funcţiile cvadrilobe **siqθ** şi **coqθ** [19], cu care se şi identifică, ceea ce face ca să existe şi egalitatea dintre **excentricitatea numerică liniară circulară s** şi celelalte excentricităţi numerice, adică, **s** = **ϵ** = **k**.

Ca urmare, fiecare **funcţie eliptică SM** ia, pentru valori crescătoare ale argumentului α de la 0 la $\frac{\pi}{2}$, aceleaşi valori ca şi **cofuncţia** pentru valori descrescătoare ale argumentului de la – $\frac{\pi}{2}$ la 0, aşa cum se poate vedea, comparând garficele celor două funcţii, din partea superioară a **figurilor 19.2** şi **19.3.**

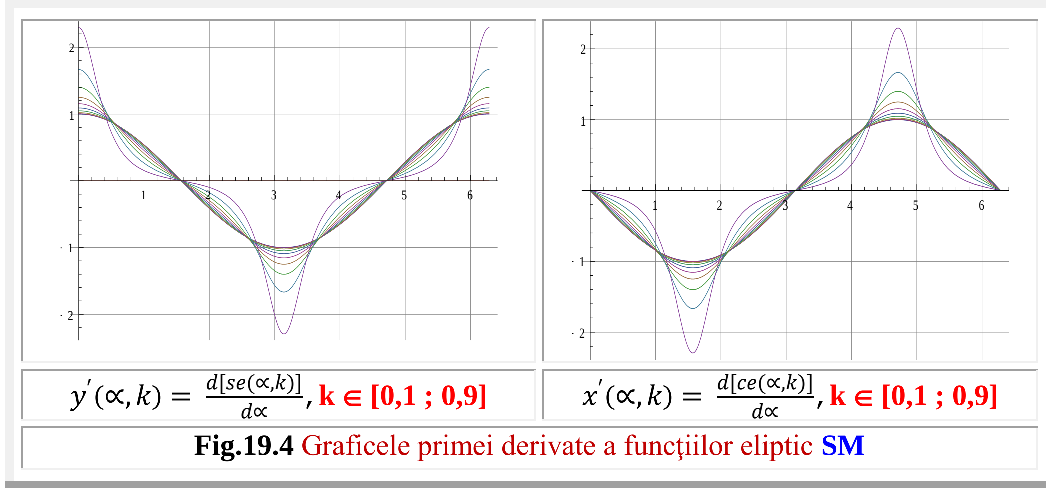
19.5 DERIVATELE FUNCŢIILOR ELIPTICE SM

Dacă funcţiile eliptice **SM** sunt în aceste relaţii şi derivatele lor vor fi cofuncţii, aşa cum rezultă şi urmărind graficele derivatelor lor din **figura 19.4**.

Derivatele de ordinul întâi ale **FESM** sunt

$$(19.10)\begin{cases} \frac{d[se(\propto,k)]}{d\propto} = \frac{d}{d\propto}\left[\frac{sin\propto}{\sqrt{1-k^2cos^2\propto}}\right] = cos\propto \frac{1-k^2}{(1-k^2cos^2\propto)^{\frac{3}{2}}} = \frac{cos\propto}{\sqrt{1-k^2cos^2\propto}}\frac{1-k^2}{1-k^2cos^2\propto} \\ \frac{d[ce(\propto,k)]}{d\propto} = \frac{d}{d\propto}\left[\frac{cos\propto}{\sqrt{1-k^2sin^2\propto}}\right] = -sin\propto \frac{1-k^2}{(1-k^2sin^2\propto)^{\frac{3}{2}}} = \frac{sin\propto}{\sqrt{1-k^2sin^2\propto}}\frac{1-k^2}{1-k^2sin^2\propto} \end{cases}$$

Derivatele de ordinul doi au expresiile (19.11) calculate automat / programat în programul MATEMATICA 6 a lui **Stephan Wolfram.**

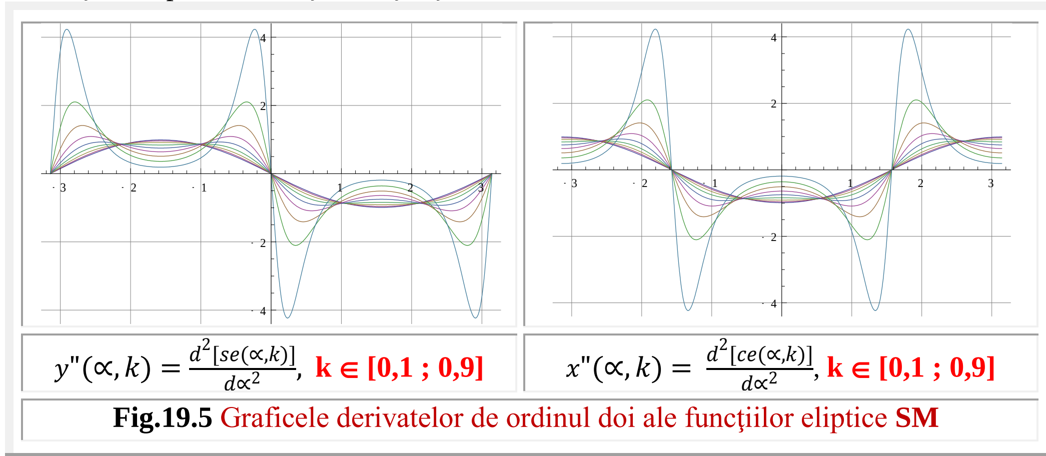


$y'(\propto,k) = \frac{d[se(\propto,k)]}{d\propto}$, **k ∈ [0,1 ; 0,9]** $x'(\propto,k) = \frac{d[ce(\propto,k)]}{d\propto}$, **k ∈ [0,1 ; 0,9]**

Fig.19.4 Graficele primei derivate a funcţiilor eliptic **SM**

$$(19.11)\ \begin{cases} \frac{d^2[se(\propto,k)]}{d\propto^2} = \frac{d}{d\propto}\left[\cos\propto \frac{1-k^2}{(1-k^2\cos^2\propto)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{(-1+k^2)\,(1+k^2+k^2\cos 2\propto)\,\sin\propto}{(1-k^2\cos^2\propto)^{5/2}} \\ \frac{d^2[ce(\propto,k)]}{d\propto^2} = \frac{d}{d\propto}\left[-\sin\propto \frac{1-k^2}{(1-k^2\sin^2\propto)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{2\sqrt{2}\cos\propto\,(-1+k^4+(k^2-k^4)\cos 2\propto)}{(1-k^2\sin^2\propto)^{5/2}} \end{cases}$$

sau expresiile (19.11') realizate clasic, denumite manual deşi la determinarea lor se foloseşte din plin creerul şi cunoştinţele acumulate în el



$y"(\propto,k) = \frac{d^2[se(\propto,k)]}{d\propto^2}$, **k ∈ [0,1 ; 0,9]** $x"(\propto,k) = \frac{d^2[ce(\propto,k)]}{d\propto^2}$, **k ∈ [0,1 ; 0,9]**

Fig.19.5 Graficele derivatelor de ordinul doi ale funcţiilor eliptice **SM**

$$(19.11')\quad \begin{cases} \frac{d^2[se(\propto,k)]}{d\propto^2} = \frac{(1-k^2)\,(1+2k^2\cos^2\propto)}{(1-k^2\cos^2\propto)^{5/2}}\sin\propto \\ \frac{d^2[ce(\propto,k)]}{d\propto^2} = -\frac{(1-k^2)\,(1+2k^2\sin^2\propto)}{(1-k^2\sin^2\propto)^{5/2}}\cos\propto \end{cases},$$

Relaţiile (19.11) au fost obţinute automat, după "FullSimplify" iar cele (19.11') manual / clasic; ambele ilustrând, în principiu, graficele derivatelor de ordinul doi

prezentate în **figura 19.5**, cu observaţia că numai relaţiile (19.11') sunt riguros corecte / exacte.

Forma graficelor derivatelor sunt asemănătoare cu multe grafice din domeniul tehnic, ca de exemplu, al maşinilor electrice şi reprezintă, aşa cum se va arăta în continuare, viteza şi acceleraţia din mişcarea de rotaţie, pentru Ω = 1, a unui punct P[ce(α,k), se(α,k)] pe o curba închisă cu patru lobi, de excentricitate numerică s = k, denumită **cvadrilobă**.

19.6 VITEZELE DE ROTAŢIE PE ELIPSELE UNITATE

Fie $\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = constant$ viteza unghiulară de rotaţie a semidreptei cu polul în originea O(0,0) şi centrul de simetrie al elipselor unitate, ale cărei intersecţii cu elipsele unitate sunt punctele P(x, y) ale căror coordonate x şi y sunt **FSM**-**EL** x = ce(α, k) şi y = se(α, k).

Vectorii de poziţie $\vec{r}$ ai punctelor P, turnanţi în jurul originii O(0,0), sunt

- pentru elipsa unitate E_{Uy}, sau unitară pe direcţia y

(19.12) $$\vec{r}_{Uy} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2cos^2\alpha}}.rad\alpha$$

- pentru elisele unitate E_{Ux}, sau unitară pe direcţia x

(19.13) $$\vec{r}_{Ux} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2sin^2\alpha}}.rad\alpha$$

în care, **radα** este fazorul / versorul direcţiei vectorului $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, denumit şi funcţie (vectorială) **radială centrică**, iar derivata acestuia este funcţia **derivată centrică** de α, **derα** = $\frac{d}{d\alpha}(rad\,\alpha)$, fazor rotit cu $\frac{\pi}{2}$ în avans/faţă faţă de direcţia radială centrică, dată de fazorul / versorul **radα** [23].

Derivatele vectoriale, ale vectorilor de poziţie ai punctelor P, vor reprezenta vitezele de rotaţie ale acestor puncte P (x,y) pe elipsele lor unitate.

Ele sunt:

(19.14) $$\dot{\overrightarrow{r_{Uy}}} = \frac{d(\vec{r}_{Uy})}{dt}\,\frac{d\alpha}{dt}\frac{d(\vec{r}_{Uy})}{d\alpha} = \Omega.\frac{d(\vec{r}_{Uy})}{d\alpha} = \Omega\frac{\boldsymbol{der\alpha}\,(1-k^2cos^2\alpha) - k^2cos\alpha.sin\alpha.\boldsymbol{rad\alpha}}{(1-k^2cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

(19.15) $$\dot{\overrightarrow{r_{Ux}}} = \frac{d(\vec{r}_{Ux})}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{d(\vec{r}_{Ux})}{d\alpha} = \Omega.\frac{d(\vec{r}_{Ux})}{d\alpha} = \Omega\frac{\boldsymbol{der\alpha}\,(1-k^2sin^2\alpha) + k^2cos\alpha.sin\alpha.\boldsymbol{rad\alpha}}{(1-k^2sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

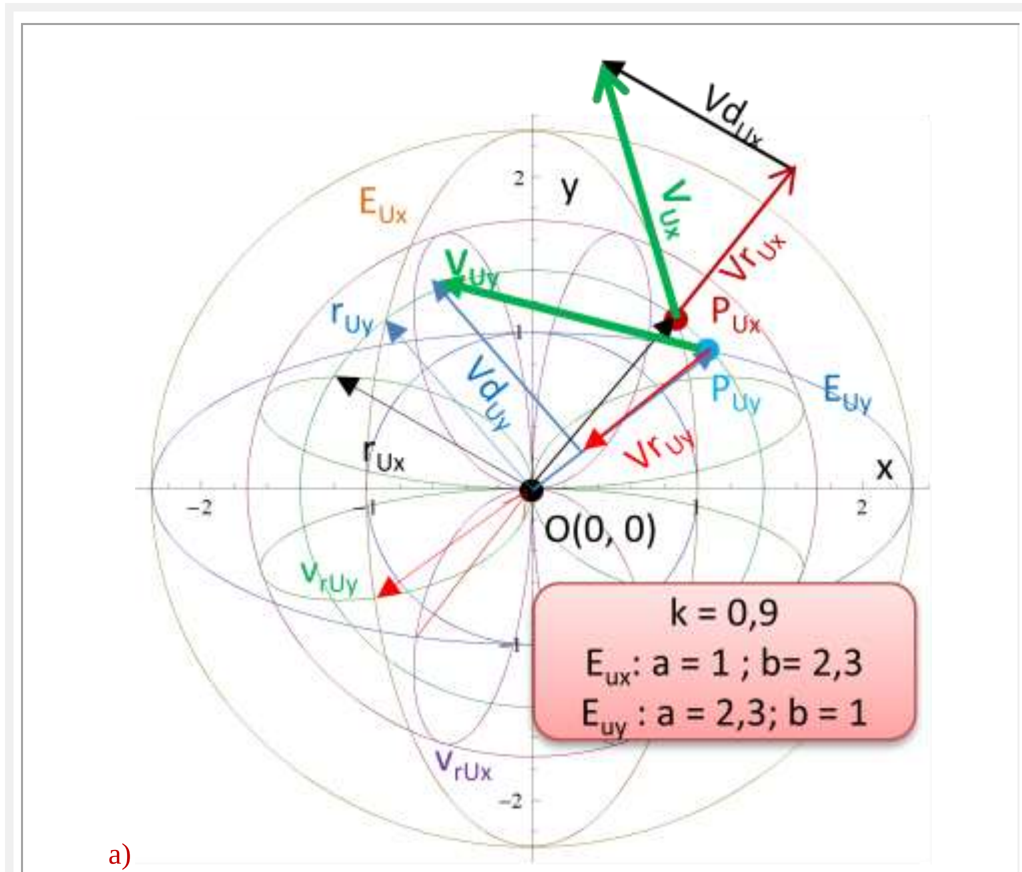
sau, pentru evidenţierea mai clară a celor două componente ale vitezei $\overrightarrow{Vr}$ şi $\overrightarrow{Vd}$ (**Fig.19.6**)

(20.14') $$\overrightarrow{V_{Uy}} = \dot{\overrightarrow{r_{Uy}}} = \frac{d(\vec{r}_{Uy})}{dt} = \Omega\left(-\frac{k^2cos\alpha.sin\alpha.\boldsymbol{rad\alpha}}{(1-k^2cos^2\alpha)^{1,5}} + \frac{\boldsymbol{der\alpha}}{\sqrt{1-k^2cos^2\alpha}}\right) = \Omega(\overrightarrow{Vr}_{Uy} + \overrightarrow{Vd}_{Uy})$$

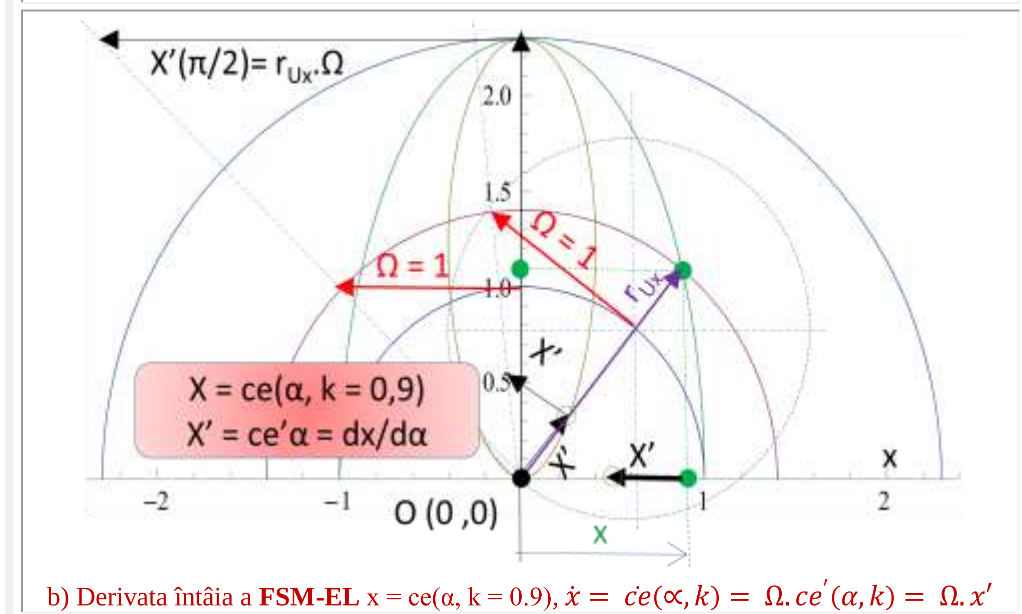
(20.15') $$\overrightarrow{V_{Ux}} = \dot{\overrightarrow{r_{Ux}}} = \frac{d(\vec{r}_{Ux})}{dt} = \Omega\left(+\frac{k^2cos\alpha.sin\alpha.\boldsymbol{rad\alpha}}{(1-k^2sin^2\alpha)^{1,5}} + \frac{\boldsymbol{der\alpha}}{\sqrt{1-k^2sin^2\alpha}}\right) = \Omega(\overrightarrow{Vr}_{Ux} + \overrightarrow{Vd}_{Ux})$$

Se observă că, modulul componentei ($\overrightarrow{Vd}$), normală pe direcţia radială centrică **OP**, este tocmai modulul razei vectoare $\vec{r}$ $(\alpha + \frac{\pi}{2})$ a celeilalte elipse unitate şi, ca urmare, componenta $\overrightarrow{Vd}$ va fi (**Fig.19.6,a**)

(20.16) $$\overrightarrow{Vd} = \vec{r}\,(\alpha + \frac{\pi}{2}),$$



a)



b) Derivata întâia a **FSM-EL** x = ce(α, k = 0.9), $\dot{x} = \dot{ce}(\propto, k) = \Omega . ce'(\alpha, k) = \Omega . x'$

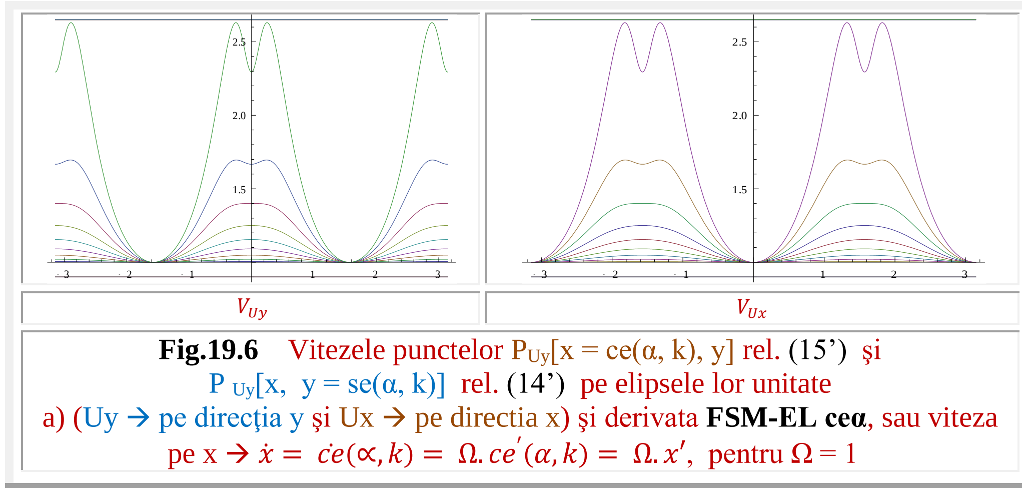


Fig.19.6 Vitezele punctelor P_{Uy}[x = ce(α, k), y] rel. (15’) şi
P_{Uy}[x, y = se(α, k)] rel. (14’) pe elipsele lor unitate
a) (Uy → pe direcţia y şi Ux → pe directia x) şi derivata **FSM-EL ceα**, sau viteza
pe x → $\dot{x} = \dot{ce}(\propto, k) = \Omega . ce^{'}(\alpha, k) = \Omega . x'$, pentru Ω = 1

Componenta radială centrică a vitezei ($\overrightarrow{Vr}$) este reprezentată în stânga **figurii 19.6,a**, în coordonate polare, fiind negativă pentru Uy (20.14’) şi pozitivă pentru Ux

Suma vectorială a celor două componente este vectorul viteză $\vec{V}$ ($\overrightarrow{V_{Uy}}$,$\overrightarrow{V_{Ux}}$), tangent la elipsele unitate în punctul P(x, y), aşa cum este şi cazul **Uy** prezentat în **figura 19.6,a**.

Modulele vectorilor viteză, de pe elipsele lor unitate vor fi:

(19.17) $$\begin{cases} V_{Uy} = \Omega \dfrac{\sqrt{1+k^2(k^2-2)cos^2\propto}}{(1-k^2cos^2\propto)^{3/2}}, \\ V_{Ux} = \Omega \dfrac{\sqrt{1+k^2(k^2-2)sin^2\propto}}{(1-k^2sin^2\propto)^{3/2}} \end{cases}$$ cu graficele din **figura 19.6,c**.

Valorile maxime apar în apropierea punctelor în care componentele radiale Vr sunt maxime (V. **Fig. 19.6,a**).

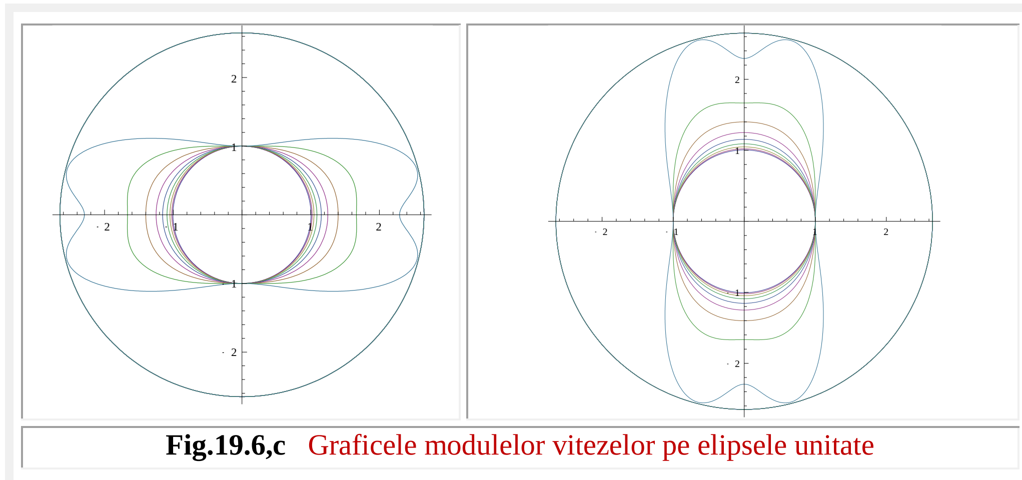


Fig.19.6,c Graficele modulelor vitezelor pe elipsele unitate

Relaţiile (19.17) se pot verifica în punctele α = 0, π/2, π, 3π/2 în care

(19.18) $$\begin{cases} V_{Uy}(0) = V_{Uy}(\pi) = \Omega(1-k^2); & V_{Uy}\left(\frac{\pi}{2}\right) = V_{Uy}\left(3\frac{\pi}{2}\right) = \Omega \\ V_{Ux}(0) = V_{Ux}(\pi) = \Omega; & V_{Ux}\left(\frac{\pi}{2}\right) = V_{Ux}\left(3\frac{\pi}{2}\right) = \Omega(1-k^2) \end{cases}$$

19.7 FUNCŢIILE AMPLITUDINE ELIPTICĂ CENTRICE SUPERMATEMATICE (SM) aece(α, k) şi aese(α, k)

Funcţiile eliptice **SM** se(α,k) (19.6) şi ce(α, k) (19.7), reprezentând proecţiile pe x şi, respectiv, y ale unor raze polare variabile, inversele lor vor fi funcţiile eliptice **SM** pe care le vom denumi **amplitudine eliptică SM**, câte una pentru fiecare **FSM-EL**, cu expresiile din relaţiile

(19.19) $$\begin{cases} aece(\propto,k) = arc\cos[x] = arc\cos[ce(\propto,k)] = arccos\frac{cos\propto}{\sqrt{1-k^2sin^2\propto}} \\ aese(\propto,k) = arc\sin[y] = \text{arc}\sin[se(\propto,k)] = arcsin\frac{sin\propto}{\sqrt{1-k^2cos^2\propto}} \end{cases}$$

şi cu graficele din **figura 19.7, a** şi **19.**7, **b.**

Se ştie că **FEJ** pot fi exprimate prin **FCC** şi **FEJ am(u,k),** ca o funcţie indusă, astfel:

(19.20) $$\begin{cases} cn(u,k) = \cos[am(u,k)] \\ sn(u,k) = \sin[am(u,k)] \end{cases}$$ şi, tot astfel, pot fi exprimate şi **FESM,**

ţinând cont de relaţia anterioara (19.19)

(19.21) $$\begin{cases} ce(\propto,k) = \cos[aece(\propto,k)] \\ se(\propto,k) = \sin[aese(\propto,,k)]’ \end{cases}$$

justificând, astfel, alegerea facută pentru definirea **FESMC** amplitudine **SM** din relaţiile (19.19).

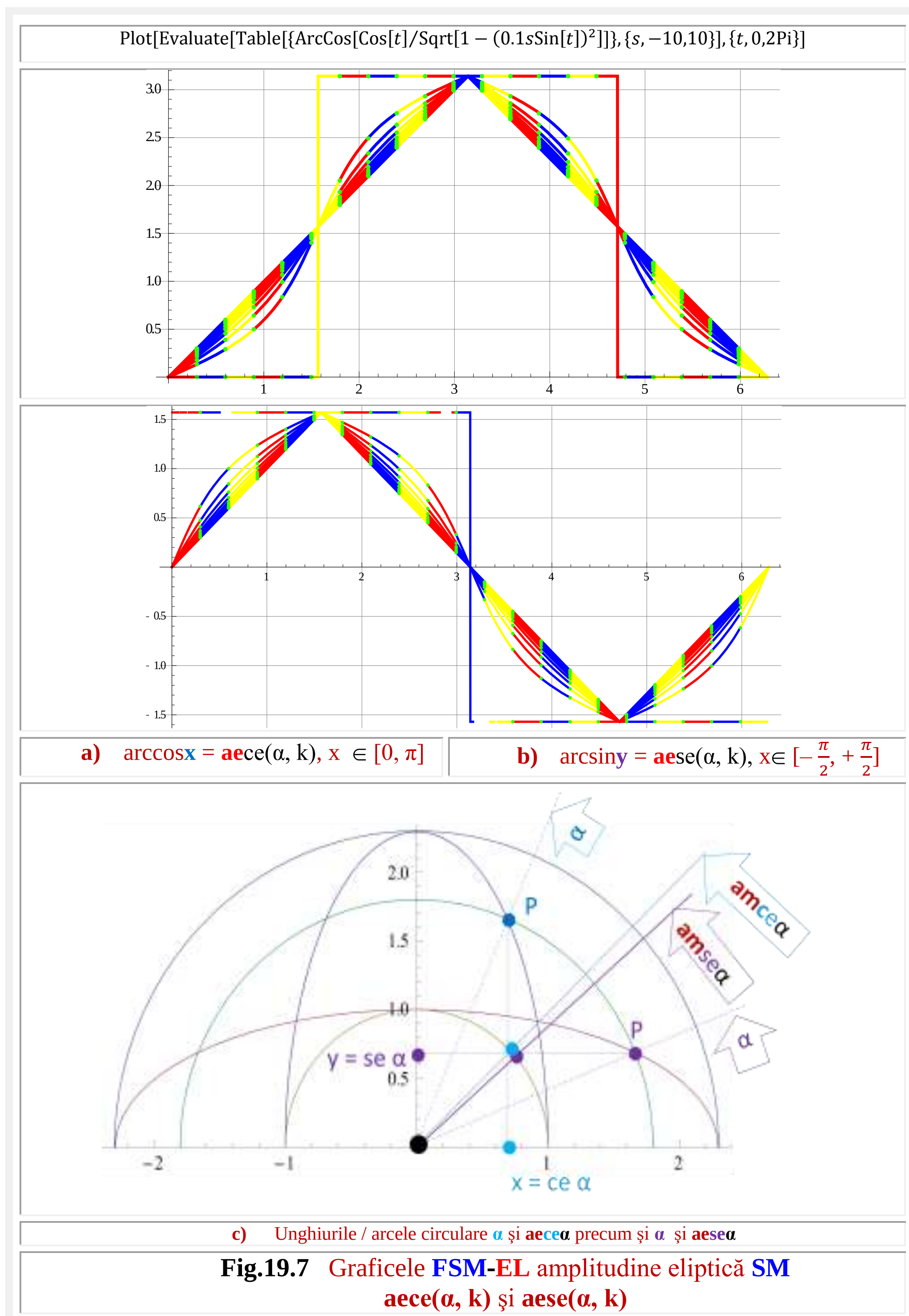
Unghiul de pantă al tangentelor la aceste curbe, adică derivata într-un punct oarecare pe curba de parametru k, reprezintă viteza unghiulară de rotaţie în jurul centrului O(0,0) a punctelor **P** de pe elipsele unitate, atunci când, sau **dacă**, ele s-ar deplasa pe cercul unitate, pe care o notăm cu **ω** şi care este variabilă.

Această variabilă mai este denumită **pulsaţia proprie instantanee** a unor sisteme vibrante de caracteristici elastice statice (**CES**) neliniare.

Dacă W(1,α) este punctul de pe cercul unitate, când α = Ω.t, atunci Wc[1, amce(α,k)] şi Ws[1,amse(α, k)] sunt punctele de pe cercul unitate, corespunzatoare punctelor **P** de pe elipsele unitate (v. **Fig.19.7, C**), puncte care se suprapun periodic peste punctul **W** pentru valorile α = ± $\frac{\pi}{2}$ ± n.$\frac{\pi}{2}$, aşa cum rezultă şi din graficele din **figura 19.7,a** şi **b** şi **19.8,a, b, c** şi **d**.

Aşa cum rezultă din **figura 19.7,C**, în cadranul întâi, **am**ce(α, k = 0,9) < α şi **am**se(α, k = 0,9) > α, iar în cadranul doi situaţia se va inversa, ceea ce rezultă şi din graficele din **figurile 19.8,a** şi **19.8,b**, ca şi din **figurile 19.8,c** şi **19.8,d** şi, chiar mai mult, că la trecerea dintr-un cadran în altul situaţiile se inversează.

Funcţiile arccos**x** şi arcsin**y** au ca dimensiune, sau exprimă, aşa cum se cunoaşte, dimensiunea sau marimea unui unghi (**Fig.19.7 C**), unghiuri sau arce de pe cercul unitate care au fost notate cu **ae**ce(α, k) şi, respectiv, cu **ae**se(α, k).

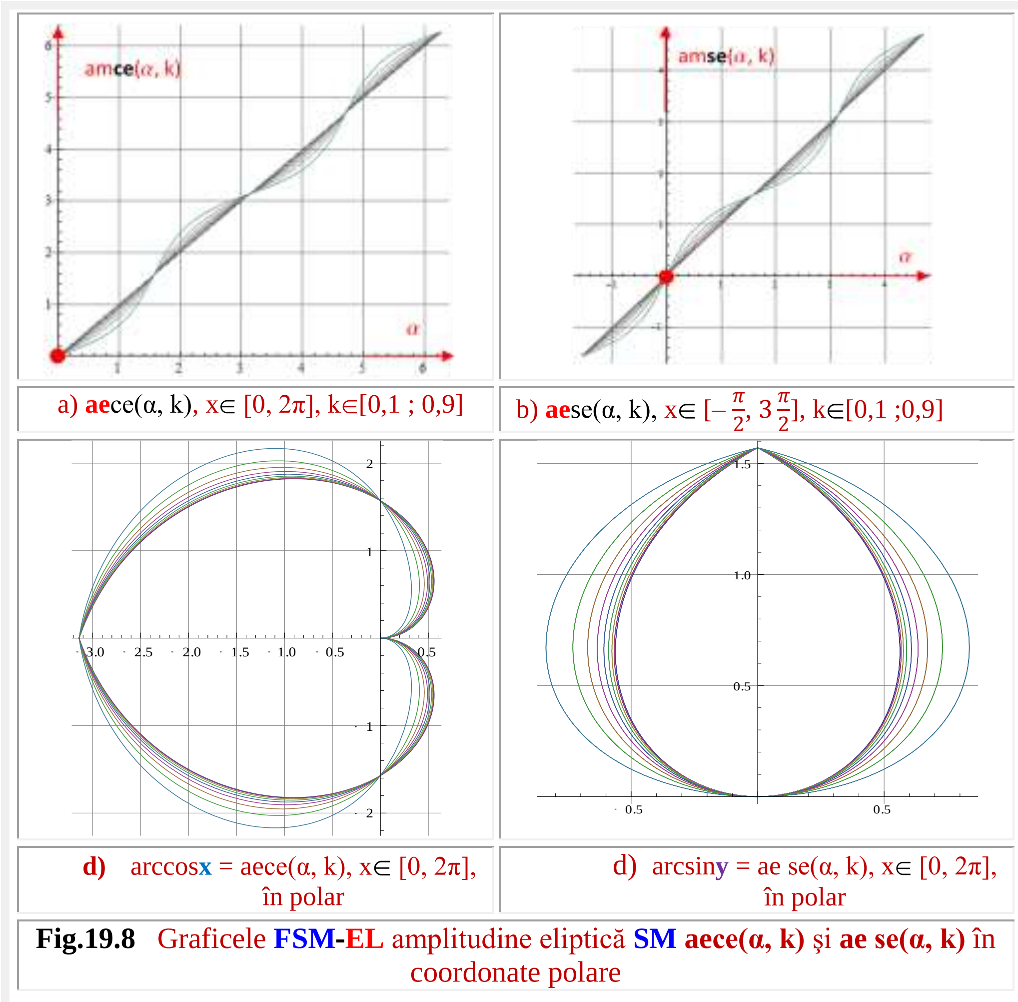


a) arccos**x** = **ae**ce(α, k), x ∈ [0, π]

b) arcsin**y** = **ae**se(α, k), x∈ $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

c) Unghiurile / arcele circulare **α** şi **aeceα** precum şi **α** şi **aeseα**

Fig.19.7 Graficele **FSM-EL** amplitudine eliptică **SM** **aece(α, k)** şi **aese(α, k)**



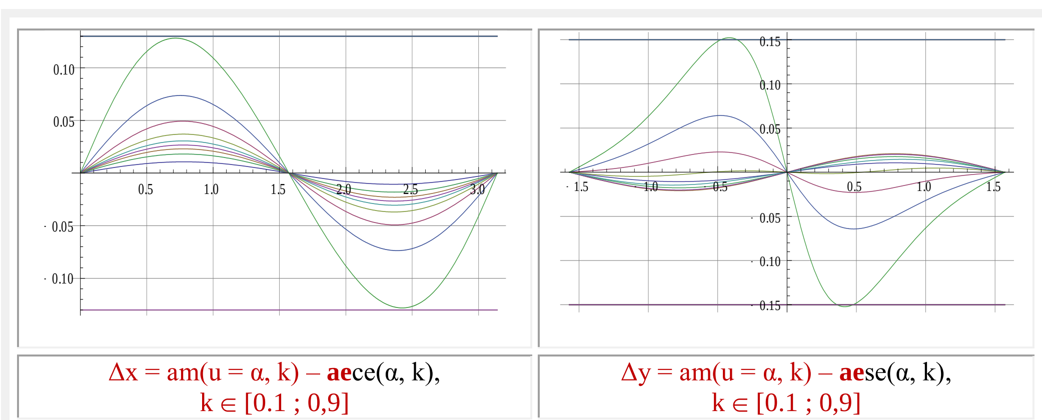
a) **ae**ce(α, k), x∈ [0, 2π], k∈[0,1 ; 0,9]

b) **ae**se(α, k), x∈ $[-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]$, k∈[0,1 ;0,9]

d) arccos**x** = aece(α, k), x∈ [0, 2π], în polar

d) arcsin**y** = ae se(α, k), x∈ [0, 2π], în polar

Fig.19.8 Graficele **FSM-EL** amplitudine eliptică **SM aece(α, k)** şi **ae se(α, k)** în coordonate polare



Δx = am(u = α, k) – **ae**ce(α, k), k ∈ [0.1 ; 0,9]

Δy = am(u = α, k) – **ae**se(α, k), k ∈ [0.1 ; 0,9]

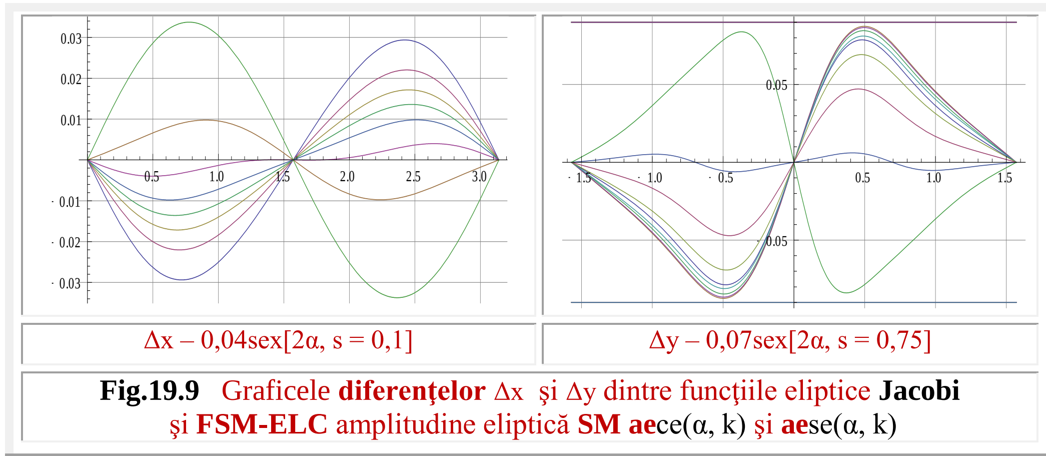


Fig.19.9 Graficele **diferenţelor** Δx şi Δy dintre funcţiile eliptice **Jacobi** şi **FSM-ELC** amplitudine eliptică **SM aece**(α, k) şi **aese**(α, k)

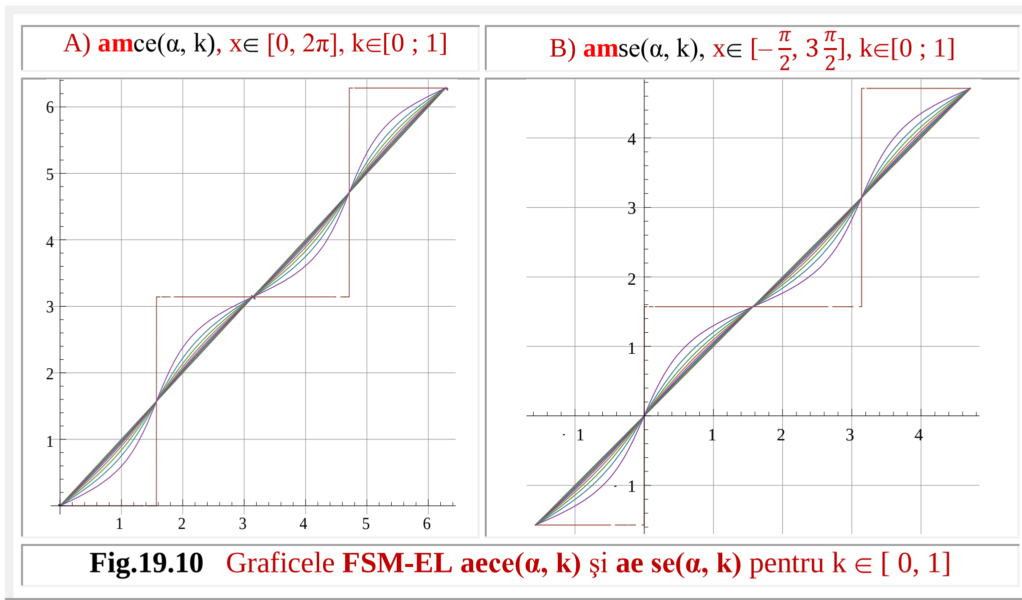


Fig.19.10 Graficele **FSM-EL aece(α, k)** şi **ae se(α, k)** pentru k ∈ [0, 1]

Din aceste grafice, rezultă că ambele funcţii amplitudine eliptică **SM** oscilează, cu amplitudini egale faţă de prima bisectoare, în contrasens, astfel că integrarea, pe o perioadă, este egală, evident, cu viteza unghiulară a semidreptei care generează mişcarea punctului **P**(x,y) pe elipsele unitate şi care este aleasă Ω = 1.Ea este, totodată, şi **pulsaţia proprie Ω**, constantă a sistemelor vibrante / oscilante pe care le vom denumi **sisteme vibrante eliptice SM** (**SVEL-SM**), a căror soluţii exacte sunt **FSM-ELC-SM ce**(α, k) şi **se**(α, k), precum şi combinaţiile lor liniare, aşa cum se va prezenta, în continuare, în § **19.10**.

Asemănarea izbitoare a funcţiilor amplitudine eliptica **SM** cu cele clasice **Jacobi,** de perioadă modificată de la 4K la 2π, dacă nu obligă, cel puţin, sugerează

compararea lor. Diferenţele dintre **funcţiile eliptice clasice** **Jacobi** şi **funcţiile eliptic SM** sunt redate informativ în **figura 19.9**.

Aceste diferenţe pot fi mult diminuate, prin introducerea unor funcţii periodice Suplimentare, care să anuleze o parte din diferenţe rezultate.

Astfel, prin utilizarea **FSM-CE** sinus excentric **sex**[θ, S(s, ε)], diferenţele s-au diminuat de peste 3 ori, aşa cum se prezintă situaţia în **figura 20.9→** jos**,** în care sunt specificate şi funcţiile şi parametrii utilizaţi.

Atunci când amplitudinile diferenţelor curbelor, din familia de funcţii, sunt cvazi egale şi de semne opuse, aproximarea pe ansamblu a **familiei** de funcţii nu mai poate continua. În schimb se poate continua cu îmbunătăţirea aproximării uneia sau a mai multor funcţii din familie/grup, care au amplitudinile diferenţelor de acelaşi semn.

Se cunoaşte că funcţia amplitudine eliptică **Jacobi,** pentru modulul extrem k = 1, este o funcţie în trepte, pe care programele de matematică nu prea le plotează. Situaţie care se extinde şi la celelalte **FEJ**. In schimb ele pot fi plotate cu relaţiile (19.19) prin extinderea domeniului k ∈ [0,1; 0,9] la k ∈ [0; 1] aşa cum se exemplifică în **figura 19.10**,în care s-au folosit şi extensiile funcţiilor arcsinx şi arccosx.

19.8 FUNCŢIILE DERIVATĂ ELIPTICĂ CENTRICĂ SM dece(α, k), dese(α, k)

Aşa cum, în cadrul funcţiilor eliptice clasice **Jacobi** ca şi în cadrul **FSM-CE**, derivata funcţie amplitudine am(u, k), respectiv, amplitudine excentrica aex(θ, S) este funcţia derivată, **dn**(u, k), respectiv, **dex**(θ, S), tot aşa se va considera derivata funcţiilor amplitudine eliptică supermatematică centrică (**FE-SMC)** ca funcţii derivată eliptică **SM** cu notaţiile şi ecuaţiile / expresiile simple din relaţiile (19.23)

$$(19.22)\quad \begin{cases} \boldsymbol{de}ce(\propto,k) = \frac{d}{d\propto}[aece(\propto,k)] = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1-k^2 sin^2\propto} \\ \boldsymbol{de}se(\propto,k) = \frac{d}{d\propto}[aese(\propto,k)] = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1-k^2 cos^2\propto} \end{cases}$$

şi cu graficele din figura **19.11**.

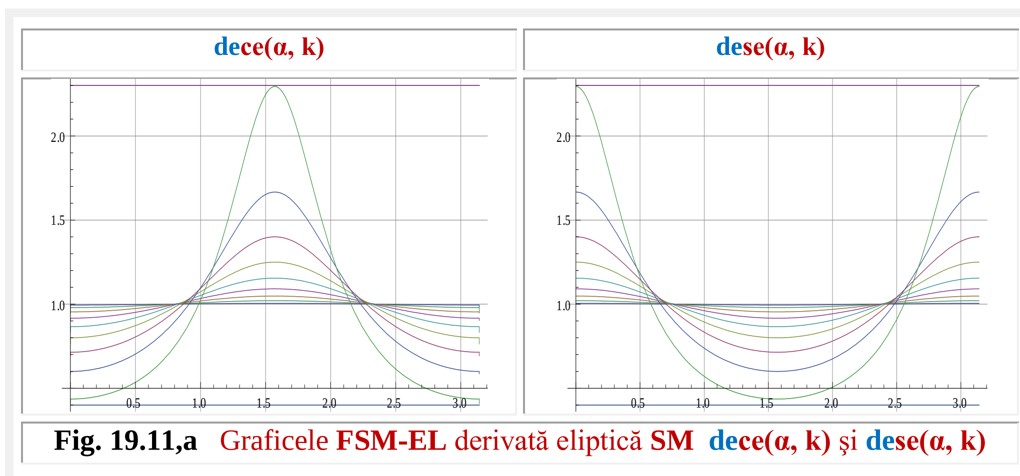


Fig. 19.11,a Graficele **FSM-EL** derivată eliptică **SM** **dece(α, k)** şi **dese(α, k)**

Graficele lor scot în evidenţă faptul că funcţiile derivată eliptica **SM** sunt cofuncţii periodice, de perioadă π, iar intgrala definită de sub oricare dintre curbele **de**ce(α,k) şi / sau **de**se(α,k) pe intervalul unei perioade are valoarea 1.π.

Din diagramele lor polare, mai rezultă că ele sunt curbe închise cu doi lobi.

Comparând relaţiile (20.23) cu relaţiile primei derivate (19.11') rezultă o oarecare similitudine cu derivatele **FSM-CE** cexθ şi sexθ şi ale **funcţiilor eliptice Jacobi** cnu şi snu, în sensul că, derivatele sunt egale cu produsul funcţiilor dece(α, k) şi dese(α, k), respectiv, dexθ şi, dn(u,k) cu funcţiile, numai că produsul se face cu aceeaşi funcţie şi ,în plus, mai apar şi termeni suplimentari (k'.tanα şi, respectiv, k'.cotα), aşa cum se exprimă ele, comparativ, în următoarele relaţii

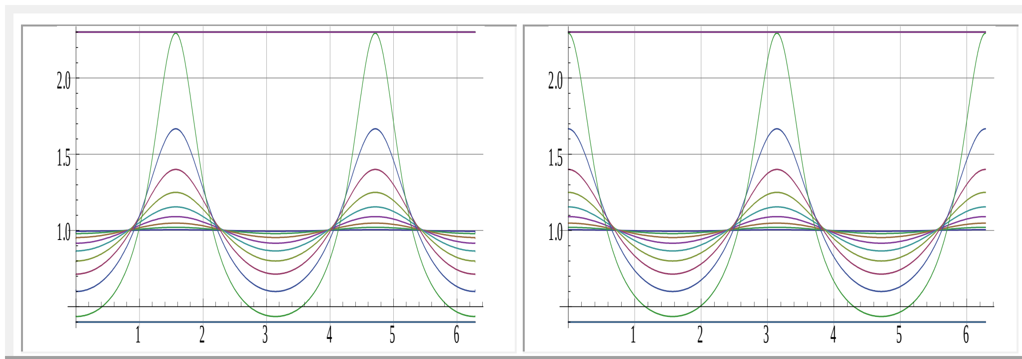
$$(19.23)\ \begin{cases} \begin{cases} cex'(\theta,S) = -dex(\theta,S).sex(\theta,S) \\ sex'(\theta,S) = dex(\theta,S).cex(\theta,S) \end{cases}, \quad dex[\theta,S(s,\varepsilon)] = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2.sin^2(\theta-\varepsilon)}} \\ \begin{cases} cn'(u,k) = -dn(u,k).sn(u,k) \\ sn'(u,k) = dn(u,k).cn(u,k) \end{cases}, \quad dn(u,k) = \sqrt{1-k^2sn^2(u,k)} \\ \begin{cases} ce'(\alpha,k) = -dece(\alpha,k).ce(\alpha,k).k'.tan \propto \\ se'(\alpha,k) = dese(\alpha,k).se(\alpha,k).k'cot \propto \end{cases}, \quad relaţiile\ (19.20) \\ In\ care\ k' = \sqrt{1-k^2}\ \ este\ modulul\ complementar \\ \begin{cases} cos'x = -1.sinx \\ sin'x = 1.cosx \end{cases} \\ \begin{cases} rad' \propto = der \propto \\ der' \propto = -rad \propto \end{cases} \end{cases}$$

În relaţiile (19.23) s-au introdus şi derivatele **FCC** cosx şi sin x, precum şi ale funcţiilor **SM** fazoriale radial centric radα şi derivat centric **derα**.

Pentru compararea lor grafică, funcţii eliptice **SM** (**FESM: ceθ, seθ**), cele circulare centrice (**FCC**: cosθ şi sinθ), funcţiile circulare excentrice (**FSM-CE**: cexθ şi sexθ) **SM** a fost reprezentate împreună în **figura 19.12** pe cercul unitate **Euler**.

Se poate remarca, încă odată, diferenţele infime existente între **FESM se(θ, k) şi FEJ sn(u, k)**. Şi, aşa cum se poate deduce şi grafic, ele sunt mai mici în jurul valorilor de θ = 0 şi θ = π, la traversarea axei x, şi ceva mai mari în jurul valorii de θ = $\frac{\pi}{2}$ şi θ = $\frac{3\pi}{2}$, la traversarea axei y. Ceea ce rezultă şi din diferenţele din **figura 19.9**.

Derivatele de ordinul doi ale **FE-SMC** din relaţia (19.23') scrise dezvoltat sunt



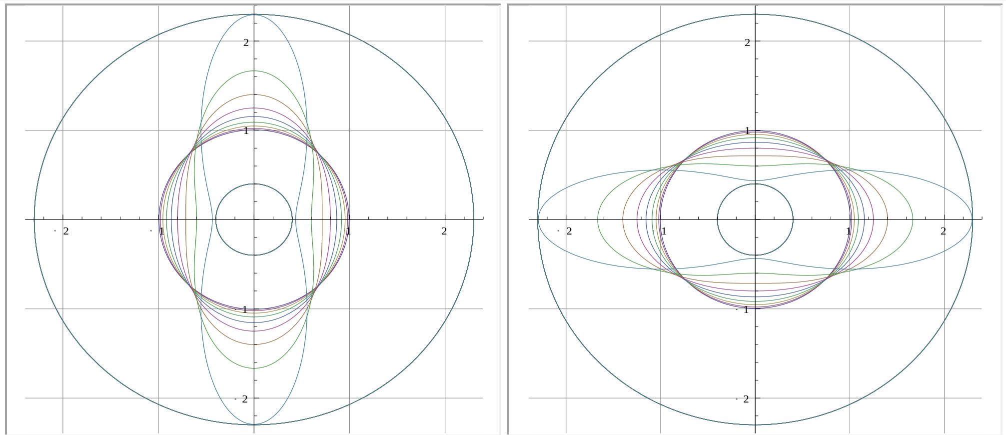


Fig. 19.11,b Graficele **FSM-EL** derivată eliptică **SM** **dece(α, k)** şi **dese(α, k)** în coordonate carteziene şi în coordonate polare

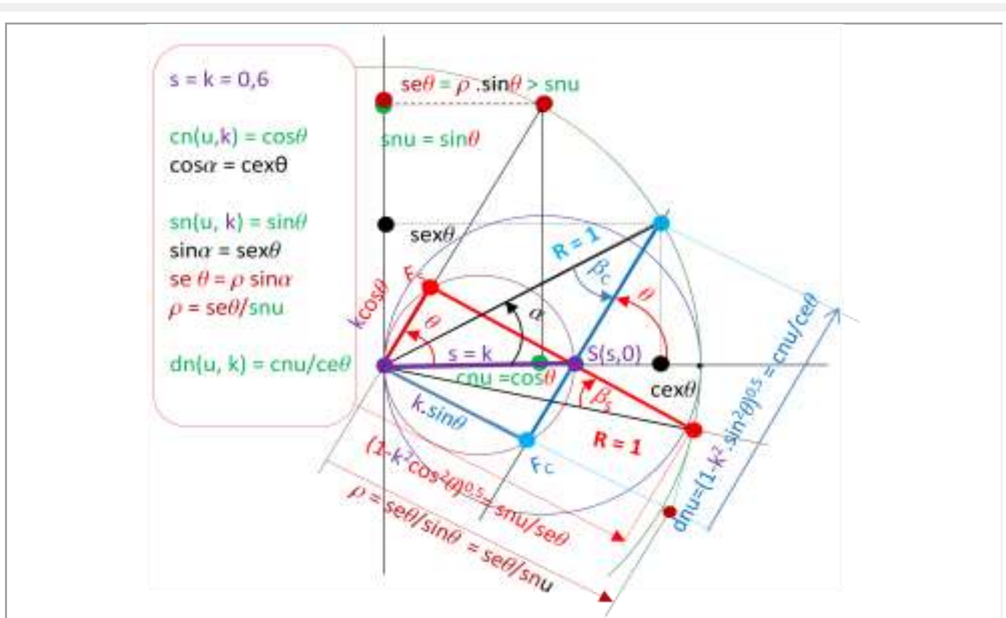


Fig. 19.12 Exprimarea grafică, pe cercul unitate **Euler**, a funcţiilor eliptice **Jacobi**, a funcţiilor eliptice **SM** şi a **FSM-CE** cexθ şi sexθ

(19.23”)
$$\begin{cases} \dfrac{d^2[se(\propto,k)]}{d\propto^2} = \dfrac{(1-k^2)\,(1+2k^2\cos^2\propto)}{(1-k^2\cos^2\propto)^{5/2}}\sin\propto = \dfrac{-\sin\propto}{\sqrt{1-k^2\cos^2\propto}}\,\dfrac{1-k^2}{1-k^2\cos^2\propto}\,\dfrac{1+2k^2\cos^2\propto}{1-k^2\cos^2\propto} \\ \dfrac{d^2[ce(\propto,k)]}{d\propto^2} = -\dfrac{(1-k^2)\,(1+2k^2\sin^2\propto)}{(1-k^2\sin^2\propto)^{5/2}}\cos\propto = \dfrac{-\cos\propto}{\sqrt{1-k^2\sin^2\propto}}\,\dfrac{1-k^2}{1-k^2\sin^2\propto}\,\dfrac{1+2k^2\sin^2\propto}{1-k^2\sin^2\propto} \end{cases}$$

în care, se observa că, funcţiile original **se(*α*, k)** şi **ce (*α*, k)** se reproduc direct (nu în

cruciş ca la **FEJ**) atât în prima derivată cât şi în cea de a doua.

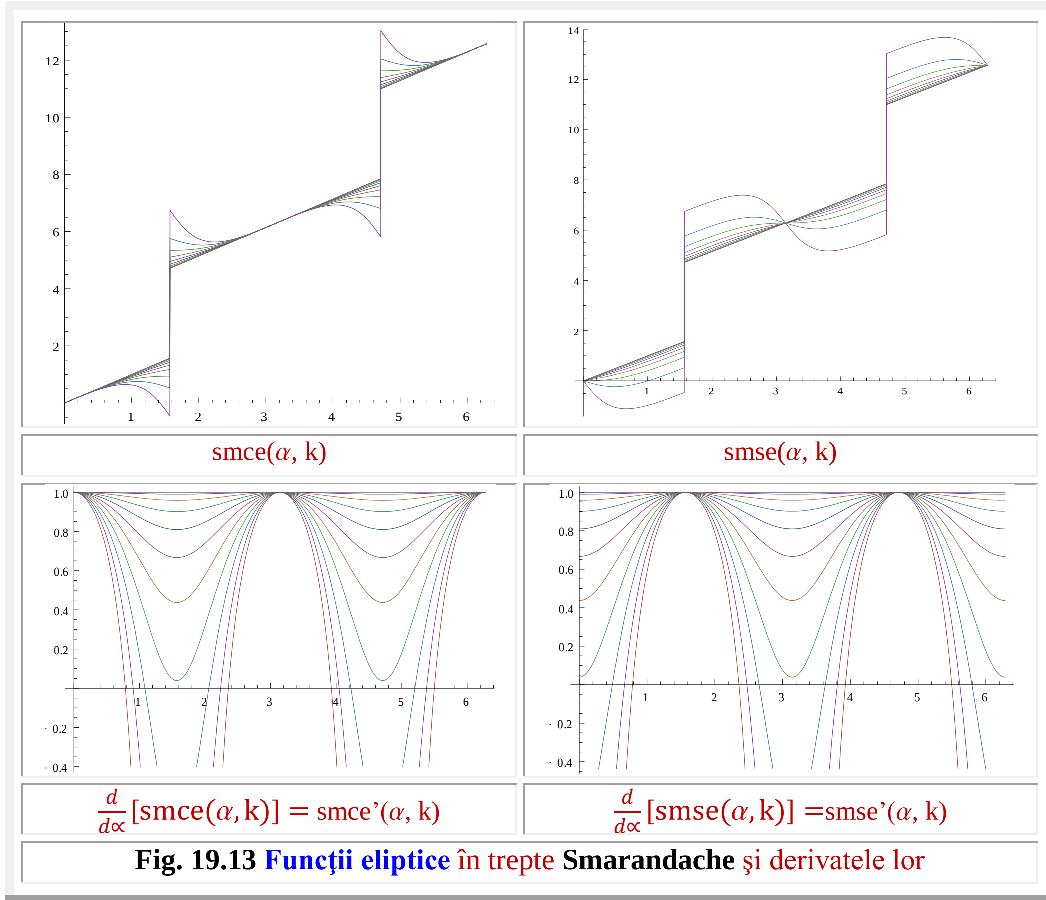


Fig. 19.13 **Funcţii eliptice** în trepte **Smarandache** şi derivatele lor

Se notează ultimele fracţii din (19.23') ca derivatele de ordinul întâi ale funcţiilor **smse(α, k)** şi, respectiv **smce(α, k)** şi se vor denumi derivatele **funcţiile eliptice în trepte Smaradache (FETSm)** [20], din considerente care rezultă din graficele acestor funcţii, prezentate în **figura 19.13**.

Astfel, relaţiile anterioare pot fi scrise ca produsul funcţiilor original cu funcţiile derivate eliptice **SM** şi cu derivatele funcţiilor eliptice în trepte **Smaradache** [20]

(19.24)
$$\begin{cases} \frac{d^2[se(\propto,k)]}{d\propto^2} = -se(\propto,k).dese(\propto,k).smse'(\propto,k) \\ \frac{d^2[ce(\propto,k)]}{d\propto^2} = -ce(\propto,k).dece(\propto,k).smce'(\propto,k) \end{cases},$$

în care derivatele **FETSm** au fost notate cu apostrof.

Expresiile derivatelor **FETSm** sunt

(19.25)
$$\begin{cases} \frac{d}{d\propto}[\boldsymbol{smse}(\propto,k)] = \boldsymbol{smse}'(\propto,k) = \frac{1+2k^2\cos^2\propto}{1-k^2\cos^2\propto} \\ \frac{d}{d\propto}[\boldsymbol{smce}(\propto,k)] = \boldsymbol{smce}'(\propto,k) = \frac{1+2k^2\sin^2\propto}{1-k^2\sin^2\propto}, \end{cases}$$

iar din derivatele lor, prin integrare, se obţin următoarele expresii ale **FETSm**

$$(19.26)\quad \begin{cases} \boldsymbol{sm}se(\propto, k) = 2\propto + \dfrac{argth\frac{tg\propto}{\sqrt{k^2-1}}}{\sqrt{k^2-1}} = 2\propto + \dfrac{arctanh\frac{tan\propto}{\sqrt{k^2-1}}}{\sqrt{k^2-1}} \\ \boldsymbol{sm}ce(\propto, k) = 2\propto - \dfrac{argth(\sqrt{k^2-1}\ tg\propto)}{\sqrt{k^2-1}} = 2\propto - \dfrac{\text{arctanh}(\sqrt{k^2-1}\ tan\propto)}{\sqrt{k^2-1}} \end{cases}$$

Graficele acestor funcţii în trepte **Smarandache** şi derivatele lor sunt prezentate în **figura 19.13.**

19.9 FUNCŢII INTRATRIGONOMETRICE (IT)

Au fost numite astfel, datorit faptului că fac joncţiune, sau, mai precis, sunt o interfaţă între funcţiile trigonometrice / **circulare** centrice **Euler** şi funcţiile trigonometrice **pătratice Alaci Valeriu**, ca şi funcţiilor **transtrigonometrice**, cu care se aseamănă.

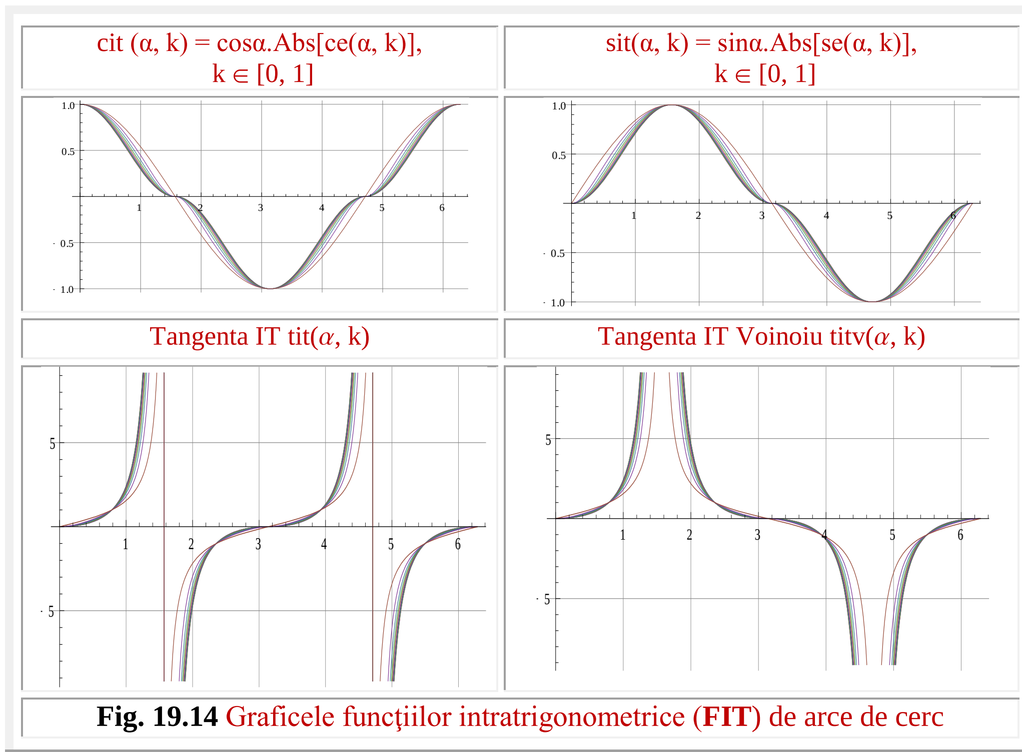


Fig. 19.14 Graficele funcţiilor intratrigonometrice (**FIT**) de arce de cerc

Funcţiile transtrigonometrice (**TT**), prezentate în continuare în §19.10, sunt funcţii de exponentul **K** ∈ [1, 2], în timp ce, cele **intratrigonometrice** (**IT**) sunt funcţii de excentricitatea numerică **s = k** ∈ [0, 1]. Ambele tipuri de funcţii completează continuu spaţiul dintre cercul unitate **Euler** şi pătratul **Alaci Valeriu**, însă, curbele ca şi funcţiile cosinus şi sinus **TT** au discontinuităţi (V. **Fig.19.17**) în punctele din vârful pătratului **Alaci** (0, $\frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}$), cu excepţia cercului unitate (K = 2), în timp ce, curbele

IT sunt continue în aceste puncte, care sunt puncte de inflexiune, cu excepţia, evidentă, a pătratului (k = ± 1), aşa cum se poate observa în **figurile 19.14** şi **19.15**.

Funcţiile **IT** cosinus **cit**(α, k) şi sinus **sit**(α, k) sun definite de ecuaţiile

(19.27)
$$\begin{cases} \boldsymbol{cit}(\propto,k) \overset{d}{=} cos\alpha.Abs[ce(\alpha,k)] = cos \propto .Abs\left[\frac{cos\propto}{\sqrt{1-k^2 sin^2\propto}}\right] = \frac{Abs[cos\propto].cos\propto}{\sqrt{1-k^2 sin^2\propto}} = Abs[cos \propto].ce(\propto,k) \\ \boldsymbol{sit}(\propto,k) \overset{d}{=} sin\alpha.Abs[se(\alpha,k)] = sin \propto .Abs\left[\frac{sin\propto}{\sqrt{1-k^2 cos^2\propto}}\right] = \frac{Abs[sin\propto].sin\propto}{\sqrt{1-k^2 cos^2\propto}} = Abs[sin \propto].se(\propto,k) \end{cases},$$

cu graficele din **figura 19.14,** în care s-au inclus şi funcţiile tangentă ordinară şi tangenta **IT Voinoiu**.

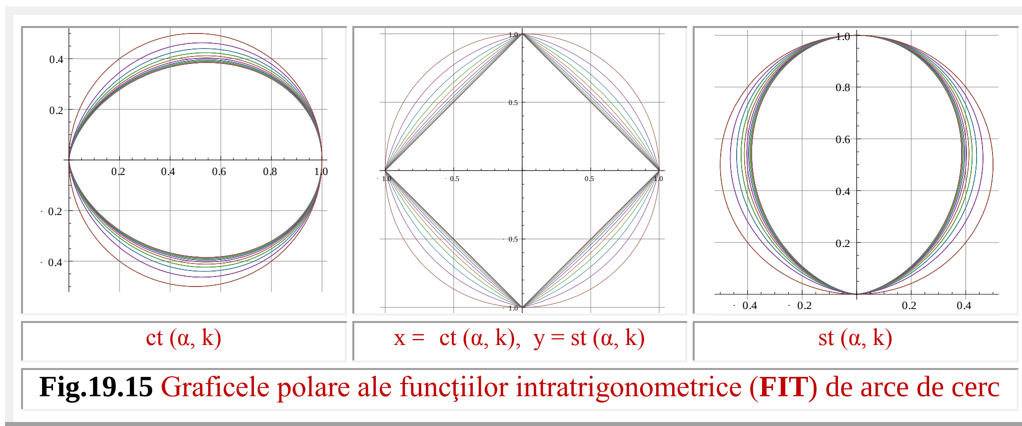


Fig.19.15 Graficele polare ale funcţiilor intratrigonometrice (**FIT**) de arce de cerc

(19.28) **tit**(α, k) = $\frac{si(\propto,k)}{ci(\propto,k)}$ şi tangenta **Voinoiu IT**

(19.29) **titv**(α, k) = $\frac{si(\propto,k)}{Abs[ci(\propto,k)]}$

Graficele, în coordonate polare ale **FIT ci**(α, k) şi **sit**(α, k), sunt redate în **figura 19.15**, împreună cu ecuaţiile parametrice ale curbelor **IT**, care, aşa cum se poate observa, umplu continuu şi complet spaţiul cuprins între cercul unitate şi pătratul **Alaci Valeriu**.

19.10 CVADRILOBELE – "ELIPSE" UNITATE SIMULTAN PE x ŞI PE y

Aşa cum s-a prezentat în §19.2, proiectând punctele P ale elipselor unitate Ux pe **x** s-au obţinut **FSM-EL cosinus eliptic** cu **x** = **ce**(α,k). Proiectând punctele P ale elipselor unitate Uy pe **y** s-au obţinut **FSM-EL sinus eliptic** cu **y** = **se**(α,k). Astfel că, numai **una** dintre coordonatele carteziene ale elipselor unitate este şi **FSM-EL**.

Rezultă întrebarea firească: Care este curba matematică a căror puncte au, **simultan,** drept coordonate carteziene **FSM-EL ceα** şi **seα ?** De aceeaşi excentricitate **s** sau modul **k**, adică

(19.30) P(x, y) ≡ P[x = ce(α,k), y = se(α, k)],

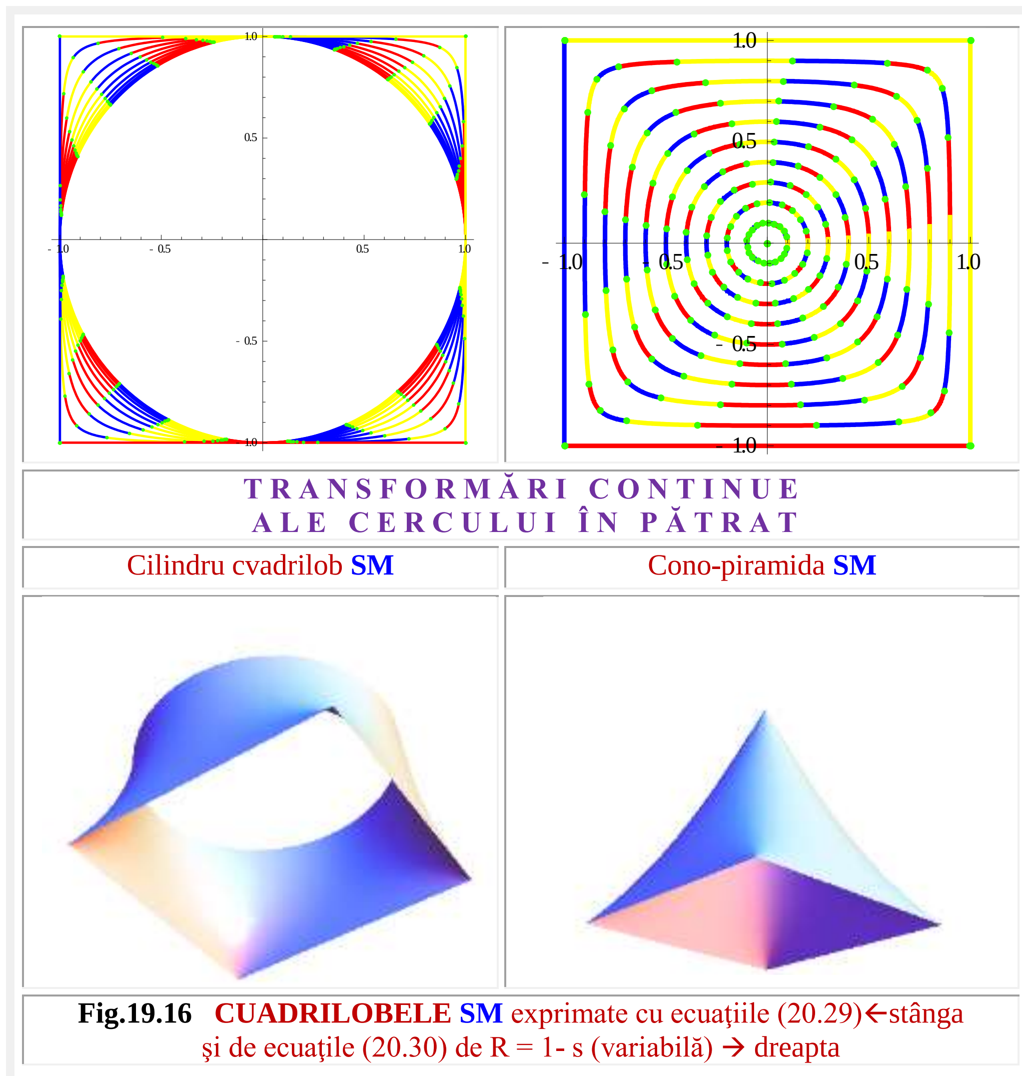
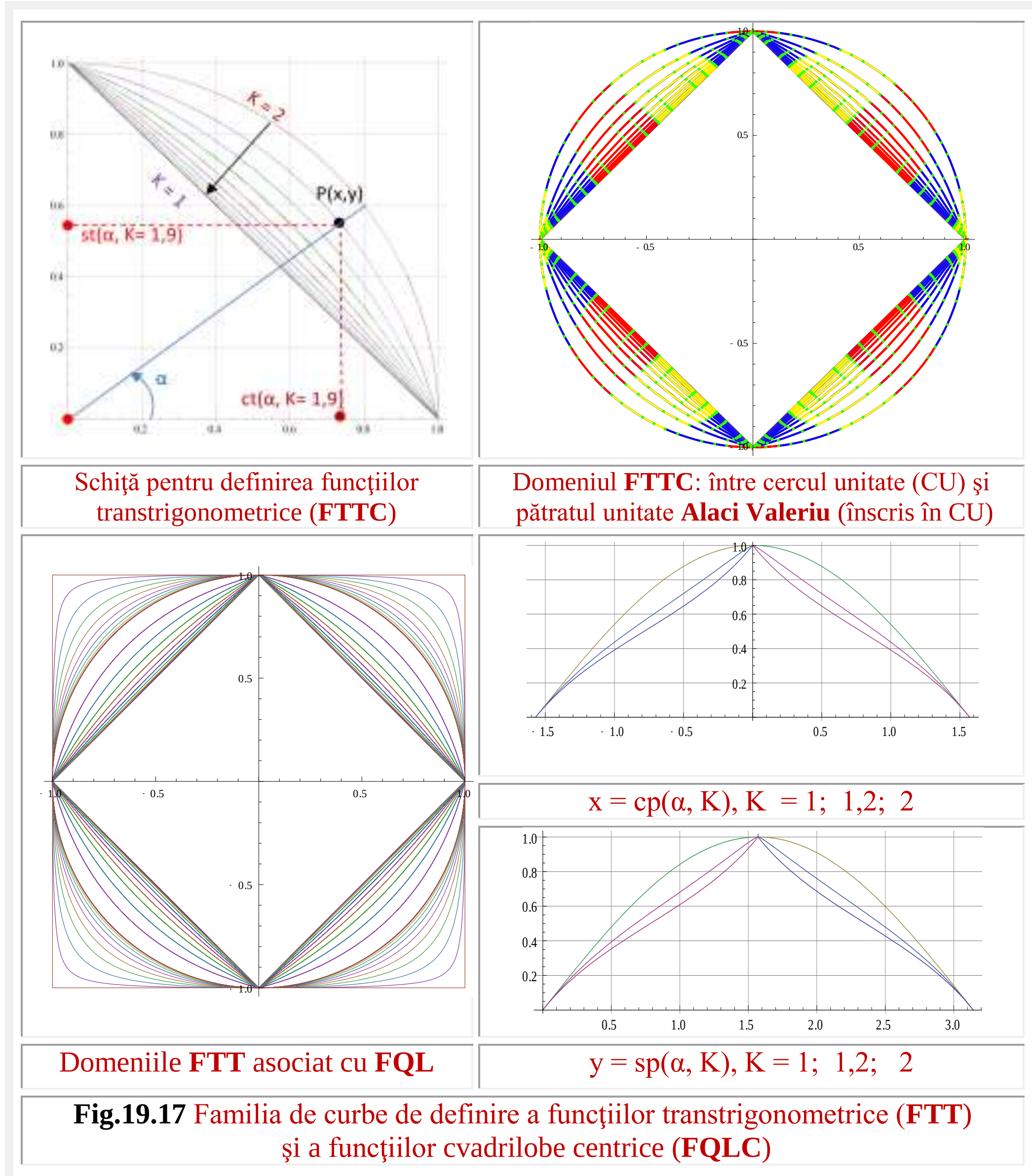


Fig.19.16 **CUADRILOBELE SM** exprimate cu ecuaţiile (20.29)→stânga şi de ecuaţile (20.30) de R = 1- s (variabilă) → dreapta

Se cunoaşte că această curbă matematică va avea ecuaţiile parametrice (19.31)

$$P\begin{cases} x = ce(\propto, k) = \dfrac{\cos\propto}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\propto}} \\ y = se(\propto, k) = \dfrac{\sin\propto}{\sqrt{1-k^2 \cos^2\propto}} \end{cases}$$

Consultând lucrarea [**19**, **Şelariu**, Mircea-Eugen, **QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**] se poate constata că aceste funcţii supermatematice au fost introduse, încă din anul 2005, sub denumirea de funcţii cvadrilobe, deoarece prezintă **patru lobi**. Ele au fost tratate succint şi în volumul I, Ed 1-a, § 2, pag. 50…55 şi sunt notate: cosinusul cu **coqθ** şi, sinusul cu **siqθ**, de expresii



Schiţă pentru definirea funcţiilor transtrigonometrice (**FTTC**)

Domeniul **FTTC**: între cercul unitate (CU) şi pătratul unitate **Alaci Valeriu** (înscris în CU)

Domeniile **FTT** asociat cu **FQL**

x = cp(α, K), K = 1; 1,2; 2

y = sp(α, K), K = 1; 1,2; 2

Fig.19.17 Familia de curbe de definire a funcţiilor transtrigonometrice (**FTT**) şi a funcţiilor cvadrilobe centrice (**FQLC**)

(19.32)
$$P\begin{cases} x = coq[\theta, S(s,\varepsilon)] = \dfrac{\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}} \\ y = siq[\theta, S(s,\varepsilon)] = \dfrac{\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 cos^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases}$$

Funcţiile cvadrilobe (**FQL**) sunt, totodata, şi soluţii ale unor ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul doi cu coeficienţi variabili [19].

Quadrilobele (cvadrilobele) sunt curbe închise, cu 4 lobi, rezultate în procesul transformării continue a cercului în pătrat perfect, transformare exprimată şi de

funcţia SM-CE dexθ (derivată excentrică de θ) prin ecuaţiile parametrice, care dau curbele centrate în C(1, 1):

(19.33)
$$\begin{cases} x = dex[\theta, s] = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}} = 1 - s.coq(\theta, S) \\ y = dex\left[\theta \pm \frac{\pi}{2}, s\right] = 1 - \frac{\mp s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 cos^2(\theta-\varepsilon)}} = 1 - s.siq(\theta, S) \end{cases},$$

în care cele două determinări ale **FSM-CE dexθ** (**1**→ principală, care nu se marchează când nu este necesar şi 2→ secundară) au expresia [1, 2,…23, ş.a.]

(19.31)
$$dex_{1,2}[\theta, S(s, \varepsilon)] = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}}$$

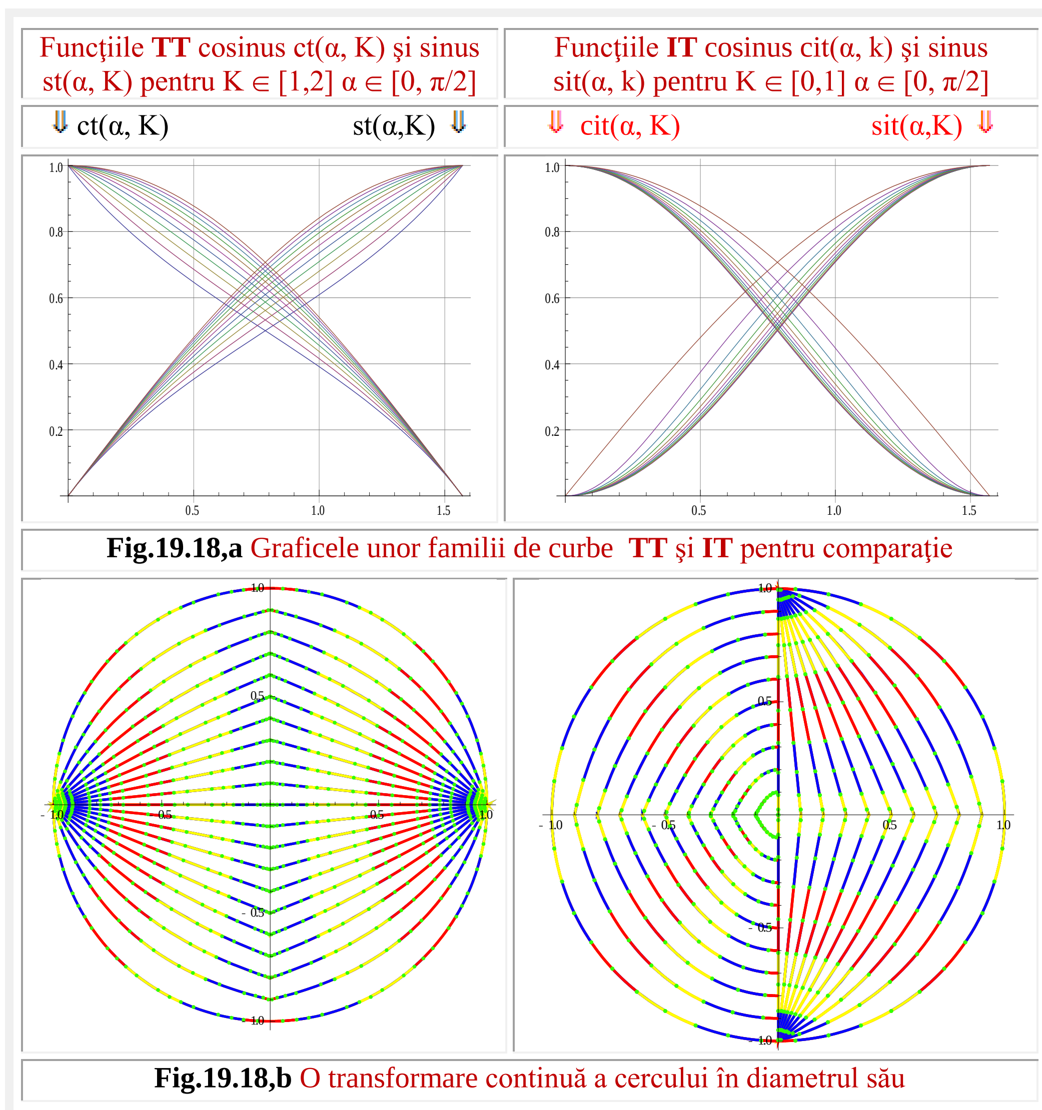


Fig.19.18,a Graficele unor familii de curbe **TT** şi **IT** pentru comparaţie

Fig.19.18,b O transformare continuă a cercului în diametrul său

Sau, mai simplu, prin ecuaţiile (19.28) care dau curbele centrate în originea O(0, 0), aşa cum se prezintă, comparativ, cele două cazuri în **figura 19.16**.

În ecuaţiile (19.29 şi 19.30) s = k este excentricitate numerică liniară, circulară şi, respectiv, eliptică care, pentru s = 0 dă cercul iar pentru s = ± 1 dă pătratul perfect.

Valorile intermediare s ∈ (0, 1) sunt proprii **cvadrilobelor**, de forma unor pătrate cu laturi curbe şi colţuri rotunjite, prezentate în **figura 19.16**.

Au mai fost introduse în matematica trilobele şi lobele cu **n** lobi, denumite polilobe, multilobe sau n-lobe [19].

Dacă în ecuaţiile (20.31) numărătorul se ridică la pătrat şi excentricitatea numerică s → k se înlocuieşte cu excentricitatea k, se obţin ecuaţiile parametrice

$$\text{(20.34)}\qquad \begin{cases} x = cos\alpha.coq[\theta = \alpha,\ s = k] = \dfrac{cos^2\propto}{\sqrt{1-k^2sin^2\propto}} = cos\alpha.ce(\alpha,k) \\ y = sin\alpha.siq[\theta = \alpha,\ s = k] = \dfrac{sin^2\propto}{\sqrt{1-k^2cos^2\propto}} = sin\alpha.se(\alpha,k) \end{cases}$$

Familia de curbe (19.34) reprezinta o transformare continuă a cercului unitate în pătratul **Valeriu Alaci,** un pătrat rotit cu ± π/4 faţă de pătratul **SM** (**Fig.19.17** ↗sus-dreapta), rezultat din relaţiile (19.31) şi / sau (19.33).

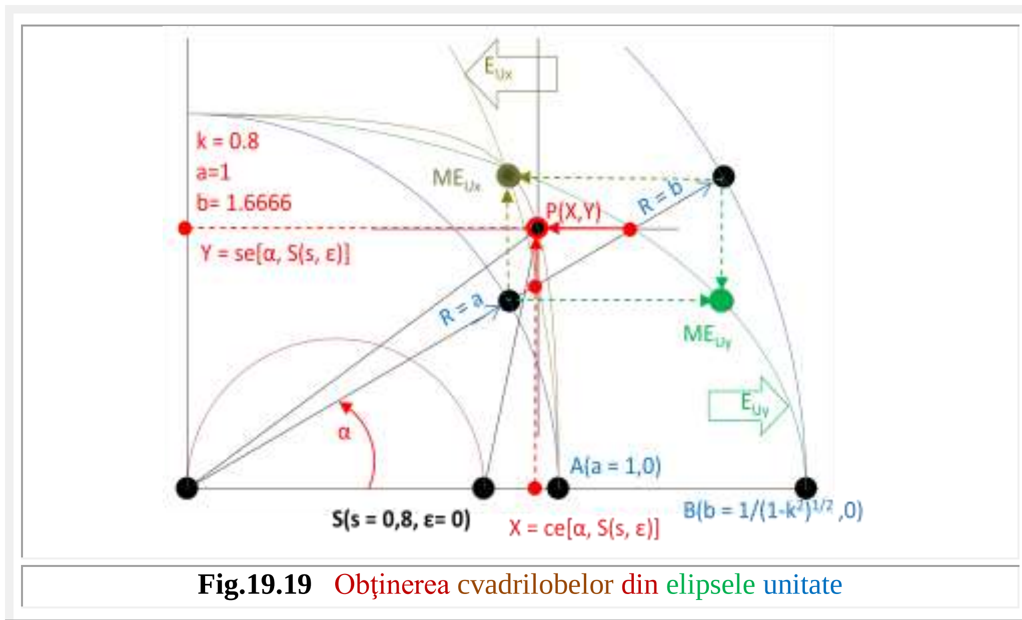


Fig.19.19 Obţinerea cvadrilobelor din elipsele unitate

Curbe **asemănătoare**, numite **transtrigonometrice** (**TT**), au stat la baza definirii, de catre Prof. dr. **Malvina Baica** şi ing. **Mircea Cârdu**, a **funcţiilor transtrigonometrice** (**Malvina Baica**, **Mircea Cârdu, PERIODIC TRANSTRIGONOMETRIC FUNCTIONS**, The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, Sept. 27-30, 2005, pag. 33-37) cosinus **-ct(α,K)** şi sinus **st(α,K)** transtrigonometrice (**Fig.19.17** ↘ jos-dreapta), în care **K∈[1, 2]** este exponentul din ecuaţiile (19.35).

Se ştie că funcţiile trigonometrice / circulare, pe care le vom denumi şi **Leonhard Euler**, verifică ecuaţia cercului din (19.35) în care **K = 2**, iar cele trigonometrice **Alaci Valeriu**, verifică excuaţia pătratului **Alaci** din **figura 19.17** ↗ sus-stânga, în care **K = 1**, iar **FTT** verifică ecuaţia pentru **K ∈(1, 2)**, adică

$$(19.35)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^K + y^K = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1 \\ ct^K \propto + st^K \propto = 1 \\ cp^1 \propto + sp^1 \propto = 1 \end{cases}, \qquad K \in [1,\ 2]$$

In acest fel, **FTT** conţin, pentru valorile extreme ale lui **K**, atât funcţiile circulare centrice **Euler** (K = 2) cât şi funcţiile trigonometrice pătratice **Alaci Valeriu** (**K** = 1). Funcţiile **SM-QL,** extinzând acest domeniu de la cercul **Euler** la pătratul unitate **SM** (**Fig.19.17** ↙ jos-stânga), circumscris cercului unitate, completează / umplu continuu domeniul dintre cele două pătrate: **Alaci** – inscris şi pătratul **SM** **-** circumscris cercului unitate.

Funcţiile cuadrilobe (**FQL**) sunt coordonatele x şi y ale unui punct M(x, y) de pe una din cvadrilobele de excentricitate numerică **s**, exprimate în funcţie de variabila excentrică θ sau de variabila centrică α.

Funcţiile cosinus cvadrilob şi sinus cvadrilob, atât de variabilă excentrică (x = coqθ şi y = siqθ) cât şi cele de variabilă centrică (x = Coqα şi y = Siqα), ca şi combinaţiile liniare ale acestora, sunt soluţii ale unor sisteme vibrante neliniare, de caracteristici elastice neliniare cu neliniarităţi mai pronunţate decât cele ale sistemelor vibrante **Duffing**, datorita unui al treilea termen suplimentar în x^5 [19].

O comparaţie între funcţiile cosinus şi sinus **TT** şi **IT** este redată în **figura 19.18**, pentru a evidenţia faptul ca ele sunt funcţii distincte, care acoperă acelaşi domeniu, dintre cercul unitate şi pătratul **Alaci,** înscris în acest cerc.

19.11 FUNCŢIILE ELIPTICE SM – SOLUŢII ALE UNOR SISTEME VIBRANTE NELINIARE ELIPTICE SM (SVEL-SM)

Lucrarile [9], [17], [19] ş.a. prezintă o serie de funcţii noi, **SM,** ca funcţiile circulare excentrice de variabilă excentrică **cexθ** şi **sexθ** şi cele de variabilă centrică **Cexα** şi **Sexα**, precum şi funcţiile cvadrilobe (**FSM-QL**) **coqθ** şi **siqθ** care sunt soluţii ale unor sisteme oscilante neliniare.

Pentru primele două cazuri, cu **FSM-CE** de **variabile excentrice θ** şi, respectiv, **centrice α,** ecuaţiile diferenţiale, ale căror soluţii exacte sunt aceste **FSM-CE,** sunt

$$(19.36)\quad \begin{cases} \frac{d^2z}{d\theta^2} - \frac{\epsilon}{\omega}\frac{dz}{d\theta} + \omega^2 = 0 \\ \frac{d^2Z}{d\alpha^2} - \frac{\epsilon}{\omega}\frac{dZ}{d\alpha} + \omega^2 = 0 \end{cases}, \text{ în care } \begin{cases} \omega = \Omega\frac{d\theta}{dt}, \epsilon = \frac{d\omega}{dt} \\ \omega = \Omega\frac{d\alpha}{dt}, \epsilon = \frac{d\omega}{dt} \end{cases}, \text{ S(s = k} \in \text{[-1,1], } \varepsilon)$$

În aceste relaţii, $\Omega = constant$ este viteza unghiulară de rotaţie a semidreptei cu polul în O(0,0), ale cărei intersecţii, cu elipsele unitate, sunt punctele P(x, y), ale căror coordonate x şi y sunt **FSM-EL**.

Aşa cum se va prezenta în continuare, $\Omega = constant$ este, totodată şi **pulsaţia proprie** a **SVEL - SM**.

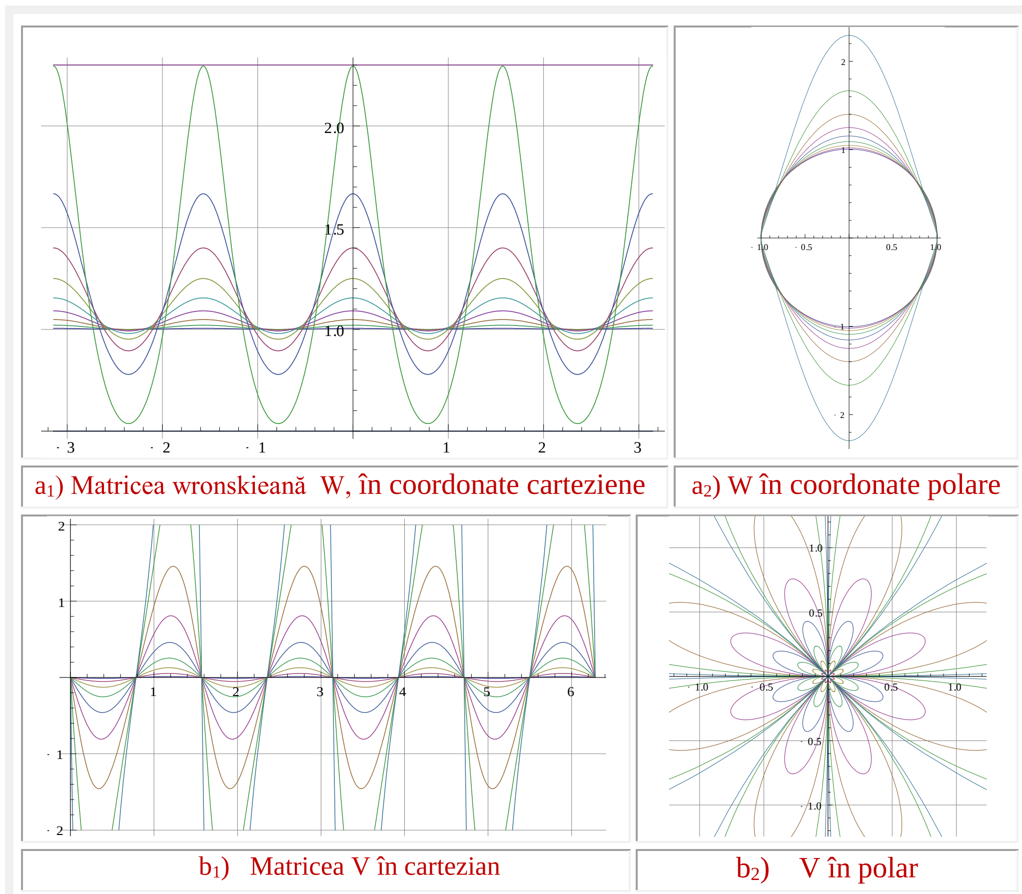
Fie funcţiile **SM-ELC** x = ce(α, k), y = se(α, k), $x, y : \mathbb{R} \rightarrow [-1, +1]$, de acelaşi modul k şi derivatele lor, ca funcţii de timp, date de relaţiile (19.10) şi (19.11') înmulţite cu $\Omega = \frac{d\alpha}{dt}$ şi, respectiv, cu $\Omega^2 = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$.

Matricea lor wronskiană, notând derivatele în funcţie de argumentul $\boldsymbol{\alpha}$ cu accent, este

$$(19.37)\ W=\begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix}=\Omega\begin{vmatrix} ce\alpha & se\alpha \\ ce'\alpha & se'\alpha \end{vmatrix}=\Omega\begin{vmatrix} \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} & \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-k^2\cos^2\alpha}} \\ -\sin\alpha\,\frac{1-k^2}{(1-k^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} & \cos\alpha\,\frac{1-k^2}{(1-k^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix}=$$

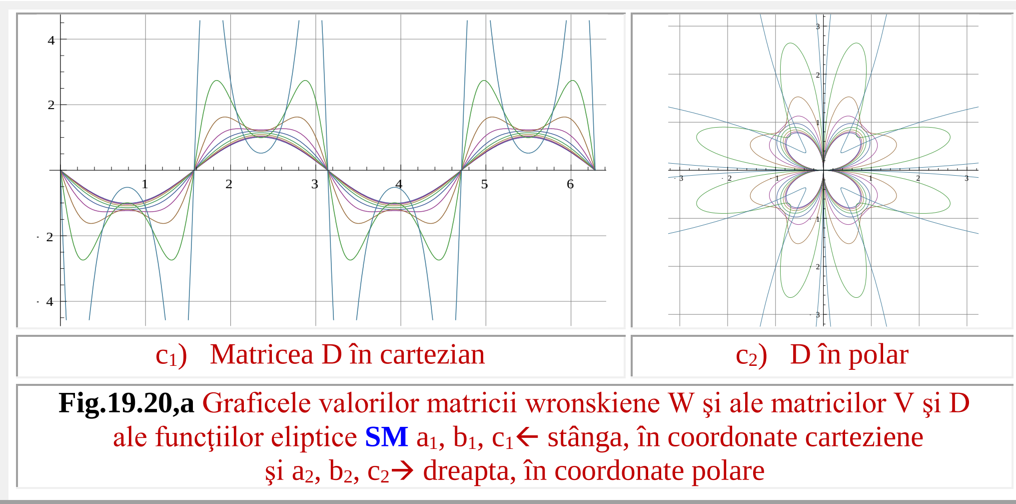
$$=\frac{(1-k^2)(1-\frac{k^2}{2}\sin^2 2\alpha)}{[1-k^2\left(1-\frac{k}{4}\sin^2 2\alpha\right)]^{1,5}} \in [\,0{,}5;\ 2{,}3] \neq 0,$$

aşa cum arată şi graficele din **figura 19.20,a**.



a₁) Matricea wronskieană W, în coordonate carteziene — a₂) W în coordonate polare

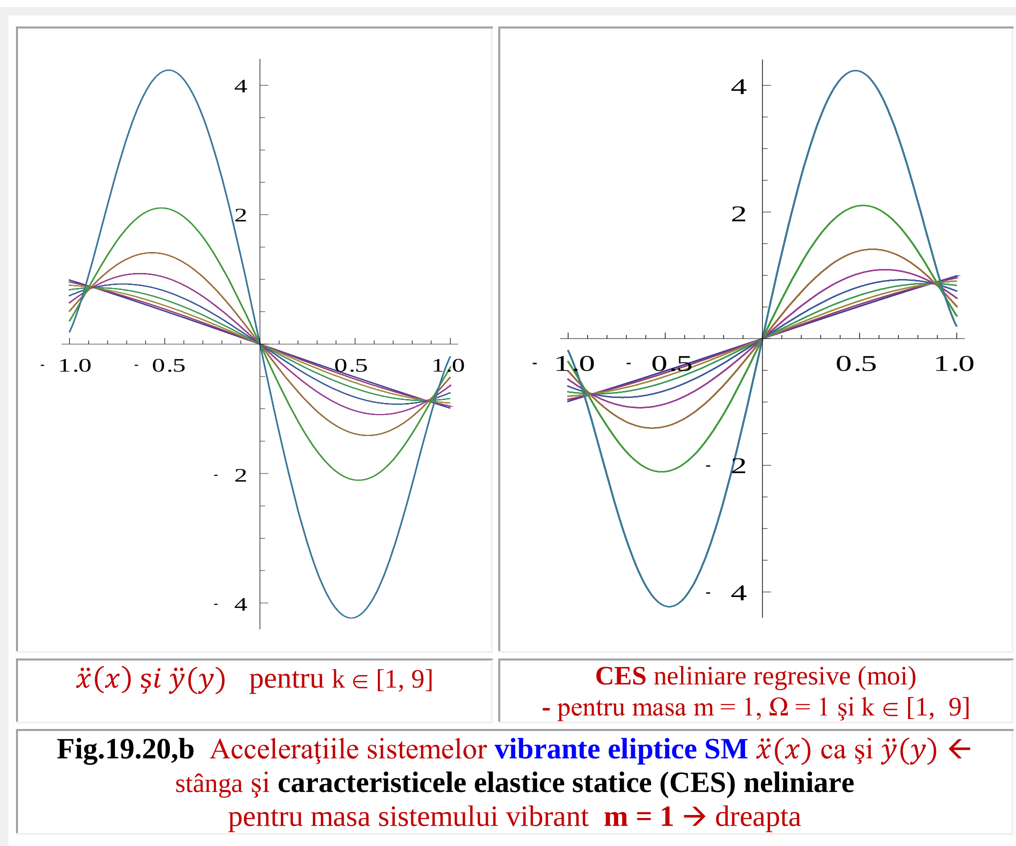
b₁) Matricea V în cartezian — b₂) V în polar



c_1) Matricea D în cartezian

c_2) D în polar

Fig.19.20,a Graficele valorilor matricii wronskiene W şi ale matricilor V şi D ale funcţiilor eliptice **SM** a_1, b_1, c_1← stânga, în coordonate carteziene şi a_2, b_2, c_2→ dreapta, în coordonate polare



$\ddot{x}(x)$ şi $\ddot{y}(y)$ pentru k ∈ [1, 9]

CES neliniare regresive (moi) - pentru masa m = 1, Ω = 1 şi k ∈ [1, 9]

Fig.19.20,b Acceleraţiile sistemelor **vibrante eliptice SM** $\ddot{x}(x)$ ca şi $\ddot{y}(y)$ ← stânga şi **caracteristicele elastice statice (CES) neliniare** pentru masa sistemului vibrant **m = 1** → dreapta

Ecuaţia diferenţială a acestor sisteme vibrante este

(19.38) $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x" & y" & z" \end{vmatrix} = 0, \quad W.\ddot{z} - V.\dot{z} + D.z = 0,$$

în care, **W** este **matricea wronskiană** (20.37), **V** este matricea **v**itezelor (20.39) şi **D** matricea **d**eplasărilor (19.40).

(19.39) $$V = \begin{vmatrix} x & y \\ x" & y" \end{vmatrix}$$

(19.40) $$D = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x" & y" \end{vmatrix}$$

Soluţia generală a sistemului vibrant, care admite ca soluţii **funcţiile eliptice SM**, denumit **sistem vibrant** / oscilant **eliptic SM** → **(SVEL-SM)**, este

(19.41) $$z[\alpha(t), k] = C_x.ce[\alpha(t), k] + C_y.se[\alpha(t), k]$$

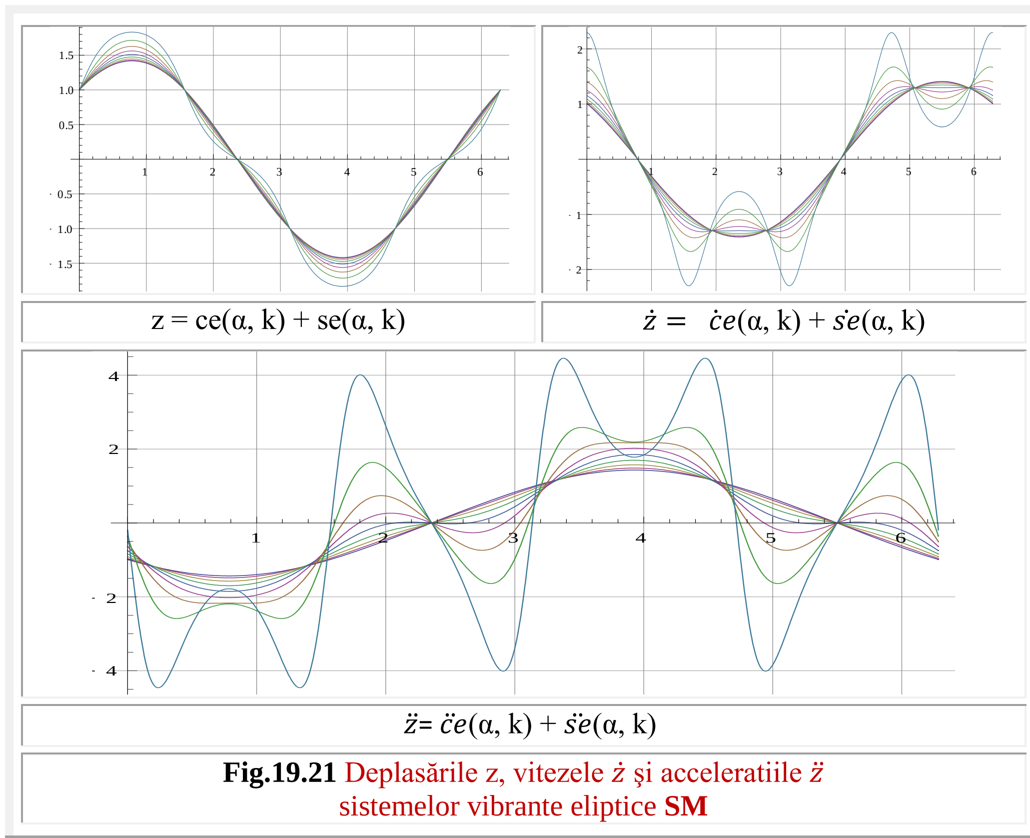


Fig.19.21 Deplasările z, vitezele $\dot{z}$ şi acceleratiile $\ddot{z}$ sistemelor vibrante eliptice **SM**

Graficele acceleraţiilor, în funcţie de deplasarea x, respectiv, y, sunt prezentate în **figura 19.21**, împreună cu **caracteristicile elastice statice** (**CES**) ale acestor sisteme neliniare, care sunt regresive sau moi, pentru o masă a sistemului vibrant considerată unitate, **m = 1** şi pentru o viteză unghiulară la fel **Ω = 1**.

Pentru m = 1, Ω =1, x, y < 0.5, caracteristicele elastice statice (**CES**) sunt regresive sau moi, iar peste aceste valori rigiditatea locală (tangentă) devine negativă, dar rigiditatea globală (secantă) rămâne pozitivă.

Pentru constantele $C_x = C_y = 1$, soluţiile generale ale sistemelor vibrante sunt prezentate prin deplasarea z = ce(α, k) + se(α, k), viteza $\dot{z} = \dot{ce}(\alpha, k) + \dot{se}(\alpha, k)$ şi acceleraţiile $\ddot{z} = \ddot{ce}(\alpha, k) + \ddot{se}(\alpha, k)$, în **figura 19.22**.

Admiţând C_x=1 şi C_y = 0, soluţia este dată numai de funcţia cosinus elliptic **SM**.Rrezută expresiile deplasării / deformaţiei z = x(Ωt), vitezei $\dot{x}(\Omega t)$ şi a acceleraţiilor $\ddot{x}(\Omega t)$ **sistemelor vibrant**/oscilant **eliptic SM → (SVEL-SM)**, de caracteristica elastică statica (**CES**) **moale** sau **regresivă** reprezentată în stânga **figurii 19.22,b**.

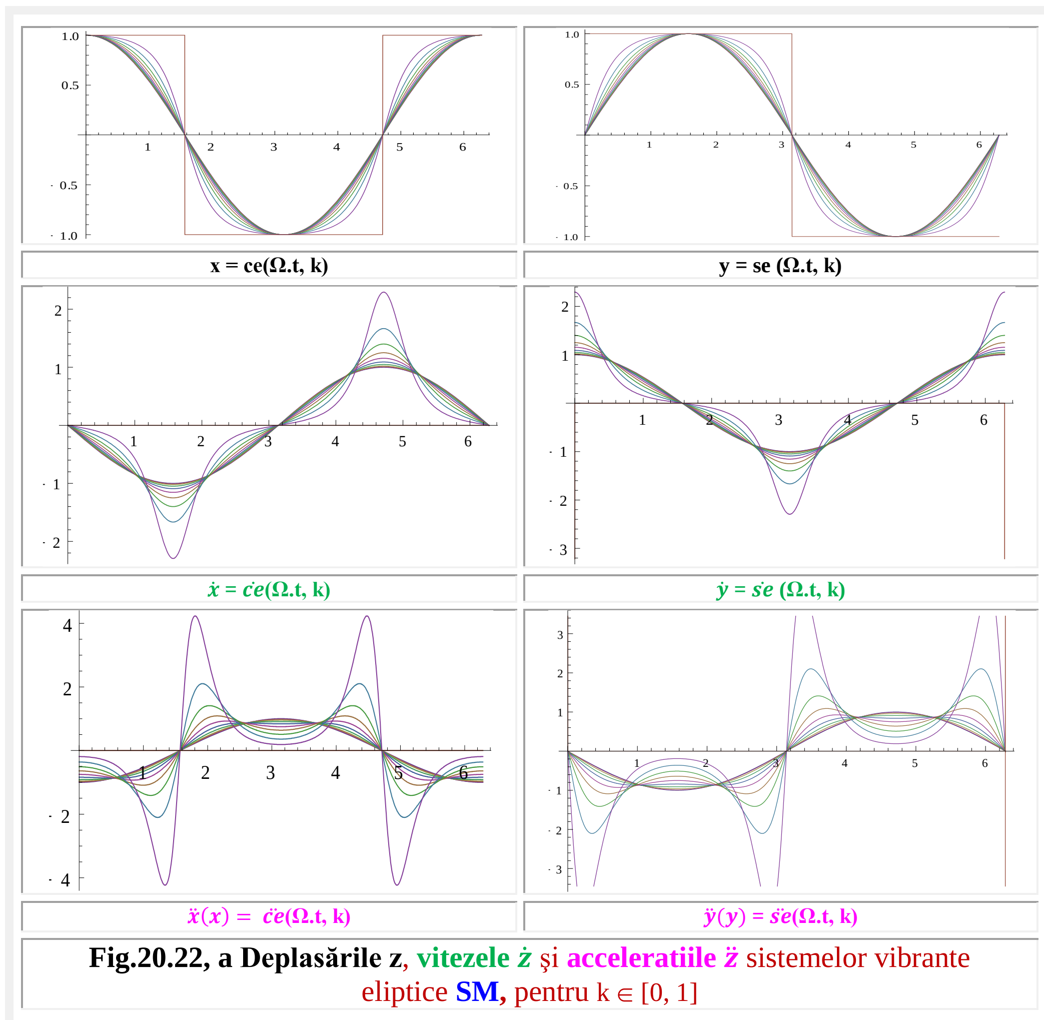
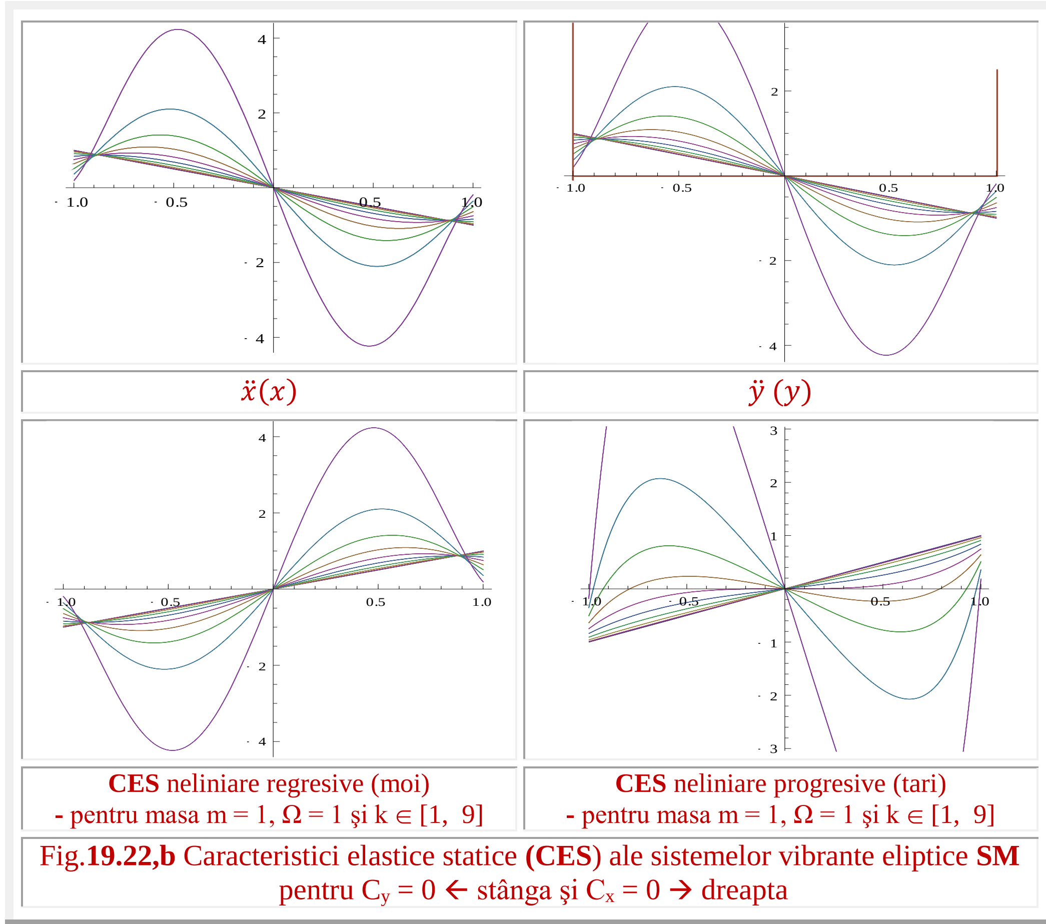


Fig.20.22, a Deplasările z, **vitezele $\dot{z}$** şi **acceleratiile $\ddot{z}$** sistemelor vibrante eliptice **SM,** pentru k ∈ [0, 1]

$$(19.42)\quad \begin{cases} z = x = ce(\Omega.t,k) = \dfrac{\cos\Omega t}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Omega t}} \\ \dot{z} = \dot{x} = \dot{ce}\,(\Omega.t,k) = -\,\Omega.\sin\Omega.t\,\dfrac{1-k^2}{(1-k^2\sin^2\Omega.t)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{z} = \ddot{x} = \ddot{ce}(\Omega.t,k) = -\Omega^2\dfrac{(1-k^2)\ (1+2k^2\sin^2\Omega t)}{(1-k^2\sin^2\Omega t)^{5/2}}\cos\Omega t \end{cases} \qquad \text{(Fig. } \mathbf{19.22,a}\text{)}$$



CES neliniare regresive (moi) - pentru masa m = 1, Ω = 1 şi k ∈ [1, 9]

CES neliniare progresive (tari) - pentru masa m = 1, Ω = 1 şi k ∈ [1, 9]

Fig.**19.22,b** Caracteristici elastice statice **(CES)** ale sistemelor vibrante eliptice **SM** pentru $C_y = 0$ ← stânga şi $C_x = 0$ → dreapta

Dacă se admite $C_x = 0$ şi $C_y = 1$, deplasările sau deformările elementului elastic z = y sunt date doar de funcţia sinus eliptic **SM**, care se apropie foarte mult de funcţia eliptică **Jacobi** sn(2Ku/π,k) şi rezultă soluţiile

$$(19.43)\qquad z[\alpha(t)=\Omega t,\ k] = y = C_y.se[\Omega t,\ k] = C_y\frac{\sin\Omega t}{\sqrt{1-k^2\cos^2\Omega t}} \qquad \text{cu viteza}$$

$$(19.44)\qquad \dot{z}\,[\alpha(t)=\Omega t,\ k] = \dot{y} = C_y.\dot{se}[\Omega t\ k] = C_y.\Omega.\cos\Omega t\,\frac{1-k^2}{(1-k^2\cos^2\Omega t)^{\frac{3}{2}}}$$

şi cu acceleraţia

(19.45) $\ddot{z}[\alpha(t)=\Omega t,k]=\ddot{y}=C_y\,.\,\Omega^2.\,\ddot{se}[\Omega t,t]=-C_y\Omega^2\,\frac{(1-k^2)\,(1+2k^2\cos^2\Omega t)}{(1-k^2\cos^2\Omega t)^{5/2}}\sin\Omega t$

Acceleraţiile, în funcţie de deplasare, pentru ambele cazuri, sunt prezentate în **Figura 19.22,b**, împreună cu caracteristicile elastice statice (**CES**) neliniare, **regresive** sau **moi** în cazul **cosinusului eliptic SM** şi **progresive** sau **tari** în cazul soluţie cu **sinus eliptic SM**, pentru o masă a sistemului m = 1 şi o pulsaţie proprie a sistemelor neliniare **Ω** = 1. Modulul k în acest caz a variat în domeniul k ∈ [0; 0,9].

Comparaţia grafică dintre funcţiile eliptice **Jacobi** (**FEJ**) şi funcţiile eliptice **SM** (**FESM**) este dată în **figura 20.23**. Argumentul **u** al **FEJ** este arcul de elipsa $\widetilde{A_1E_{Ux}}$, iar argumentul **FESM** este arcul de cerc **α** al cercului unitate Cu(O,1).

Fig.19.23 Funcţii eliptice **Jacobi** şi funcţii eliptice **SM**

Arcul de elipsă se determină, prin integrarea pe elipsa unitate E_{Ux} a expresiei razei r_{Ux} polare din O(0,0), din punctul de origine A_1(1,0) şi până în punctul curent $\mathbf{E_{Ux}}$, adică cu integrala

(19.46) $u(\alpha,k)=F(\alpha,k)=\int_{A_1}^{E_{Ux}} ds=\int_{A_1}^{E_{Ux}} r_{Ux}.\,d\propto=\int_0^{\propto}\frac{d\propto}{\sqrt{1-k^2\sin^2\propto}}=\int_0^{y}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$

în care se recunoaşte raza polară din originea O(0,0) dată de relaţia (20.5) pentru elipsa unitate pe x rotită cu $\pm\frac{\pi}{2}$, faţă de elipsa unitate pe y E_{Uy} de a = $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ şi b = 1.

19.12 FUNCŢII ELIPTICE DE ARCE DE CERC (SM) EXCENTRICE

Prin introducerea în matematică a **funcţiilor eliptice** şi a celor **intratrigonometrice SM** centrice, matematica s-a îmbogăţit cu noi funcţii periodice, mult mai simple decât cele **eliptice clasice Jacobi**, de exemplu. Ele au aplicaţii la exprimarea mărimilor de vibraţie ale unor sisteme elastice, puternic neliniare, aşa cum s-a văzut anterior.

Dacă elipsele şi hiperbolele se obţin pentru o plajă / domeniu de valori ale **excentricităţii numerice k**, parabola şi cercul se obţin pentru o singură valoare: k = 1 şi, reapectiv, k = 0. De aceea, pe parabolă şi pe cerc sunt definite doar câte o singură funcţie circulară centrică şi câte o singură funcţie parabolică centrică. Însă, trecerea din centric în excentric oferă, aşa cum s-a arătat în lucrarile [1], [2],…[23], multiplicarea oricărei entităţi din domeniul **matematicii centrice** – clasice (**MC**), ordinare – într-o infinitate de entităţi în **matematica excentrică** (**ME**).

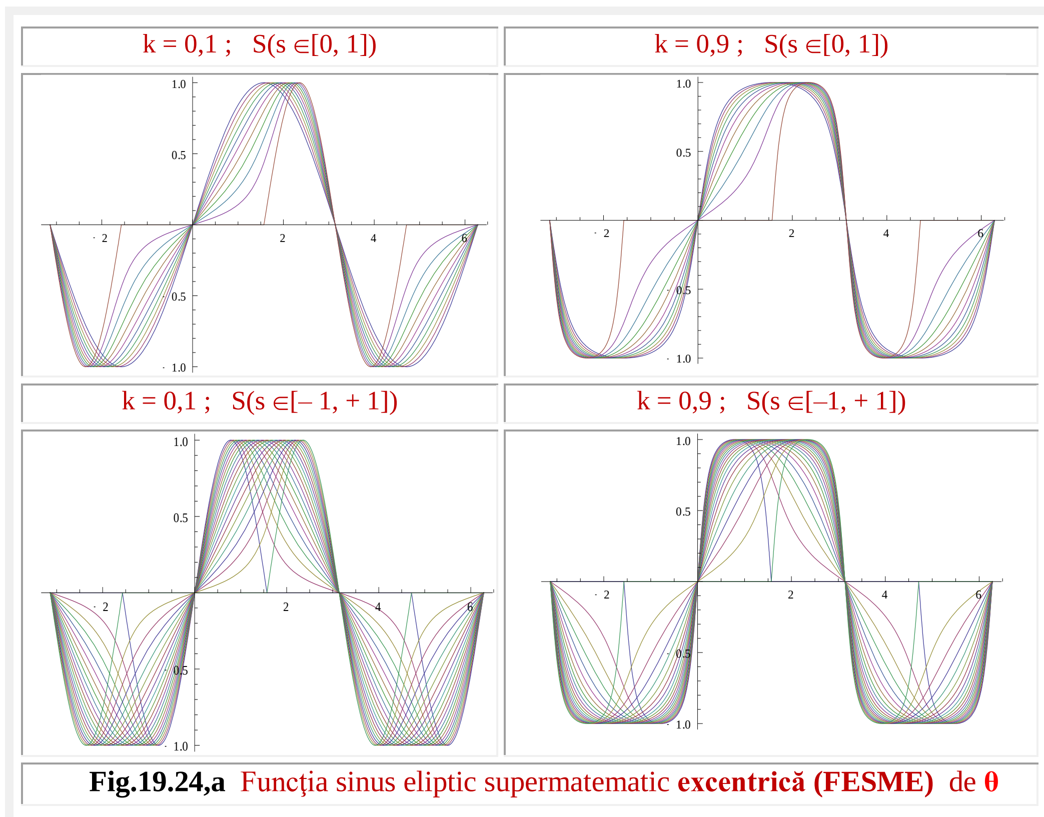


Fig.19.24,a Funcţia sinus eliptic supermatematic **excentrică (FESME)** de **θ**

Funcţiile eliptice SM ca şi cele **intratrigonometrice**, tratate anterior, se referă la **funcţiile centrice** şi, ca urmare, fiecare funcţie din domeniul centric poate fi multiplicată la infinit în domeniul excentric. Astfel, de exemplu, pentru un modul şi,

totodată, o excentricitate a unei elipsei de k = 0,1 şi a alteia de k = 0,9 au fost redate graficele **funcţiilor supermatematice eliptice excentrice** (**FSM-ELE**) din **figura 19.24** pentru **excentre S(s,ε)** cu excentricităţi numerice **s ∈ [0,1]** –sus 🡅 şi cu excentricităţi numerice de **s ∈ [-1, +1]** şi ε = 0, în partea de jos ▼ a **figurii 19.21**sau, ceea ce este echivalent, cu **s ∈ [0, 1]** şi **ε = 0** şi, respectiv, **ε = π**.

Ecuaţiile funcţiilor eliptice **SM excentrice** (**FESME**) se pot obţine din ecuaţiile **FESMC** date de relaţiile de definiţie (19.6 şi 19.7) în care **variabila** α se inlocuieşte cu funcţia **SM-CE amplitudine excentrică** (**circulară**). Dacă ea este de variabilă **excentrică θ** aex [θ, S(s, ε)], atunci se vor obţine **FESME** de variabilă **excentrică θ**.

Cosinusul şi sinusul eliptice **SM** centrice se vor nota cu **ceex**[θ, S(s, ε)] sau, mai simplu, **ceex**θ şi, respectiv, **seex**(θ, S(s, ε)) sau **seex**θ cu expresiile

(19.47) $$\begin{cases} ceex\theta = ce\{\alpha = aex[\theta, S(s,\varepsilon)], k\} = \dfrac{cex\theta}{\sqrt{1-k^2 sex^2\theta}}, \\ seex\theta = se\{\alpha = aex[\theta, S(s,\varepsilon)], k\} = \dfrac{sex\theta}{\sqrt{1-k^2 cex^2\theta}} \end{cases}$$

în care, **FSM-CE** de variabila excentrică **cexθ** şi **sexθ**, reamintim, au expresiile [Vol. I, Ed. 1-a, pag.29 rel.(1.6)…(1.9),]

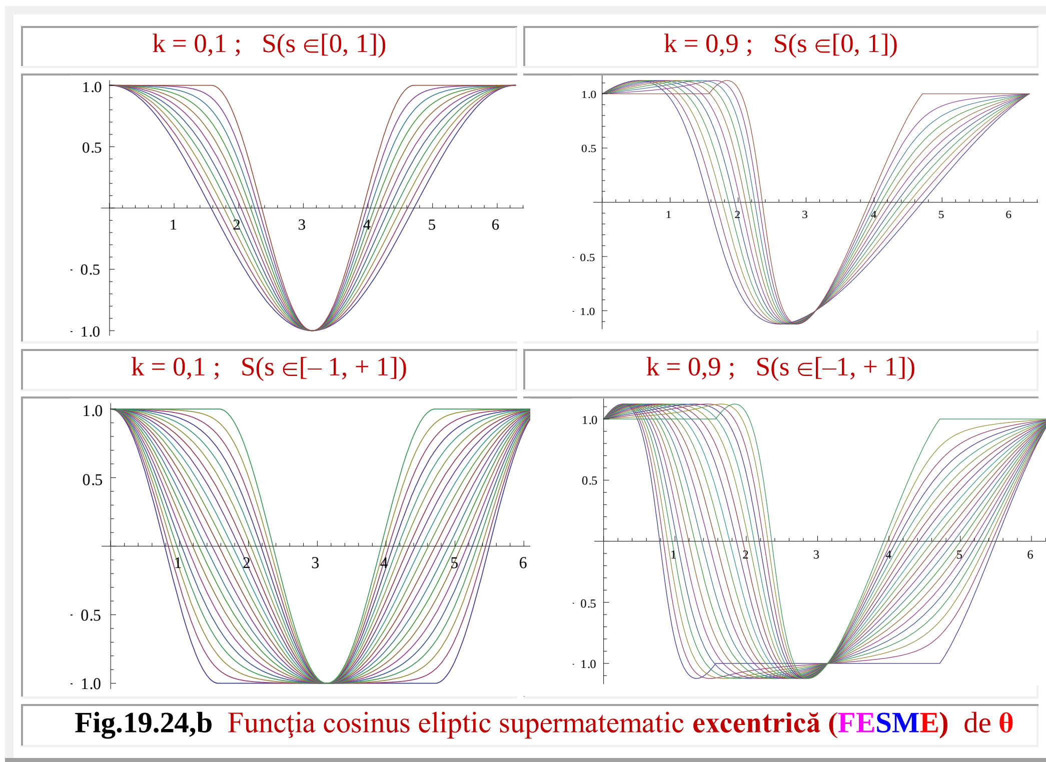


Fig.19.24,b Funcţia cosinus eliptic supermatematic **excentrică (FESME)** de **θ**

(19.48) $$\begin{cases} cex\theta = \cos[aex\theta] = \cos[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]] \\ sex\theta = \sin[aex\theta] = \sin[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]] \end{cases}$$

sau, explicit cu **FCC**

(19.48’)
$$\begin{cases} cex\theta = cos\theta\sqrt{1-s^2sin^2(\theta-\varepsilon)} + s.sin\theta.\sin(\theta-\varepsilon) \\ sex\theta = sin\theta\sqrt{1-s^2sin^2(\theta-\varepsilon)} - s.cos\theta.\sin(\theta-\varepsilon) \end{cases}$$

FESME de variabilă centrică α, cosinusul notat Ce**ex**[α, S(s,ε)] sau numai Ce**ex**α şi sinusul eliptic excentric cu **Seex**[α, S(s, ε)] sau **Seex**α au expresiile

(19.49)
$$C$$
$$\begin{cases} Ceex \propto = ce\{\alpha = Aex[\propto, S(s,\varepsilon)], k\} = \dfrac{Cex\propto}{\sqrt{1-k^2Sex^2\propto}} \\ Seex \propto = se\{\alpha = Aex[\propto, S(s,\varepsilon)], k\} = \dfrac{Sex\propto}{\sqrt{1-k^2Cex^2\propto}} \end{cases}$$

sau, explicit cu **FCC**

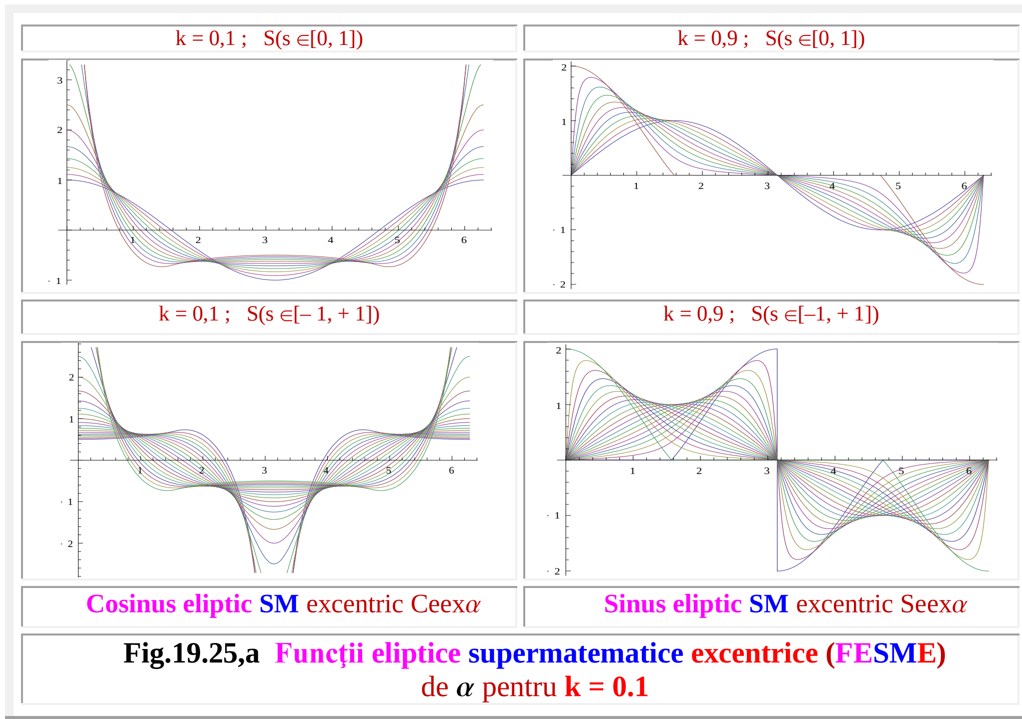


Fig.19.25,a Funcţii eliptice supermatematice excentrice (FESME)
de ***α*** pentru **k = 0.1**

(19.49’)
$$\begin{cases} Ceex \propto = \cos\left[\propto + arcsin\dfrac{s.sin(\propto-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.cos(\propto-\varepsilon)}}\right] = \cos[\propto + arcsin\dfrac{s.\sin(\propto-\varepsilon)}{Rex\alpha}] \\ Seex \propto = \sin\left[\propto + arcsin\dfrac{s.\sin(\propto-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.cos(\propto-\varepsilon)}}\right] = \sin[\propto + arcsin\dfrac{s.\sin(\propto-\varepsilon)}{Rex\alpha}] \end{cases}$$

În aceste relaţii (19.46…19.49’), au fost exprimate doar determinările principale ale acestor funcţii de indice **1**, indice care nu se mai notează, dacă nu se utilizează şi determinările secundare de indice **2**.

Graficele **FESME** de variabilă centrică α, pentru k = 0,1 şi k = 0,9 sunt prezentate în **figura 19.25**. Comparând graficele din **figurile 19.24,a** şi **19.25,a** de k = 0,1 cu cele din **figurile 19.24,b** şi **19.25,b** de k = 0,9 se observă ca diferenţele sunt

nesemnificative în funcţie de k, dar pronunţate în funcţie de **excentricitatea numerică liniară circulară s.**

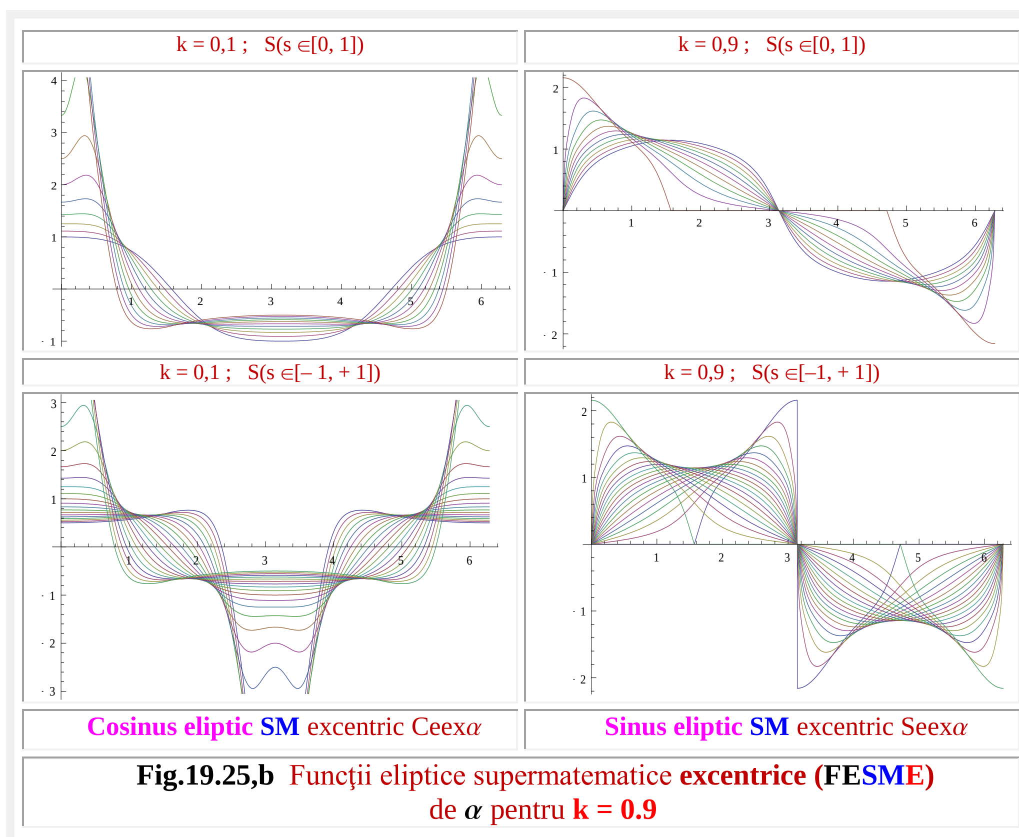


Fig.19.25,b Funcţii eliptice supermatematice **excentrice (FESME)** de α pentru **k = 0.9**

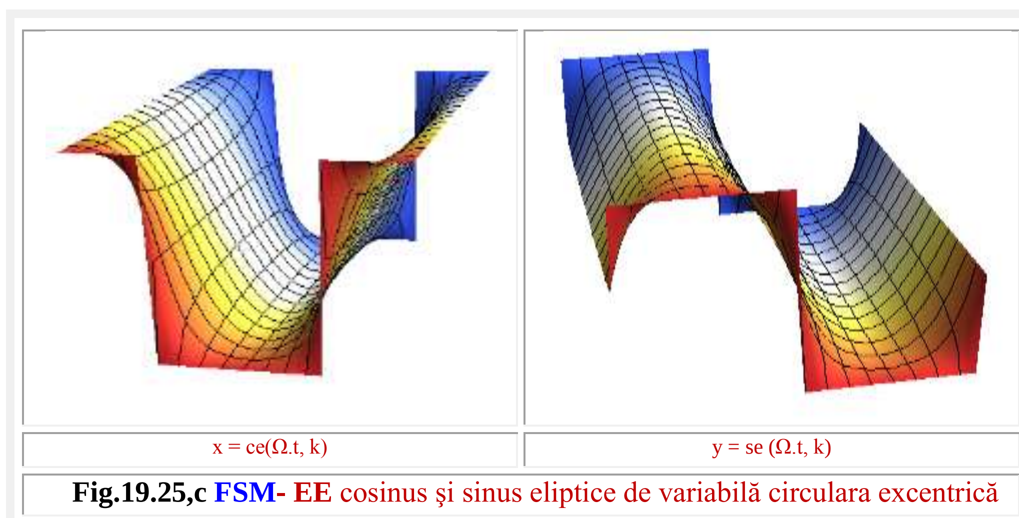
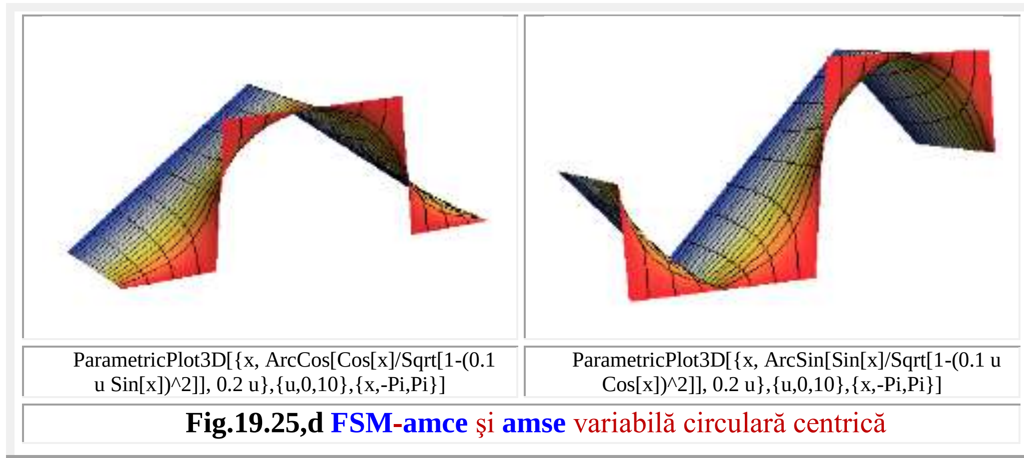


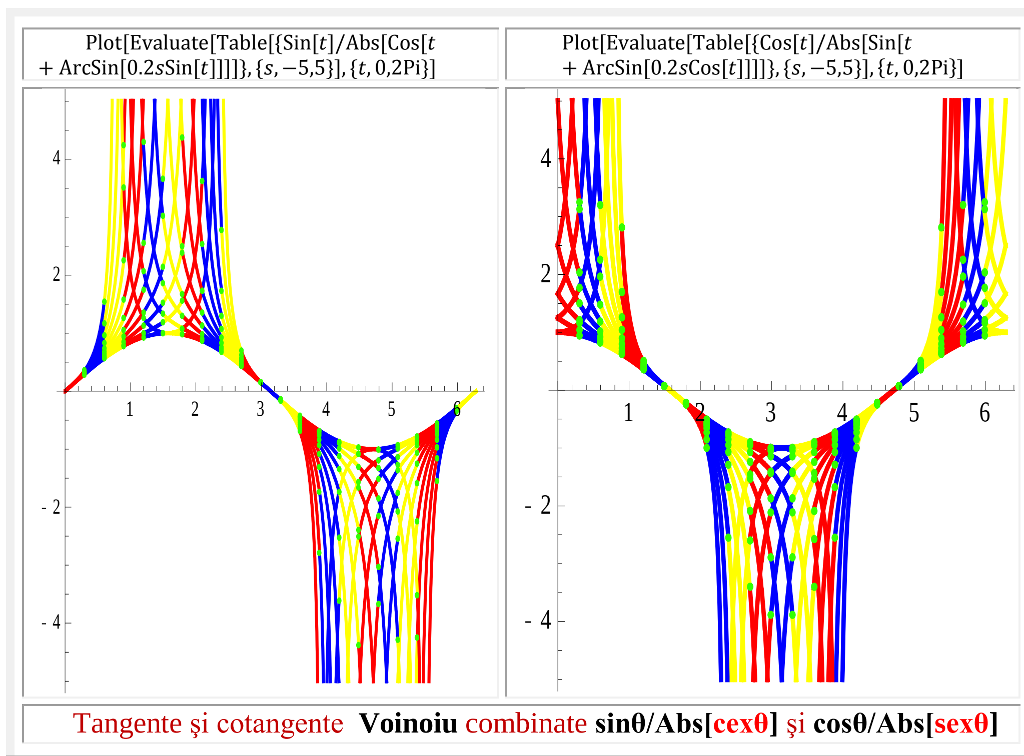
Fig.19.25,c FSM- EE cosinus şi sinus eliptice de variabilă circulara excentrică



ParametricPlot3D[{x, ArcCos[Cos[x]/Sqrt[1-(0.1 u Sin[x])^2]], 0.2 u},{u,0,10},{x,-Pi,Pi}]

ParametricPlot3D[{x, ArcSin[Sin[x]/Sqrt[1-(0.1 u Cos[x])^2]], 0.2 u},{u,0,10},{x,-Pi,Pi}]

Fig.19.25,d FSM-amce şi **amse** variabilă circulară centrică



Plot[Evaluate[Table[{Sin[*t*]/Abs[Cos[*t* + ArcSin[0.2*s*Sin[*t*]]]]}, {*s*, −5,5}], {*t*, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Cos[*t*]/Abs[Sin[*t* + ArcSin[0.2*s*Cos[*t*]]]]}, {*s*, −5,5}], {*t*, 0,2Pi}]

Tangente şi cotangente **Voinoiu** combinate **sinθ/Abs[cexθ]** şi **cosθ/Abs[sexθ]**

Motto: ” Nu mai căutaţi **găuri de vierme**. Printr-o **gaură neagră**
veţi ajunge cu siguranţă pe lumea cealaltă ”
Autorul

Capitolul 20

GĂURI DE VIERME ÎN MATEMATICĂ REALIZATE CU FSM-CE HIBRIDE

20.1 ÎN INTRODUCERE: DIVERSE GĂURI DE VIERME

Descrise pentru prima dată, în 1935, de catre **Albert Einstein** şi **Nathan Rosen** şi denumite iniţial poduri, (punţi, puntiţe, tuneluri) găurile de vierme sunt soluţii (teoretice, neconfirmate încă, dar căutate intens) ale unor ecuaţii ale teoriei generale a relativităţii care descriu spaţiul şi timpul. Ele sunt entităţi topologice care oferă o scurtatură între două puncte de pe o suprafaţă intinsă, o structura ipotetică a spaţiu-timpului.

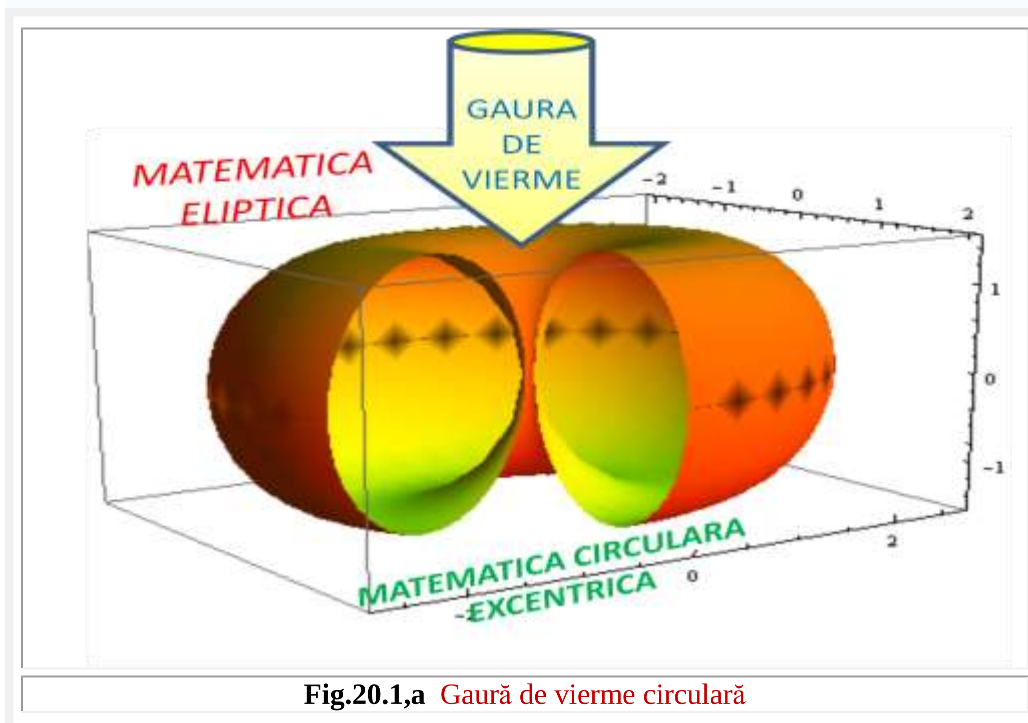


Fig.20.1,a Gaură de vierme circulară

Cu referire la univers, ele ar putea face o legatură cu mult mai scurtă între două zone sau două lumi îndepartate din univers. Acelaşi lucru îl face şi o gaură neagră, dar se zice ca ea duce NICĂIERI ! A încercat cineva ?

Cu referire la matematică, o butadă afirmă că topolog este acela care nu face distincţie între o cană de cafea şi un covrig (tor). Ambele pot avea câte o cavitate străpunsă / gaură.

La fel cum **supermatematica** nu face distincţie dintre **cerc** şi **pătrat**. Ambele au aceleaşi ecuaţii parametrice. Nici dintre **liniar** şi **neliniar**: liniarul este apanajul matematicii centrice (**MC**), care se obţine din supermatematică pentru o excentricitate nulă (e = s = 0), iar neliniarul este apanajul matematicii excentrice (**ME**), în care excentricităţiile pot lua orice valoare, mai puţin zero **e, s** $\in$ ([- ∞, + ∞] \ 0).

Am făcut conjectura: fiecare gaură neagră este şi o gaură de vierme.

Dacă în univers, alte găuri de vierme n-au fost încă descoperite, în matematică ele au început să apară; câteva dintre ele făcând obiectul capitolului de faţă.

S-au exemplificat trei găuri de vierme din matematică, o gaură circulară, care face legatura **directă** între suprafeţele superioară şi inferioară, polul **N** şi polul **S**, ale unei sfere- exemplificată prin suprafaţa unui tor circular în plan orizontal şi în plan vertical – secţiune – (**Fig. 1,a**) care leagă între ele, sau stabileşte o punte de legătură între “lumea” **matematicii speciale eliptice** şi “lumea” **matematicii circulare excentrice.**

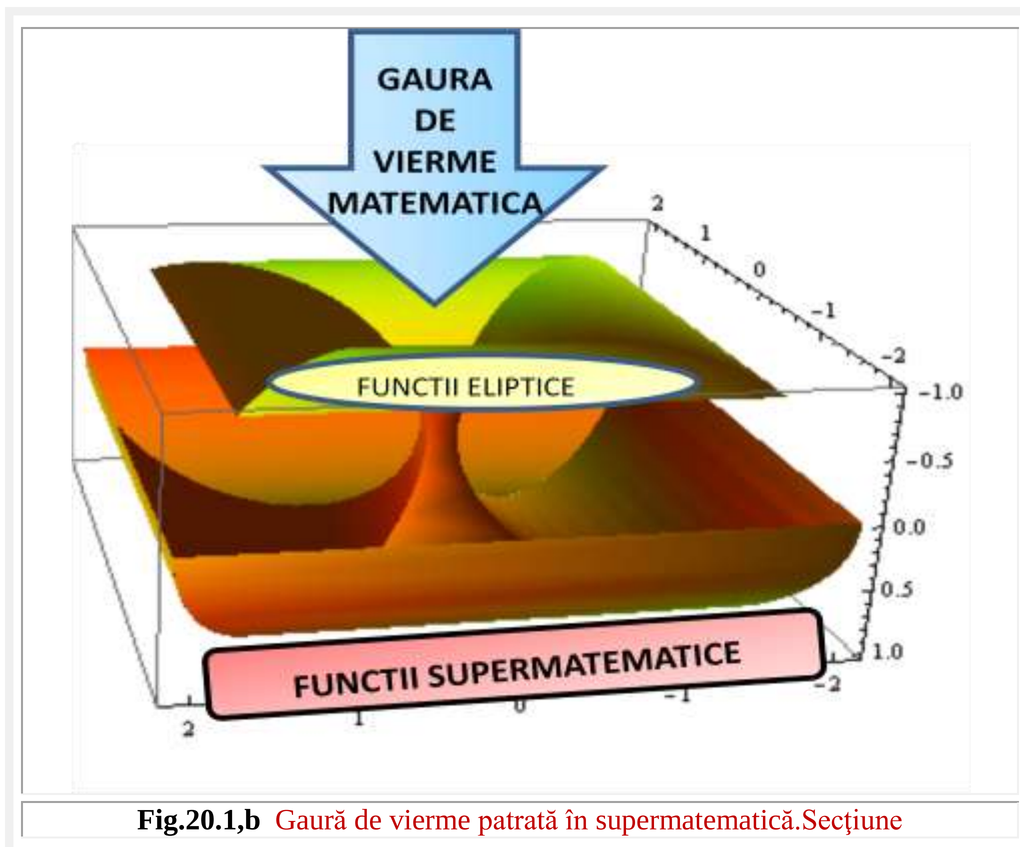


Fig.20.1,b Gaură de vierme patrată în supermatematică.Secţiune

Şi cu câte un orificiu central pătrat al unui tor pătrat, simbolizând gaura de vierme, tor pătrat în plan orizontal – desenat incomplet, şi circular în cel vertical / secţiune (**Fig.1,b**), iar în **figura 1,c** un orificiu intr-un tor patrat atat pe contur cât şi în secţiune, care leagă funcţiile speciale eliptice cu cele **supermatematice circulare excentrice**, aşa cum se va prezenta în continuare.

Se afirmă că "Acceleratorul Large Hadron Collider, de la laboratorul **CERN** de lângă Geneva, poate deja amesteca protoni şi antiprotoni cu o energie nemaiîntâlnită. Se presupune că, în câţiva ani, aceste coliziuni, cu viteze foarte mari, vor putea să creeze găuri negre microscopice şi, în cele din urmă, găuri de vierme.

Chiar dacă mărirea acestor găuri de vierme nu va fi încă posibilă, se va încerca trimiterea prin ele a unor particule în viitor sau în trecut. În funcţie de rezultatul experimentului, călătoria în timp va fi confirmată sau infirmată."

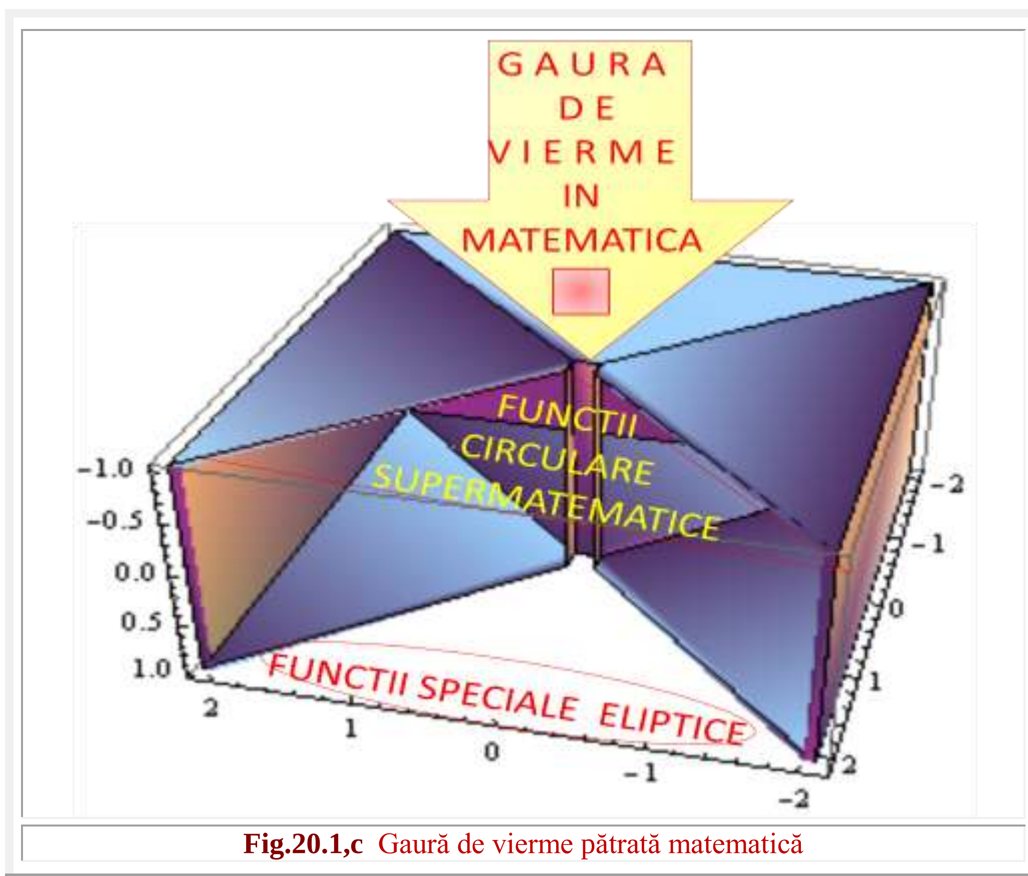


Fig.20.1,c Gaură de vierme pătrată matematică

Ceea ce în fizică este încă o ipoteză, în matematică este o certitudine, graţie noilor complemente de matematică, reunite sub denumirea de **supermatematică** (**SM**).

Noile funcţii matematice, denumite **supermatematice**, s-au nascut tocmai din dorinţa, mărturisită în introducerea volumul I, de a rezolva fără funcţii şi integrale speciale eliptice sisteme vibrante de caracteristică elastică (**CES**) neliniară.

Ele s-au dovedit deosebit de utile în diverse aplicaţii, multe dintre ele evidenţiind aptitudini de soluţii ale unor sisteme vibrante neliniare, altele au oferit relaţii, de exprimare cu numai doi termeni, cu 15 zecimale exacte a valorii integralei eliptice de prima speţă **K(k),** dar, timp de peste 30 de ani de căutări, n-a condus la stabilirea vreunei legături, gaură de vierme, între cele două tipuri de funcţii **eliptice** şi **circulare**, excluzându-se din discuţie dezvoltările în serie (trigonometrice, de puteri ş.a.).

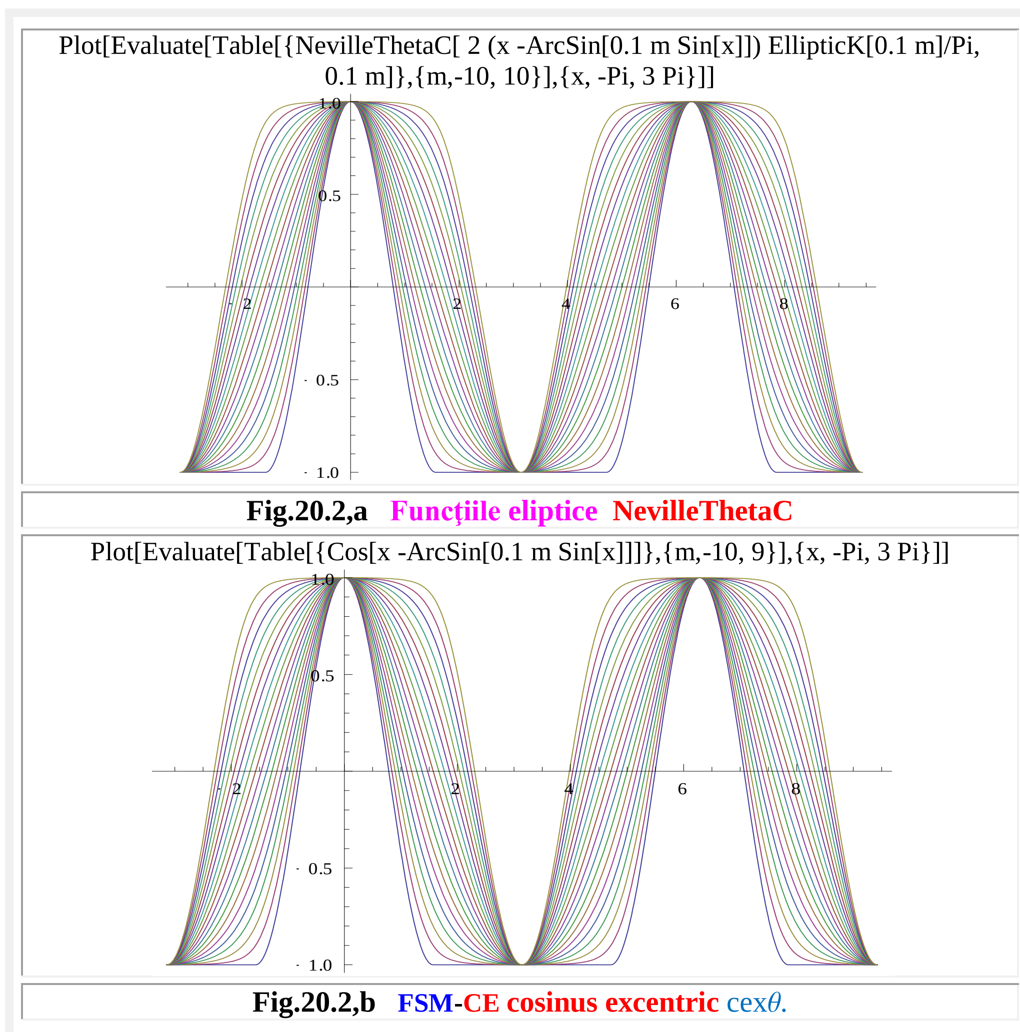


Fig.20.2,a **Funcţiile eliptice** **NevilleThetaC**

Fig.20.2,b **FSM-CE cosinus excentric** cex*θ*.

20.2 STRĂPUNGEREA SPAŢIULUI PRIN FUNCŢIA NevilleThetaC

Pană în ziua de 17 03 2009 când, lucrând la capitolul "**INTEGRALE ŞI FUNCŢII ELIPTICE EXCENTRICE**", ale acestui volum II, s-a dorit să se vizualizeze graficele funcţiei speciale eliptice excentrice **NevilleThetaC (Fig 20.2,a),** de variabilă excentrică modificată, astfel încât, din perioada de 4K(k), diferită pentru fiecare valoare k, deci pentru fiecare curbă din familie, să se obţină aceeaşi perioadă de 2π pentru toate curbele din familie

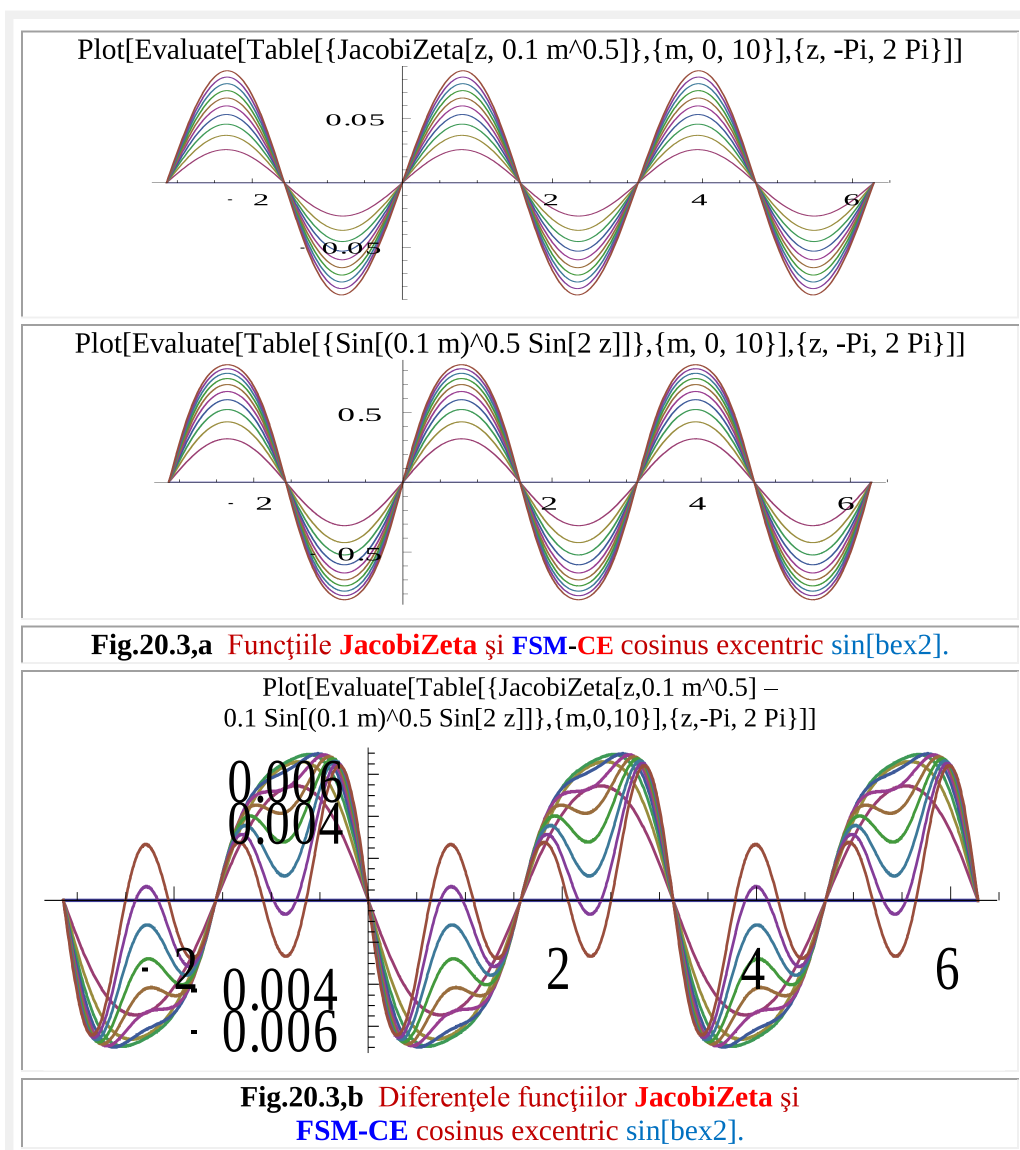


Fig.20.3,a Funcţiile **JacobiZeta** şi **FSM-CE** cosinus excentric sin[bex2].

Fig.20.3,b Diferenţele funcţiilor **JacobiZeta** şi **FSM-CE** cosinus excentric sin[bex2].

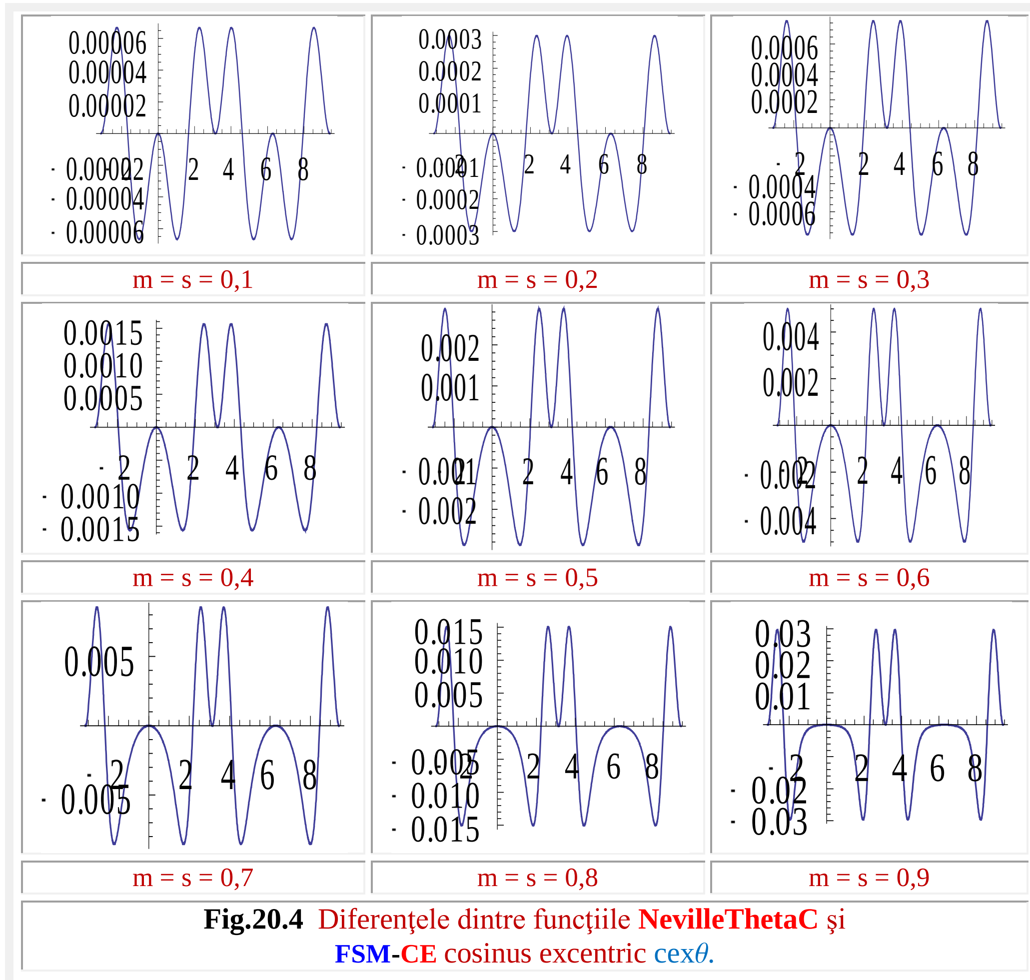


Fig.20.4 Diferenţele dintre funcţiile **NevilleThetaC** şi **FSM-CE** cosinus excentric cex*θ*.

S-a obţinut, cu stupefacţie, graficele funcţiei **supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**), familiare nouă, **cosinus excentric** de variabilă **excentrică *θ*** (**Fig. 20.2,b**).

Lucrând după principiul lui **Fred Menger** "***Dacă torturezi datele suficient, acestea îţi vor mărturisi aproape totul***" am constatat că programul de matematică refuză să înregistreze datele / graficele funcţiilor eliptrice pentru k = m = 1. De aceea, în **figura 20.2,b** domeniul de variaţie al modulului funcţiilor eliptice este $k^2 = m \in [-1; 0,9]$, ceea ce, pentru k, ar fi $k \in [0; 0,9]$.

Deşi cele două familii de curbe par identice, şi aproape că sunt dacă desenăm graficele lor suprapuse, datorită seriilor de reprezentare diferite ale celor două tipuri de familii de curbe în programele de matematică, apar extrem de mici diferenţe.

Diferenţele maxime sunt cuprinse între 0,00006 .. 0,03, şi toate de acelaşi gen / alură, aşa cum s-a prezentat situaţia în **figura 20.4**. O suprapunere mai exactă se va prezenta în continuare, mai târziu.

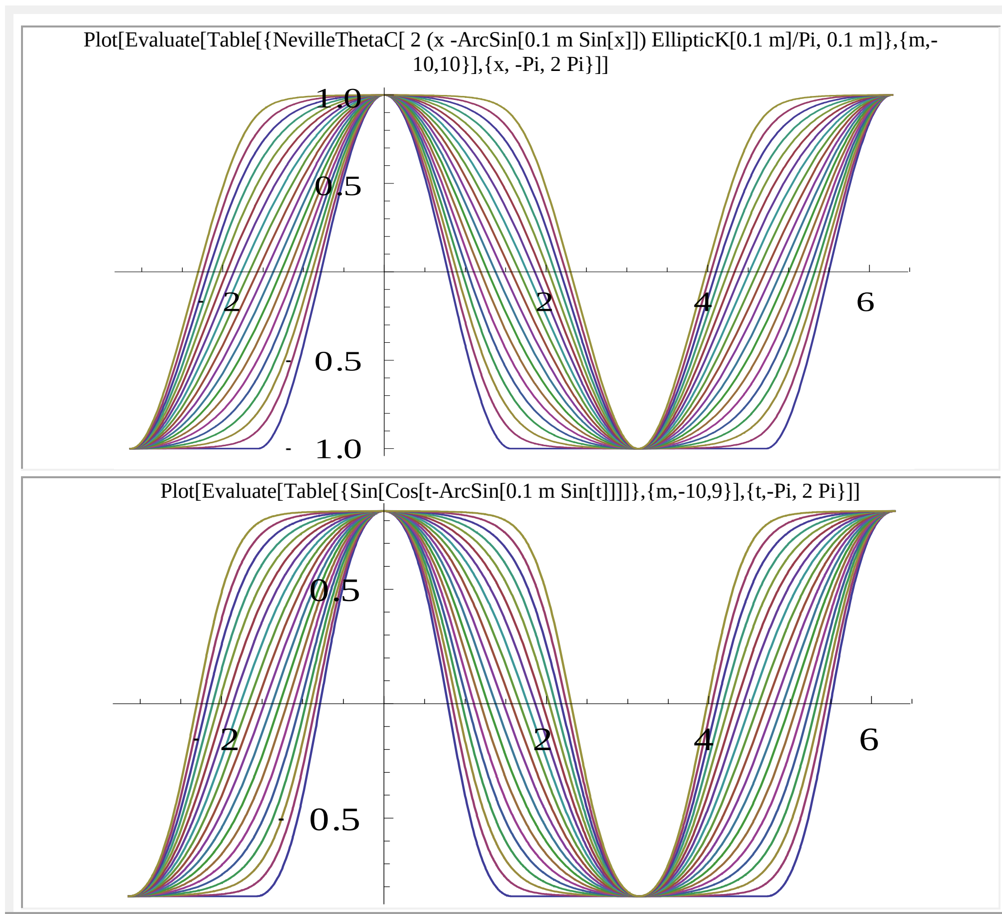
În schimb, exprimarea cu ajutorul **FSM-CE** a funcţiei speciale eliptice **JacobiZeta[z, k]** din **figura 20.3**, funcţie mult mai importantă, este aproape precisă, diferenţele **maxime** fiind sub 0,006 pentru toate curbele familiilor din domeniul k ∈ [0; 0,9], aşa cum se poate observa şi în partea inferioară a figurii. O diferenţă maximă de 6 miimi fiind practic o expresie cvasi exactă

(20.1) $$\text{JacobiZeta[z,m]} = \frac{m}{4}sin2z + m^2\left[\frac{sin2z}{16} + \frac{8sin2z - sin4z}{64}\right] + +m^3\left[\frac{5sin2z}{384} + \frac{8sin2z - sin4z}{64} + \frac{3(-8sin2z + sin4z)}{512} + \frac{45sin2z - 9sin4z + sin6z}{512}\right] + O[m]^4$$

(20.2) NevilleThetaC = $\vartheta_c[z\backslash m] = 1 - z^2/2 + z^4/24 - z^6/720 + z^8/40320 + z^{10}/3628800 + z^{12}/479001600 + O[z]^{13}$

20.3 FUNCŢII MATEMATICE H I B R I D E SPECIALE

Principiul lui **Fred Menger** ăi-a dovedit eficacitatea şi în cazul funcţiei speciale eliptice **NevilleThetaC** sau a **funcţia theta ϑ_C(z\m)** de variabilă **excentrică**.



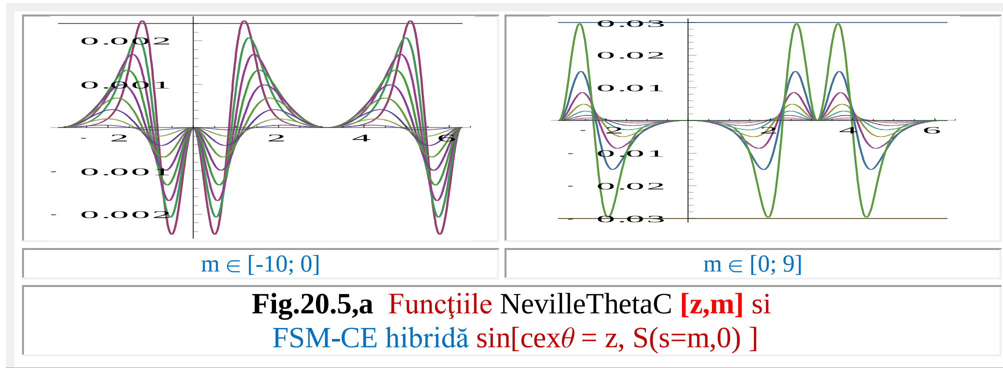


Fig.20.5,a Funcţiile NevilleThetaC **[z,m]** si
FSM-CE hibridă sin[cexθ = z, S(s=m,0)]

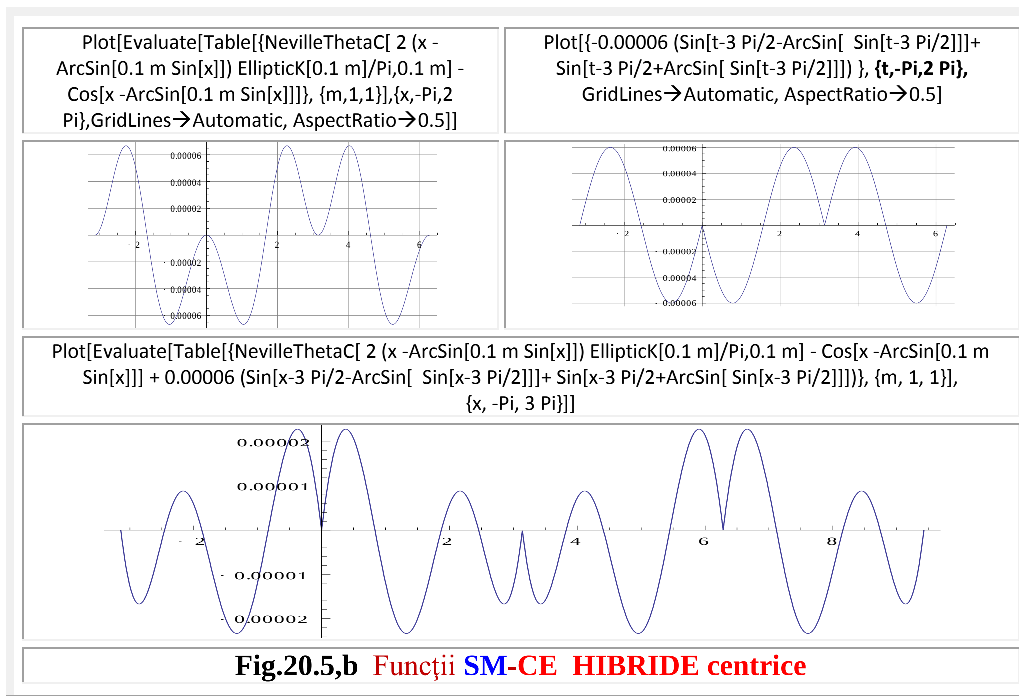
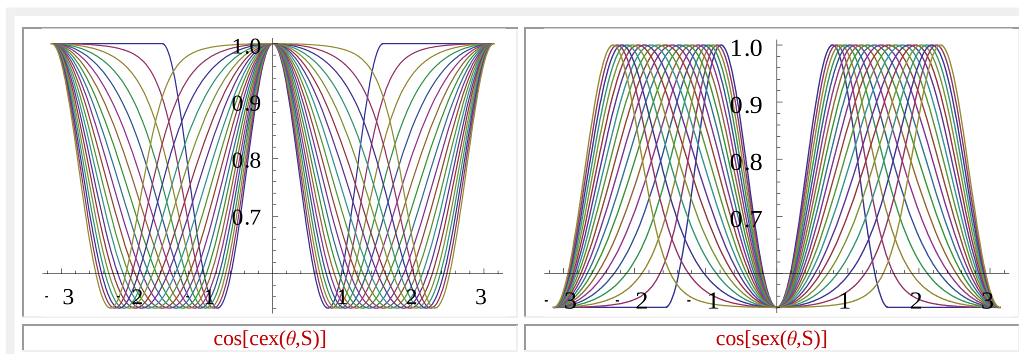
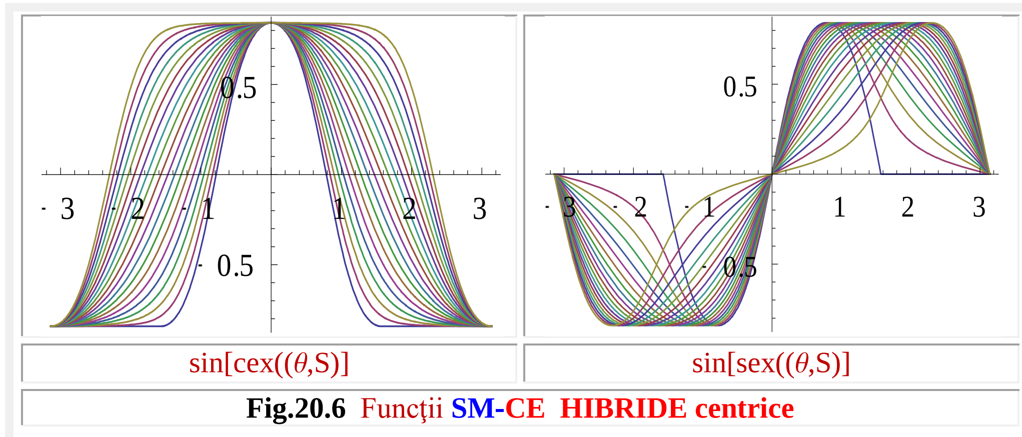


Fig.20.5,b Funcţii **SM-CE HIBRIDE centrice**





sin[cex((*θ*,S)] sin[sex((*θ*,S)]

Fig.20.6 Funcţii **SM-CE HIBRIDE centrice**

Căutandu-se o funcţie cu alura diferenţelor din **figura 20.4,** s-a ajuns la concluzia că o nouă funcţie, combinaţie între **funcţiile matematice centrice** (**MC**), reprezentată prin sinus şi cele **supermatemnatice excentrice** (**FSM-CE**) prin **cex**[*θ* = z; S(s = m, ε = 0)] exprimă cvazi exact funcţia **NevilleThetaC[z \ m],** aşa cum se poate observa şi în **figura 20.5,a**.

Deşi diferenţele pentru m = s = 0,1 sunt de numai 0,00006 ele pot fi micşorate individual şi nu pentru intreaga familie de funcţii, prin studierea formei funcţiei diferenţă şi acţionarea în consecinţă cu o funcţie de aceeaşi alură şi amplitudine, dar de semn opus. Astfel, pentru cazul anterior analizat şi pentru m = s = 0,1 diferenţele dintre funcţia specială **Jacobi** modificată **NevilleThetaC** (2 aexu. K(m)/π şi **FSM-CE** cex[θ, S(s, ε)] deşi extrem de mici, de numai 0,00006 pot fi micşorate de 3 ori, ajungând la diferenţa maximă de 0,00002 (!) (**Fig.20.5,b**) .

Aşa se face că, jocul întâmplării a hotărât introducerea unor noi familii de **funcţii supermatematice**, o combinaţie intre **funcţiile matematice centrice** şi cele **supermatematice excentrice**. Mai precis, **funcţii matematice induse**, fie centrice de variabilă **funcţii supermatematice excentrice**, fie invers, funcţii supermatematice excentrice de variabilă funcţii matematice centrice.

Primele au fost prezentate deja în **figura 20.5**, iar cele din cea de a doua categorie sunt prezentate în **figura 20.6.**

Funcţiile induse centrice de variabilă funcţii excentrice se vor denumi **funcţii supermatematice circulare excentrice hibride centrice (FSM-CEHC)**.

Funcţiile excentrice induse de variabilă funcţii centrice se vor denumi funcţii **supermatematice** circulare excentrice **hibride excentrice (FSM-CEHE)**.

În **figura 20.6** sunt prezentate **FSM-CE** induse şi autoinduse **hibride** centrice ca sin(cosθ), cos(cosθ), sin(sinθ), cos(sinθ), iar în **figura 20.7** cele excentrice sex(cosθ), cex(cosθ), sex(sinθ), cex(sinθ). Multe dintre acestea pot servi la corijarea diferenţelor care apar la aproximarea unor funcţii speciale, aşa cum s-a prezentat anterior situaţia din **figura 20.5,b**.

Diferenţele care apar între diverse funcţii sunt şi ele folositoare, uneori, la corijarea aproximării unor funcţii speciale, a căror grafice sunt cunoscute dar ecuaţia

fie că este necunoscută, fie că este prea complexă, cazuri în care se apelează, uneori, la aproximări. De aceea, în **figura 20.8** sunt prezentate, informativ, diferenţele dintre **FSM-CE HIBRIDE excentrice şi FSM-CE**.

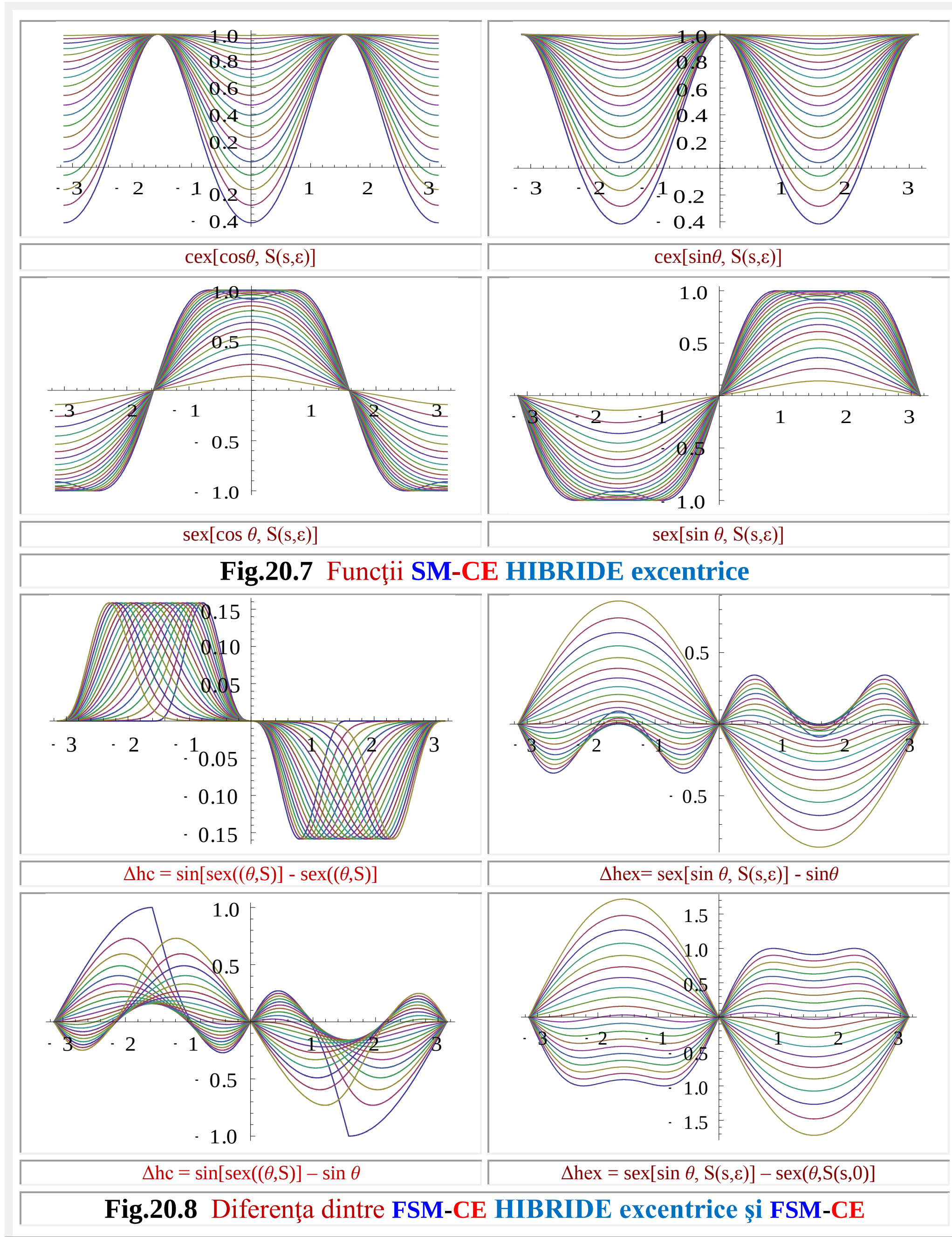


Fig.20.7 Funcţii **SM-CE HIBRIDE excentrice**

Fig.20.8 Diferenţa dintre **FSM-CE HIBRIDE excentrice şi FSM-CE**

Încercări de aproximare a familiei de funcţii speciale **Jacobi Nevile Theta D** de variabilă centrică u modificată → 2uK(m)/π sunt prezentate In **figura 20.9**.

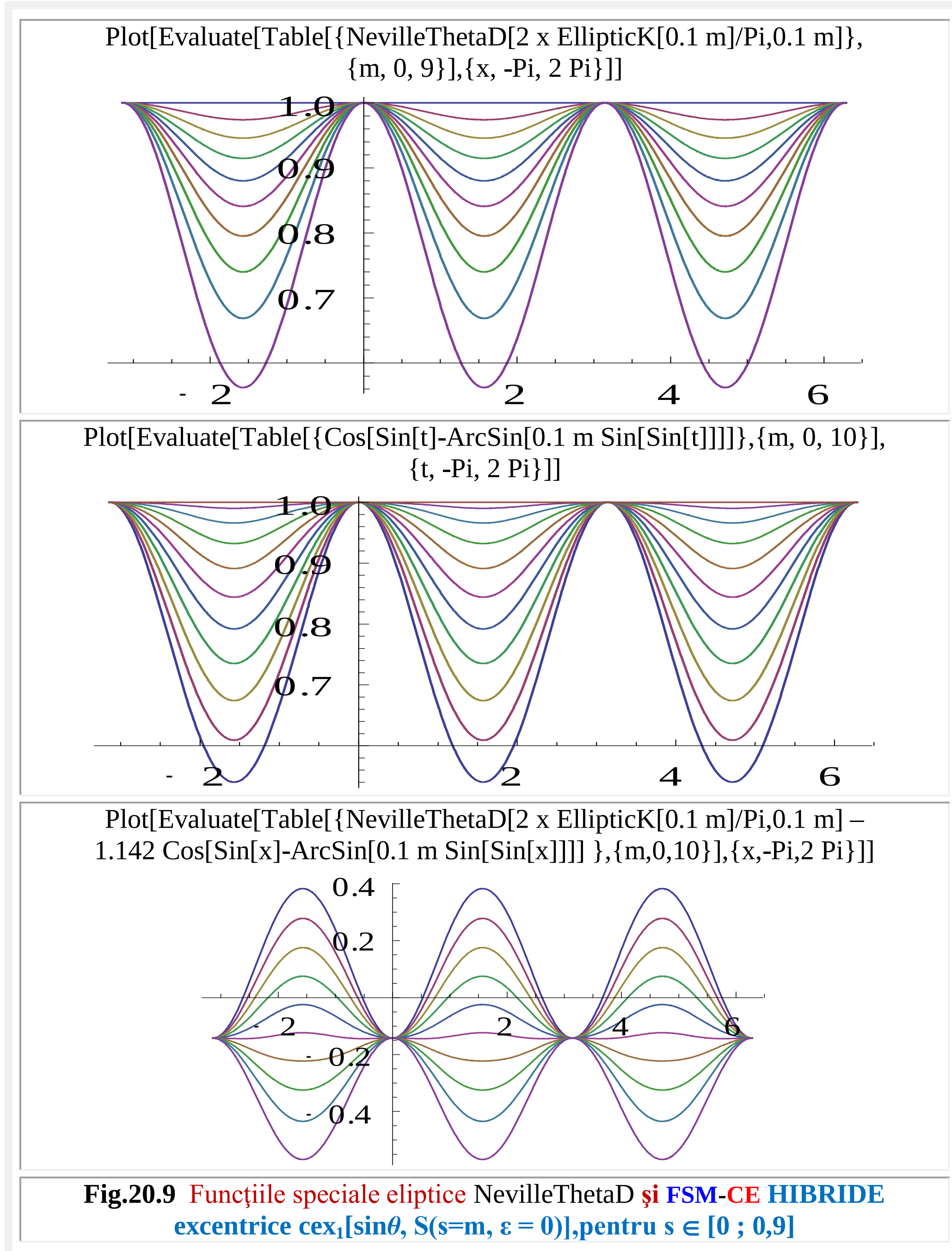


Fig.20.9 Funcţiile speciale eliptice NevilleThetaD **şi FSM-CE HIBRIDE excentrice cex$_1$[sinθ, S(s=m, ε = 0)],pentru s ∈ [0 ; 0,9]**

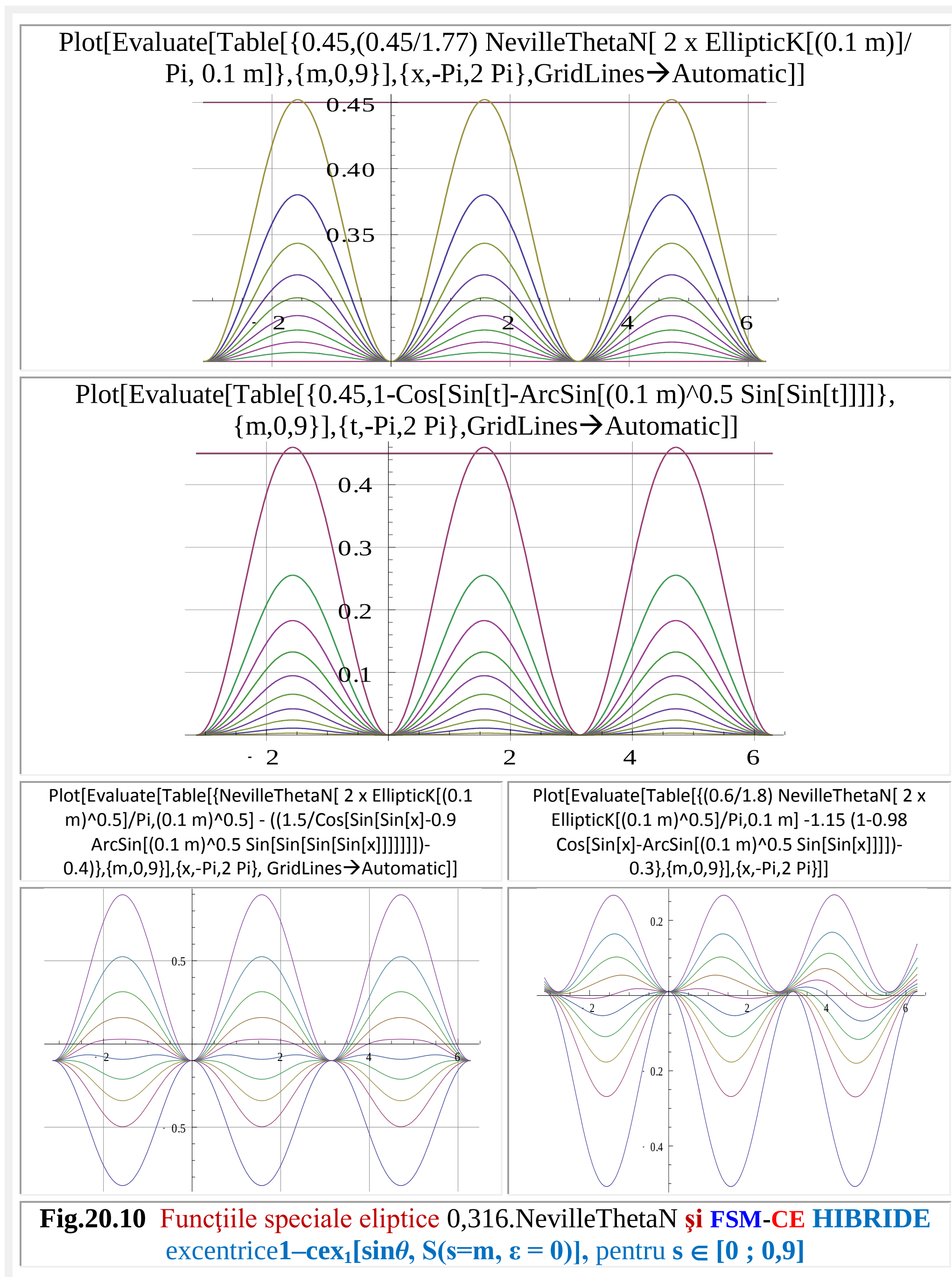


Fig.20.10 Funcţiile speciale eliptice 0,316.NevilleThetaN **şi FSM-CE HIBRIDE** excentrice**1–cex₁[sin*θ*, S(s=m, ε = 0)]**, pentru **s ∈ [0 ; 0,9]**

Deoarece forma graficelor diferenţelor este o funcţie periodică, aproape simetrică faţă de axa absciselor, îmbunătăţirea în continuare a preciziei prin corijarea

întregii familii de funcţii este greoaie, însă pentru anumite valori m sau k acţiunea devine posibilă, aşa cum s-a mai arătat anterior.

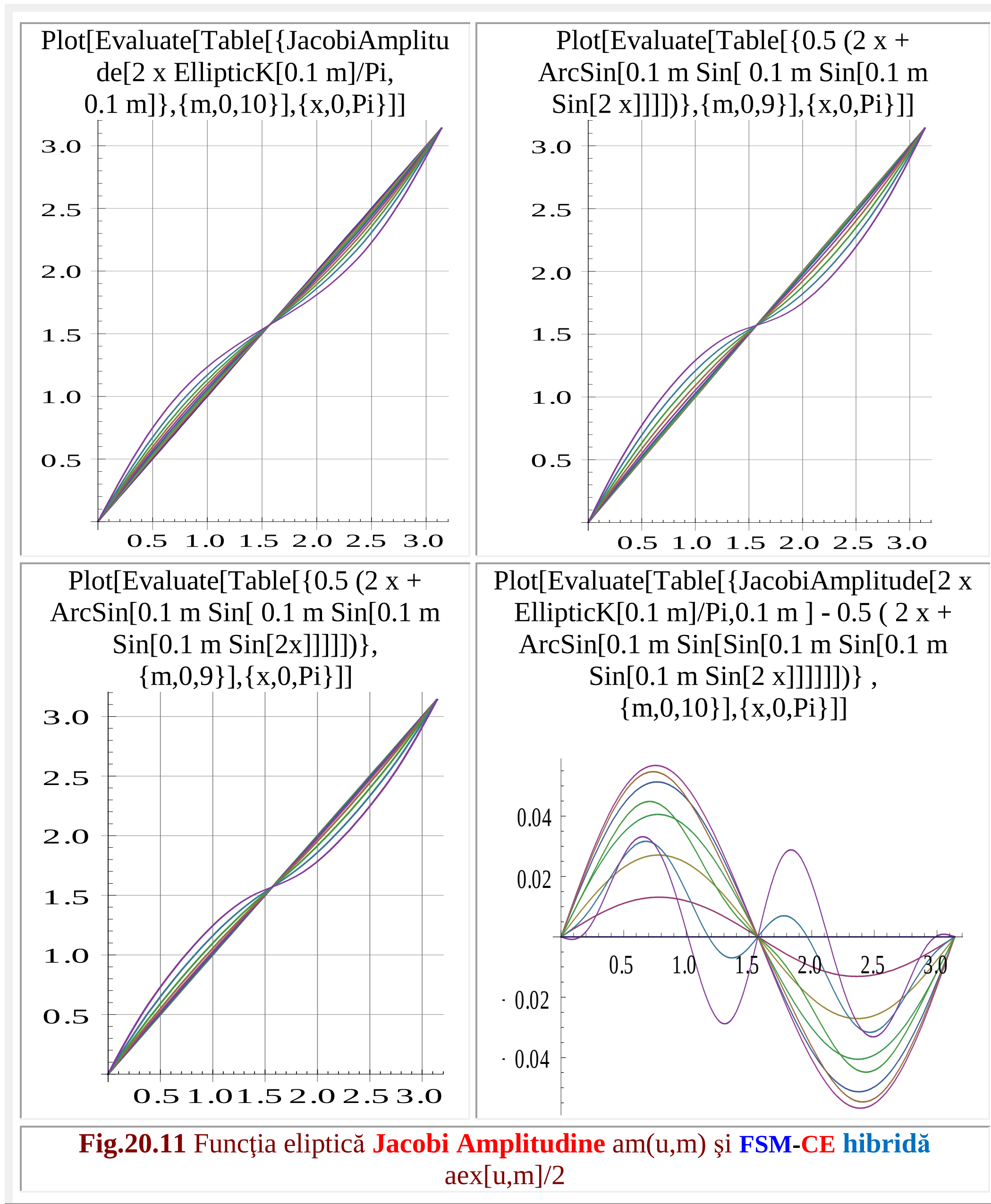


Fig.20.11 Funcţia eliptică **Jacobi Amplitudine** am(u,m) şi **FSM-CE hibridă** aex[u,m]/2

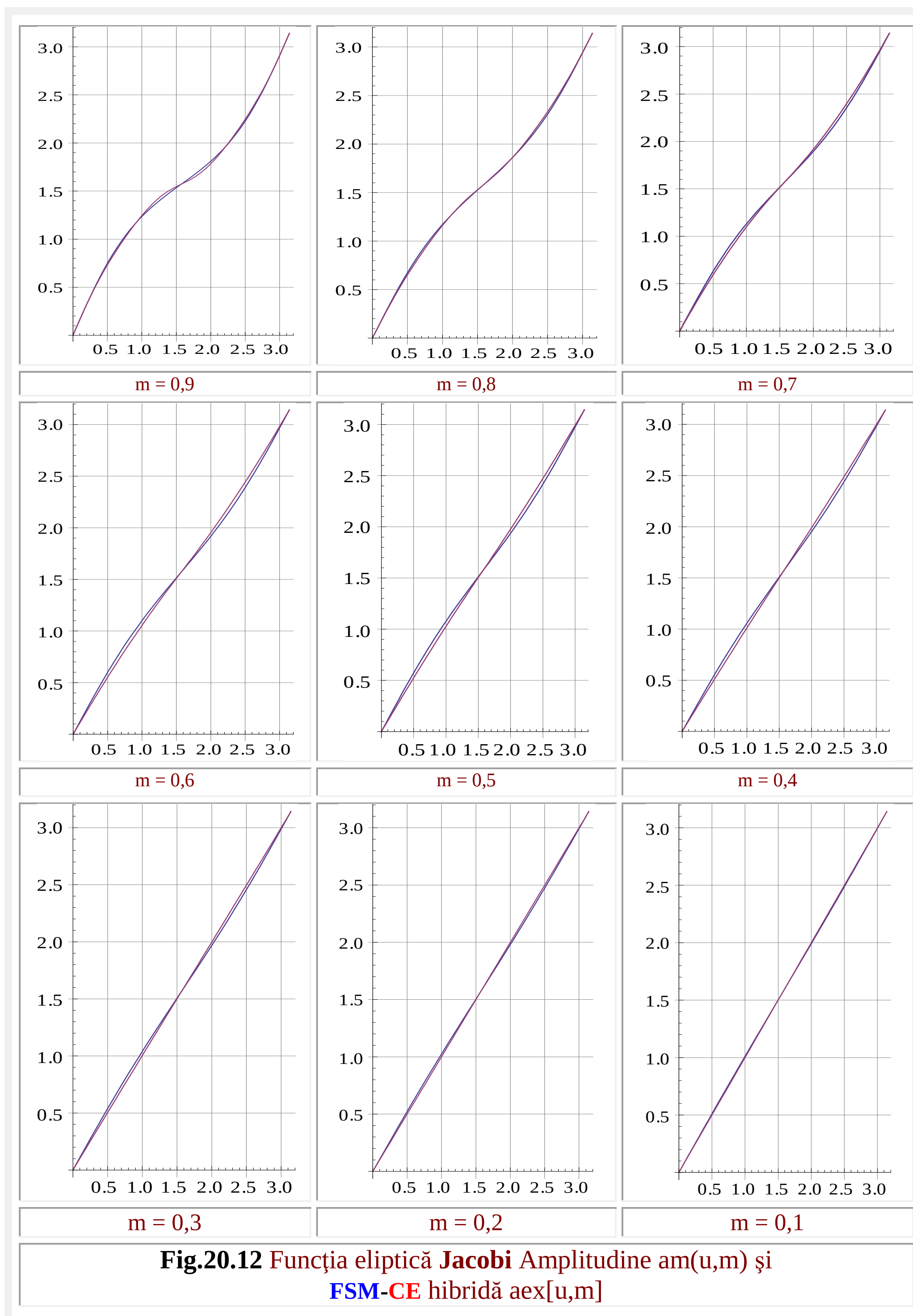


Fig.20.12 Funcţia eliptică **Jacobi** Amplitudine am(u,m) şi **FSM-CE** hibridă aex[u,m]

În **figura 20.10** s-a încercat aproximarea funcţiei speciale **Jacobi** **Neville Theta N**, de argument modificat, cu o funcţie hibridă autoindusă, precizată în figură, împreună cu diferenţele ce apar între valorile funcţiilor astfel aproximate.

În final, în **figura 20.11**, s-a revenit la funcţia specială **Jacobi** **amplitudinus**, **am(u, k)** de argument modificat şi s-a prezentata o altă posibilitate de aproximare a ei prin funcţia **SM** amplitudine excentrică de variabilă excentrică $amex_2[\theta, S(s, \varepsilon)]$, hibridă, autoindusă, de ecuaţie specificată în figură. Această funcţie este foarte importantă, deoarece, prin aprximarea ei cu precizie, pot fi apoi aproximate, la fel de precis, toate celelalte funcţii speciale **Jacobi**: cnu = cos(amu) şi snu = sin(amu) şi, prin combinarea acestora, multe alte funcţii speciale.

În **figura 20.12** sunt suprapuse cele doua grafice ale funcţiei şi a aproximatei ei pentru valorile modulului $m \in [0,1; 0,9]$ cu pasul 0,1. Ele scot în evidenţă gradul ridicat de precizie al aproximării.

Dorinţa autorului, de-a exprima exact funcţiile speciale cu ajutorul noii **matematici excentrice**, a rămas un vis frumos, **deocamdată neîmplinit**, decât în foarte mică măsură.



Motto:” Inginerul ideal este un amestec... nu este om de ştiinţă, nu este matematician, nu este sociolog sau scriitor, dar poate folosi cunoştiinţele şi tehnicile specifice oricăreia dintre sau tuturor acestor discipline în rezolvarea problemelor de inginerie. ”
citat din N.W. Dougherty

Capitolul 21

FUNCŢII TRIGONOMETRICE ANALITICE EXCENTRICE

21.1 I N T R O D U C E R E

Funcţia **analitică** (**ana** → prin, **liticos** → descompunere) a fost introdusă în matematica centrică de **Leonhard Euler** (1769) şi dezvoltată simultan de **K. Weierstrass** (1840) şi **Ch. Meray**, iar denumirea funcţiei a fost dată de **J. Lagrange** (1806).

Ea poate fi o funcţie reală (R-analitică) sau coplexă, de variabilă reală sau de variabilă complexă. Este denumită şi funcţie monogenă (derivabilă).

Definită univoc, în fiecare punct dintr-un domeniu ***D***, ea poate fi reprezentată printr-o serie întreagă (definită şi olomorfă pe tot planul complex ***C***) de puteri şi de prelungirile ei. Pentru orice $z_0 \in \boldsymbol{D}$ se poate obtine

(21.1) $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, într-un cerc cu centrul în z_0 .

Cazul $k \geq 0$ se referă la o funcţie olomorfă (uniformă, continuă, cu derivată unică în fiecare punct). Altfel, seria (21.1) reprezinta o funcţie meromorfă, (olomorfă cu excepţia unor puncte izolate, numite poli) în ***D***.

Funcţiile meromorfe, dublu periodice, sunt funcţii eliptice. De aceea, funcţiile circulare / trigonometrice analitice excentrice au o importanţă deosebită în studiul funcţiilor **supermatematice**.

Considerăm că, înaintea de a etala contribuţile pe care **supermatematica** le aduce şi în domeniul funcţiilor analitice, e necesar să aducem un omagiu şi să evidenţiem contribuţile predecesorilor şi în special a unuia dintre cei mai mari matematicieni romani.

De aceea, apelăm la scrierile Prof. dr. **Petru Mocanu** care, într-un eseu, afirmă că „***un matematician se consideră realizat dacă a îndeplinit cel puţin una din următoarele condiţii:***

1) A introdus o noţiune nouă într-un domeniu al matematicii, fără de care acest domeniu suferă;
2) A elaborat o nouă metodă recunoscută şi aplicată de specialişti;
3) A rezolvat o problemă importantă, care a fost abordată de mulţi alţi specialişti;
4) A enunţat o problemă nouă, de larg interes, în lumea matematică.

Marele matematicianul român **Dimitrie Pompeiu** a îndeplinit cu prisosinţă toate aceste condiţii, remarcându-se ca cel mai strălucit reprezentant al şcolii matematice româneşti de la începutul secolului XX.

Celebritatea internaţională şi-a câştigat-o chiar cu teza sa de doctorat, dedicată studiului singularităţilor funcţiilor analitice. În această teză, el demonstrează existenţa unor funcţii analitice având mulţimea singulară de măsură pozitivă şi fiind continue pe această mulţime.

Acest fapt matematic era cu totul surpinzător, mai ales că, tot în acel an, un alt matematician cunoscut**, Ludovic Zoretti**, într-o teză de doctorat a pretins că a demonstrat că mulţimea singularităţilor unei funcţii analitice este discontinuă pe această mulţime, rezultat care era în acord cu o impresie larg răspândită, dar care s-a dovedit a fi greşit.

Fară îndoială că domeniul preferat de cercetare, în care **D. Pompeiu** s-a evidenţiat pe plan internaţional, este **analiza matematică**, în special **analiza complexă**, dar el are rezultate remarcabile şi în alte domenii, ca de exemplu în mecanică.

Pompeiu este iniţiatorul teoriei **funcţiilor poligene**, care constituie o extindere naturală a funcţiilor analitice. În acest domeniu a introdus noţiunea de derivată areolară şi a extins celebra formulă a lui **Cauchy**, prin formula cunoscută ca formula lui **Cauchy-Pompeiu**.

Într-o scurtă lucrare publicată în anul 1929, **Pompeiu** demonstrează că dacă integrala dublă a unei funcţii continue în plan are aceeaşi valoare pe orice pătrat de latură dată, atunci funcţia se reduce la o constantă. Aceasta simplă observaţie a generat una dintre cele mai interesante probleme ale analizei matematice, cunoscută ca "**problema lui Pompeiu**".

O altă simplă observaţie, care a condus la numeroase cercetări, este cea privind teorema creşterilor finite.

Opera matematică a lui **Pompeiu** este conţinută în cele aproximativ 150 de lucrări publicate".

21.2 FUNCŢII ANALITICE REALE DE VARIABILĂ REALĂ (R-analitice)

Fie **F(x)** şi **F(y)** două funcţii periodice de perioade $\mathbf{T_x}$ şi, respectiv, $\mathbf{T_y}$. Produsul acestor două funcţii periodice conduce la obţinerea unei funcţii reale dublu periodice. Câteva exemple sunt prezentate în **figura 21.1**.

Funcţiile trigonometrice analitice reale au frecvenţa constantă pe o direcţie (x), pe care sunt, deci, periodice şi o frecvanţă variabilă pe o direcţie perpendiculară (λ).

Funcţiile trigonometrice pot fi definite geometric (într-un triunghi dreptunghic sau pe cercul unitate / trigonometric, aşa cum a procedat **Leonhard Euler**) sau **axiomatic** [A. Pirvu, 3.2. **Trigonometria, MANUALUL INGINERULUI MECANIC**, Vol. I- **MATEMATICĂ-FIZICĂ**, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1965, pag. 246].

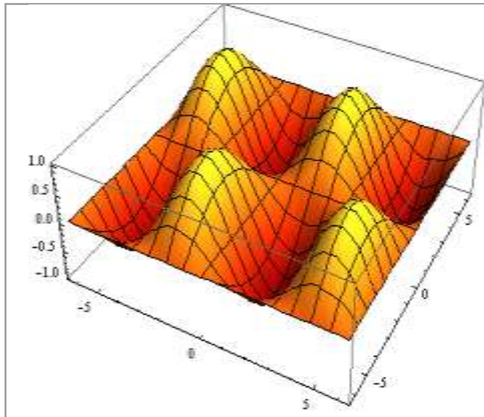


Fig. 21.1,a Funcţia matematică centrică dublu periodică sin x.sin0.5 y
x, y ∈ [–2 π, +2π]

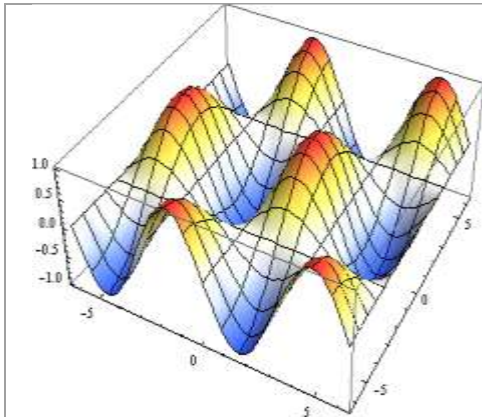


Fig. 21.1,b Funcţia **matematică centrică** dublu periodică
sin x.cos0.5 y

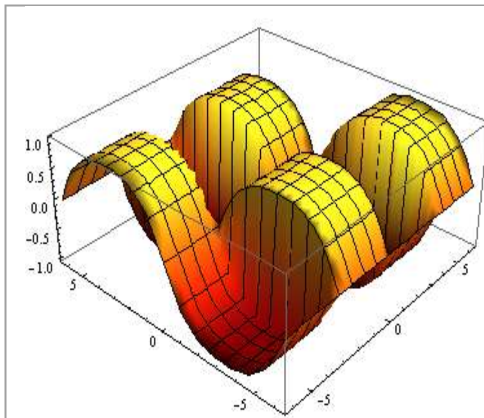


Fig. 21.1,c Funcţia **supermatematică excentrică** dublu periodică
siq (x, s_x= 0.8). siq(0.5 y, s_y= 1)

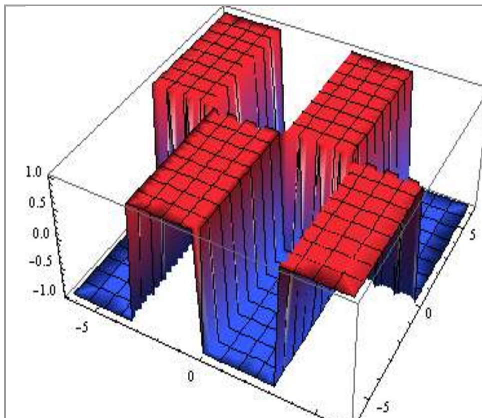


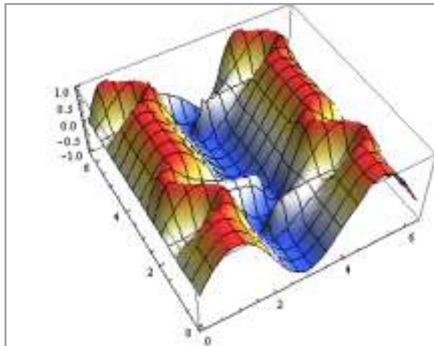
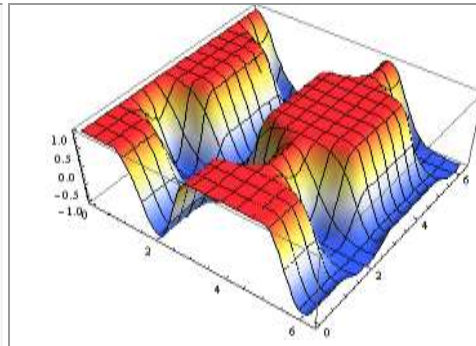
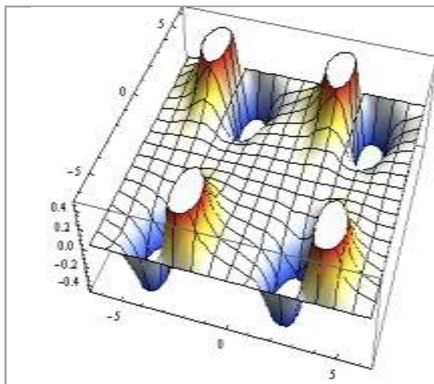
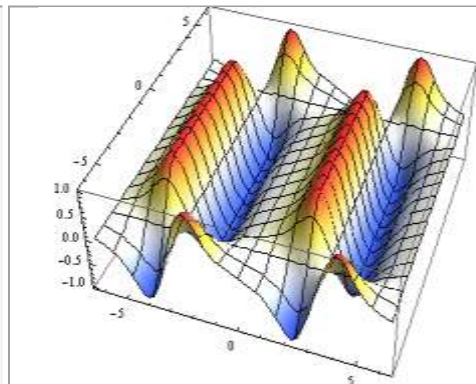
Fig. 21.1,d Funcţia **supermatematică excentrică** dublu periodică
siq (x,1). siq(0,5 y; 1),

Funcţiile cosinus analitic C(x) şi sinus analitic S(x) se definesc **axiomatic** ca funcţii cu urmatoarele proprietăţi :

(21.2)

1) Sunt definite pentru toate valorile reale ale lui x;
2) Satisfac ecuaţia funcţională $C(x-y) = C(x)\,C(y) + S(x)\,S(y)$;
3) Sunt pozitive în intervalul $0<x<\lambda$, **unde** λ **este un număr pozitiv oarecare;**
4) În punctele extreme ale intervalului $(0,\ \lambda)$: $C(0)=S(0)=1$.

(21.2’) C(x-y) = C(x) C(y) + S(x) S(y) , ca de exemplu, **FCC**
cos[x–y) = cosx.cosy + sinx.siny

Plot3D[Sin[Pi x/2-ArcSin[Sin[Pi x/2] Sin[Pi y/2-ArcSin[Sin[Pi y/2]]]]], {x,0,2 Pi},{y,0,2 Pi}]	Plot3D[Cos[Pi x/2-ArcSin[Sin[Pi x/2] Cos[Pi y/2-ArcSin[Sin[Pi y/2]]]]], {x,0,2 Pi},{y,0,2 Pi}]
	
	
Fig. 21.1,e Funcţia **supermatematică excentrică** dublu periodică sex(x; s=1).sex(y; s =1), $\lambda = 1$	**Fig. 21.1,f** Funcţia **supermatematică excentrică** dublu periodică cex (x, s = 1).cex(y; s = 1), $\lambda = 1$)
	
Fig. **21.1,g** Funcţia **supermatematică excentrică** dublu periodică sex(x; 0,9).sex(0.5y;0.9)	Fig. **21.1,h** Funcţia **supermatematică excentrică** dublu periodică sex (x, 0,8) .cex(0.5 y; 1)

21.3 FUNCŢII TRIGONOMETRICE ANALITICE CENTRICE

Pentru $\lambda = \frac{\pi}{2}$ funcţiile trigonometrice / circulare centrice analitice degenerează în **funcţii circulare centrice** (**FCC**) :

(21.3) C(x) = cosx şi S(x) = sinx, iar pentru $\lambda > 0$ condiţiile (21.2) 1 ... 4 sunt satisfăcute de funcţiile circulare / trigonometrice analitice care, după introducerea în matematică a **matematicii excentrice** (**ME**) şi a **supermatematicii** (**SM**), sunt denumite şi centrice. Ele sunt

(21.4) $C(x) = \cos\frac{\pi}{2}\frac{x}{\lambda}$ şi $S(x) = \sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{\lambda}$, a căror grafice sunt prezentate în **figurile 21.2.**

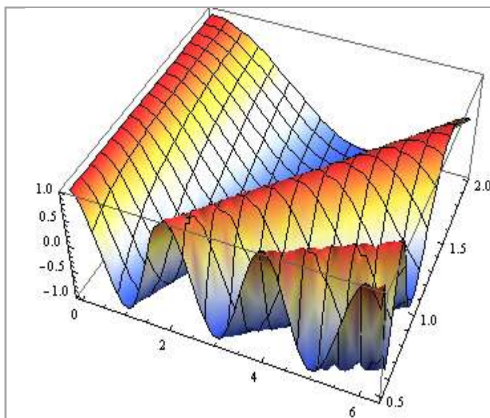


Fig. 21.2,a C(x),x∈[0;2Pi], λ ∈[0,5; 2]

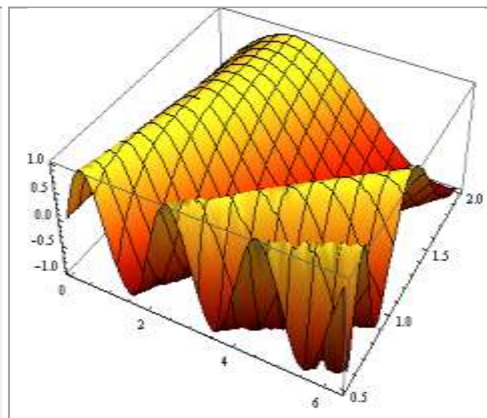


Fig. 21.2,b S(x), x ∈ [0; 2Pi], λ ∈ [0,5; 2]

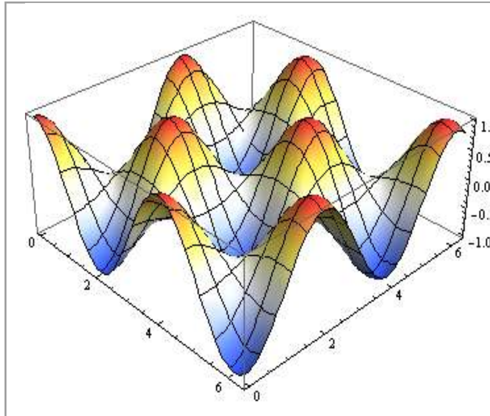


Fig. 21.2,c FCC dublu periodică **C(x). C(y),** x∈[0; 2Pi], λ = 1

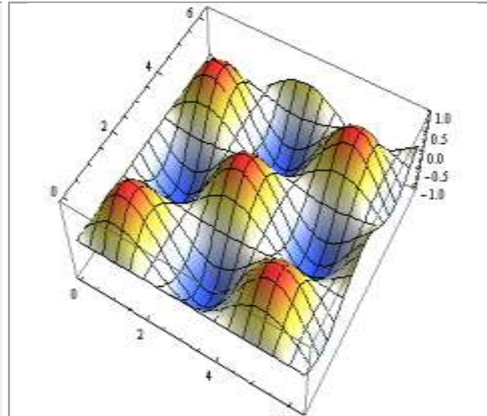


Fig. 21.2,d FCC dublu periodică **S(x). S(y),** x∈[0; 2Pi], λ =1

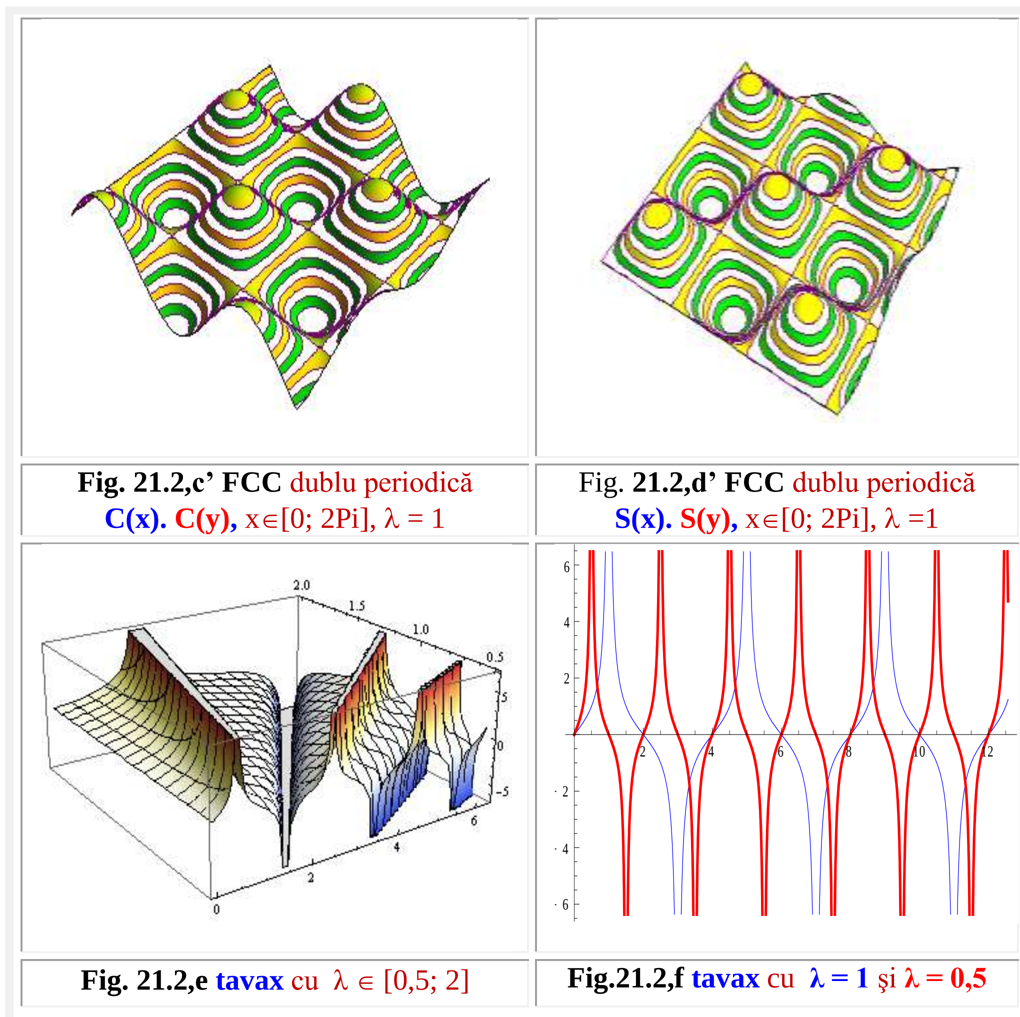


Fig. 21.2,c’ FCC dublu periodică **C(x). C(y),** x∈[0; 2Pi], λ = 1

Fig. **21.2,d’ FCC** dublu periodică **S(x). S(y),** x∈[0; 2Pi], λ =1

Fig. 21.2,e tavax cu λ ∈ [0,5; 2]

Fig.21.2,f tavax cu **λ = 1** şi **λ = 0,5**

C(x) şi **S(x)** sunt, evident, funcţii periodice, a căror periodicitate se modifică odată cu modificarea valorii lui λ. Pe direcţia lui x, funcţia este periodică, de perioadă T = 4 λ , iar pe directia lui λ funcţia este aperiodică, modulată în frecvenţă, frecvenţa scăzând cu creşterea lui λ.

Dintre tangente, se prezintă doar tangenta **Voinoiu** analitică (v. Vol.I., Cap.2.1), definită ca raport dintre C(x) şi modulul lui S(x), cu graficele din **figura 21.2,e,f**.

Pentru λ = 1, se obţine o funcţie periodică, de perioadă 4 cu polii în mulţimea numerelor impare şi cu zerourile în mulţimea numerelor pare, inclusiv zero.

In cazul **funcţiilor circulare centrice** ordinare, există câte o singură funcţie în 2D iar, în cazul funcţiilor trigonometrice analitice centrice, câte o singură funcţie în 3D, spre deosebire de **domeniul excentric** în care există o infinitate de funcţii în 3D, corespunzatoare infinităţii de valori ale **excentricităţii numerice s**.

21.4 FUNCŢII CIRCULARE ANALITICE EXCENTRICE DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ

În principiu, şi în general, trecerea de la domeniul centric la cel excentric al **supermatmaticii** se realizează, aşa cum s-a prezentat în repetate rânduri, prin înlocuirea variabilei independente y, sau α, din **centric**, cu funcţia y(x) sau α(θ) [4], [11], denumită **amplitudine excentrică**, datorită **similitudinii cu funcţia eliptică Jacobi am (u, k),** de expresie :

(21.5) $y(x) = \text{aex}\,[x, E(s, z)] = x - \arcsin\,[s.\sin(x-z)]$,

de variabilă excentrică x sau θ şi

(21.6) $x(y) = \text{Aex}\,[y, E(s, z)] = y + \arcsin\frac{s.\sin(y-z)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(y-z)}}$,

de variabilă centrică y sau α.

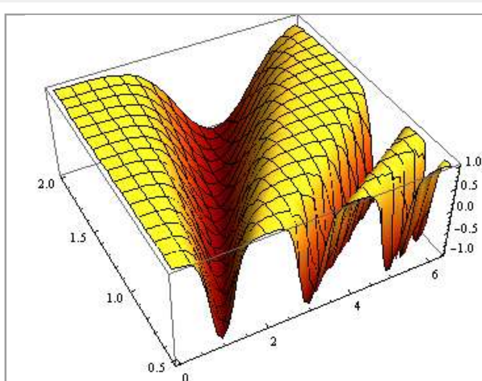


Fig. 21.3,a Cosinus excentric analitic **cexa x**, s = 0.8, x,y ∈ [0, 2Pi] şi λ ∈ [0.5, 2]

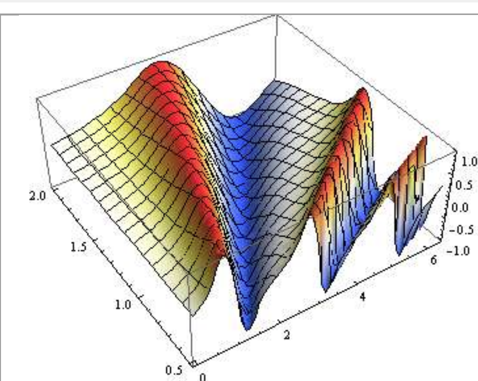


Fig. 21.4,a Sinus excentric analitic **sexa x**, s = 0.8, x,y ∈ [0, 2Pi] şi λ ∈ [0.5, 2]

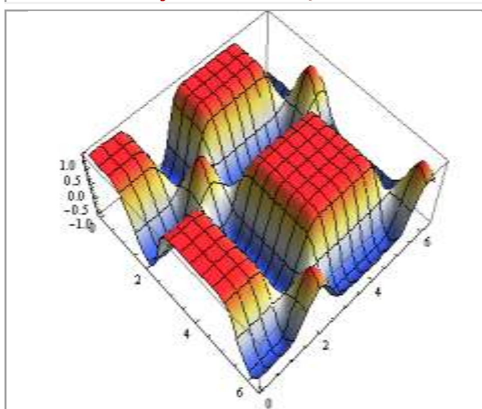
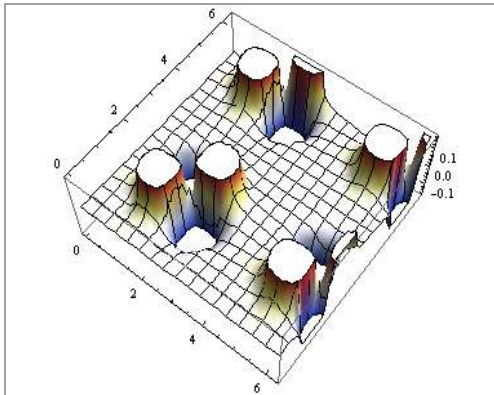




Fig. 21.3,b FCC dublu periodică **cexa(x). cexa(y),** x,y∈[0; 2Pi], λ = 1



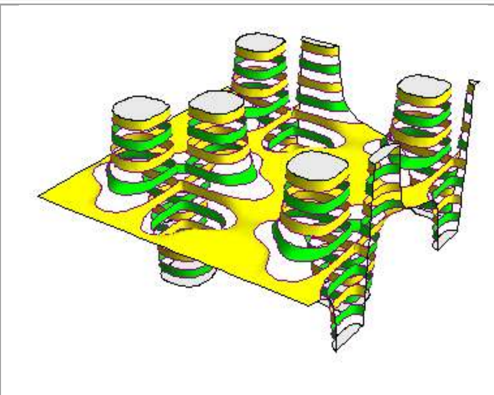


Fig. 21.4,a' FCC dublu periodică **sexa(x). sexa(y),** x,y∈[0; 2Pi], λ = 1

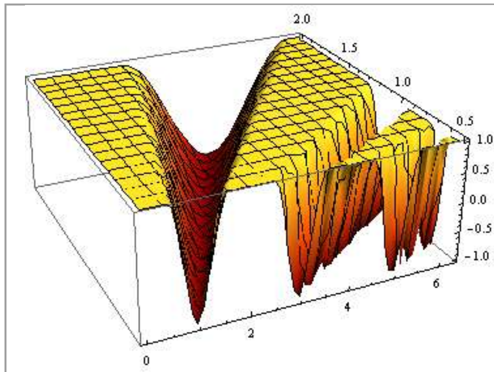


Fig. 21.3,b Cosinus excentric analitic **cexa x**, s = 1, x ∈ [0, 2Pi] şi λ ∈ [0.5, 2]

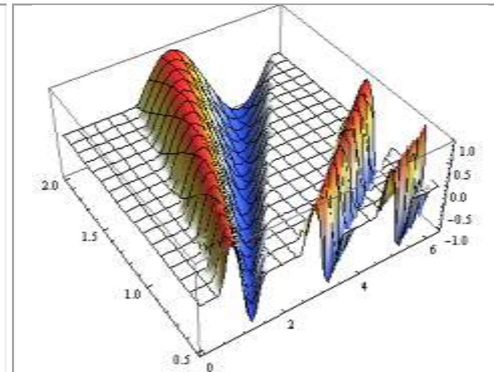
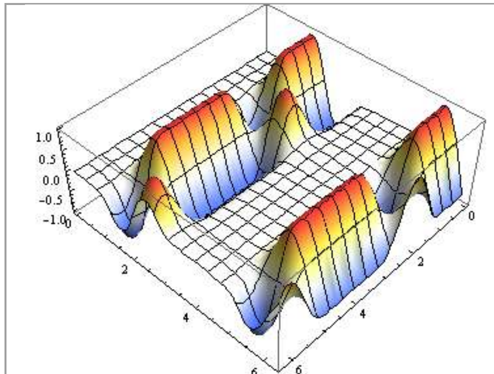


Fig. 21.4,b Sinus excentric analitic **sexa x**, s = 1, x ∈ [0, 2Pi] şi λ ∈ [0.5, 2]



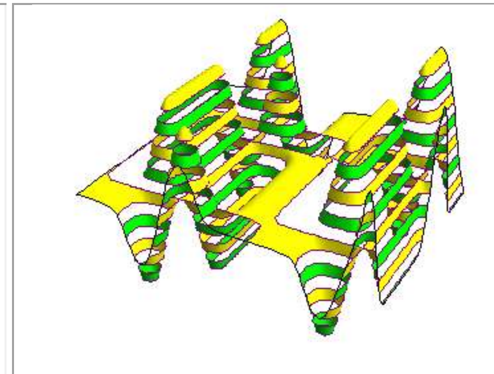


Fig. 21.4,a' FCC dublu periodică **cexa(x). sexa(y),** x,y∈[0; 2Pi], λ = 1

Numim, în continuare, trecerea de la centric la excentric prin (21.5) şi (21.6) „**transformare excentrică**” de **variabilă excentrică** (21.5) si, respectiv, de **variabilă centrică** (21.6).

Aşa cum s-a mai arătat, trecerea de la funcţiile trigonometrice ordinare centrice la cele analitice centrice se face prin înlocuirea variabilei x cu funcţia $\frac{\pi}{2\lambda}x$ şi respectiv, a variabilei y → $\frac{\pi}{2\lambda}y$. Numim, în continuare, această transformare ”**transformare trigonometrică analitică**” dată de relaţiile

(21.7) x → $\frac{\pi}{2\lambda}x$ şi y → $\frac{\pi}{2\lambda}y$

Prin inducţie completă, rezultă că, trecerea de la **FSM-CE** la cele **analitice** se va face prin compunerea celor două transformări : **analitică** şi **excentrică**.

Astfel, funcţia **SM** cosinus excentric analitic de variabilă excentrică x este, prin definiţie, referindu-ne doar la prima determinare, principală, de indice unu, sau fără indice, în conformitate cu cele stabilite în primul volum

(21.8) cexa x = cexa (x, E) = : $\cos\{\frac{\pi}{2\lambda}x - \arcsin\{s.\sin(\frac{\pi}{2\lambda}x - z)\}$,

iar sinusul excentric analitic este dat, prin definiţie, de relaţia

(21.9) sexa x = sexa (x,E) = : $\sin\{\frac{\pi}{2\lambda}x - \arcsin\{s.\sin(\frac{\pi}{2\lambda}x - z)\}$.

Este lesne de observat că, pentru **s = 0**, funcţiile cexa x şi sexa x degenerează în C(x) şi, respectiv, în S(x). Ele sunt periodice, de perioadă constantă T = 4 λ pe direcţia lui x şi aperiodice, modulate în frecvenţă pe direcţia lui λ.

Pentru excentricităţile numerice **s = 0,8**, respectiv, **0,75** precum şi pentru **s = 1** graficele în 3 D sunt prezentate în **figura 21.3** şi, respectiv, **21.4**.

Pentru λ = Pi / 2, funcţiile circulare excentrice analitice degenerează în funcţii circulare excentrice ordinare.

Celelalte funcţii analitice, **centrice** şi / sau **excentrice**, se deduc pe baza funcţiilor cosinus şi sinus. Astfel, tangenta excentrica analitica va fi dată de relaţia

(21.10) texa x = $\frac{sexa.x}{cexa.x}$ iar **tangenta excentrică Voinoiu,** texav x, are expresia

(21.11) texav x = $\frac{sexa.x}{Abs[cexa.x]}$.

La fel, pot fi definite cotangenta, secanta şi cosecanta excentrice analitice.

21.5 FUNCŢII CIRCULARE ANALITICE EXCENTRICE DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ INDEPENDENTE DE ORIGINEA SISTEMELE DE REFERINŢĂ.

Ca şi în cazul **funcţiilor circulare excentrice** ordinare, principalele funcţii de acest gen sunt amplitudine excentrică analitică **aexax**, beta excentrică analitică **bexax**, radial excentrică analitică **rexax** şi derivata excentrică analitică **dexax**.

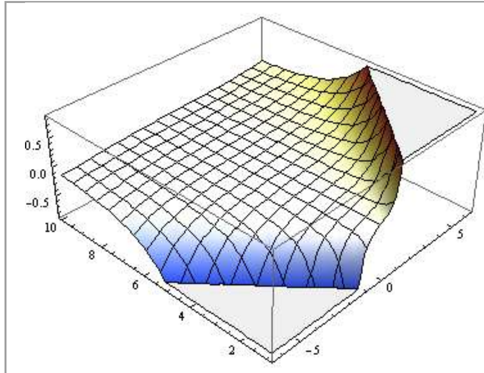


Fig. 21.5,a Funcţia **aexax**, pentru s = 0,9; x ∈ [-2π, 2π], λ ∈ [1, 10]

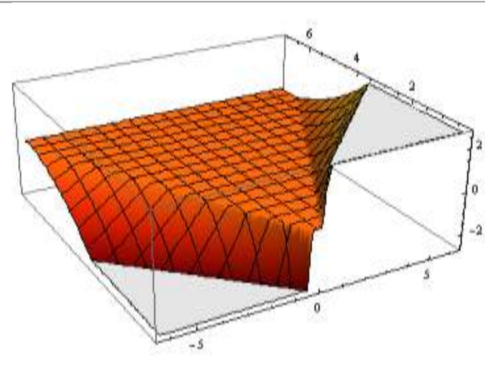


Fig. 21.5,b Funcţia **aexax**, pentru s = 1, x ∈ [-2π, 2π] , λ ∈ [0.5, 7]

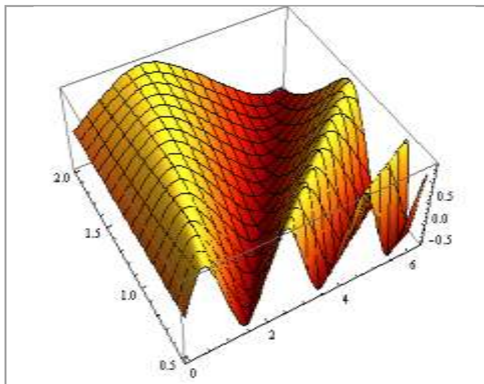


Fig. 21.6,a Funcţia **bexax**, pentru s = 0,8; z = 0 ; x ∈ [0, 2Pi] şi λ∈ [0.5, 2]

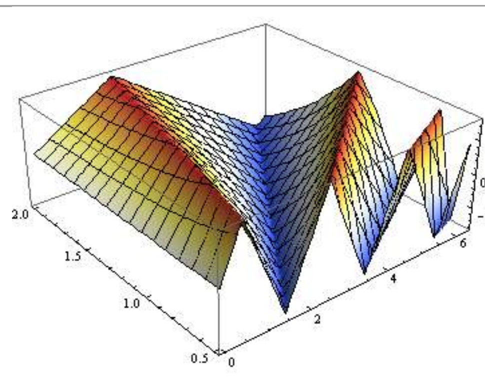


Fig. 21.6,b Funcţia **bexax**, pentru s = 1 şi z = 0 ; x ∈ [0, 2Pi] şi λ ∈ [0.5, 2]

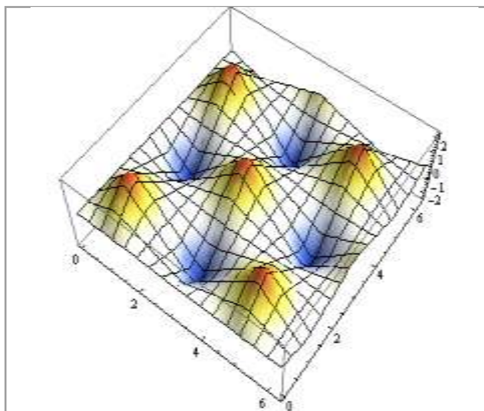




Fig. 21.6,c FCC dublu periodică **bexa(x). bexa(y),** x,y∈[0; 2Pi], λ = 1

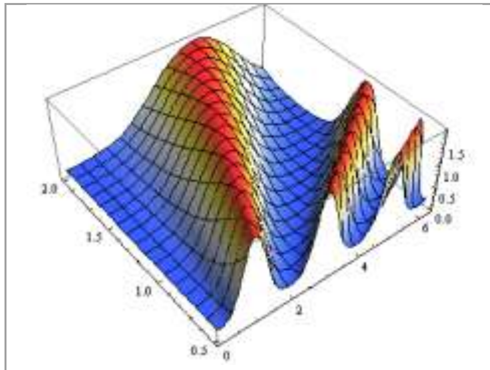


Fig. 21.7,a rexax, pentru s = 0.8 şi z = 0 iar x ∈ [0, 2Pi] şi λ ∈ [0.5, 2]

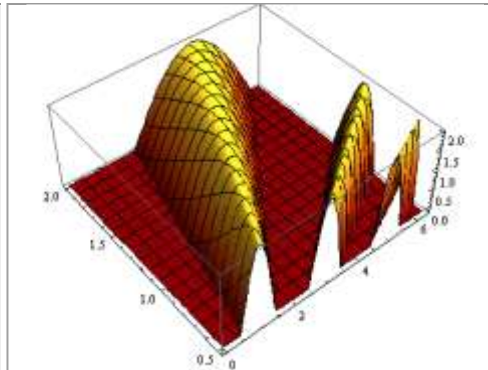
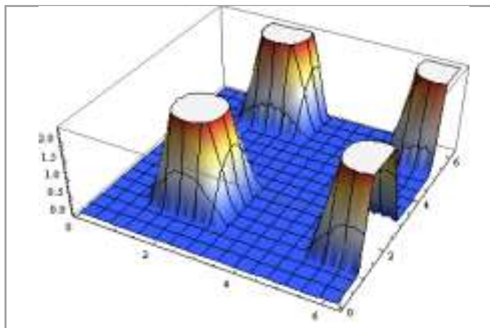


Fig. 21.7,b rexax, pentru s = 1şi z = 0 iar x ∈ [0, 2Pi] şi λ∈ [0.5, 2]

Plot3D[(- Cos[Pi x/2]+Sqrt[1-(Sin[Pi x/2])^2]) (- Cos[Pi y/2]+Sqrt[1-(Sin[Pi y/2])^2]), {x,0,2 Pi},{y,0,2 Pi}



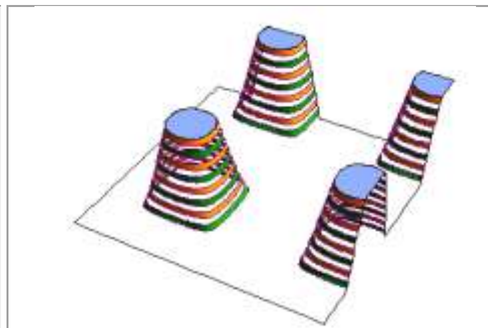


Fig. 21.7,c Funcţia dublu periodică **rexa x . rexa y**, pentru s ∈ [0,1; 1]; λ∈ [1;10]

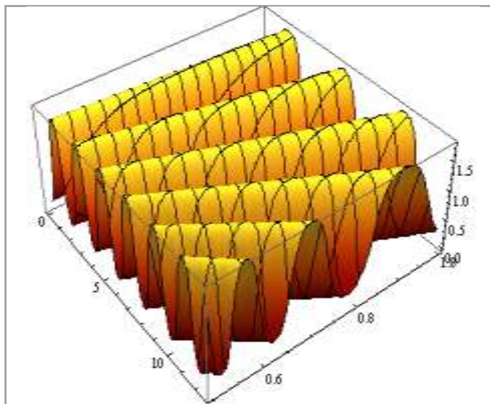


Fig. 21.8,a Funcţia **dexa x**, pentru s = 0.8

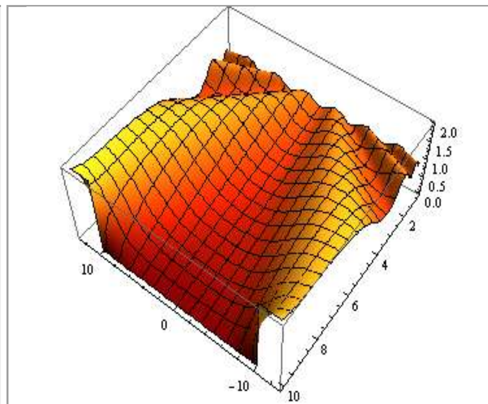


Fig. 21.8,b Funcţia **dexa x**, pentru s ∈ [0,1; 1]; λ∈ [1;10]

Prin combinarea acestora, se pot obţine şi alte funcţii de acest gen.

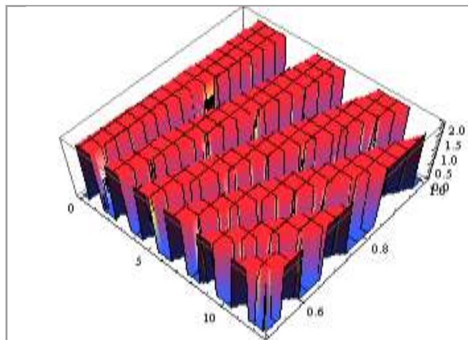


Fig. 21.8,c Funcţia **dexax** ,
pentru s =1 şi z = 0,
iar x ∈ [0, 2Pi] şi λ ∈ [0.5; 2]

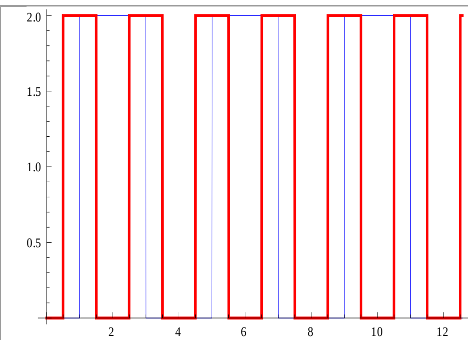


Fig. 21.9 Funcţia **dexax,**
pentru s = 1, z = 0, **λ= 0,5**
şi **λ= 1** cu x ∈[0, 2Pi]

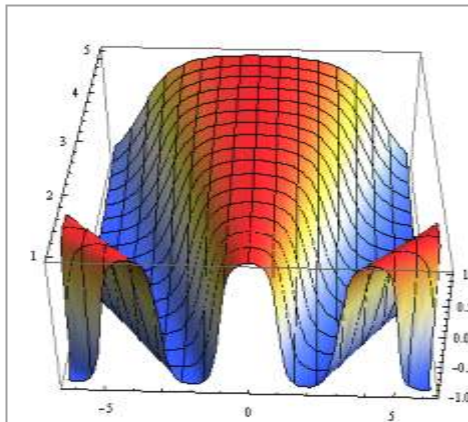


Fig. 21.10,a cosqa x,
pentru s = 0,9 , λ ∈ [1; 5]

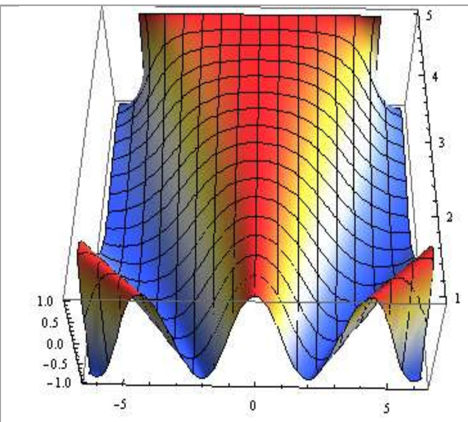


Fig. 21.10,b cosqa x ,
pentru s∈ [0,1; 1], λ ∈ [1; 5]

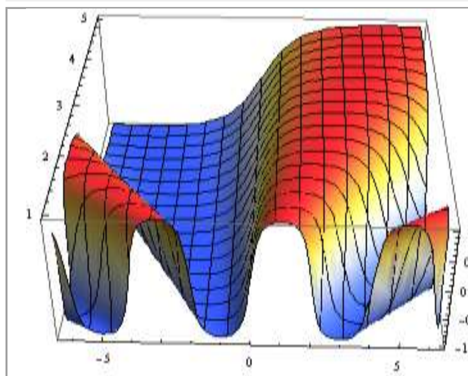


Fig. 21.10,a sinqa x,
pentru s= 0,9 ;λ ∈ [1; 5]

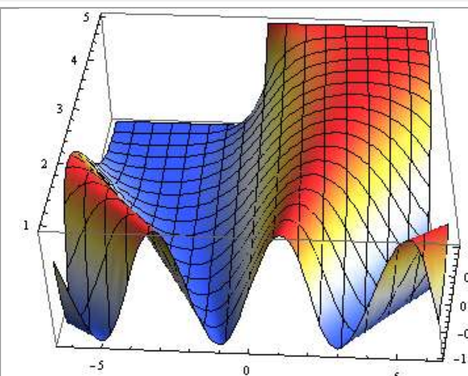


Fig. 21.10,b sinqa x,
pentru s∈ [0,1; 1] , λ ∈ [1; 5]

Aceste funcţii, neavând antecedente în centric, vor fi supuse doar transformării analitice, prin înmulţirea varaiabilei x cu raportu $\frac{\pi}{2\lambda}$.

Astfel, funcţia **aexa x** are expresia :

(21.12) aexa x = $\frac{\pi}{2\lambda}x$– arcsin[s.sin(x– $\frac{\pi}{2\lambda}x$ – z)] şi graficele din **figura 21.5,a** şi **21.5,b,** pentru excentricitatea numerică s = 0.8 şi, respectiv, s = 1.

Nu s-au folosit excentricităţi s mai mici, întrucât, ondulaţiile suprafeţei înclinate devin greu observabile.

Numai pentru s = 1 (**Fig.21.5,b**) suprafaţa este compusă numai din suprafeţe plane: orizontale (platouri), alternând cu suprafeţele plane înclinate la 45^0.

Funcţia beta excentrică analitică are expresia invariantă :

(21.13) bexa x = arcsin[s.sin(x $\frac{\pi}{2\lambda}$ – z)] şi graficele 3D din **figura 21.6, a** şi **b**.

Funcţia radial excentrică analitică are expresia :

(21.14) rexa x = : –s.cos(x $\frac{\pi}{2\lambda}$ – z) + $\sqrt{1 - s^2 sin^2(x\,\frac{\pi}{2\lambda} - z)}$

şi graficele 3D din **figurile 21.7.**

Funcţia derivată excentrică analitică are expresia :

(21.15) dexa x = 1− $\frac{s.cos\frac{\pi x}{2\lambda}}{\sqrt{1-s^2sin^2(\frac{\pi x}{2\lambda}-z)}}$ şi graficele 3D din **figura 21.8, a** , **b** şi **c**.

Se observă din **figura 21.8,c** că, pentru s = 1, funcţia are forma unui semnal dreptunghiular periodic, de perioadă egală cu T(λ) = 4 λ pe direcţia x şi este aperioadică pe direcţia λ, modulată în frecvenţă, frecvenţa scăzând cu creşterea lui λ.

Pentru λ = 0.5, funcţia dexa x este un semnal dreptunghiular de amplitudine 2 şi de perioadă 2, aşa cum se observa în **figura 21.9**, pentru λ = 1.

Dacă, din funcţia dex, se scade 1 şi se schimbă semnul, atunci se obţine funcţia cosinus cvadrilob **coqx** ≡ **cosqx** din care, aplicând transformarea analitică, se va obţine funcţia cosinus cvadrilob analitic cosqa x a cărei expresie este :

(21.16) **coqx** ≡ cosqa x = : $\frac{\cos\frac{\pi x}{2\lambda}}{\sqrt{1-s^2sin^2[\frac{\pi x}{2\lambda}-z]}}$, iar expresia funcţiei sinus cvadrilob analitic, **siqx** ≡ sinqa x , se obţine analog şi este :

(21.17) **siqx** ≡ sinqa x = : $\frac{\sin\frac{\pi x}{2\lambda}}{\sqrt{1-s^2cos^2[\frac{\pi x}{2\lambda}-z]}}$, cu graficele din **figura 21.10** pentru (s = 0.9).

Din **figura 21.9** rezultă că aceste funcţii pot înlocui cu succes funcţiile **Rademacher**

(21.18) rad(n, θ) = sgn[sin(2nπθ)] cu θ = t / T, în intervalul [-1/2, +1/2] ca şi funcţiile **Walsh** şi **Haar** (prin **FSM-CE cvadrilobe** de s = ± 1) utilizate la prelucrarea numerică a semnalelor.

21.6 FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE CA FUNCŢII TRIGONOMETRICE CENTRICE ANALITICE.

Pentru ca o funcţie circulară excentrică, de variabilă excentrică x, să reprezinte o funcţie trigonometrică analitică centrică este necesar ca argumentele celor două funcţii să fie egale, adică:

(21.19) $$\begin{cases} y = \cos(\frac{\pi}{2\lambda}u) \\ y = cex(u, E) = \cos\{u - \arcsin[s.\sin[u - z)]\} \end{cases},$$ adică

(21.20) $\frac{\pi}{2\lambda}u$ = u – arcsin[s.sin(u-z)], din care rezultă că excentricitatea numerică s a **FSM-CE** trebuie să fie variabilă, dată de relaţia :

(21.21) $$s = \frac{\sin[u(1 - \frac{\pi}{2\lambda})]}{\sin(u - z)} = s_v$$

Relaţia scoate în evidenţă mai multe posibilităţi în care poate să evolueze excentrul variabil S_v (s_v , z), pe discul cercului unitate.

Dacă direcţia este constanta (z = C), ca de exemplu C = 0 , atunci S_v evoluează pe axa x (z = 0), iar dacă s_v = C =constant, ca de exemplu s_v = 1, atunci S_v evoluează pe cercul unitate, cu viteză constantă, unghiul de rotaţie z_v, în jurul originii O(0,0), fiind dat de relaţia

(21.22) $$z = \varepsilon = \frac{\pi}{2\lambda}x = \frac{\pi}{2\lambda}\theta = \varepsilon_V.$$

21.7 FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE ANALITICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ

Aplicând transformarea analitică (21.7) funcţiilor circulare centrice de variabilă centrică y (v. Vol.I, Cap.7) se obţin urmatoarele funcţii analitice:

Cosinusul excentric analitic, dat de relaţia invariantă :

(21.23) $$\text{Cexa } y =: \cos\left[y.\frac{\pi}{2\lambda} + \arcsin\frac{s.\sin(y.\frac{\pi}{2\lambda} - z)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(y\frac{\pi}{2\lambda} - z)}}\right]$$

Sinus excentric analitic, dat de relaţia invariantă :

(21.24) $$\text{Sexa } y =: \sin\left[y.\frac{\pi}{2\lambda} + \arcsin\frac{s.\sin(y.\frac{\pi}{2\lambda} - z)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(y\frac{\pi}{2\lambda} - z)}}\right]$$

Graficele acestor funcţii sunt prezentate în **figurile 21.11**.

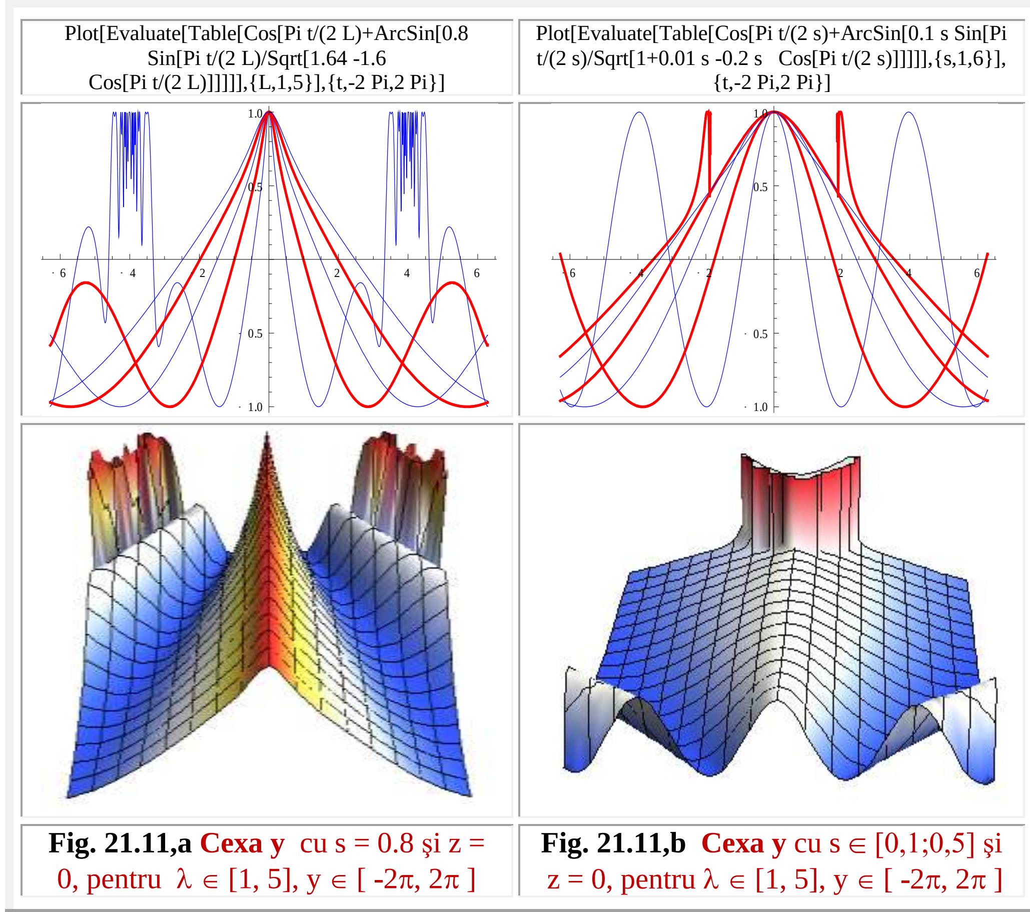


Fig. 21.11,a Cexa y cu s = 0.8 şi z = 0, pentru λ ∈ [1, 5], y ∈ [-2π, 2π]

Fig. 21.11,b Cexa y cu s ∈ [0,1;0,5] şi z = 0, pentru λ ∈ [1, 5], y ∈ [-2π, 2π]

Dintre funcţiile circulare excentrice analitice, independente de sistemul de referinţă, amplitudinea excentrica Aexa y are expresia

$$\text{(21.25)} \qquad \text{Aexa } y = \frac{\pi}{2\lambda} y + \arcsin\left[\frac{s.\sin(\frac{\pi}{2\lambda} y - z)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(\frac{\pi}{2\lambda} y - z)}}\right],$$

cu două grafice şi câte o secţiune prin ele, sunt prezentate în figurile **21.12**.

Funcţia beta excentric analitică Bexa y are expresia

$$\text{(21.26)} \qquad \text{Bexa } y = \arcsin\left[\frac{s.\sin(\frac{\pi}{2\lambda} y - z)}{\sqrt{1 + s^2 - 2s.\cos(\frac{\pi}{2\lambda} y - z)}}\right]$$ şi graficele cu o

secţiune sunt prezentate în **figurile 21.13.**

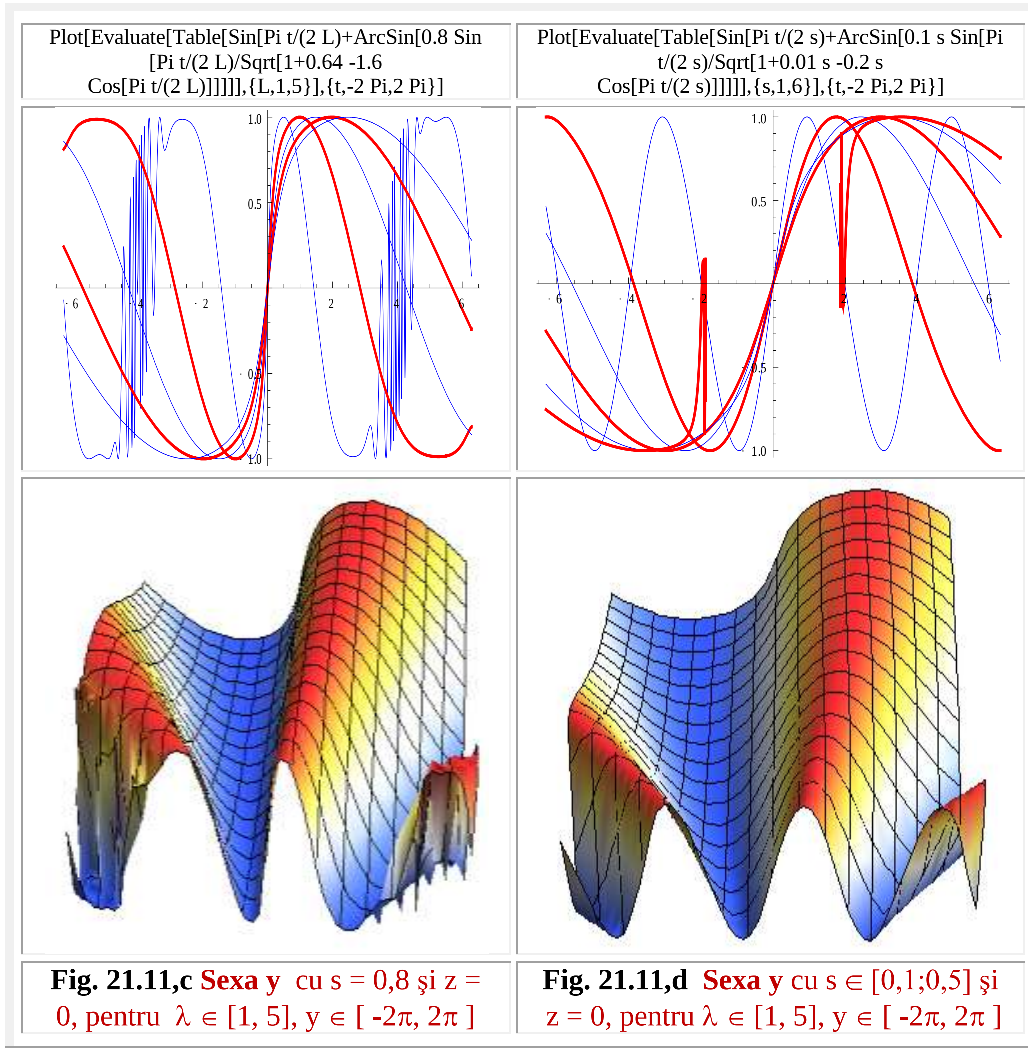


Fig. 21.11,c Sexa y cu s = 0,8 şi z = 0, pentru λ ∈ [1, 5], y ∈ [-2π, 2π]

Fig. 21.11,d Sexa y cu s ∈ [0,1;0,5] şi z = 0, pentru λ ∈ [1, 5], y ∈ [-2π, 2π]

Deoarece funcţia bex y reprezintă unghiul w, respectiv β = w (mod. 2Pi), ca diferenţă dintre cele două variabile independente, adică :

(20.27) β = θ - α sau w = (x – y) , transformarea analitică se poate aplica nu variabilei independente, cum s-a procedat anterior, ci unghiului β, respectiv w, caz în care, expresia lui beta analitic w_a, de variabilă excentrică x, va fi data de relaţia :

(21.28) $W_a(x) = \frac{\pi}{2\lambda}$ arcsin[s.sin(x-z)], iar de variabilă y de relaţia :

(21.29) $W_a(y) = \frac{\pi}{2\lambda} \arcsin \frac{s.\sin(y-z)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(y-z)}}$ cu graficele în **figurile 21.14**.

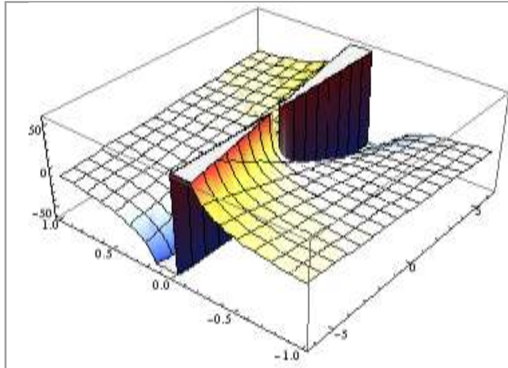


Fig. 21.12,a Aexa y cu s = 0,8 şi z = 0, pentru y ∊ [-2Pi, 2Pi], λ ∊ [0,5; 2]

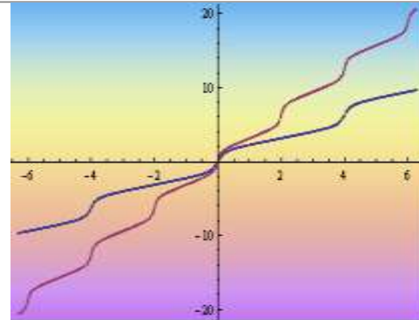


Fig. 21.12,b Secţiune prin **Aexa y** la λ = 0,5 şi **λ = 1**

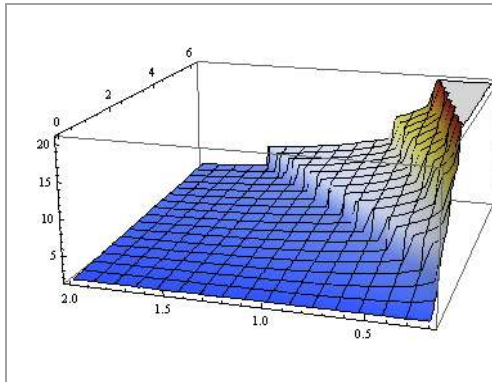


Fig.21.12,c Aexa y cu s = 1 şi z = 0, pentru y ∊ [0, 2Pi], λ ∊ [0,2, 2]

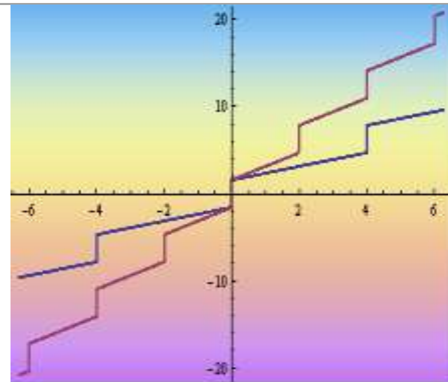


Fig. 21.12,d Secţiune prin **Aexa y** cu s = 1 şi z = 0, la λ = 0.5 şi **λ = 1** .

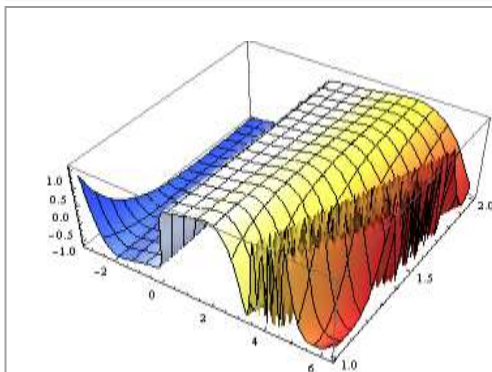


Fig. 21.13,a Bexa y cu s = 0.8 şi z = 0, Pentru y ∈ [-π, 2π} şi λ∈ [1 ,2]

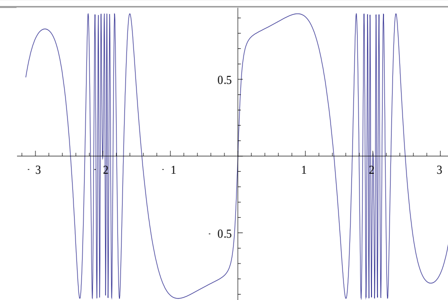


Fig. 21.13,b Secţiune prin **Bexa y** la λ = 0.5 cu s = 0.8 şi z = 0, pentru y ∈ [-π, π}.

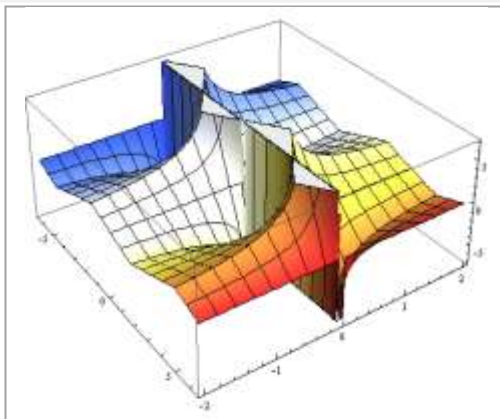


Fig. 21.14,a Functia beta analitic $w_a(x)$ cu k = 1 şi z = 0, x ∈ [–2π; +2π].

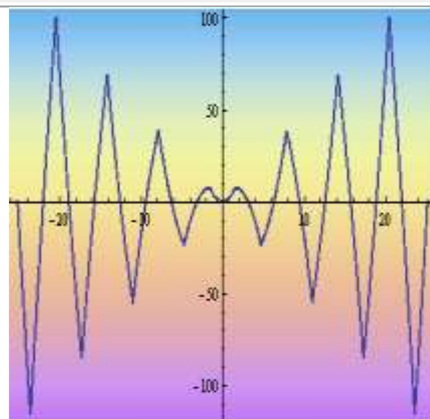
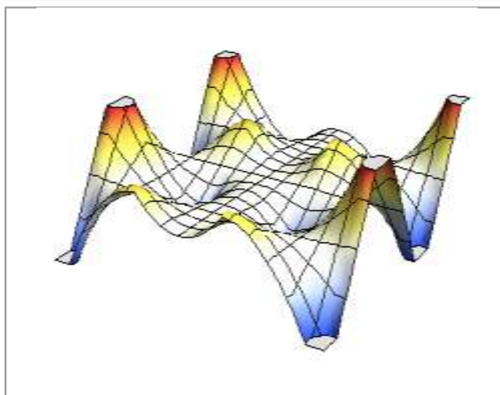


Fig. 21.14,b Secţiune la λ = 0.5 prin $w_a(x)$ cu k = 1 şi z = 0



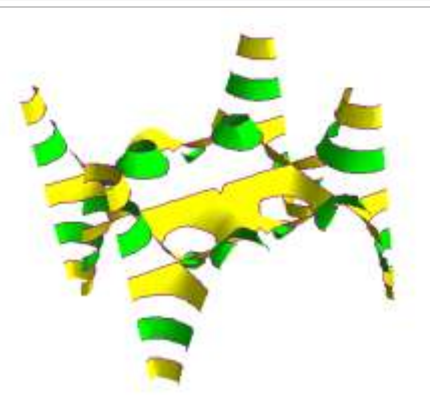


Fig. 21.7,c Funcţia dublu periodică $w_a(x)$. $w_a(y)$, pentru s ∈ [0,1; 1]; λ∈ [1;10]

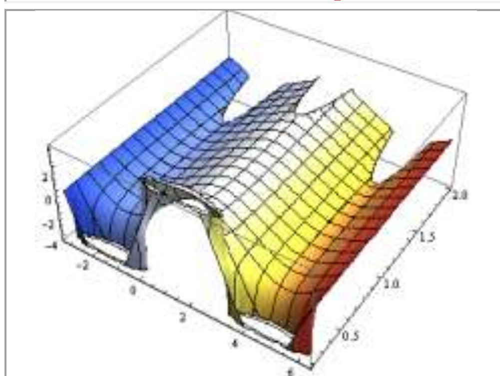


Fig. 21.14,c Funcţia beta analitic $w_a(y)$ cu k = 1 şi z = 0.

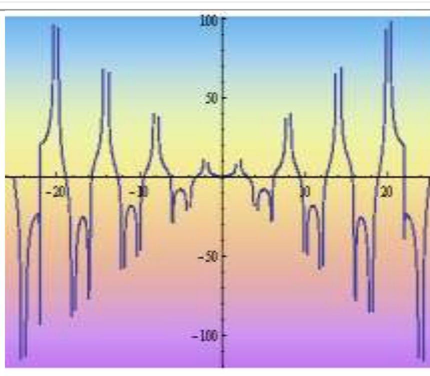


Fig. 21.14,d Secţiune la λ = 0.5 prin $w_a(y)$ cu k = 1 şi z = 0

21.8. FSM-CEA RADIAL EXCENTRIC rexax şi Rexay

Expresia analitică invariantă a acestei funcţii este [4], [9], [10], [11] :

(21.30) rex (x,E) = – s.cos(x-z) + $\sqrt{1-s^2\sin^2(x-z)}$,

de variabila excentrica x sau θ şi

(21.31) Rex (y, E) = $\sqrt{1+s^2-2s\cos(y-z)}$, de variabilă centrică y sau α.

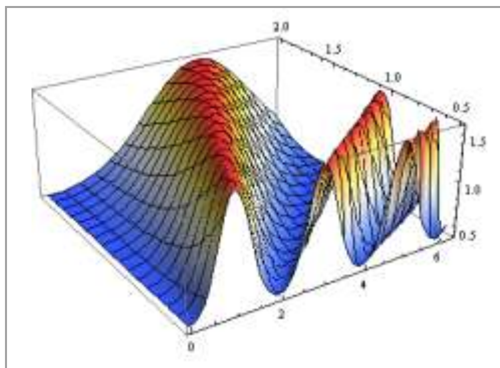


Fig. 21.15,a FSM-CEA rexax
S(0,6;0), x ∈ [0, 2π], λ ∈ [0,5; 2]

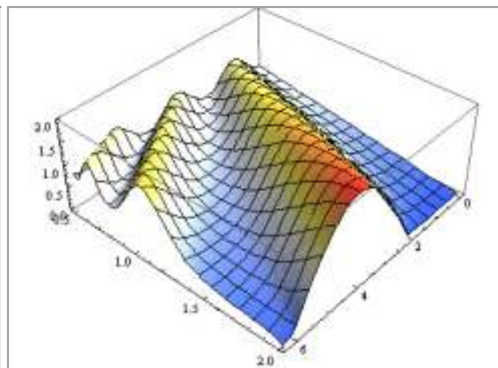
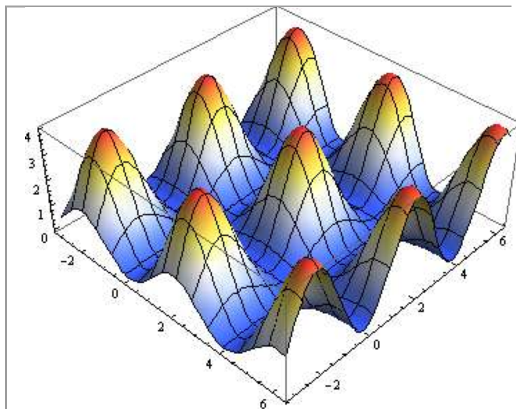


Fig. 21.15,b FSM-CEA rexa x
S(s∈[0,2;1), 0), x ∈ [0, 2π], λ ∈ [0,5; 2]



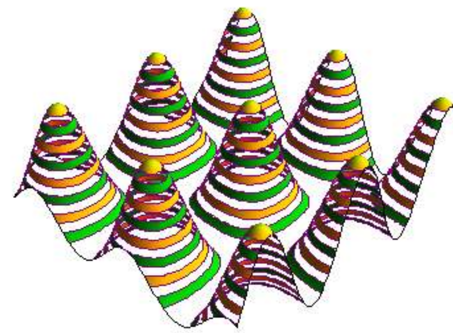


Fig. 21.15,c FSM-CEA dublu periodică rexax . rexay , pentru S(1;0),
x,y ∈ [–π, 2π], λ =1, reprezentate în două moduri (secţiuni) diferite

Dacă în (21.30) se aplică transformarea analitică (21.7) se obţine **FSM-CEA** radial excentrică analitică de variabilă excentrică:

(21.32) rexa (x,E, λ) = – scos($\frac{\pi}{2\lambda}x-z$) + $\sqrt{1-s^2\sin^2(\frac{\pi}{2\lambda}x-z)}$, (Fig. **21.15**)

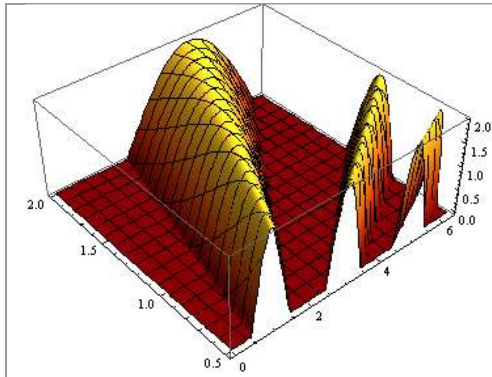


Fig. 21.15,d FSM-CEA rexax
S(1;0), $x \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in [0,5; 2]$

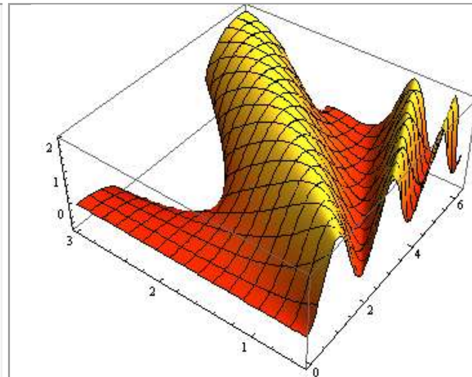


Fig. 21.15,e FSM-CEA rexa x
S(s∈[0,2;1,5), 0), $x \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in [0,5; 3]$

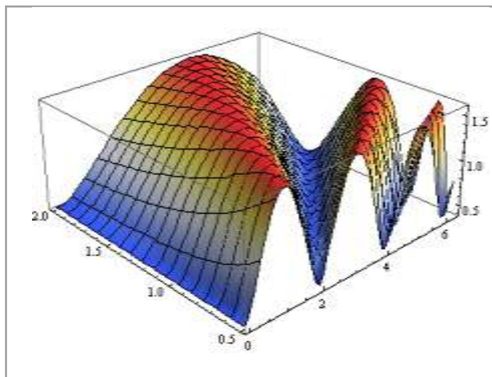


Fig. 21.16,a FSM-CEA Rexa x
S(0,6;0), $x \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in [0,5; 2]$

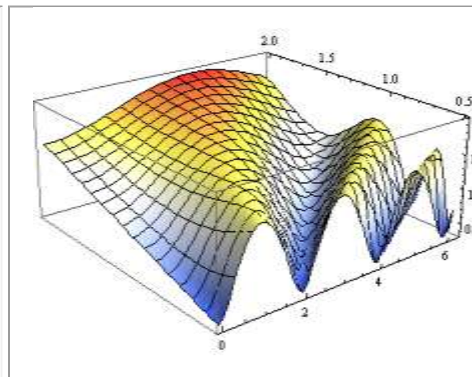
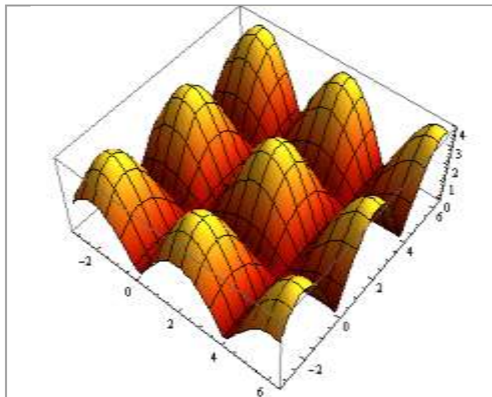


Fig. 21.16,b FSM-CEA Rexa x
S(s∈[0,2;1), 0), $x \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in [0,5; 2]$



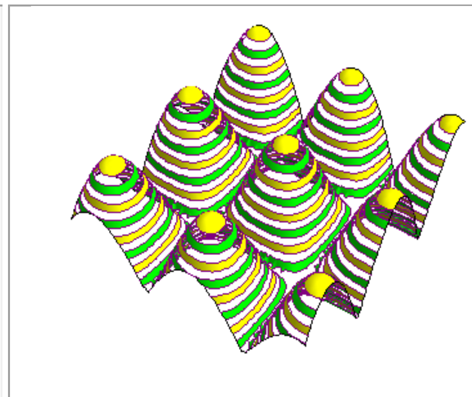


Fig. 21.16,c FSM-CEA dublu periodică Rexax . Rexay, pentru S(1;0),
$x,y \in [-\pi, 2\pi]$, $\lambda = 1$, reprezentate în două moduri (secţiuni) diferite

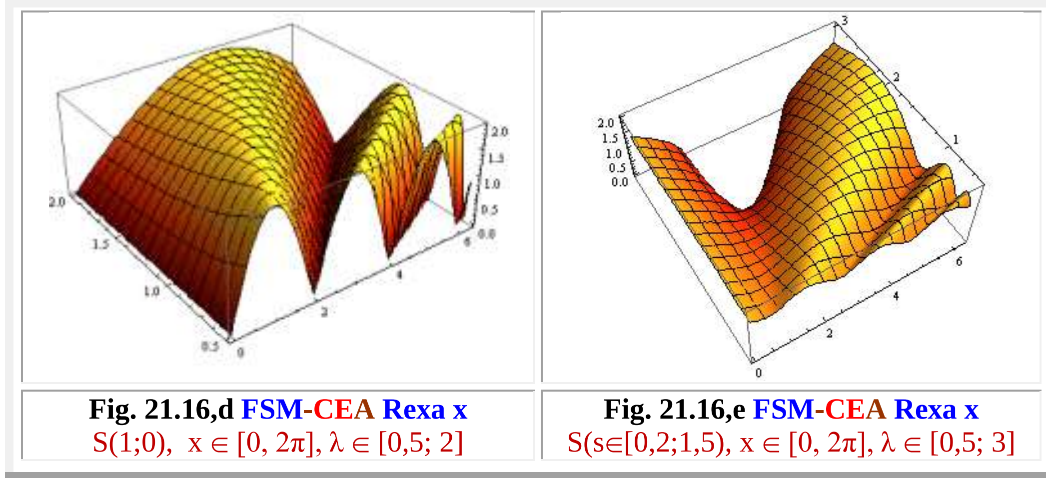


Fig. 21.16,d FSM-CEA Rexa x
S(1;0), x ∈ [0, 2π], λ ∈ [0,5; 2]

Fig. 21.16,e FSM-CEA Rexa x
S(s∈[0,2;1,5), x ∈ [0, 2π], λ ∈ [0,5; 3]

iar dacă se aplică în (21.27) se obţin cele de variabilă centrică (**Fig. 21.16**):

(21.33) RexA (y,E, λ) = $\sqrt{1+s^2-2s\cos(\frac{\pi}{2\lambda}y-z)}$.

21.9. FSM-CEA DERIVATĂ EXCENTRICĂ dexa x şi Dexa y

Expresia analitică invariantă a funcţiei **dex x** şi **Dex y** este

(21.34) dex x = 1 - $\frac{s\cos(x-z)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(x-z)}}$, ca funcţie de variabila excentrică x sau θ şi

(21.35) Dex y = $\frac{1-s\cos(y-z)}{1+s^2-2s\cos(y-z)}$, ca funcţie de variabila centrică y sau α.

Astfel că, utilizând / aplicând transformarea analitică (21.7), rezultă **FSM-CEA**:

(21.36) $$\text{dexa}\,(x,E,\lambda) = 1 - \frac{s\cos(\frac{\pi}{2\lambda}x-z)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\frac{\pi}{2\lambda}x-z)}}$$ şi

(21.37) $$\text{Dexa}\,(y,E,\lambda) = \frac{1-s\cos(\frac{\pi}{2\lambda}y-z)}{1+s^2-2s\cos(\frac{\pi}{2\lambda}y-z)}.$$

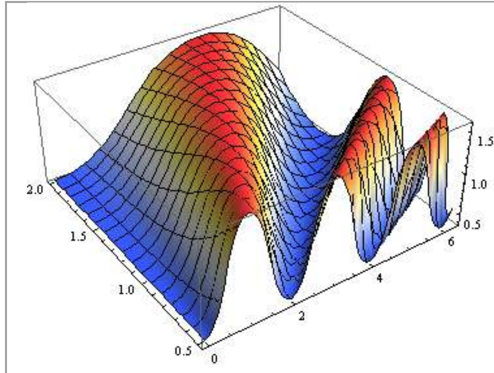


Fig. 21.17,a FSM-CEA dexax
S(0,6;0), x ∈ [0, 2π], λ ∈ [0,5; 2]

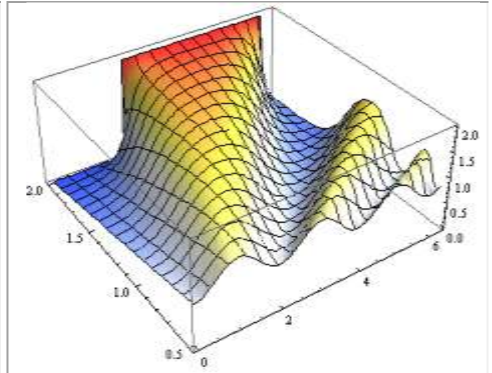


Fig. 21.17,b FSM-CEA dexa x
s∈[0,2;1), x ∈ [0, 2π], λ ∈ [0,5; 2]

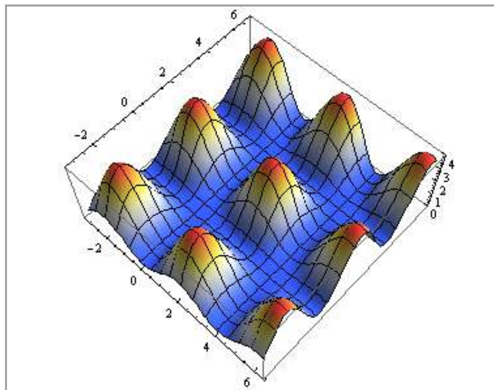




Fig. 21.17,c FSM-CEA dublu periodică dexax . dexay, pentru
S(1;0), x,y ∈ [–π, 2π], λ =1, reprezentate în două moduri (secţiuni) diferite

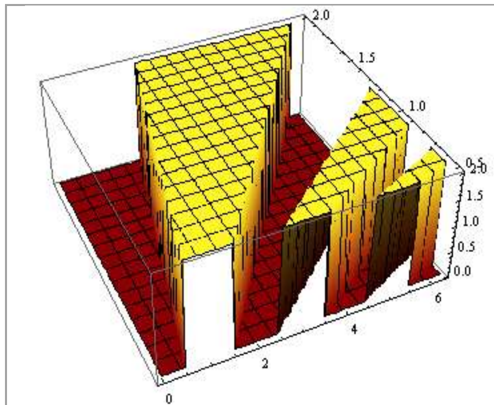


Fig. 21.17,d FSM-CEA dexax
S(1;0), x ∈ [0, 2π], λ ∈ [0,5; 2]

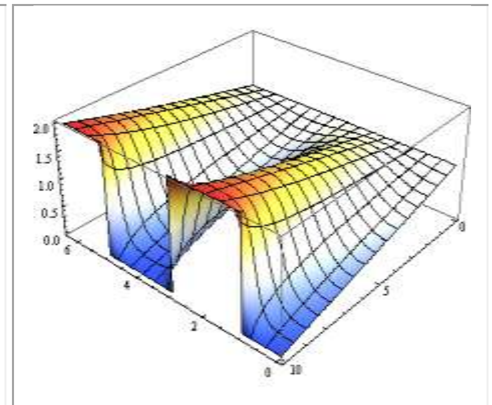


Fig. 21.17,e FSM-CEA dexa x
S(s∈[1; 0), x ∈ [0, 2π], λ ∈ [0; 1]

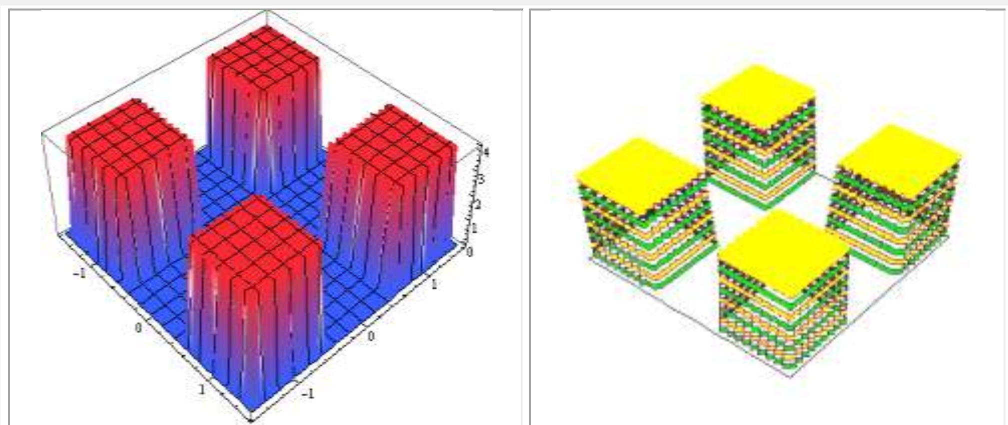


Fig. 21.17,c FSM-CEA dublu periodică dexax . dexay, pentru S(1;0), x,y ∈ [–π/2, π/2], λ =1, reprezentate în două moduri (secţiuni) diferite

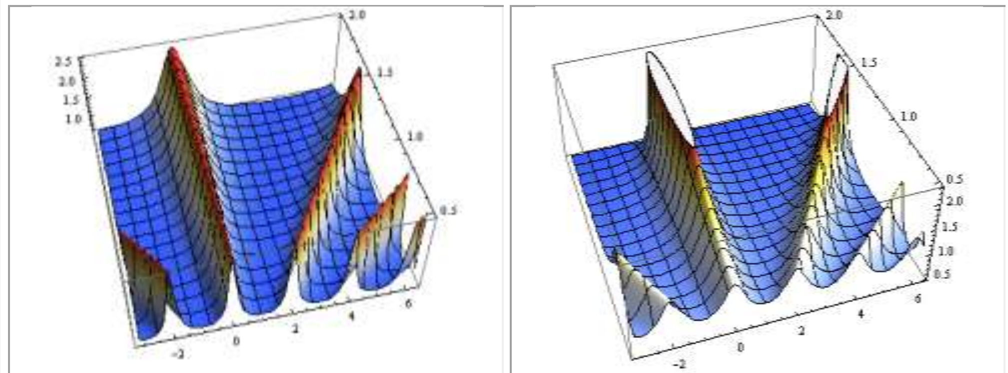


Fig. 21.18,a FSM-CEA Dexax
S(0,6;0), x ∈ [–π, 2π], λ ∈ [0,5; 2]

Fig. 21.17,b FSM-CEA Dexa x
s∈[0,25;1), x ∈ [0, 2π], λ ∈ [0,5; 2]

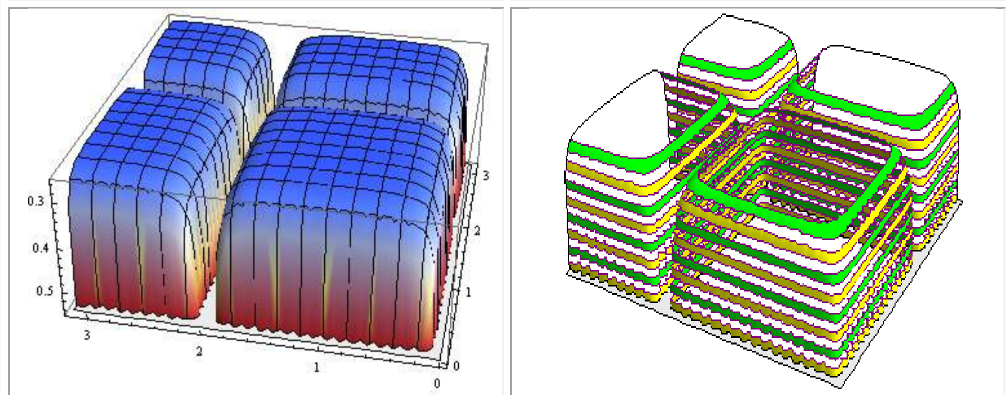


Fig. 21.17,c FSM-CEA dublu periodică Dexax . Dexay, pentru S(0.98; 0), x,y ∈ [0, π], λ = 0,5, reprezentate în două moduri (secţiuni) diferite

21.10 FSM-CE DUBLU ANALITICE

Aşa cum s-a afirmat, dacă ambelor variabile (centrică şi excentrică) li se aplică simultan **transformărilea analitice** (21.7), rezultă **FSM-CE** dublu analitice (**2A**).

Prin definitie dexθ = dα/dθ şi Dexα = dθ/dα, astfel ca **FSM-CE** dublu analitice (2A) sunt identice cu cele ordinare (21.30) şi (21.31), deoarece se înmulţeşte simultan x şi y , sau θ şi α, cu aceeasi expresie (21.7).

Celelalte **FSM - CE2A** sunt cex2a, Cex2a sex2a, Sex2a ş.a. de exemplu, expresia analitică a lor este :

(21.38)
$$\begin{cases} \text{cex2a}(x,\ E, \lambda) = \frac{\pi}{2\lambda} x[(\frac{\pi}{2\lambda} x - \arcsin[s.\sin(\frac{\pi}{2\lambda} x - z)])] \\ \text{sex2a}(x,\ E, \lambda) = \frac{\pi}{2\lambda} x[(\frac{\pi}{2\lambda} x - \arcsin[s.\sin(\frac{\pi}{2\lambda} x - z)])] \end{cases}$$

(21.39)
$$\begin{cases} \text{Cex2a}(y, E, \lambda) = \left\{ \frac{\pi}{2\lambda} y[\frac{\pi}{2\lambda} y + \arcsin \frac{s\sin(y\frac{\pi}{2\lambda} y - z)}{\sqrt{1+s^2 - 2s\cos(\frac{\pi}{2\lambda} y - z)}}] \right\} \\ \text{Sex2a}(y, E, \lambda) = \sin\left\{ \frac{\pi}{2\lambda} y[\frac{\pi}{2\lambda} y + \arcsin \frac{s\sin(y\frac{\pi}{2\lambda} y - z)}{\sqrt{1+s^2 - 2s\cos(\frac{\pi}{2\lambda} y - z)}}] \right\} \end{cases}$$

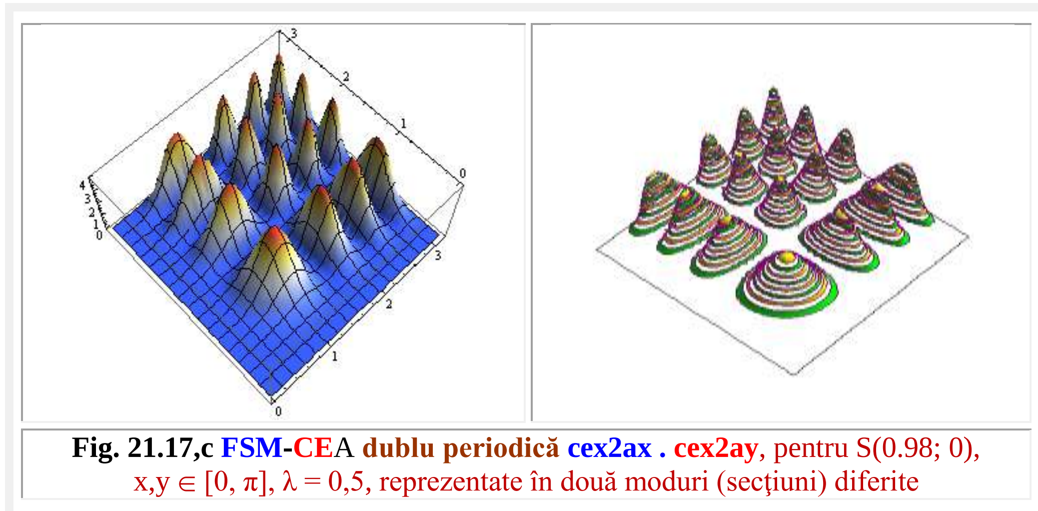


Fig. 21.17,c FSM-CEA dublu periodică cex2ax . cex2ay, pentru S(0.98; 0), x,y ∈ [0, π], λ = 0,5, reprezentate în două moduri (secţiuni) diferite

21.11. CONCLUZII

FSM-CEA sunt funcţii dublu periodice de **variabilă excentrică** sau **centrică**, fiecare dintre acestea putând fi centric-analitice sau excentric-analitice.

FSM-CEA centric şi excentric-analitice sunt denumite de dubla analicitate sau dublu analitice.

În funcţie de tipul **excentrului E**, ele pot fi de **excentru punct fix**, când e şi z sunt constante sau de **punct mobil**, dacă **e** şi / sau **z** sunt variabile.

Sunt cazuri particulare, prezentate în lucrare, pentru care **FCE** de E_V dat de (21.11) reprezinta **FTA** sau **FCCA**.

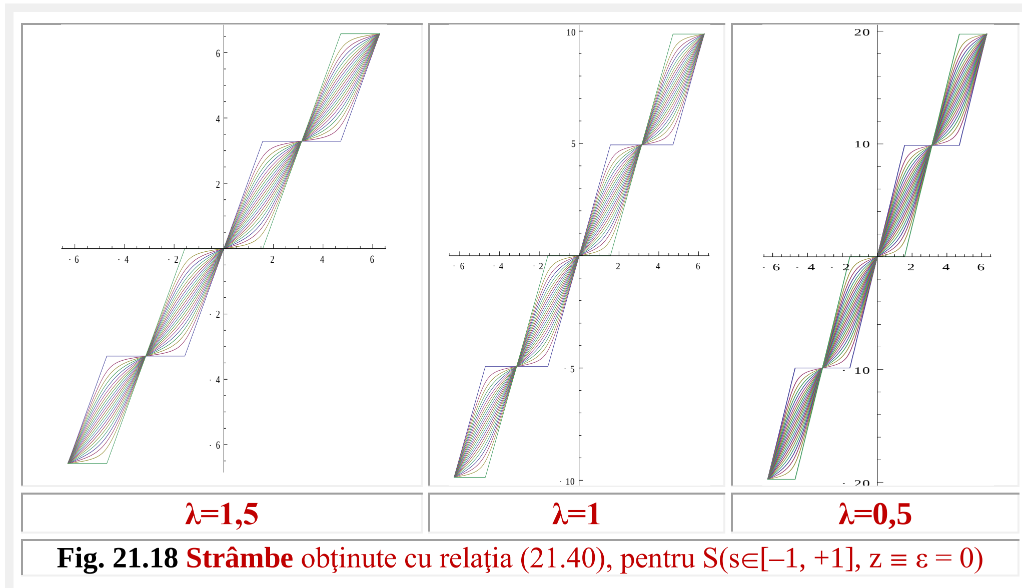


Fig. 21.18 Strâmbe obţinute cu relaţia (21.40), pentru S(s∈[–1, +1], z ≡ ε = 0)

Pentru **E fix** şi $\lambda = \frac{\pi}{2}$ ele degenerează în **FSM-CE** ordinare, iar pentru **e = 0** degenerează în **FCC** ordinare (sin, cos, tan sau tav ş.a.m.d.).

Aşa cum, pentru **e = 0**, **aex x** degenerează într-o dreaptă (în prima bisectoare) şi pentru **e ≠ 0** reprezinta o **familie de strâmbe** [3], corespunzatoare primei bisectoare, tot aşa, pentru $\lambda \neq \pi/2$, dar constant, funcţia amplitudine excentrică se va transforma într-o familie de strambe:

(21.40) $$\text{s: } y = \frac{\pi}{2\lambda}\{x - \arcsin[s\sin(x - z)]\}$$

care oscilează / şerpuiesc (mi s-a facut observaţia că acest cuvânt nu este propriu matematicii) de-o parte şi de alta a direcţiei dreptei (sau strâmbei (21.40) de e = 0) :

(21.41) $$\text{d: } y = \frac{\pi}{2\lambda}x \ \text{ de direcţie } \ m = \frac{\pi}{2\lambda}.$$

Daca λ nu este o constantă pozitivă, ci una negativă, sau chiar o funcţie variabilă, atunci se obţin funcţii analitice de parametru variabil. Pentru λ variabil se obţin funcţii periodice modulate în frecvenţă.

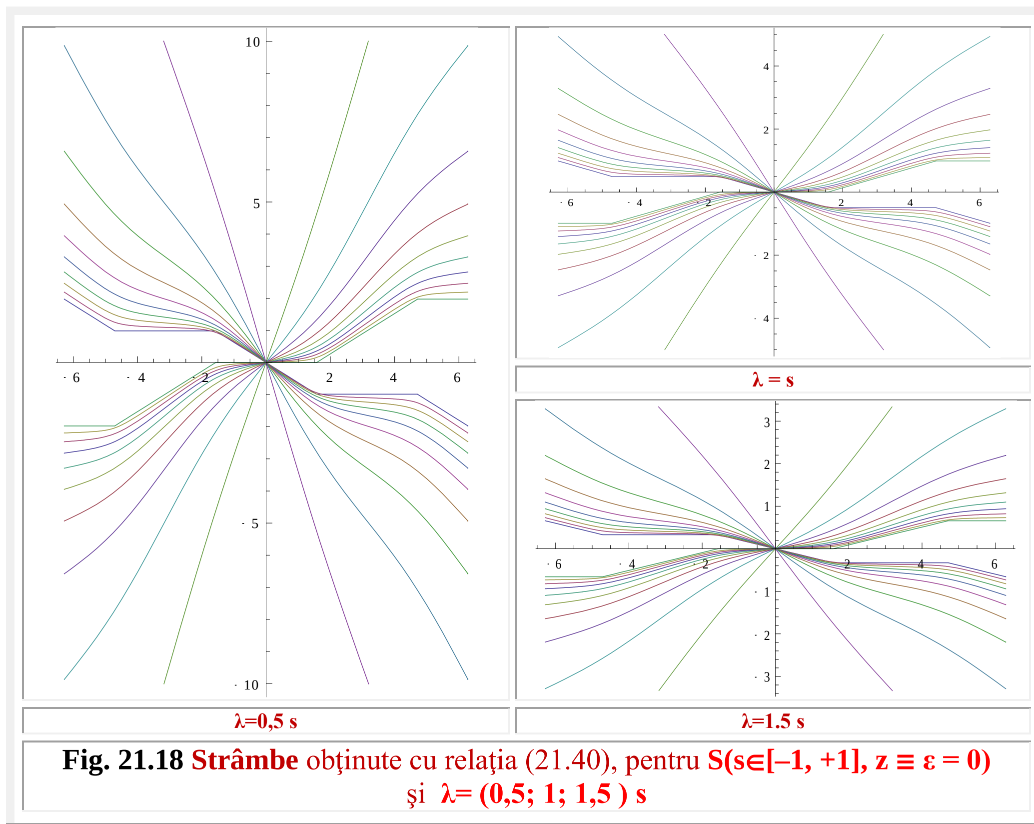


Fig. 21.18 Strâmbe obţinute cu relaţia (21.40), pentru **S(s∈[–1, +1], z ≡ ε = 0)** şi **λ= (0,5; 1; 1,5) s**

Motto: " Pentru cei mai mulţi dintre noi, marele pericol nu este că ţintim prea sus şi nu reuşim, ci că ţintim prea jos şi reuşim **"**

Michelangelo Buonarroti

Capitolul **22**

FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABLĂ COMPLEXĂ (FSM-CEA) (C-analitice)

22.1 INTRODUCERE

Sunt numite funcţii ***monogene,*** **olomorf**e sau **analitice**, după **A.L. Cauchy**, cel care a dezvoltat primul acest punct de vedere, funcţiile derivabile de variabilă complexă z:

(22.) z = x + i.y, variabilă care poate fi scrisă şi sub forma exponenţială, dată de **Euler** pe baza notaţiei lui **Roger Cotes** (1714)

(22.2) $z = r.\, e^{i.\alpha}$, în care

(22.3) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi $\alpha = arcsin\frac{y}{r} = arctan\frac{y}{x}$,

sau, sub o nouă formă, de vector unitate (versor / fazor) şi, totodată, sub forma trigonometrică a funcţiilor circulare centrice noi, radial centric (radα), echivalenta funcţiei circulare excentrice radial excentric (rexθ şi Rexα) şi derivata centrică (derα), corespondenta în centric a funcţiei derivată excentrică (dexθ şi Dexα), prezentate în volumul I al acestei lucrări

(22. 4) $z = r.\, rad\,\alpha = r.e^{i.\alpha}$ şi

(22. 5) $z' = dz/d\alpha = r.\, der\,\alpha = r.\, i.\, e^{i.\alpha}$, astfel că versorii axelor x şi y sunt

$i = rad0^0$ si $j = rad\,\frac{\pi}{2} = der0^0$

(22.6) x = ***Re***(r.radα) = r.cosα şi y = ***Im***(r.radα) = r.sinα.

În lucrarea [**Hamburg P**. ş.a. **ANALIZĂ MATEMATICĂ. FUNCŢII COMPLEXE**, Ed Didactică şi Pedagogică, Buc., 1982], funcţia este notată cu **e**(α).

Condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie f(z) = X + i.Y să fie monognă într-un punct z este ca în acest punct să indeplinească condiţiile **Cauchy – Riemann** :

(22.7) $$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \end{cases}$$

în coordonate carteziene sau, în coordonate polare (r, α) [**Angheluţă Theodor**, CURS de TEORIA FUNCŢIILOR de VARIABILĂ COMPLEXĂ, Ediţia a doua, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957] :

$$\text{(22.8)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Se vor prezenta, în continuare, câteva exemple de funcţii supermatematice circulare excentrice analitice de variabilă complexă, începând cu **FSM-CE** « **rege** », de **variabilă centrică α**, **Rexα** .

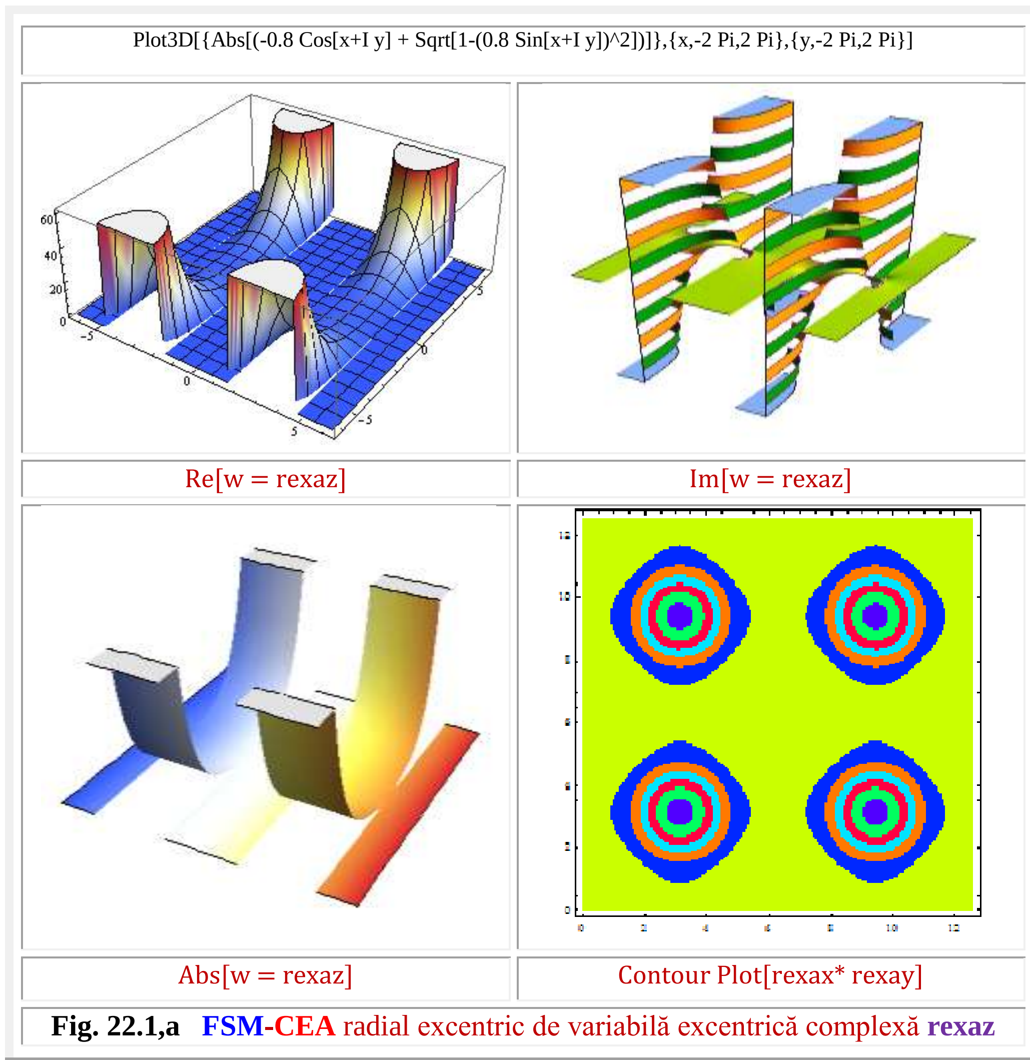


Fig. 22.1,a **FSM-CEA** radial excentric de variabilă excentrică complexă **rexaz**

În planul complex, notând cu z = x = i.y un punct curent **(W)** al cercului unitate, de argument α = arctan(y/x) şi **excentrul E(k,ε),** punct fix în planul complex, atunci funcţia **Rex**, care exprima distanta de la **E** la W, va fi diferenţa vectorilor

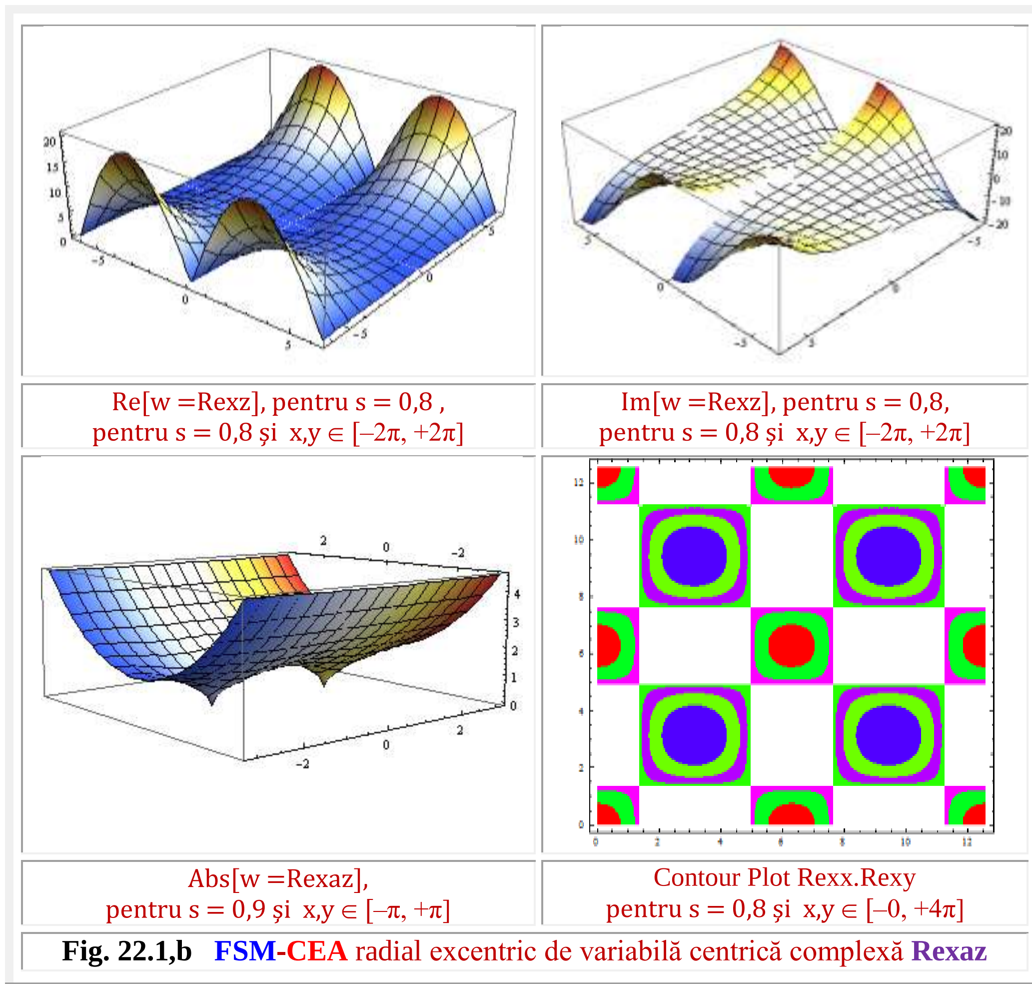
OW – OE = z – e

Funcţia Rexα este atunci

(22.9) W = z – e = (x + i.y) – k. radε = (x + i.y) – k (cosε – i. sinε) = = (x – k.cosε) +i(y + sinε) astfel că

$$(22.10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ceea ce arată ca funcţia **Rexα** este analitică cu excepţia originii O(00).



Re[w =Rexz], pentru s = 0,8 , pentru s = 0,8 şi x,y ∈ [–2π, +2π]

Im[w =Rexz], pentru s = 0,8, pentru s = 0,8 şi x,y ∈ [–2π, +2π]

Abs[w =Rexaz], pentru s = 0,9 şi x,y ∈ [–π, +π]

Contour Plot Rexx.Rexy pentru s = 0,8 şi x,y ∈ [–0, +4π]

Fig. 22.1,b **FSM-CEA** radial excentric de variabilă centrică complexă **Rexaz**

Considerând excentrul **E** ca un punct în planul complex z = k. radε = x + iy, în care x = k.cosε şi y = k.sinε şi **W** un punct fix pe cercul unitate, atunci pătratul funcţiei Rex α, Rex^2 α = (1 + k^2 – 2kcos α) este funcţia

(22.11) $W = 1 + z^2 - 2z\cos\alpha = (1 + x^2 - y^2 - 2\cos\alpha) + 2i(xy - y\cos\alpha)$

astfel că sunt îndeplinite condiţiile de monogeneitate **Couchy-Riemann** (22.7

$$\text{(22.11)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2(x - \cos\alpha) \\ -2y = \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y \end{cases}$$

ceea ce arată că funcţia Rex^2 α este o funcţie analitică de excentru **E(E, ε)** sau **E (x, y)** un punct în planul complex.

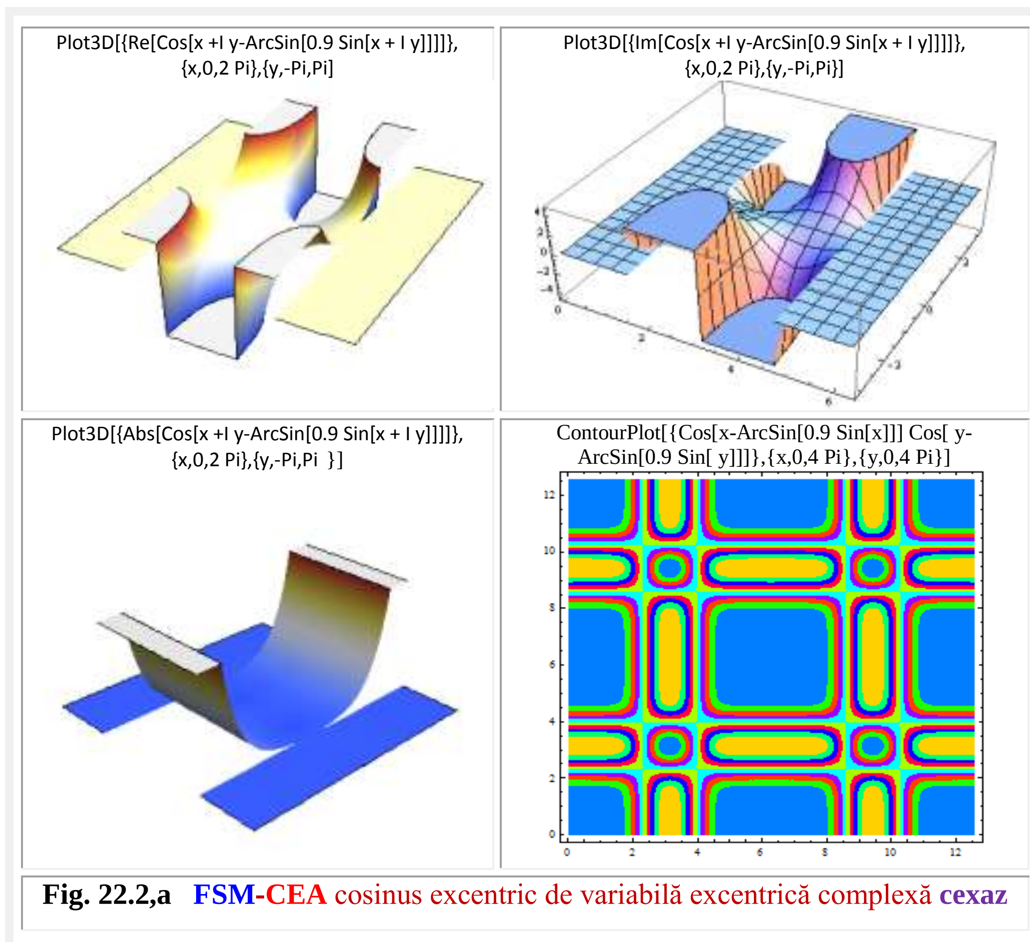


Fig. 22.2,a **FSM-CEA** cosinus excentric de variabilă excentrică complexă **cexaz**

22.2 FSM-CE DE VARIABILĂ COMPLEXĂ (FSM-CEA)

În lucrarea **Mircea Eugen Şelariu** "**SUPERMATEMATICA. Fundamente**", volumul I, Editura POLITEHNICA, Timişoara, 2007 au fost tratate **funcţiile**

supermatematice circulare excentrice (FSM-CE) de variabile reale **excentrice** θ şi **centrice** α.

Prin simpla înlocuire a acestor variabile reale cu unele complexe, pe care o denumim **transformare complexă**, adică

$$\begin{cases} \theta \Rightarrow z = x + i.y \\ \alpha \Rightarrow z = x + i.y \end{cases} \tag{22.12}$$

se va trece de la **FSM-CE** de variabilă reală la cele de variabilă complexă **FSM-CEA**.

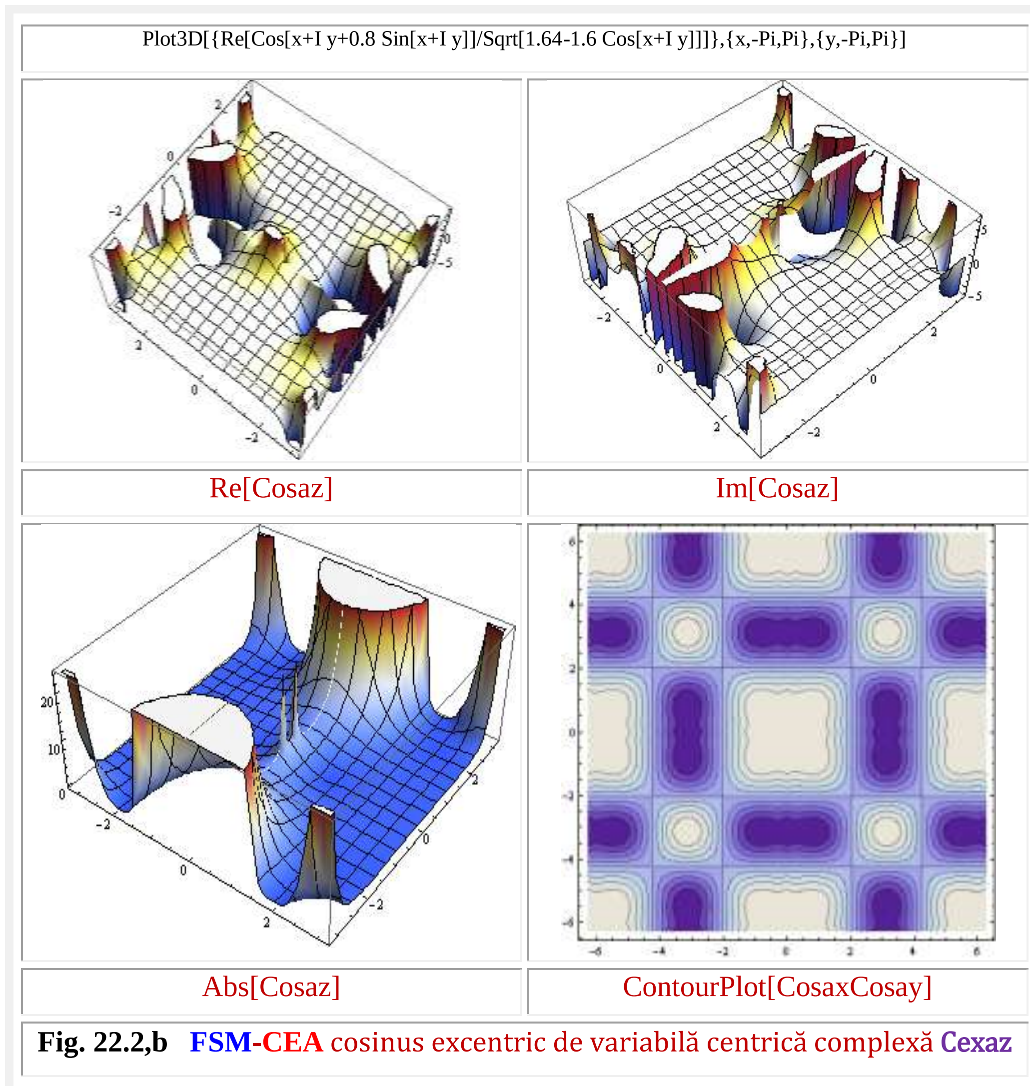


Fig. 22.2,b **FSM-CEA** cosinus excentric de variabilă centrică complexă **Cexaz**

Astfel, funcţia **cexθ** → cexz = cex($x + i.y$), **sexθ**→ sexz = sex(x+i.y) ş.a.m.d. iar **Cexα** →Cexz = Cex($x + i.y$) şi **Sexα** → Sexz = Sex($x + i.y$) şi la fel pentru celelalte funcţii circulare.

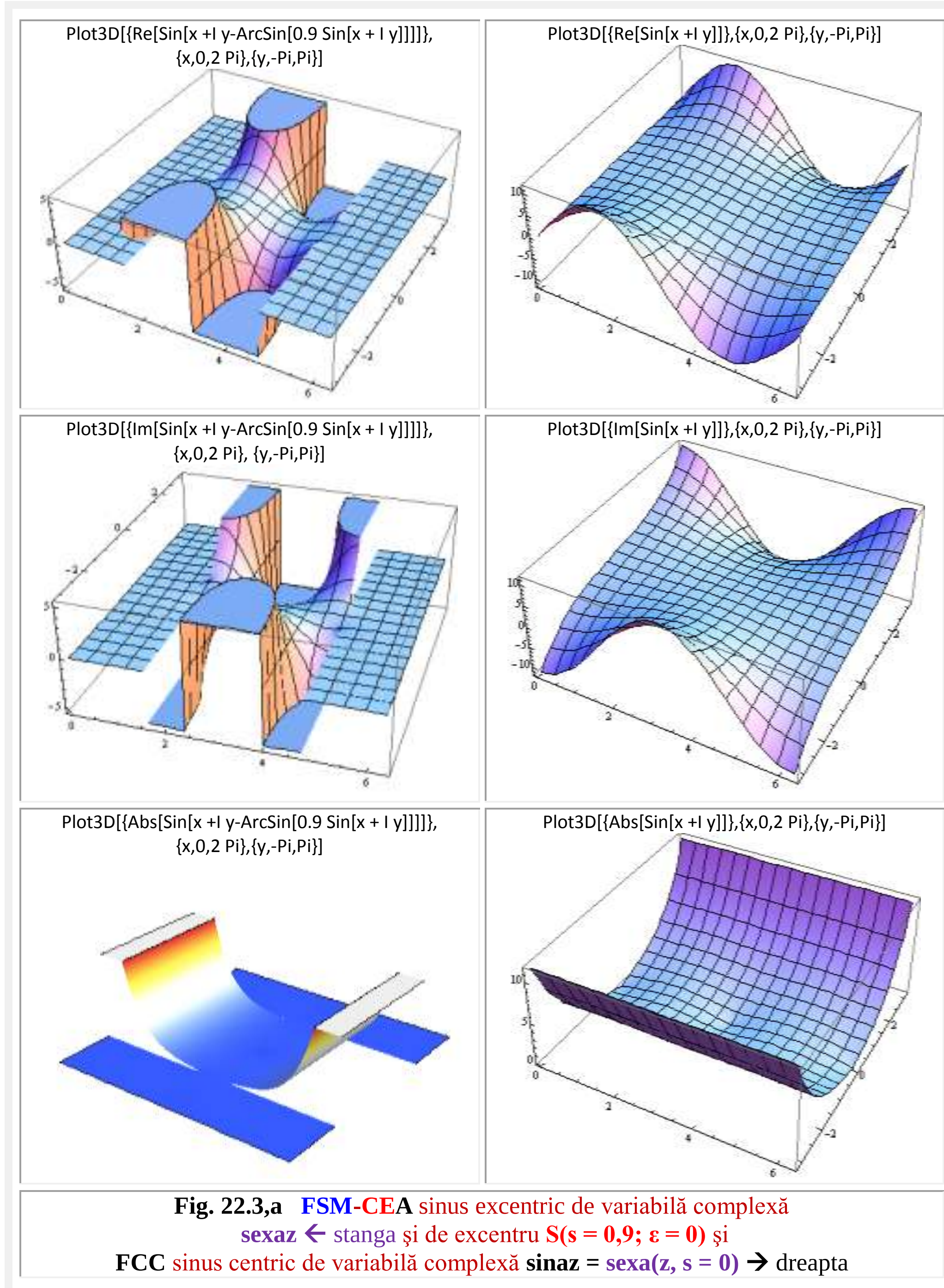


Fig. 22.3,a **FSM-CEA** sinus excentric de variabilă complexă
sexaz ← stanga şi de excentru **S(s = 0,9; ε = 0)** şi
FCC sinus centric de variabilă complexă **sinaz** = **sexa(z, s = 0)** → dreapta

Explicit, expresiile unor **FSM-CE** de **variabile excentrice** complexe sunt

(22.13) cexz = cex$(x + i.y)$ = cos[$(x + i.y)$ – arcsin[s.sin$(x + i.y)$]],

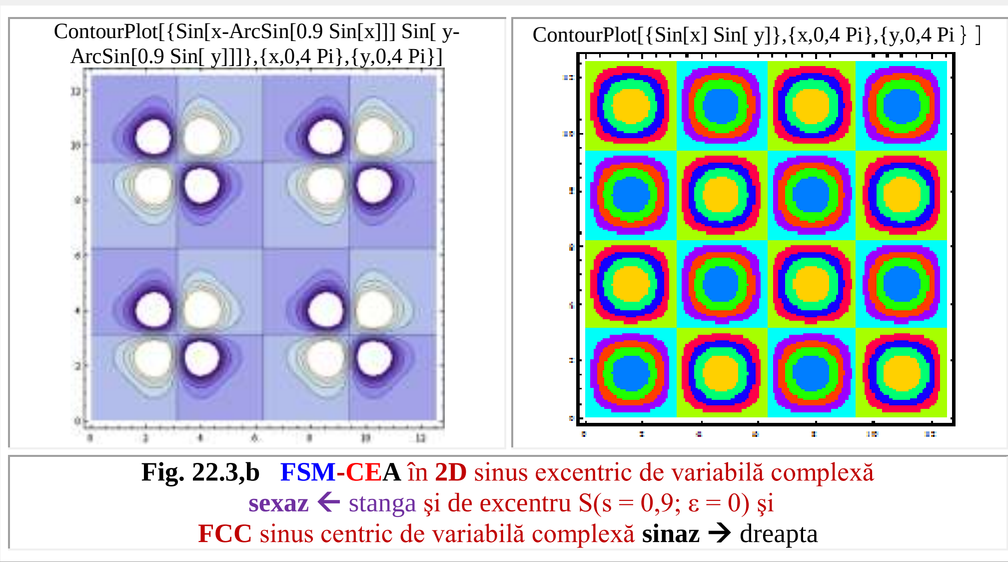


Fig. 22.3,b **FSM-CEA** în **2D** sinus excentric de variabilă complexă **sexaz** ← stanga şi de excentru S(s = 0,9; ε = 0) şi **FCC** sinus centric de variabilă complexă **sinaz** → dreapta

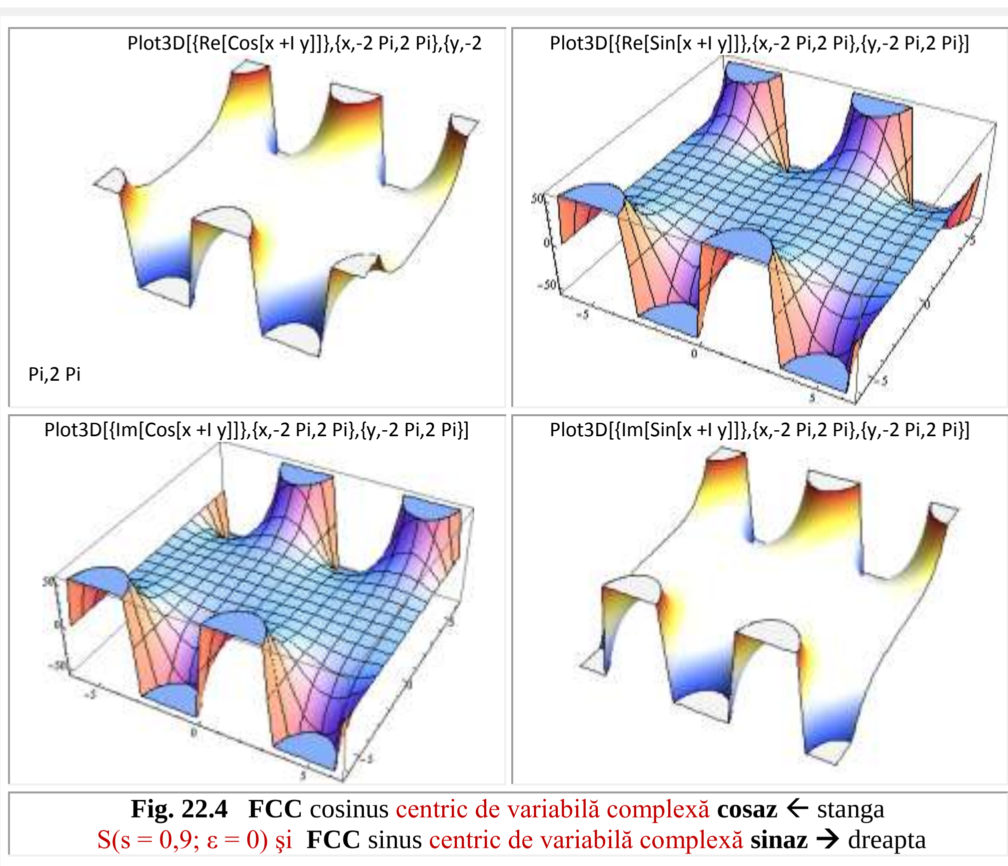


Fig. 22.4 **FCC** cosinus centric de variabilă complexă **cosaz** ← stanga S(s = 0,9; ε = 0) şi **FCC** sinus centric de variabilă complexă **sinaz** → dreapta

(22.14) sexz = $\sin(x + i.y)$ = $\sin[(x + i.y) - \arcsin[s.\sin(x + i.y)]]$

cu graficele din **figura 22.2,a** în care s-a evidenţiat partea reală Re[cexz] şi partea imaginară Im[cexz] a funcţiei de variabilă complexă, precum şi valoarea ei absolută Abs[cexz], care reprezintă suma pe direcţia verticală (axa z) a celor doua părţi: reală şi imaginară. In unele figuri s-au rezentat graficele 3D împreună cu boxa, axele şi meşa, iar în altele au fost omise, pentru a obţine forme considerate mai artistice.

Funcţiile cu aspect artistic în 2D au fost reprezentate şi prin ContouPlot, aşa cum este cazul în **figurile** 22.1, 22,2; 21.3, 22.5; ş.a., iar pentru reproducerea figurilor au fost prezentate, în majoritatea cazurilor şi comenzile date în **Matematica 6 şi 8**.

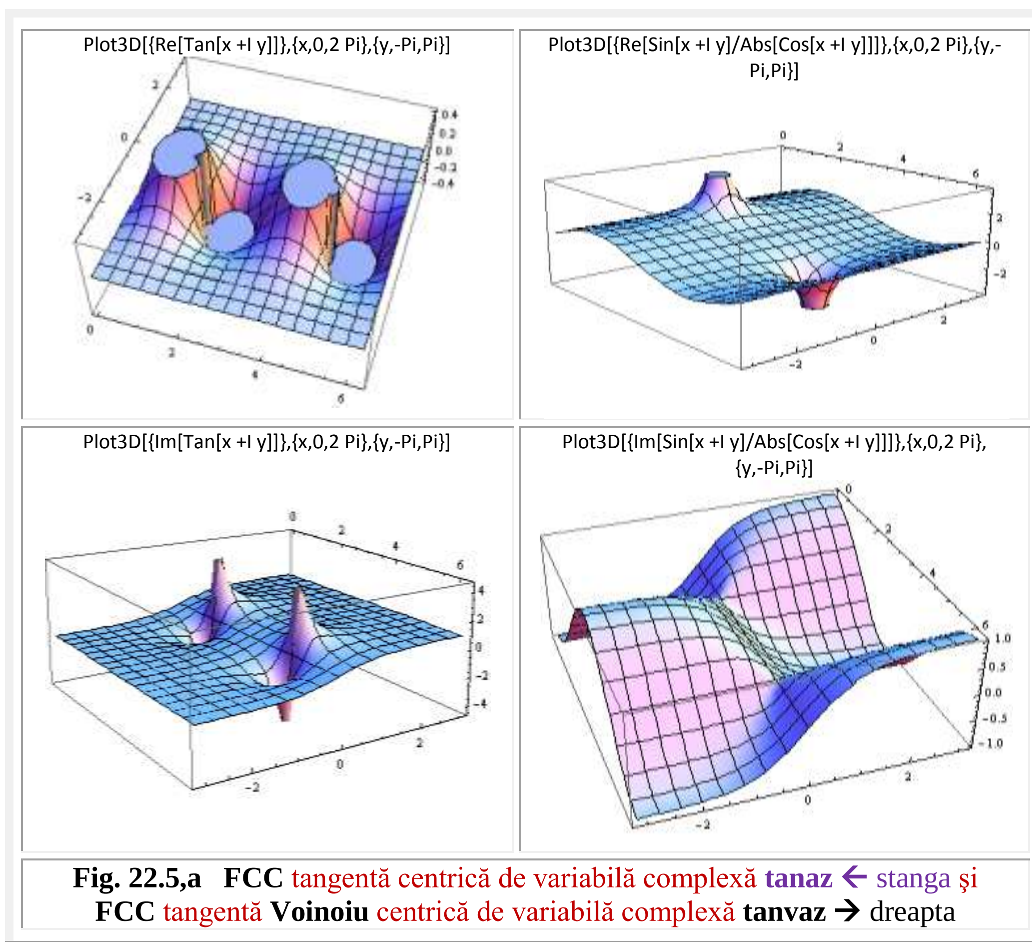


Fig. 22.5,a FCC tangentă centrică de variabilă complexă **tanaz** ← stanga şi **FCC** tangentă **Voinoiu** centrică de variabilă complexă **tanvaz** → dreapta

Pentru a scoate în evidenţa asemănarile, dar şi deosebirile dintre diversele funcţii (sinz– cosz; rexaz - Rexaz; dexaz - Dexaz; cexaz – Cexaz ; ş,a) ele au fost redate grafic în paralel.

Cexaz şi Sexaz au expresiile

(22.15) Cexaz = Cex($x + i.y$) = cos{($x + i.y$) + arcsin[s.sin($x + i.y$)/Reza^2 z]} =
= cos[x + iy + arcsin$\frac{s.\sin(x+i.y)}{1+s^2-2s.\cos(x+iy)}$] ,

(22.16) Sexaz = Sex($x + i.y$) = sin{($x + i.y$) + arcsin[s.sin($x + i.y$)/Reza^2 z]} =
= sin[x + iy + arcsin$\frac{s.\sin(x+i.y)}{1+s^2-2s.\cos(x+iy)}$]

Tangenta centrică de variabilă complexă are ecuaţia

(22.17) tanz = tan($x + i.y$) = cos($x + i.y$) /sin($x + i.y$), iar tangenta **Voinoiu**

(22.18) tanvz = tanv($x + i.y$) = cos($x + i.y$) /Abs[sin($x + i.y$)], (**Fig. 22.5**)

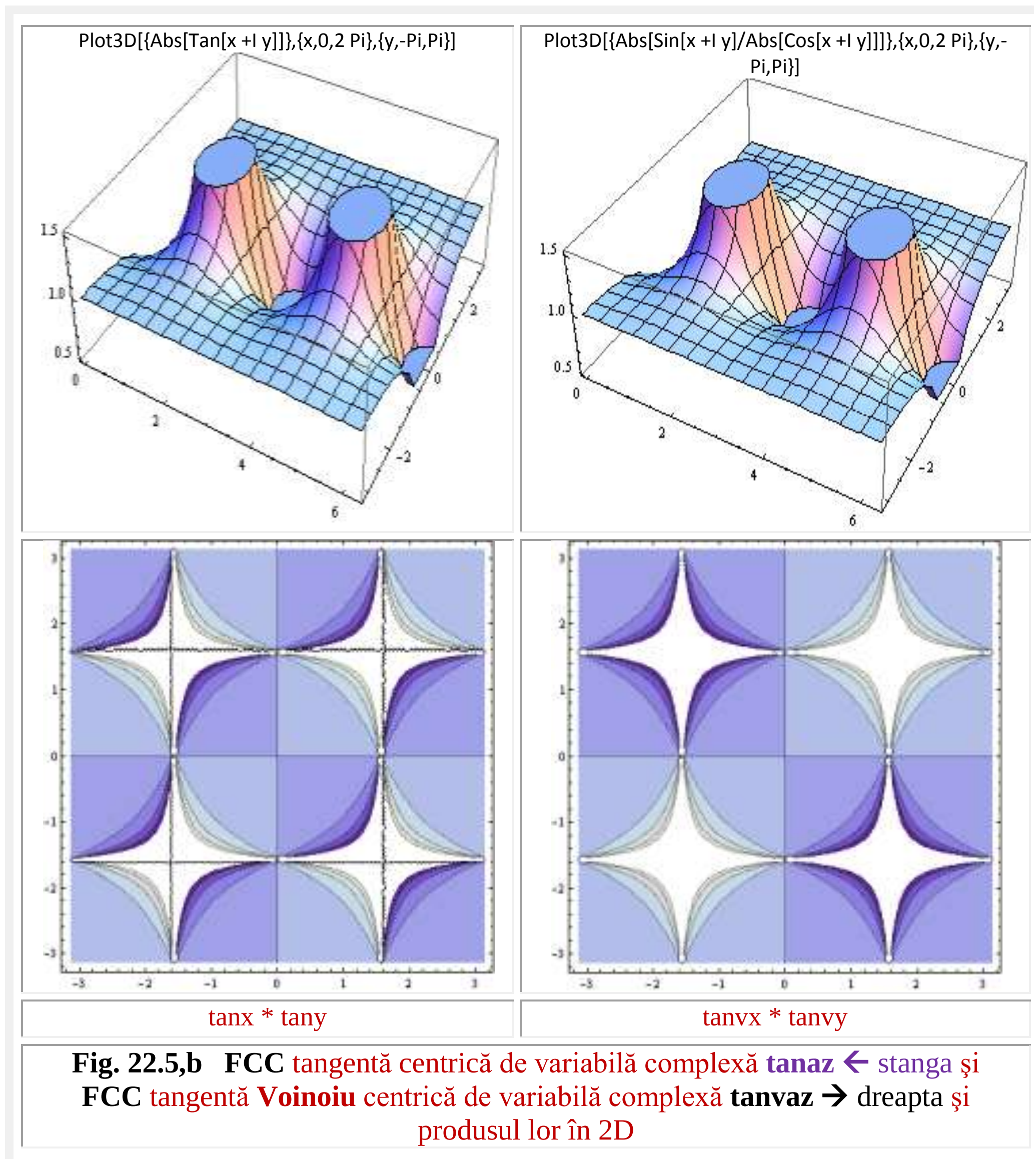


Fig. 22.5,b FCC tangentă centrică de variabilă complexă **tanaz** ← stanga şi **FCC** tangentă **Voinoiu** centrică de variabilă complexă **tanvaz** → dreapta şi produsul lor în 2D

Prin **transformarea complexă** (22.12) se obţin funcţiile **FSM-CEA** de variabilă excentrică

(22.19) $\quad \text{dexaz} = 1 - \frac{s.\cos\,(x+iy-z)}{\sqrt{1-s^2 sin^2(x+iy-z)}}$ şi cele de variavilă centrică

(22.20) $\quad \text{Dexaz} = \frac{1-s\cos\,(x+iy-z)}{Rex^2(x+iy-z)} = \frac{1-s\cos\,(x+iy-z)}{1+s^2-2s\cos(x+iy-z)}$, (**Fig. 22.6**).

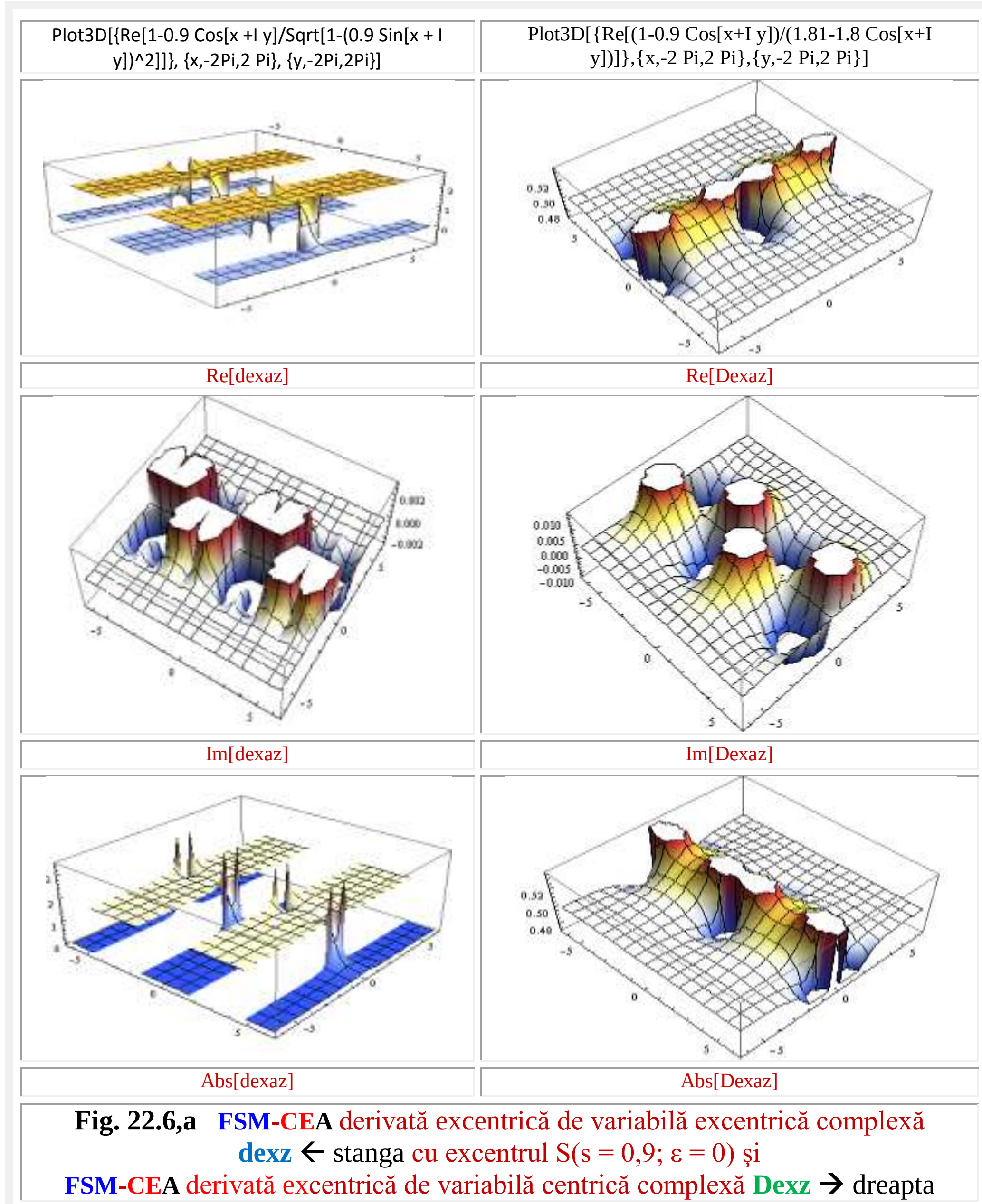


Fig. 22.6,a **FSM-CEA** derivată excentrică de variabilă excentrică complexă **dexz** ← stanga cu excentrul S(s = 0,9; ε = 0) şi
FSM-CEA derivată excentrică de variabilă centrică complexă **Dexz** → dreapta

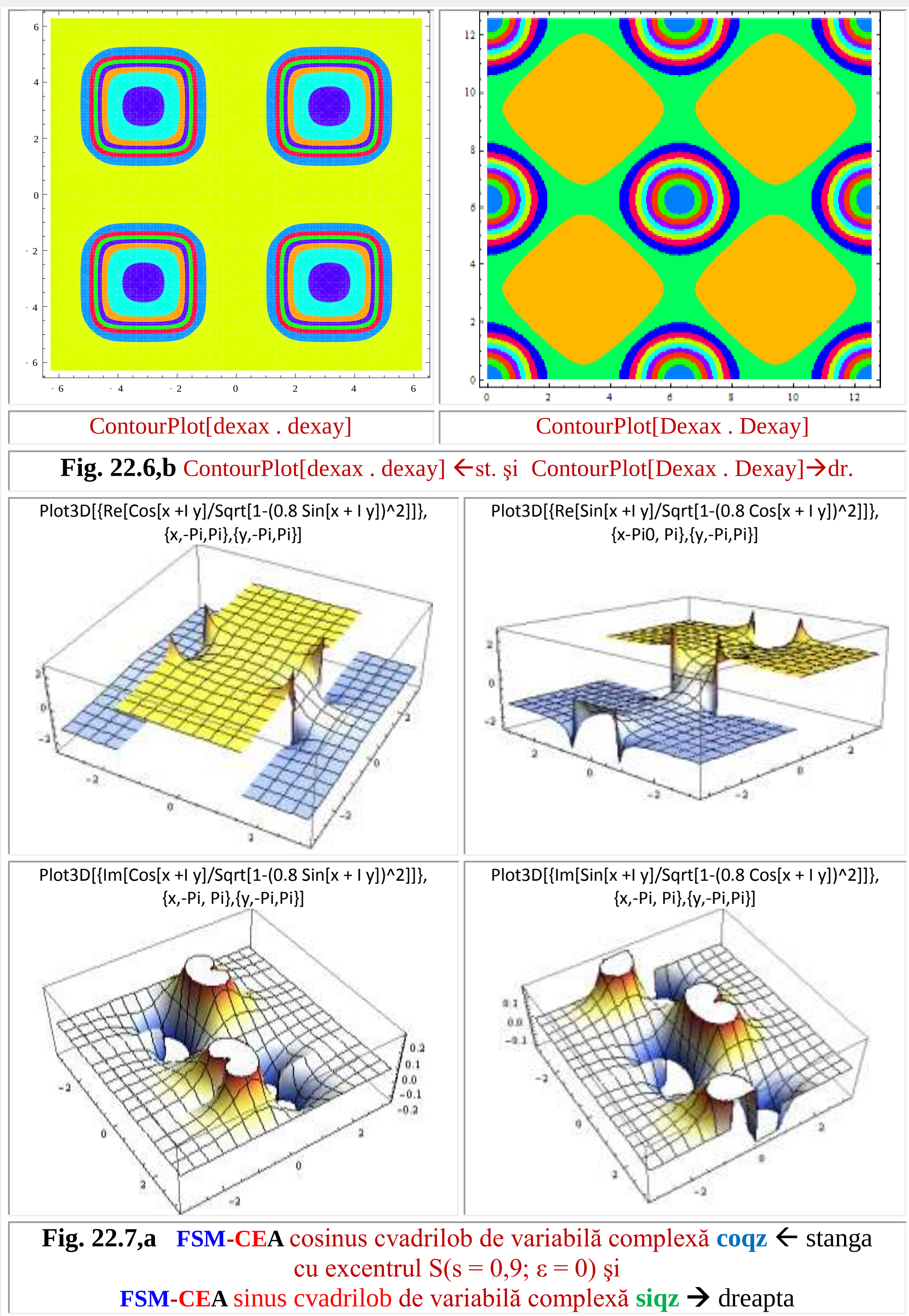


Fig. 22.6,b ContourPlot[dexax . dexay] ←st. şi ContourPlot[Dexax . Dexay]→dr.

Fig. 22.7,a **FSM-CEA** cosinus cvadrilob de variabilă complexă **coqz** ← stanga cu excentrul S(s = 0,9; ε = 0) şi **FSM-CEA** sinus cvadrilob de variabilă complexă **siqz** → dreapta

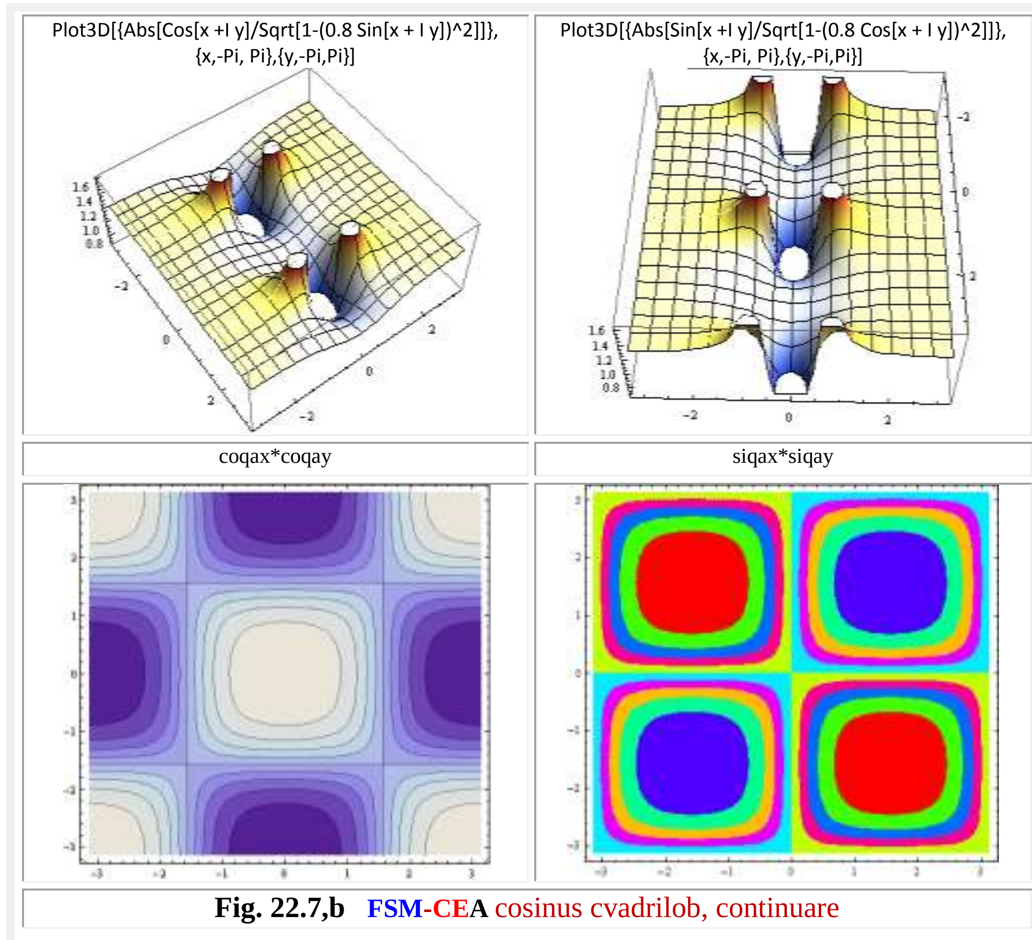


Fig. 22.7,b FSM-CEA cosinus cvadrilob, continuare

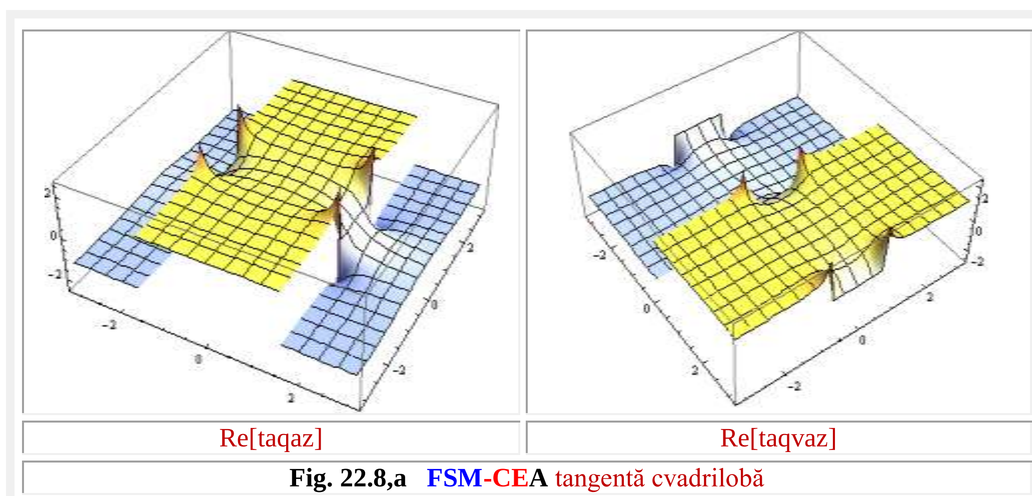


Fig. 22.8,a FSM-CEA tangentă cvadrilobă

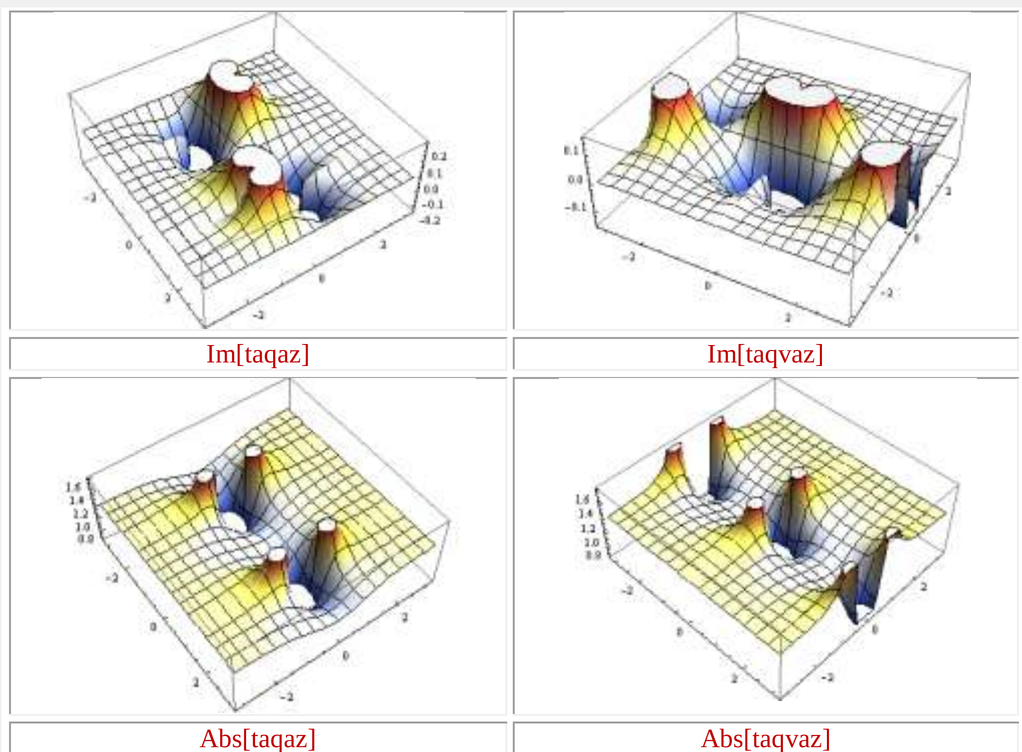


Fig. 22.8,b **FSM-CEA** tangentă cvadrilobă de variabilă complexă **taqaz** ← stanga, cu excentrul S(s = 0,8; ε = 0), x,y ∈ [−π, +π] şi **FSM-CEA** tangentă cvadrilobă **Voinoiu** de variabilă complexă **taqvaz** → dreapta

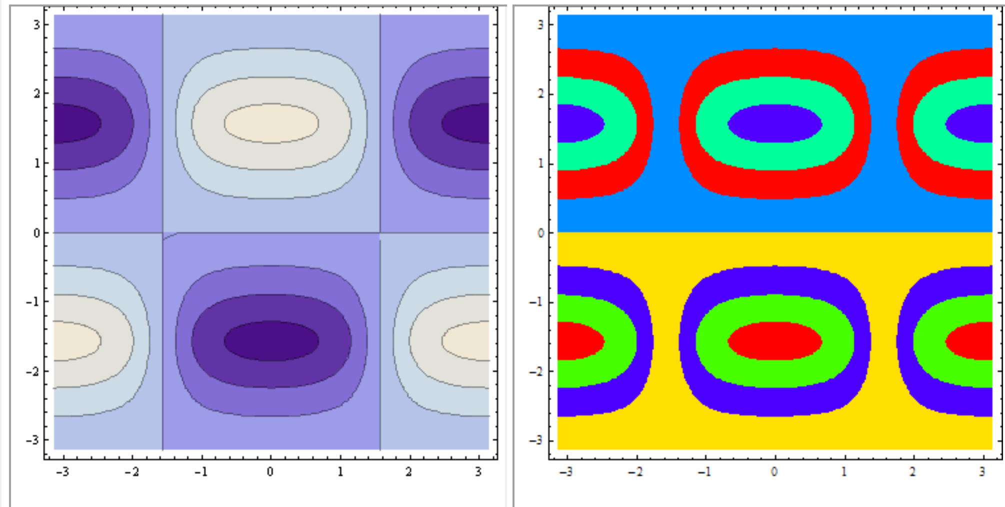
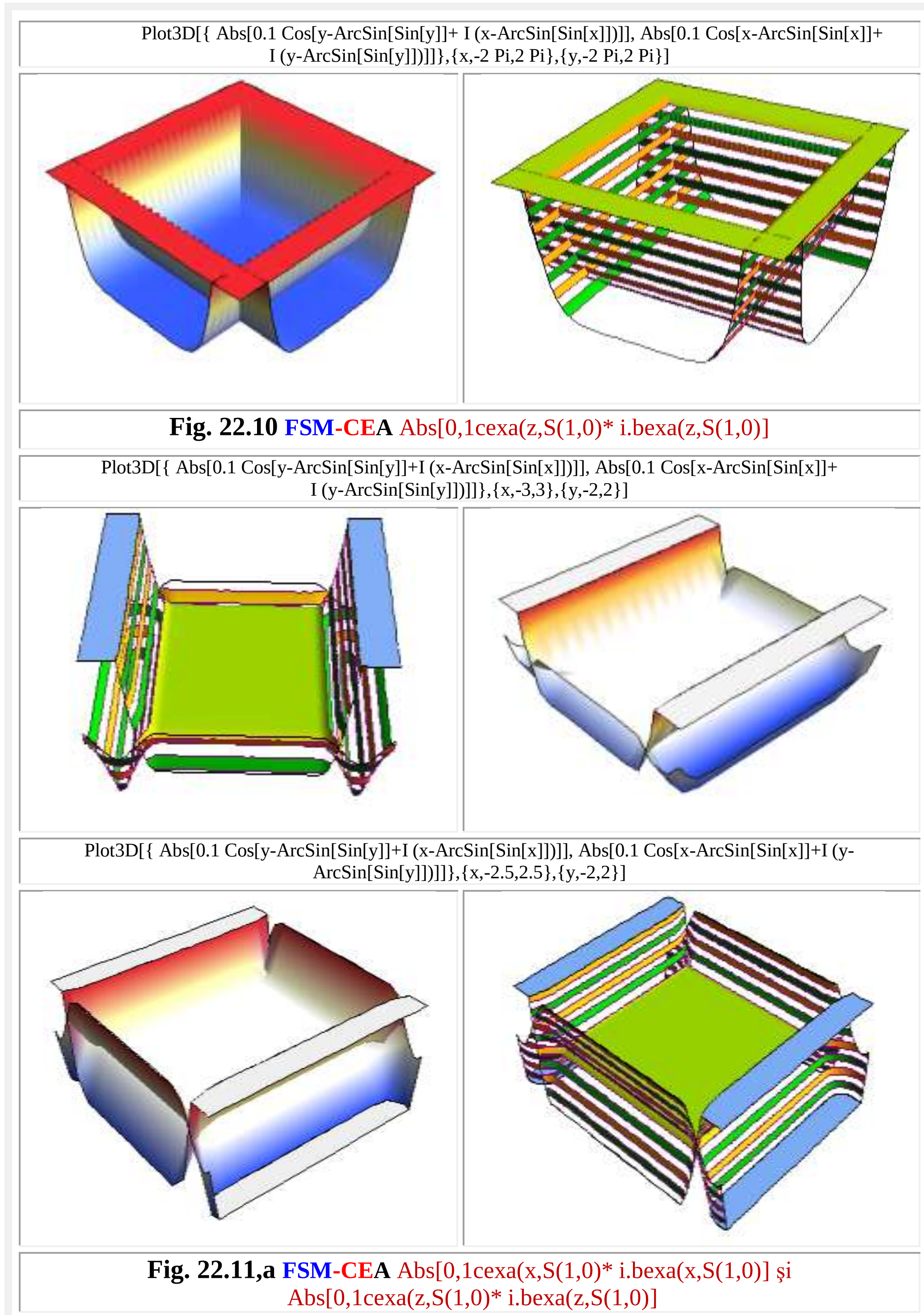


Fig. 22.9 ContourPlot **taqax*taqay** ←stânga şi **taqvax*taqvay** dreapta→



Plot3D[{ Abs[0.1 Cos[y-ArcSin[Sin[y]]+ I (x-ArcSin[Sin[x]])]], Abs[0.1 Cos[x-ArcSin[Sin[x]]+ I (y-ArcSin[Sin[y]])]]},{x,-2 Pi,2 Pi},{y,-2 Pi,2 Pi}]

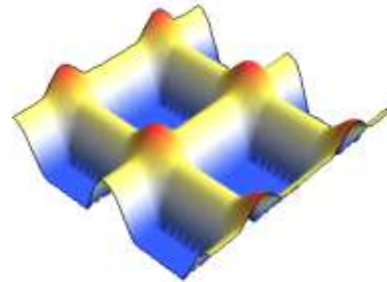
Fig. 22.10 FSM-CEA Abs[0,1cexa(z,S(1,0)* i.bexa(z,S(1,0)]

Plot3D[{ Abs[0.1 Cos[y-ArcSin[Sin[y]]+I (x-ArcSin[Sin[x]])]], Abs[0.1 Cos[x-ArcSin[Sin[x]]+ I (y-ArcSin[Sin[y]])]]},{x,-3,3},{y,-2,2}]

Plot3D[{ Abs[0.1 Cos[y-ArcSin[Sin[y]]+I (x-ArcSin[Sin[x]])]], Abs[0.1 Cos[x-ArcSin[Sin[x]]+I (y-ArcSin[Sin[y]])]]},{x,-2.5,2.5},{y,-2,2}]

Fig. 22.11,a FSM-CEA Abs[0,1cexa(x,S(1,0)* i.bexa(x,S(1,0)] şi Abs[0,1cexa(z,S(1,0)* i.bexa(z,S(1,0)]

Plot3D[Abs[- 0.99 Cos[x]+Sqrt[1-(0.99 Sin[x])^2] + I (-0.99 Cos[y] + Sqrt[1-(0.99 Sin[y])^2])],
{x,-2 Pi,2 Pi},{y,-2 Pi,2 Pi}]← →Abs[rex(x, s = 0,99) + i rex(x, s=0,99)]

Plot3D[{Abs[Sin[x-ArcSin[0.99 Sin[x]]+I (y-ArcSin[0.99 Sin[y]])]], -Abs[Cos[y-ArcSin[0.99 Sin[y]]+I (x-ArcSin[0.99 Sin[x]])]]+1,Abs[Cos[x-ArcSin[Sin[x]]+I (y-ArcSin[Sin[y]])]]},{x,-3,3},{y,-0.5,1}]

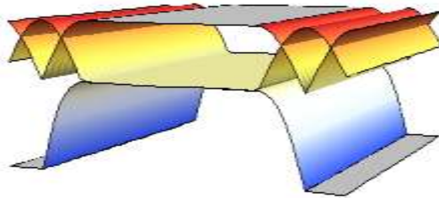
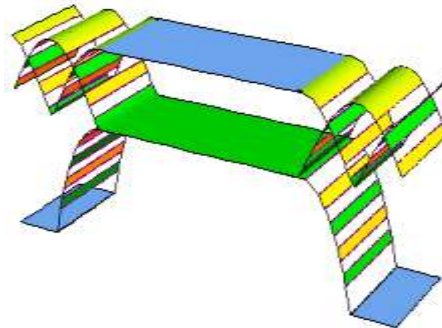



Fig. 22.11,b FSM-CEA Abs[0,1cexa(x,S(1,0)* i.bexa(x,S(1,0)] şi
Abs[0,1cexa(z,S(1,0)* i.bexa(z,S(1,0)]

RegionPlot3D[Sin[x-ArcSin[0.98 Sin[x]]] Sin[y-ArcSin[0.98 Sin[y]]] Sin[z-ArcSin[0.98 Sin[z]]]<1,
{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi},{z,-Pi,Pi}]

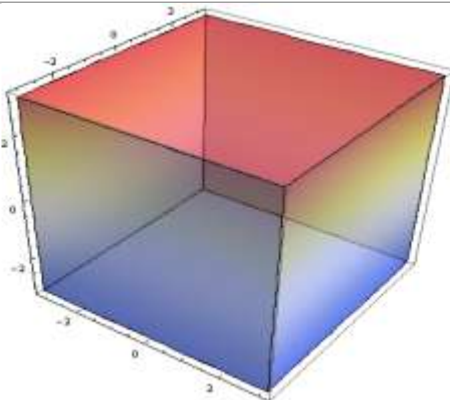
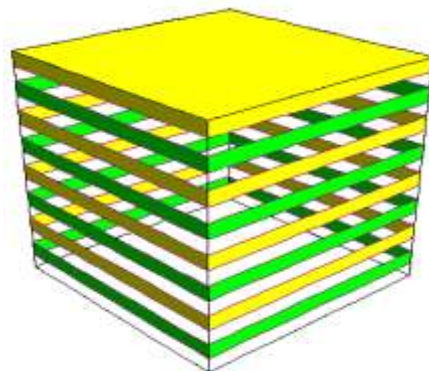
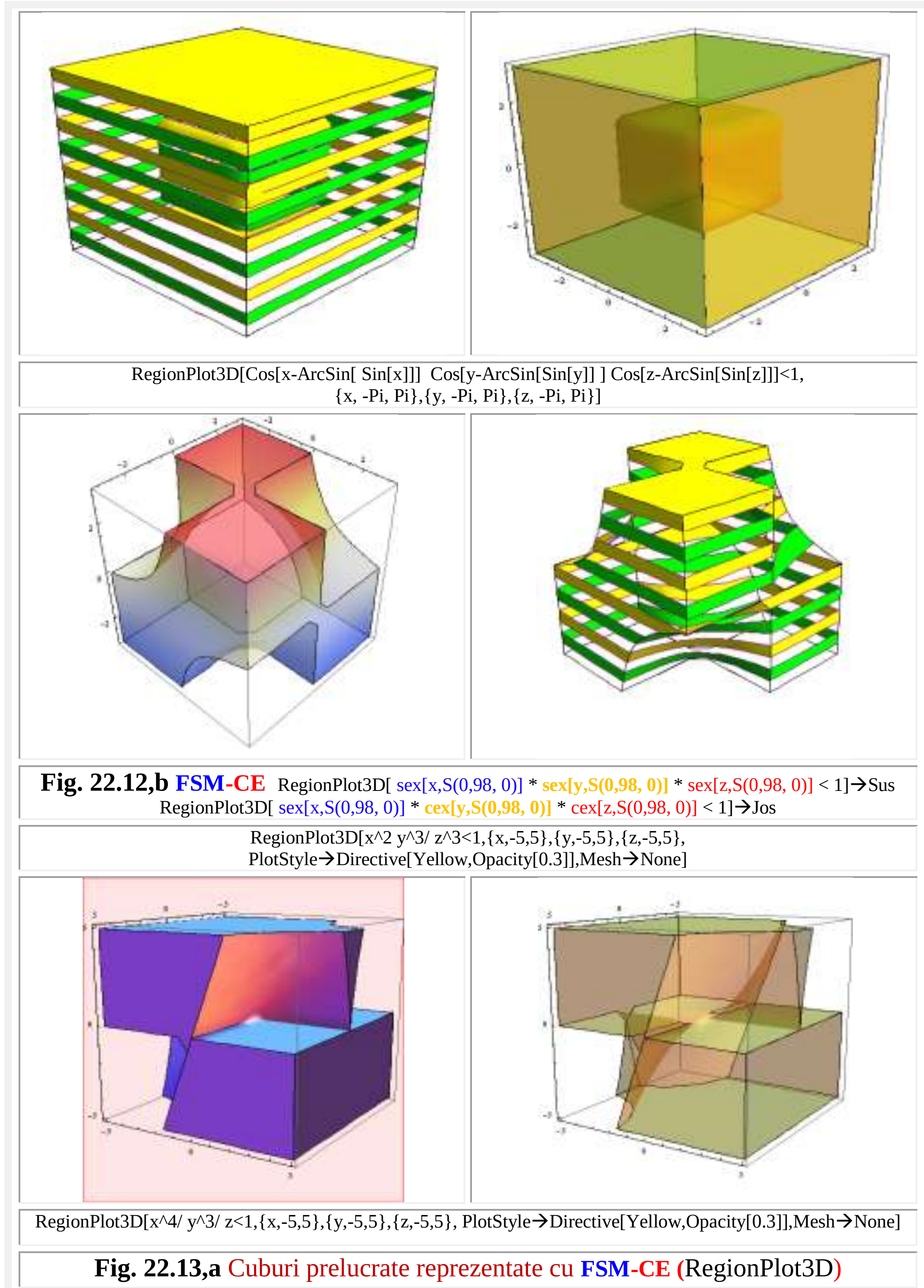



Fig. 22.12, a Cuburi diverse reprezentate cu **FSM-CE**



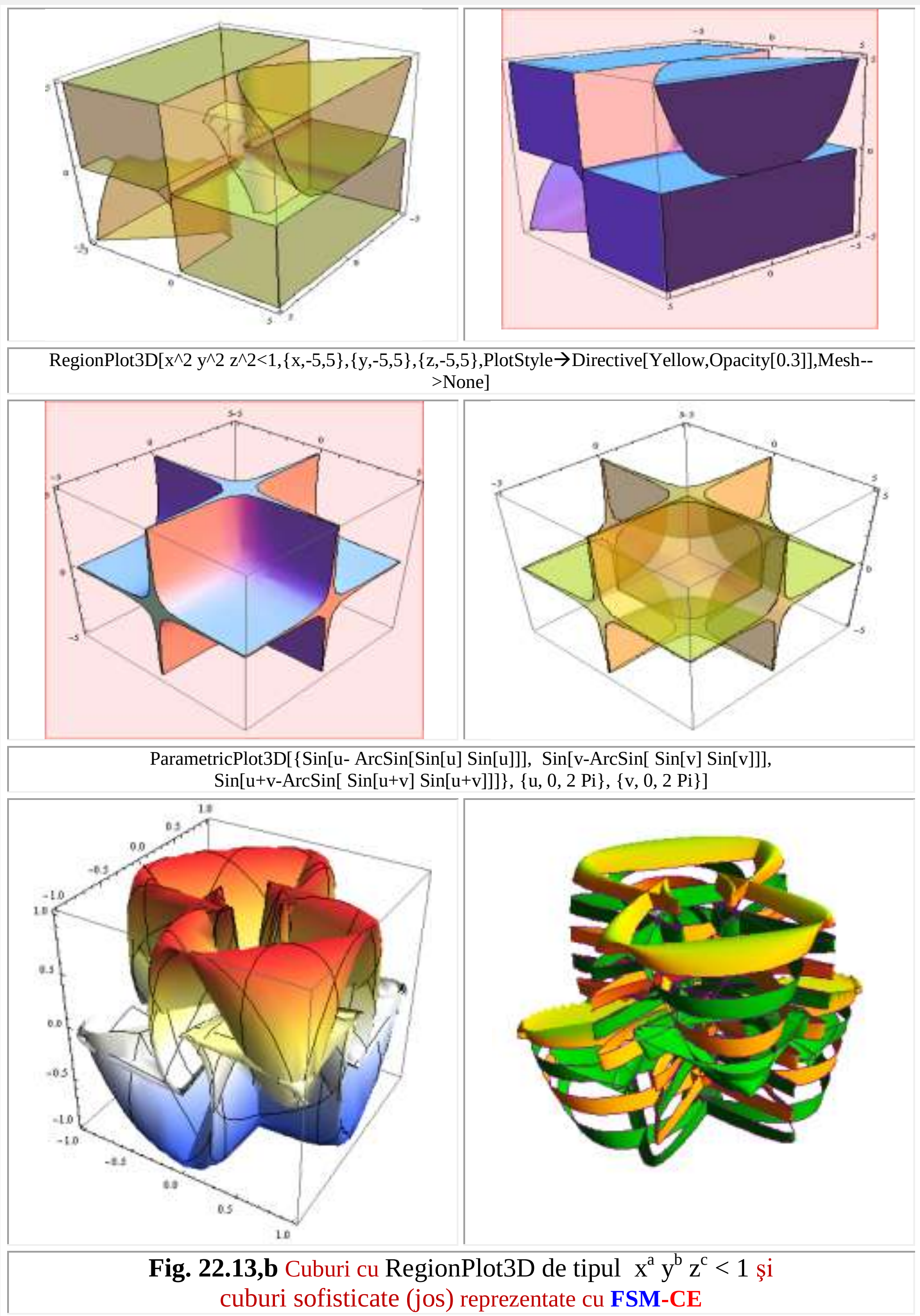
RegionPlot3D[Cos[x-ArcSin[Sin[x]]] Cos[y-ArcSin[Sin[y]]] Cos[z-ArcSin[Sin[z]]]<1, {x, -Pi, Pi},{y, -Pi, Pi},{z, -Pi, Pi}]

Fig. 22.12,b FSM-CE RegionPlot3D[sex[x,S(0,98, 0)] * sex[y,S(0,98, 0)] * sex[z,S(0,98, 0)] < 1]→Sus
RegionPlot3D[sex[x,S(0,98, 0)] * cex[y,S(0,98, 0)] * cex[z,S(0,98, 0)] < 1]→Jos

RegionPlot3D[x^2 y^3/ z^3<1,{x,-5,5},{y,-5,5},{z,-5,5}, PlotStyle→Directive[Yellow,Opacity[0.3]],Mesh→None]

RegionPlot3D[x^4/ y^3/ z<1,{x,-5,5},{y,-5,5},{z,-5,5}, PlotStyle→Directive[Yellow,Opacity[0.3]],Mesh→None]

Fig. 22.13,a Cuburi prelucrate reprezentate cu **FSM-CE** (RegionPlot3D)



RegionPlot3D[x^2 y^2 z^2<1,{x,-5,5},{y,-5,5},{z,-5,5},PlotStyle→Directive[Yellow,Opacity[0.3]],Mesh-->None]

ParametricPlot3D[{Sin[u- ArcSin[Sin[u] Sin[u]]], Sin[v-ArcSin[Sin[v] Sin[v]]], Sin[u+v-ArcSin[Sin[u+v] Sin[u+v]]]}, {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 2 Pi}]

Fig. 22.13,b Cuburi cu RegionPlot3D de tipul $x^a y^b z^c < 1$ şi cuburi sofisticate (jos) reprezentate cu **FSM-CE**

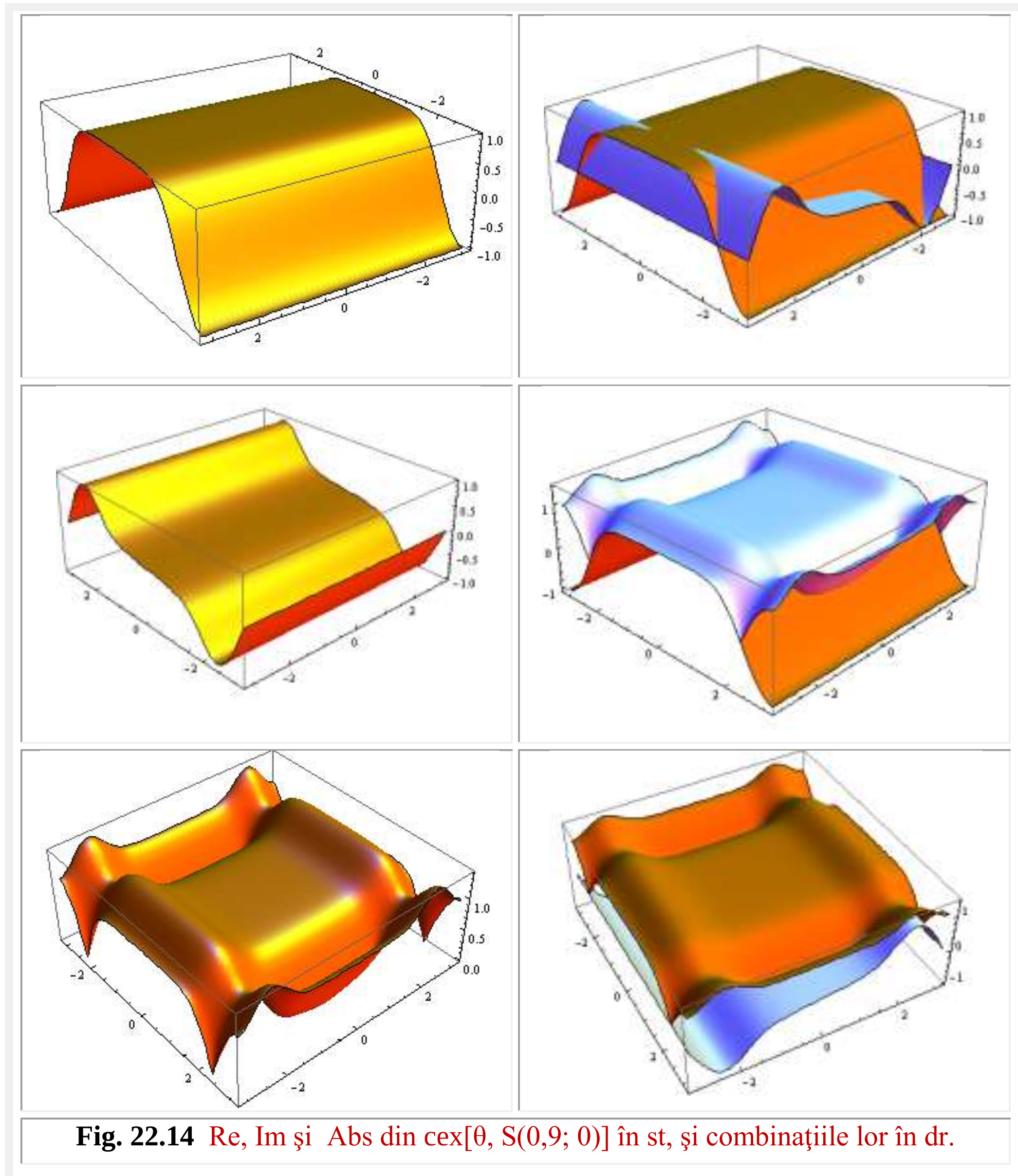


Fig. 22.14 Re, Im şi Abs din cex[θ, S(0,9; 0)] în st, şi combinaţiile lor în dr.

În stânga **figurii 22.14** sunt prezentate partea reală, cea imaginară şi partea absolută a **FSM-CEA** cex[θ, S(0,9; 0)], iar în partea dreaptă sunt prezentate graficele 3D ale combinaţiilor Re + Im, Re + Abs şi Im + Abs, realizate artistic, graţie programului de matematica a lui **Stephan Wolfram** MATHEMATICA 6.

Cu MATHEMATICA 8, apărută de foarte curând, posibilităţiile grafice sunt cu mult mai mari, mai variate.

22.3 APLICAŢII: OBIECTE MATEMATICE REPREZENTATE CU FSM-CE ŞI CU FSM-CEA

Aplicaţiile prezentate, în continuare, au avut drept criteriu de selecţionare fie posibilitetea reprezentării unor piese tehnice, a unor obiecte artistice, fie ambele.

În **figura 22.14,a** şi **22.14,b** sunt prezentate artistic posibile piese tehnice reprezentate prin **funcţiile cvadrilobe** cunoscute, cosinus cvadrilob **coqθ** şi sinus cvadrilob **siqθ** ale căror ecuaţii, puţin cunoscute, le prezentăm din nou.

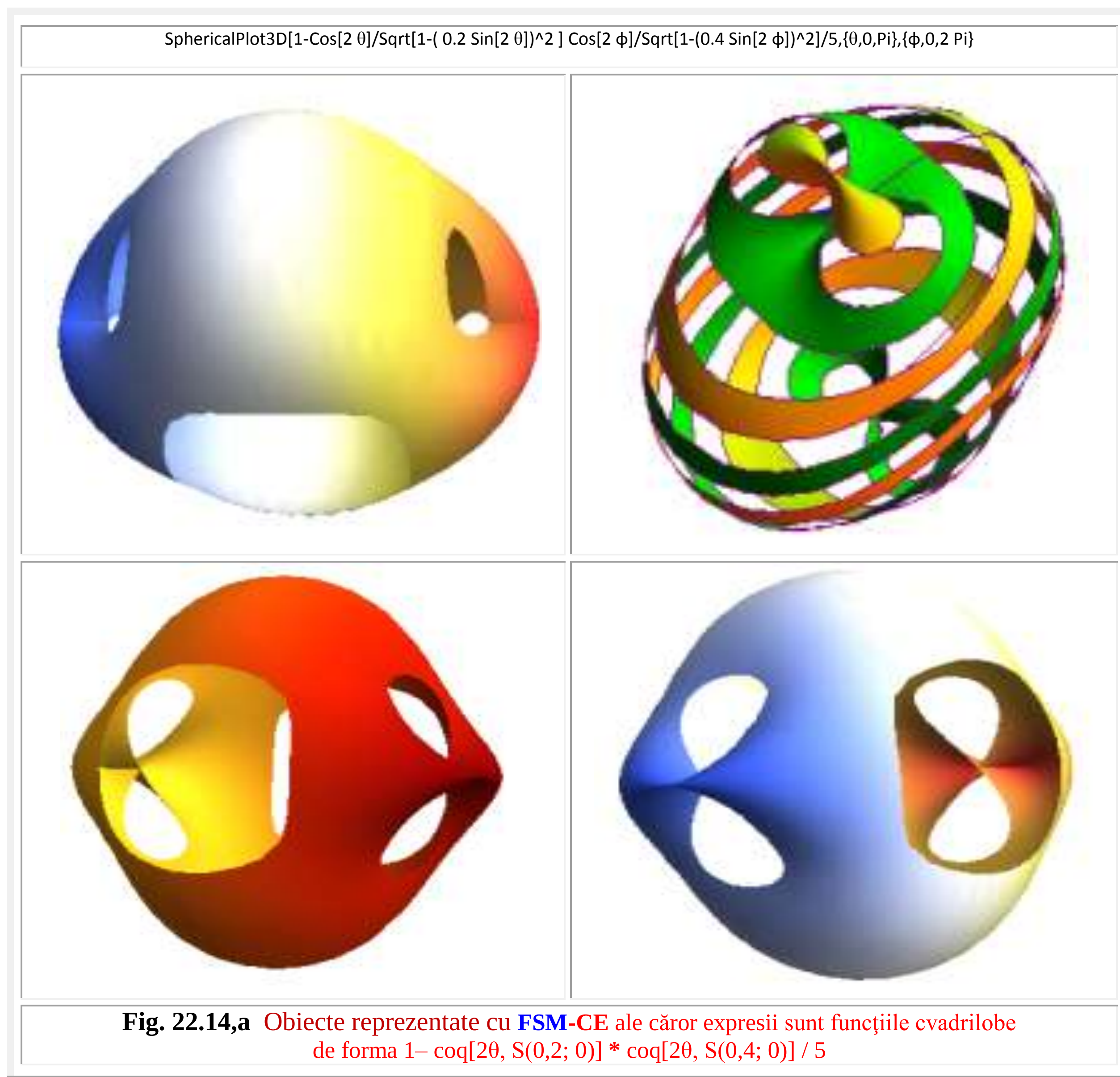


Fig. 22.14,a Obiecte reprezentate cu **FSM-CE** ale căror expresii sunt funcţiile cvadrilobe de forma 1– coq[2θ, S(0,2; 0)] * coq[2θ, S(0,4; 0)] / 5

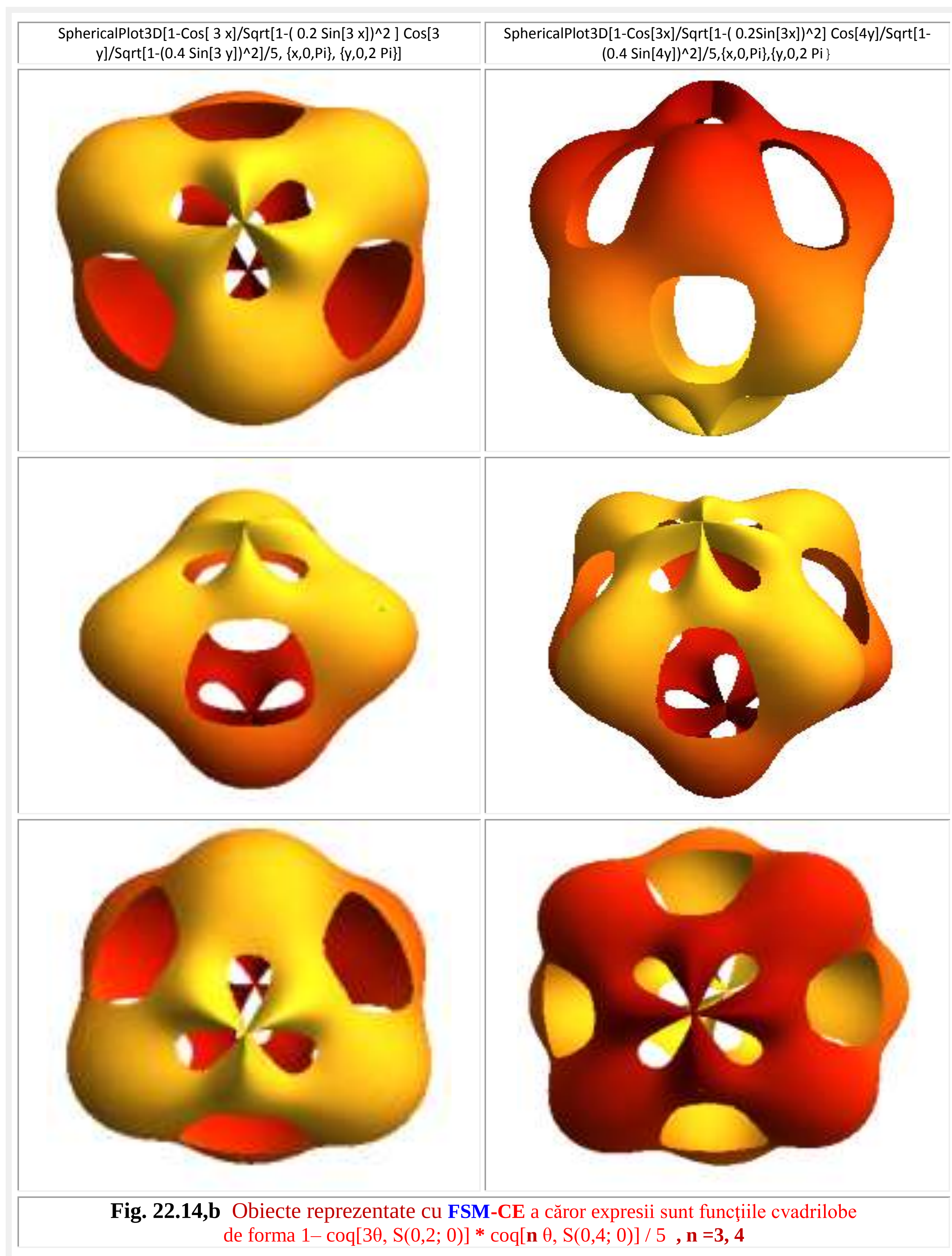


Fig. 22.14,b Obiecte reprezentate cu **FSM-CE** a căror expresii sunt funcţiile cvadrilobe de forma 1– coq[3θ, S(0,2; 0)] * coq[**n** θ, S(0,4; 0)] / 5 **, n =3, 4**

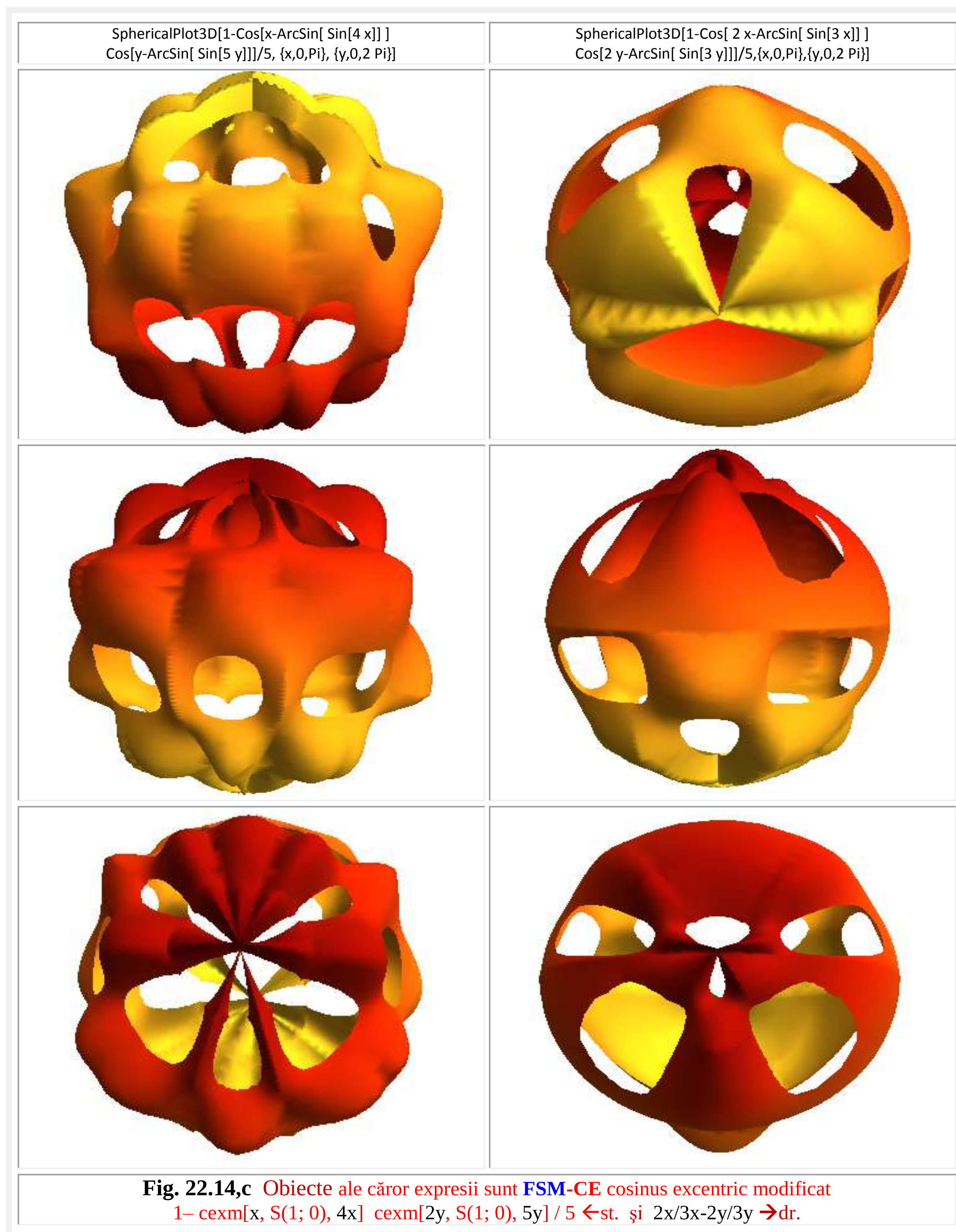


Fig. 22.14,c Obiecte ale căror expresii sunt **FSM-CE** cosinus excentric modificat
1– cexm[x, S(1; 0), 4x] cexm[2y, S(1; 0), 5y] / 5 ←st. şi 2x/3x-2y/3y →dr.

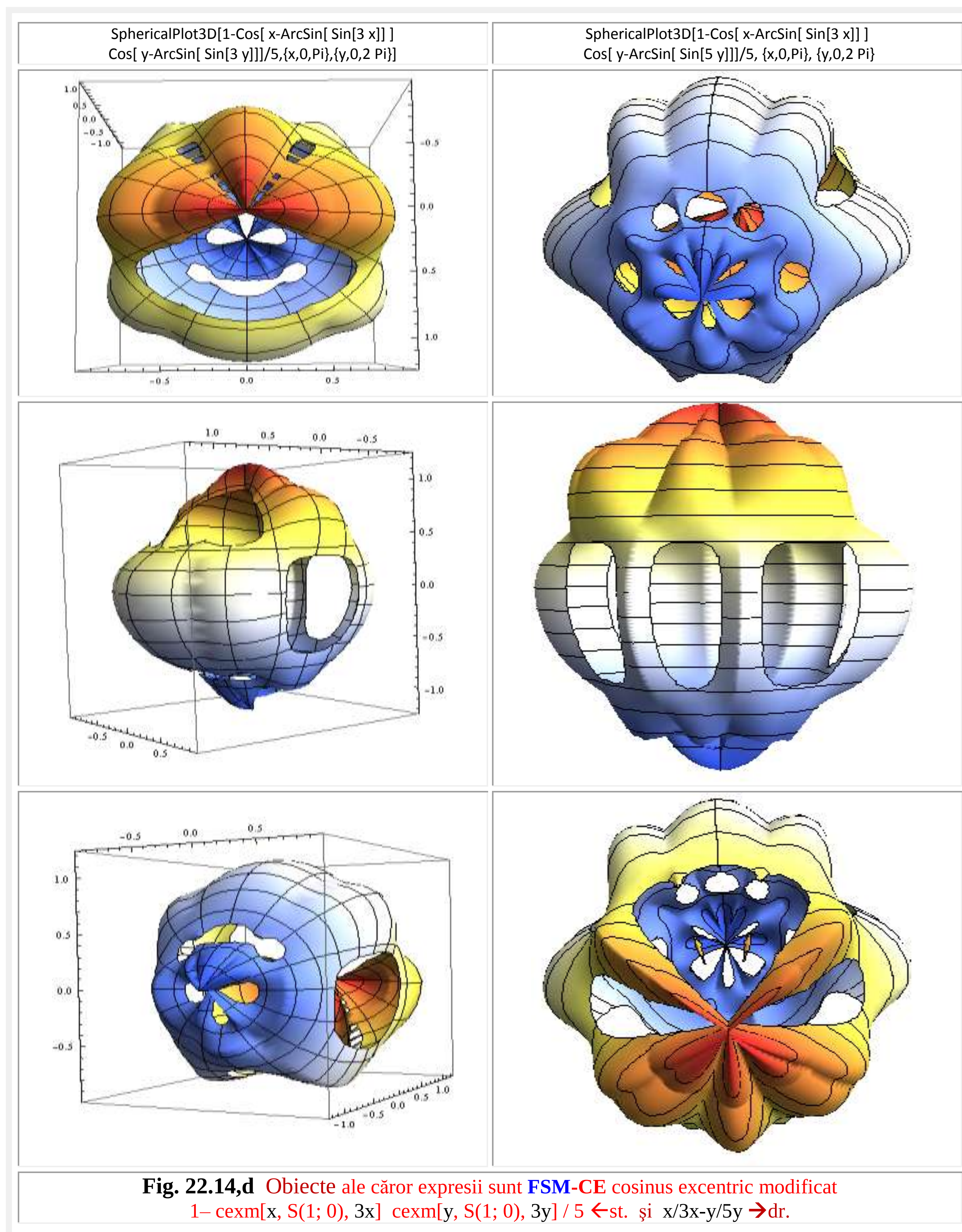


Fig. 22.14,d Obiecte ale căror expresii sunt **FSM-CE** cosinus excentric modificat
1– cexm[x, S(1; 0), 3x] cexm[y, S(1; 0), 3y] / 5 ←st. şi x/3x-y/5y →dr.

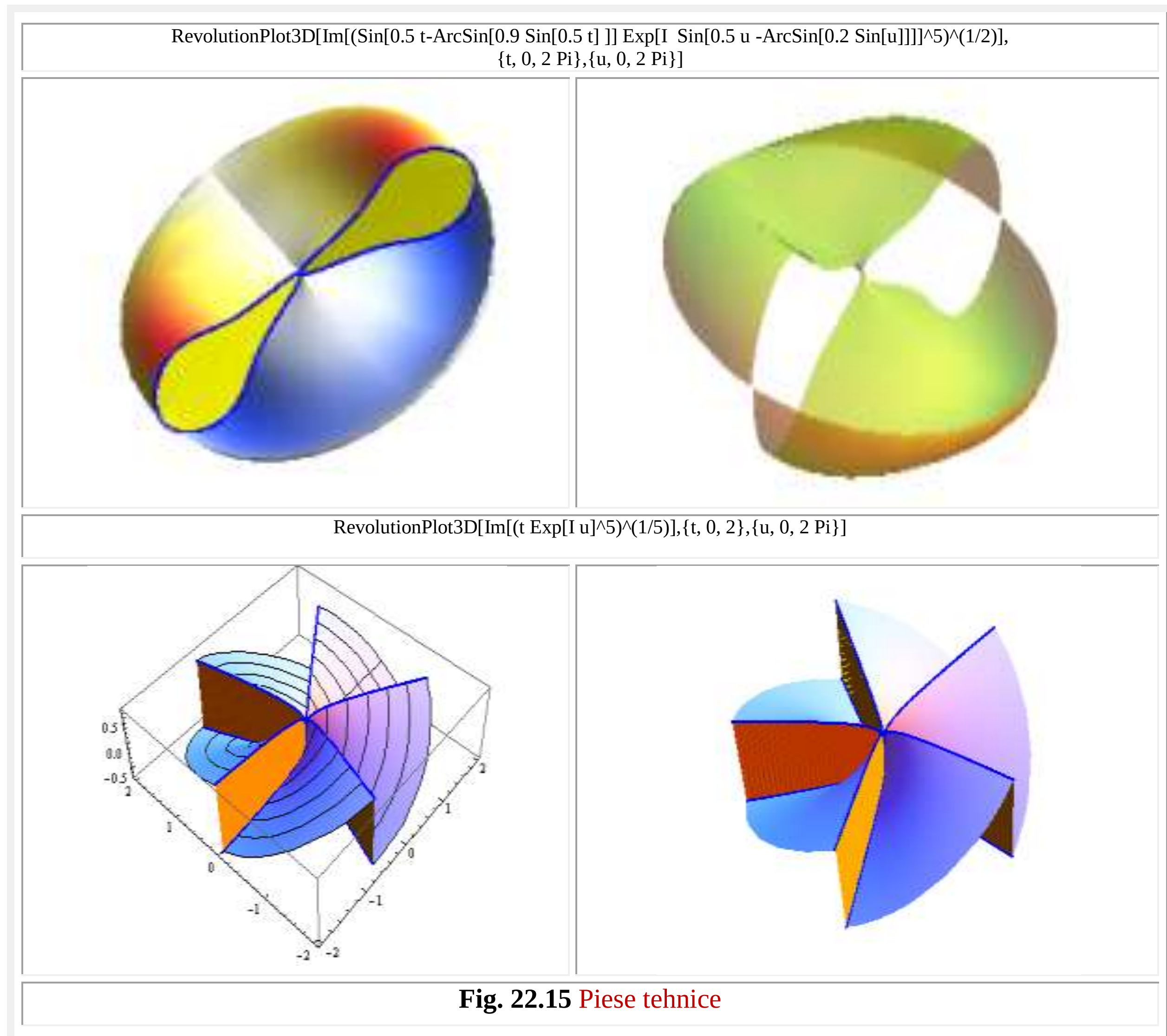


Fig. 22.15 Piese tehnice

Ele sunt

(22.21) $\text{coq}\theta = \frac{cos\theta}{\sqrt{1-(s.sin\theta)^2}}$ şi $\text{siq}\theta = \frac{sin\theta}{\sqrt{1-(s.cos\theta)^2}}$

Obiectele matematice 3D prezentate în **figurile 22.14,c** şi **22.14,d** au fost realizate cu **FSM-CE** cosinus excentric modificate, în sensul că **FSM-CE** beta excentrică are un alt argument decat argumentul **θ** al funcţiei cosinus, deobicei un multiplu de **variabila excentrică θ** .Se prezintă în continuare alte aplicaţii fără prea multe explicaţii.

22.4 PIESE TEHNICE

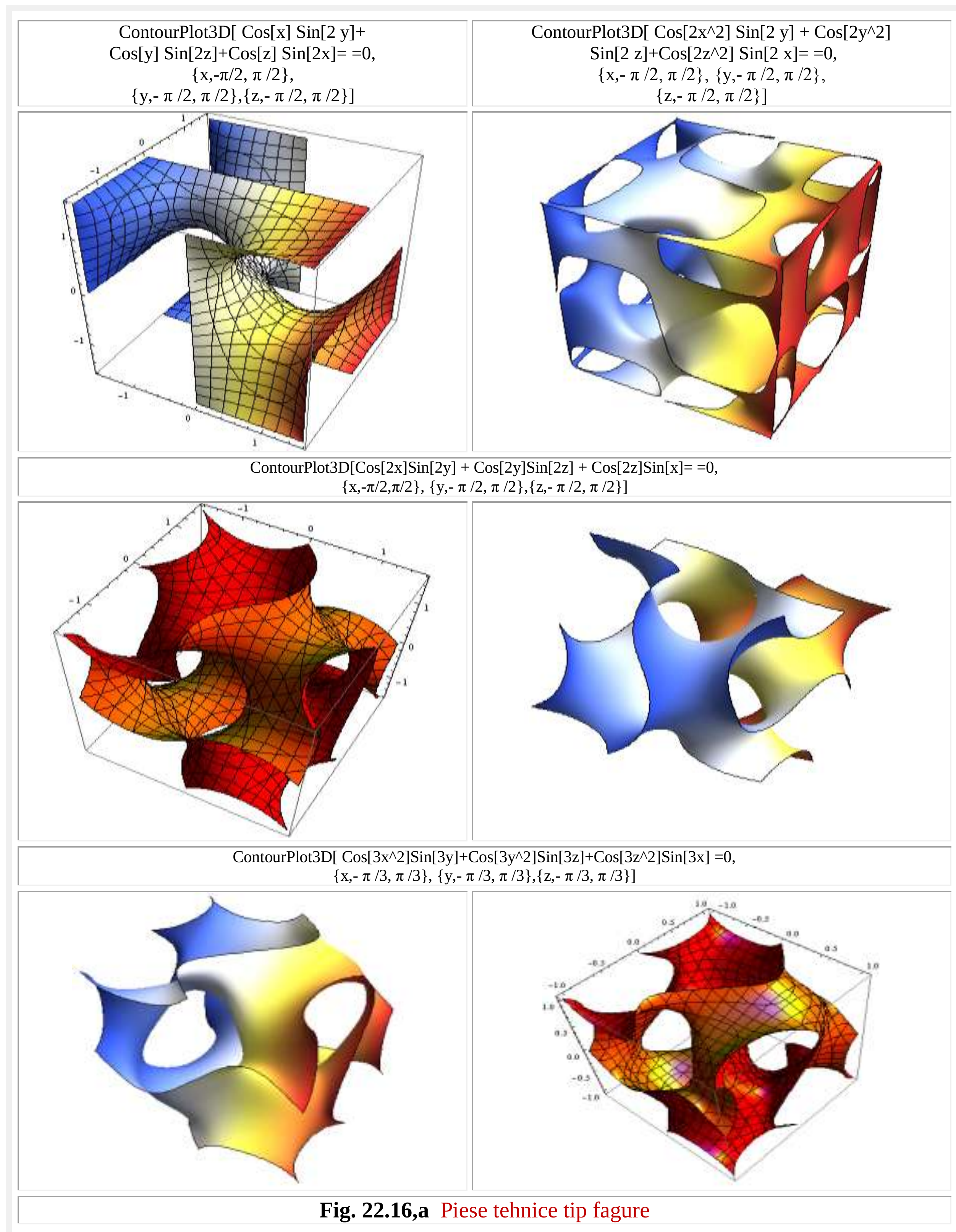


Fig. 22.16,a Piese tehnice tip fagure

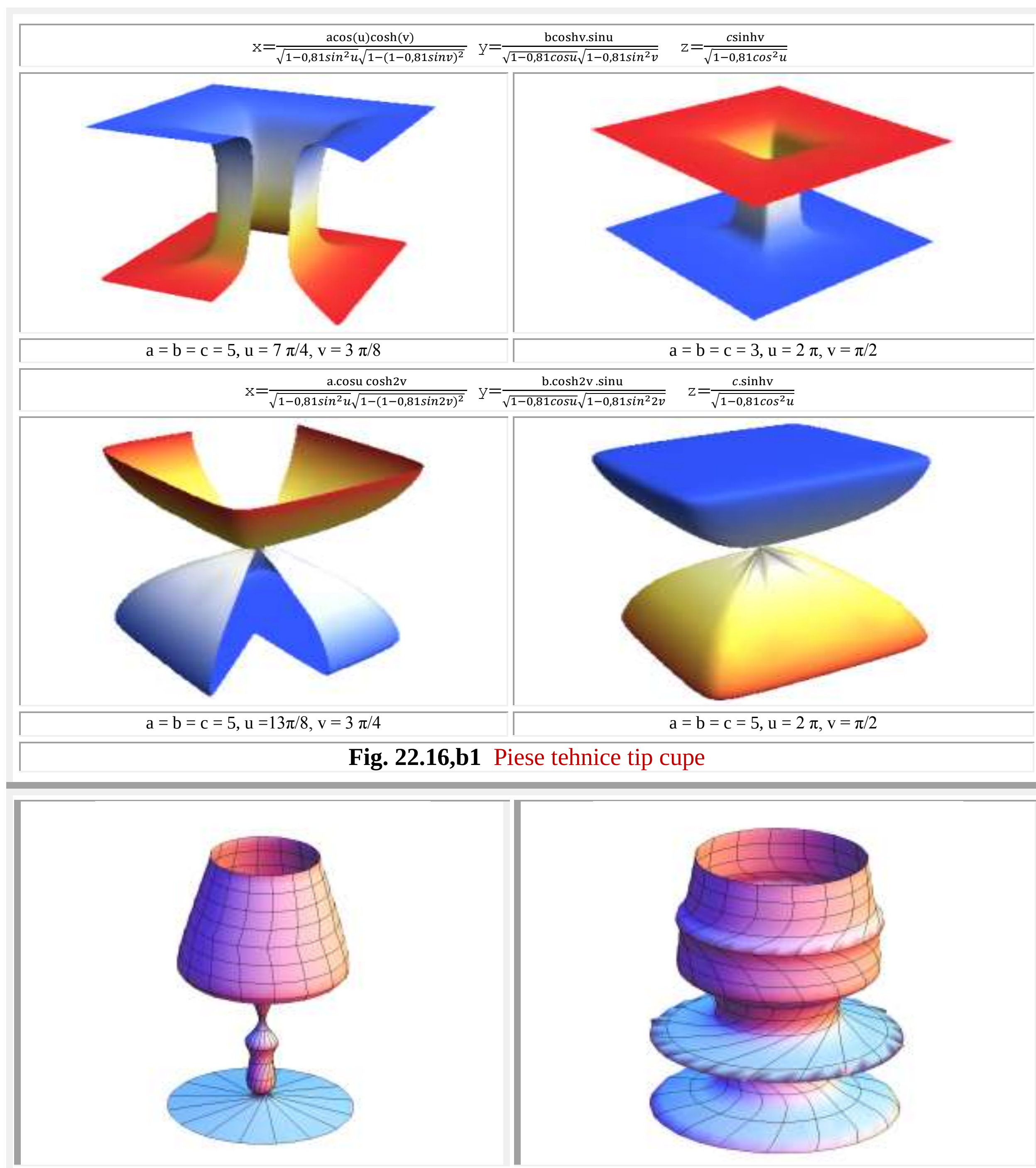


Fig. 22.16,b1 Piese tehnice tip cupe

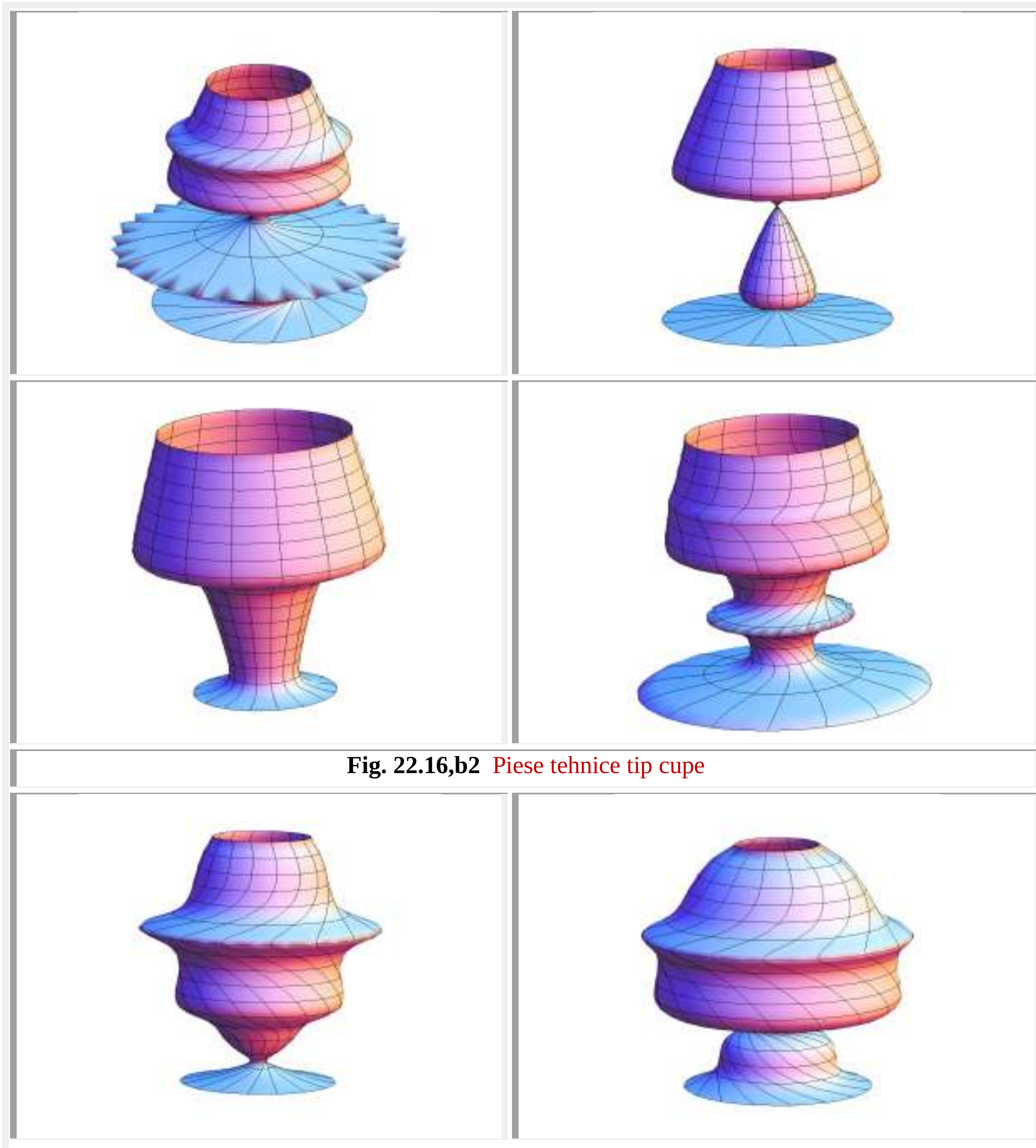


Fig. 22.16,b2 Piese tehnice tip cupe

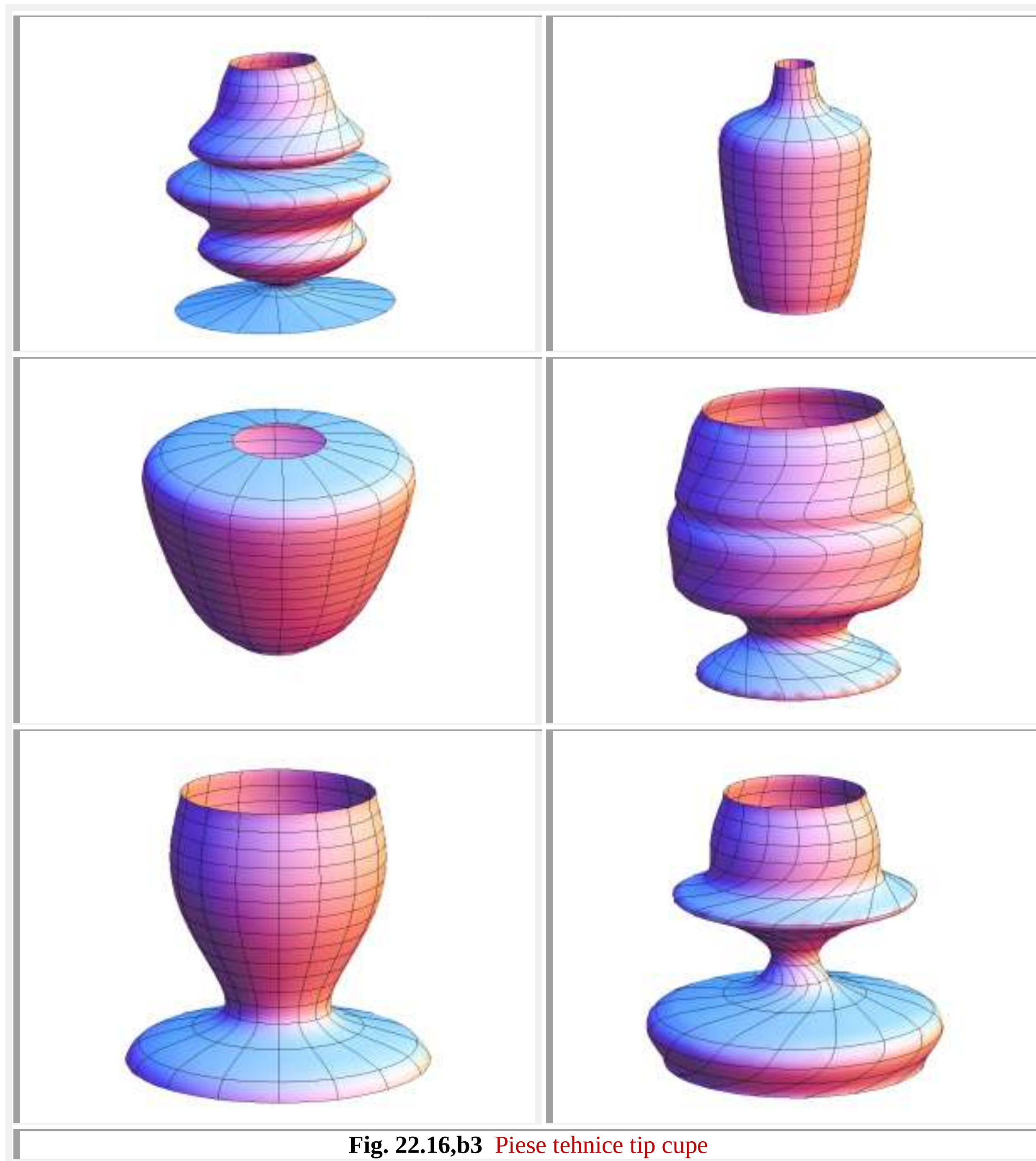


Fig. 22.16,b3 Piese tehnice tip cupe

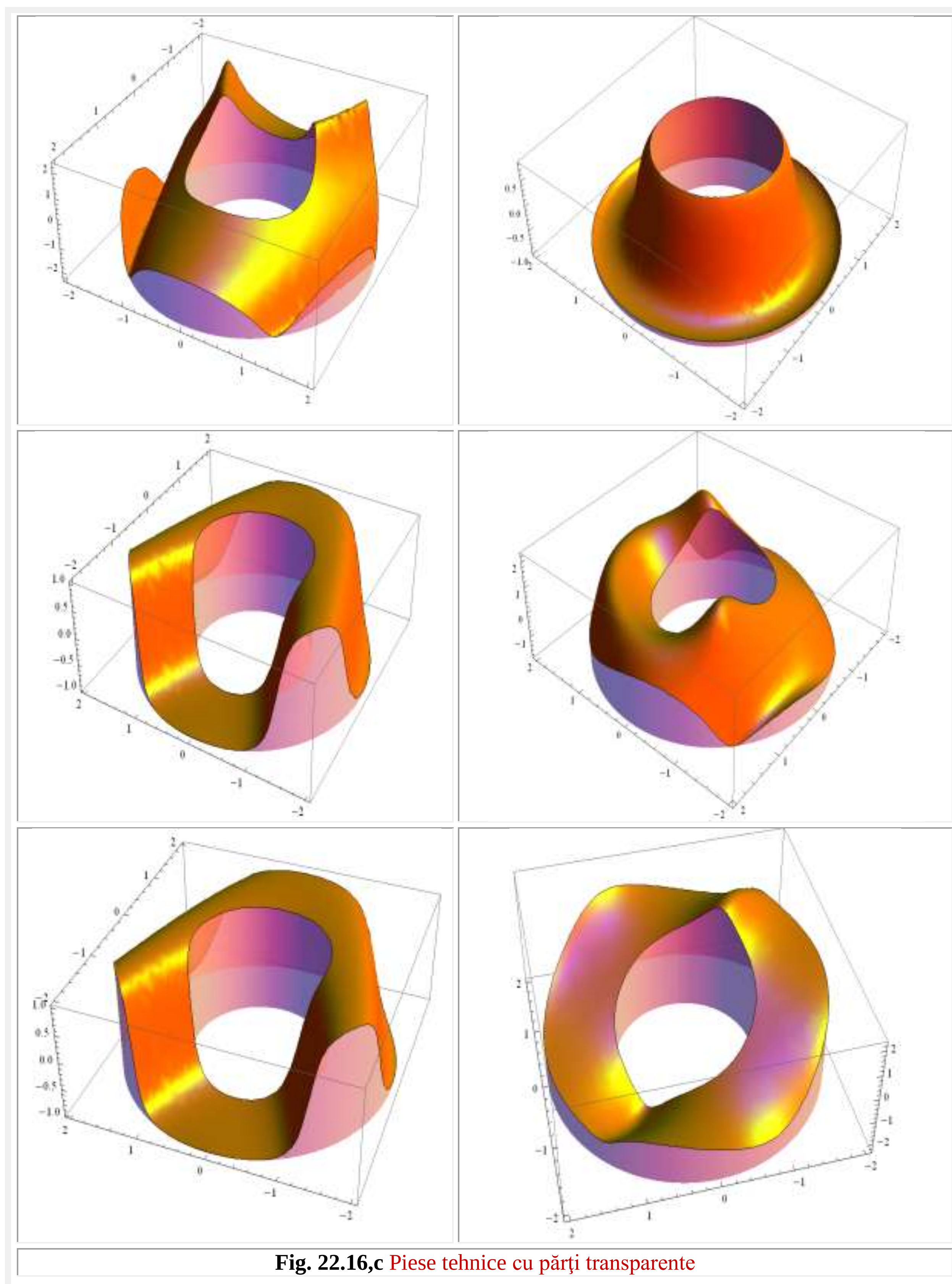


Fig. 22.16,c Piese tehnice cu părţi transparente

22.3 APLICAŢII: OBIECTE MATEMATICE REPREZENTATE CU FSM-CE ŞI CU FSM-CEA

Aplicaţiile prezentate, în continuare, au avut drept criteriu de selecţionare fie posibilitetea reprezentării unor piese tehnice, a unor obiecte artistice, fie ambele.

În **figura 22.14,a** şi **22.14,b** sunt prezentate artistic posibile piese tehnice reprezentate prin **funcţiile cvadrilobe** cunoscute, cosinus cvadrilob **coqθ** şi sinus cvadrilob **siqθ** ale căror ecuaţii, puţin cunoscute, le prezentăm din nou.

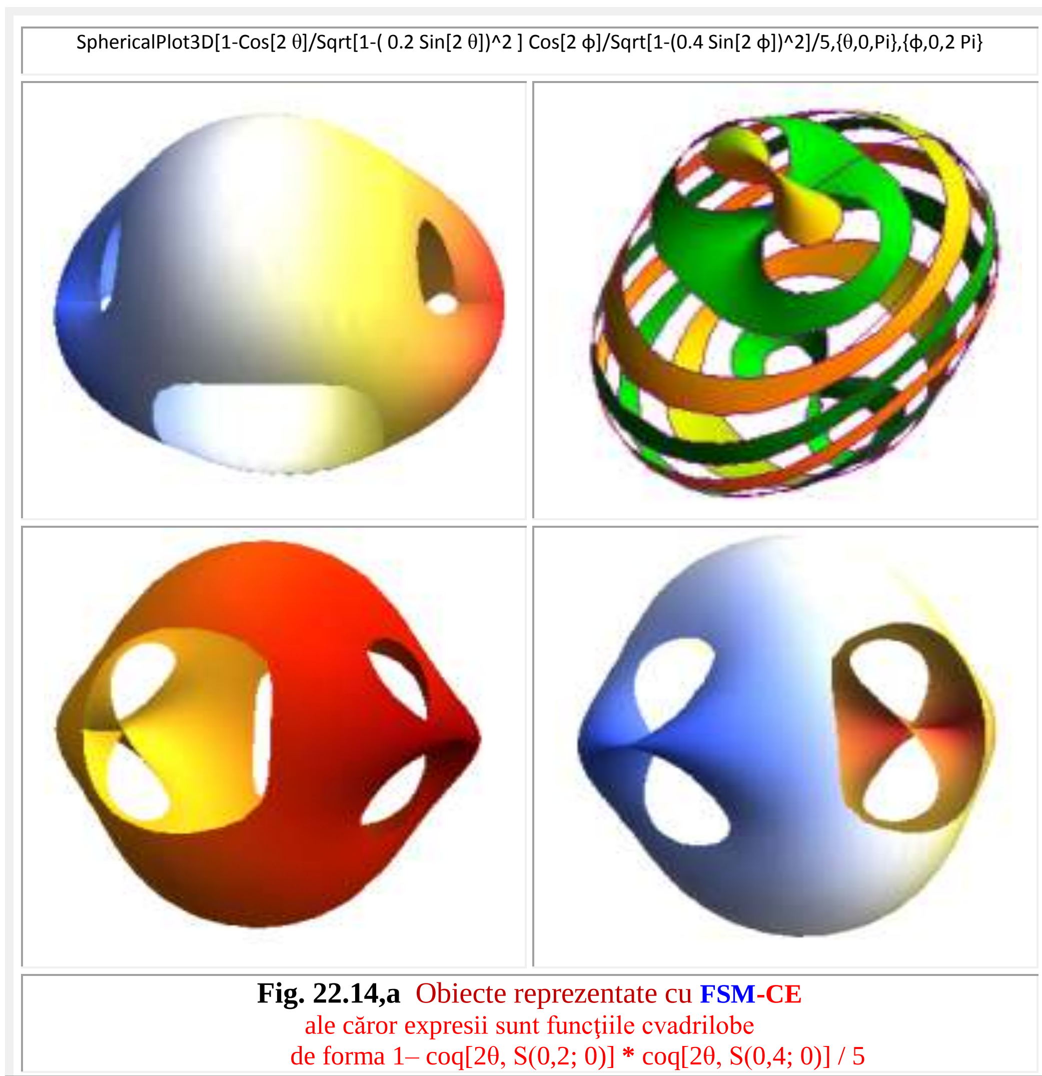


Fig. 22.14,a Obiecte reprezentate cu **FSM-CE** ale căror expresii sunt funcţiile cvadrilobe de forma 1– coq[2θ, S(0,2; 0)] ***** coq[2θ, S(0,4; 0)] / 5

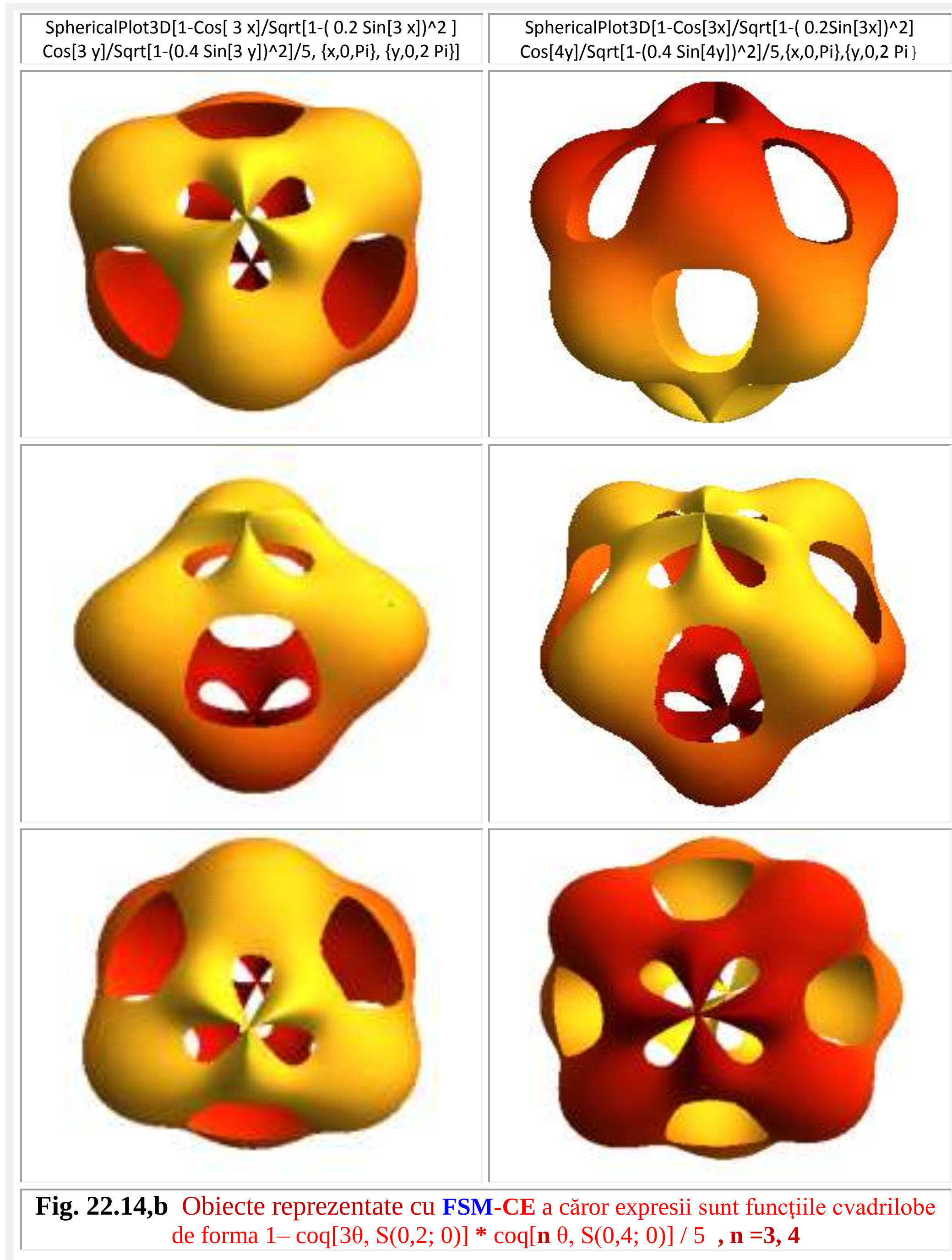


Fig. 22.14,b Obiecte reprezentate cu **FSM-CE** a căror expresii sunt funcţiile cvadrilobe de forma 1– coq[3θ, S(0,2; 0)] * coq[**n** θ, S(0,4; 0)] / 5 **, n =3, 4**

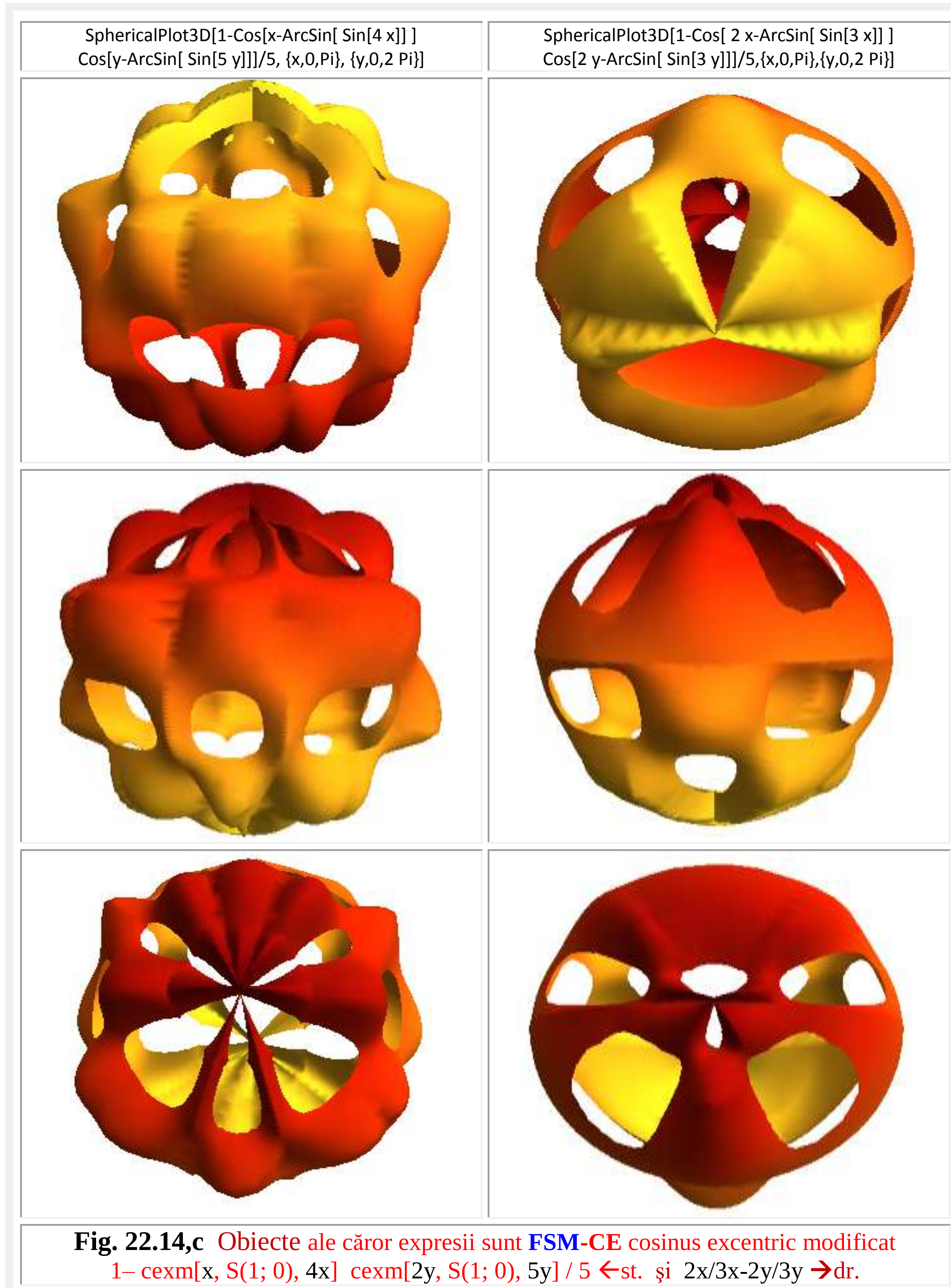


Fig. 22.14,c Obiecte ale căror expresii sunt **FSM-CE** cosinus excentric modificat
1– cexm[x, S(1; 0), 4x] cexm[2y, S(1; 0), 5y] / 5 ←st. şi 2x/3x-2y/3y →dr.

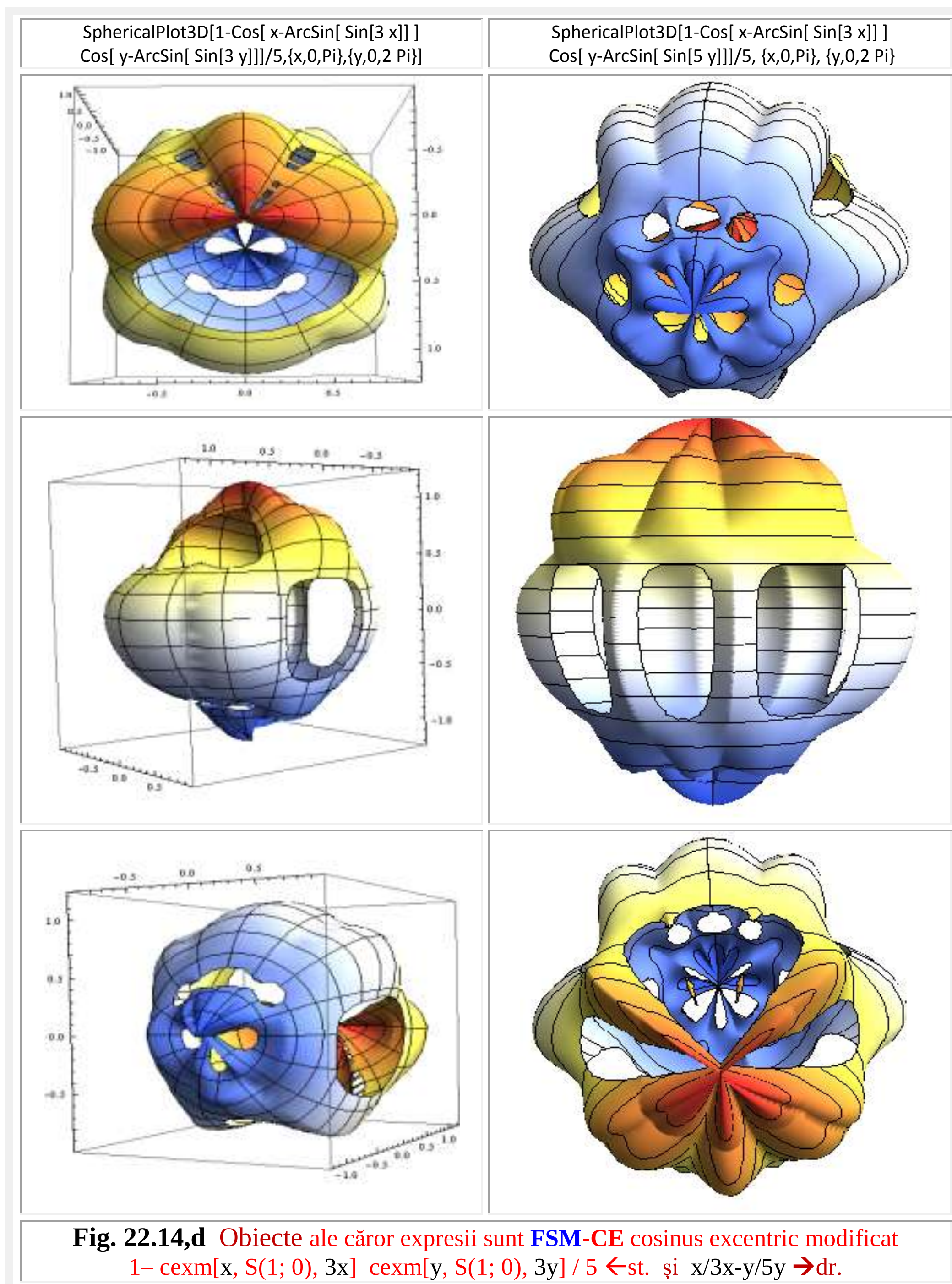


Fig. 22.14,d Obiecte ale căror expresii sunt **FSM-CE** cosinus excentric modificat 1– cexm[x, S(1; 0), 3x] cexm[y, S(1; 0), 3y] / 5 ←st. şi x/3x-y/5y →dr.

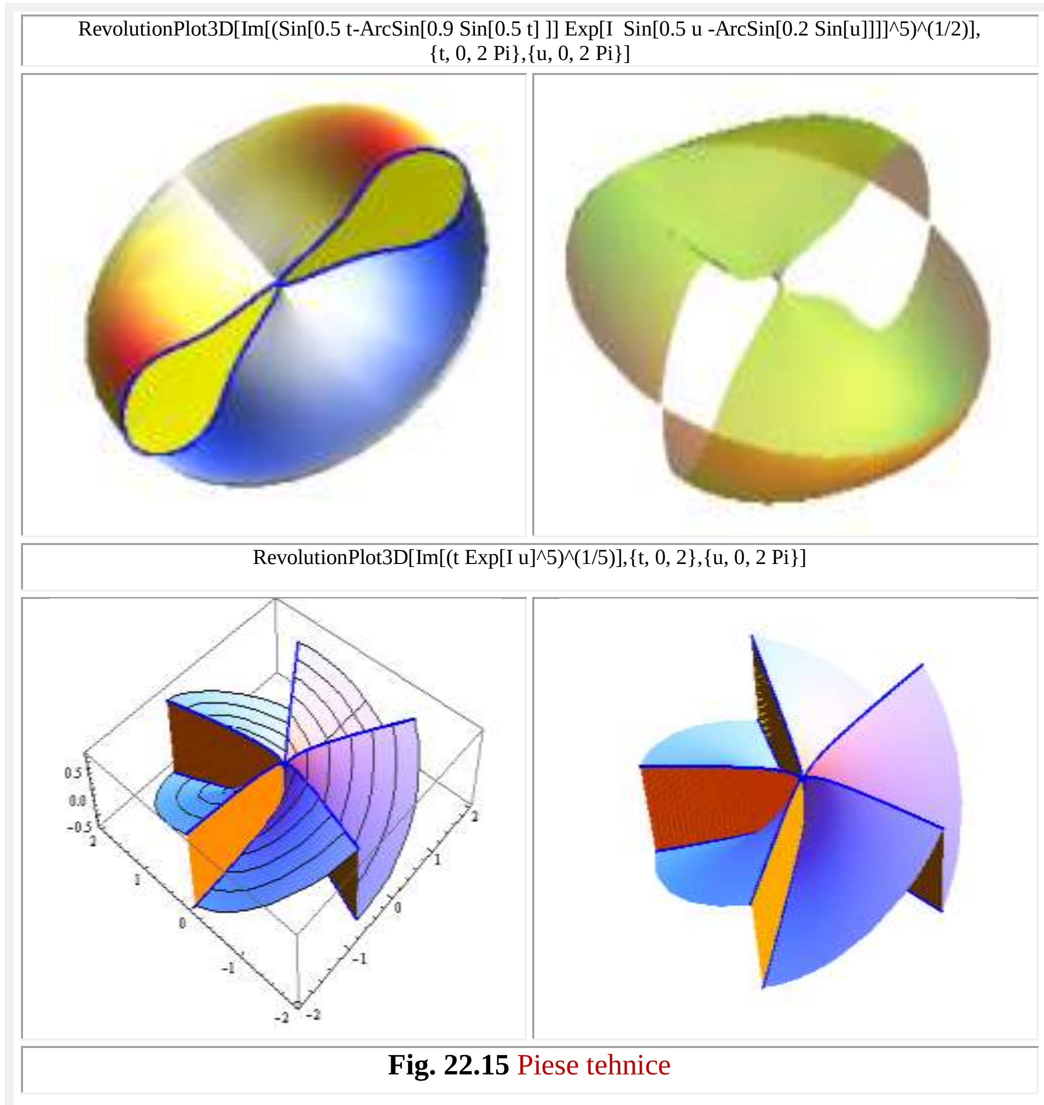


Fig. 22.15 Piese tehnice

Ele sunt

(22.21) $\text{coq}\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-(s.\sin\theta)^2}}$ şi $\text{siq}\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-(s.\cos\theta)^2}}$

Obiectele matematice 3D prezentate în **figurile 22.14,c** şi **22.14,d** au fost realizate cu **FSM-CE** cosinus excentric modificate, în sensul că **FSM-CE** beta excentrică are un alt argument decat argumentul **θ** al funcţiei cosinus, deobicei un multiplu de **variabila excentrică θ** .Se prezintă în continuare alte aplicaţii fără prea multe explicaţii.

22.4 PIESE TEHNICE

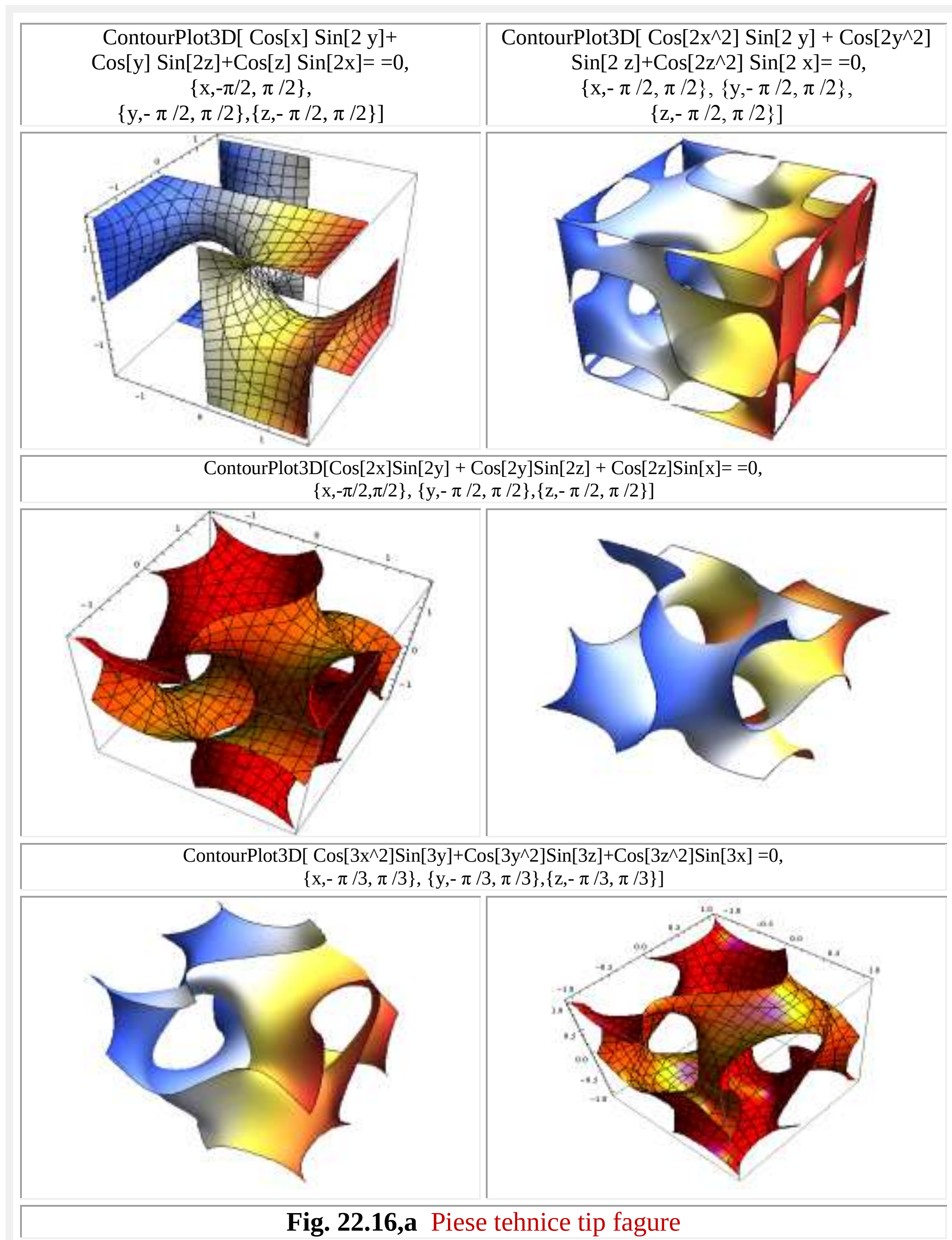


Fig. 22.16,a Piese tehnice tip fagure

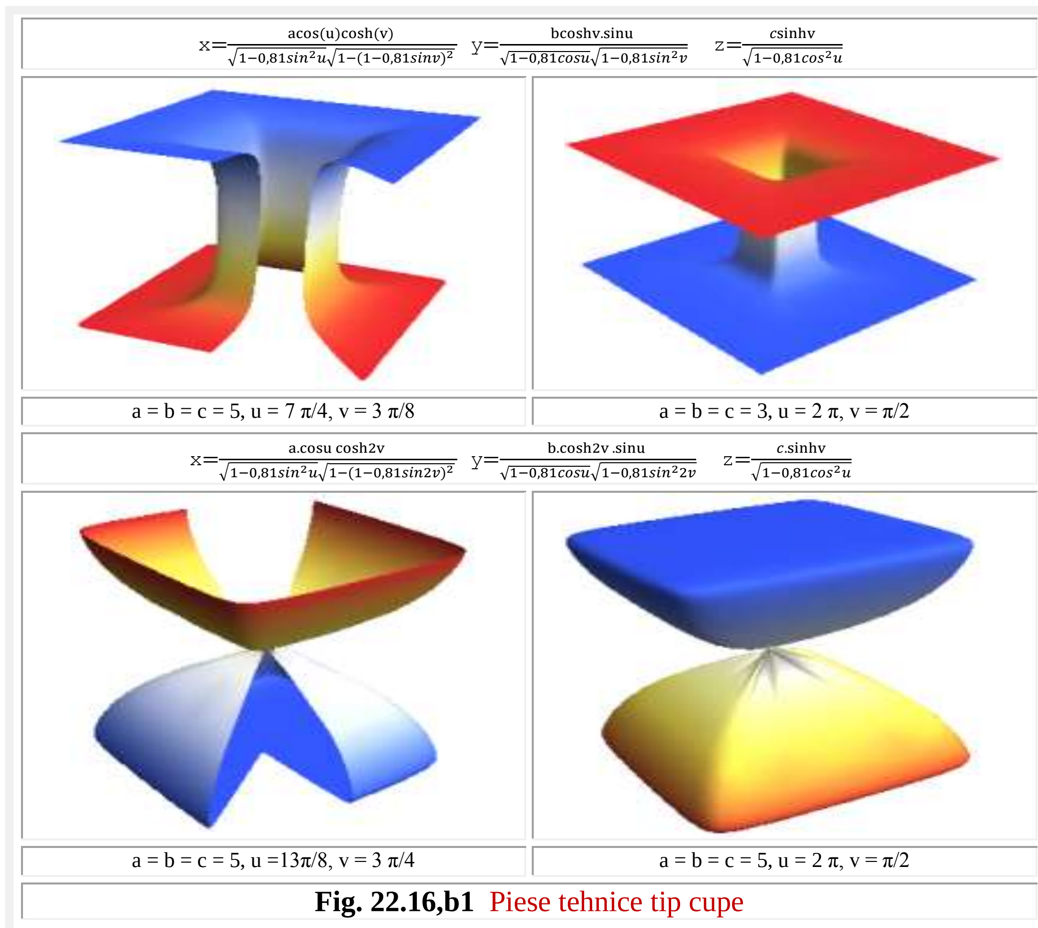
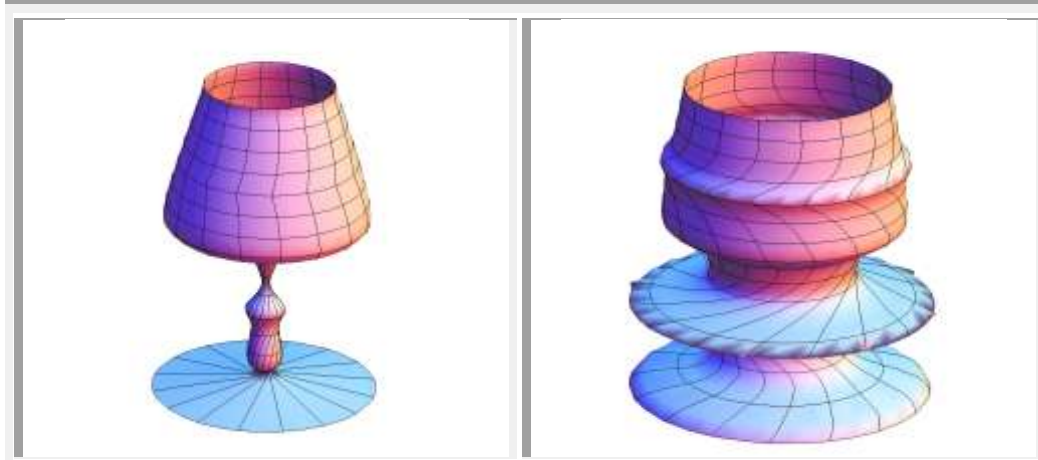


Fig. 22.16,b1 Piese tehnice tip cupe



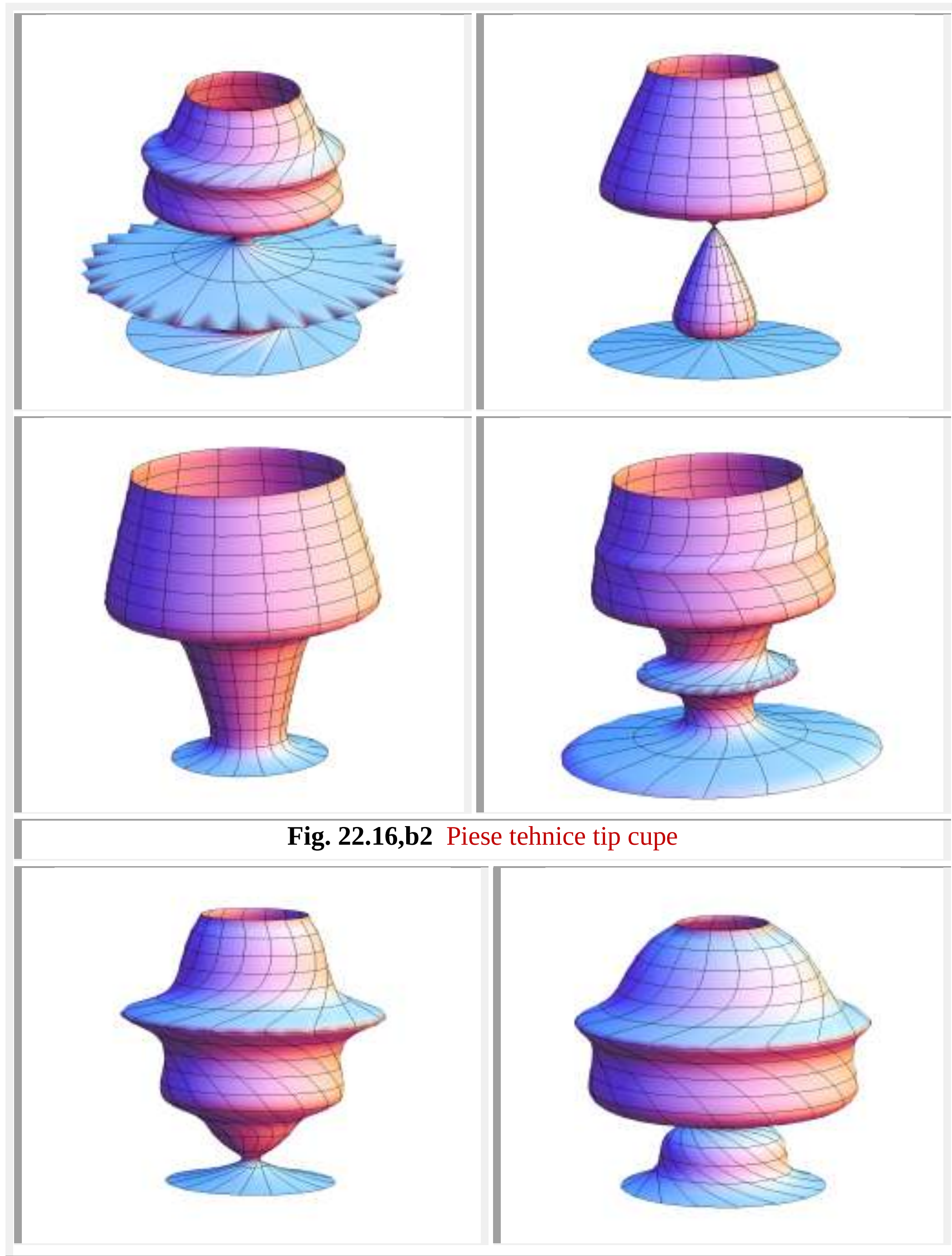


Fig. 22.16,b2 Piese tehnice tip cupe

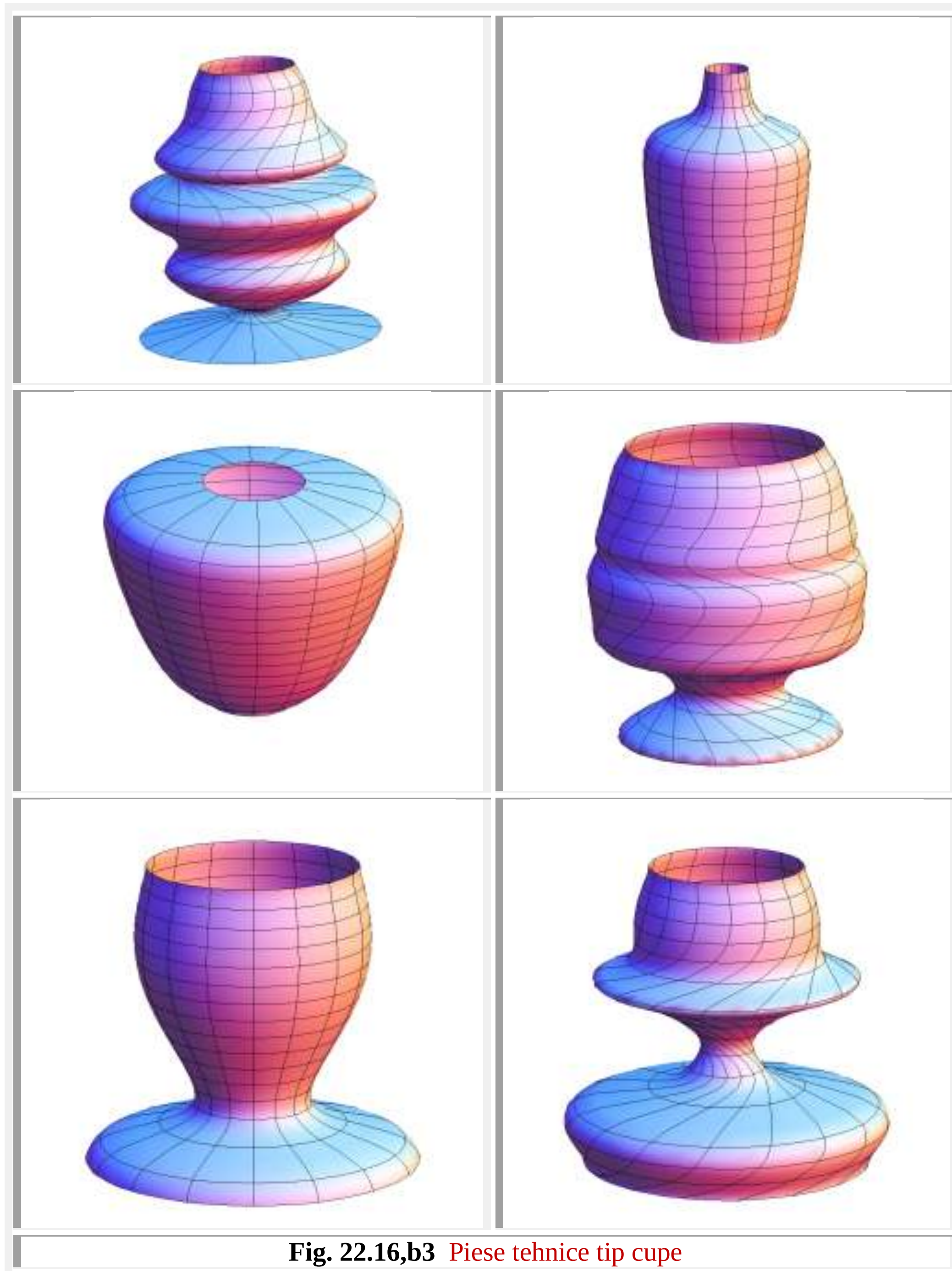


Fig. 22.16,b3 Piese tehnice tip cupe

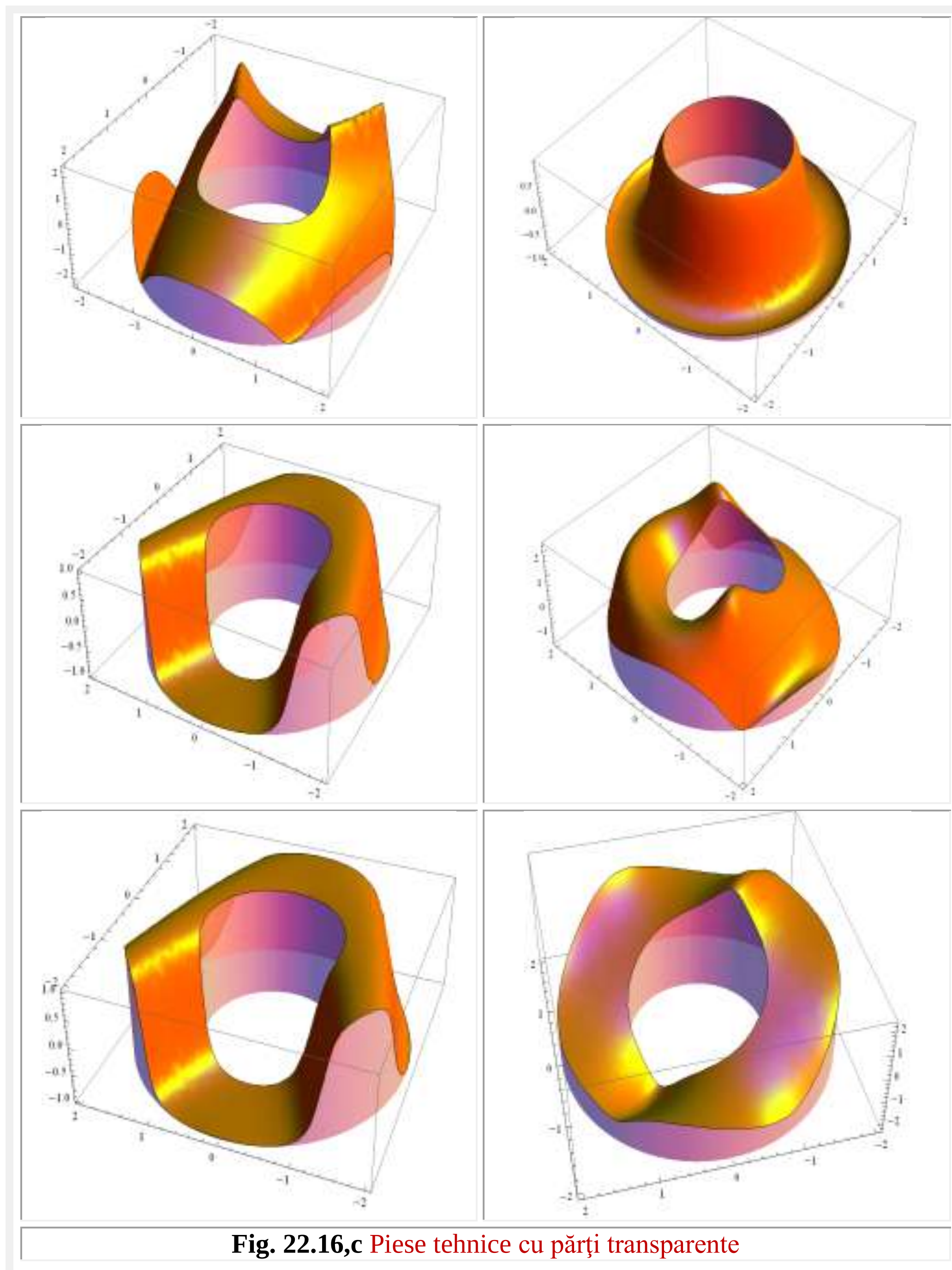


Fig. 22.16,c Piese tehnice cu părţi transparente

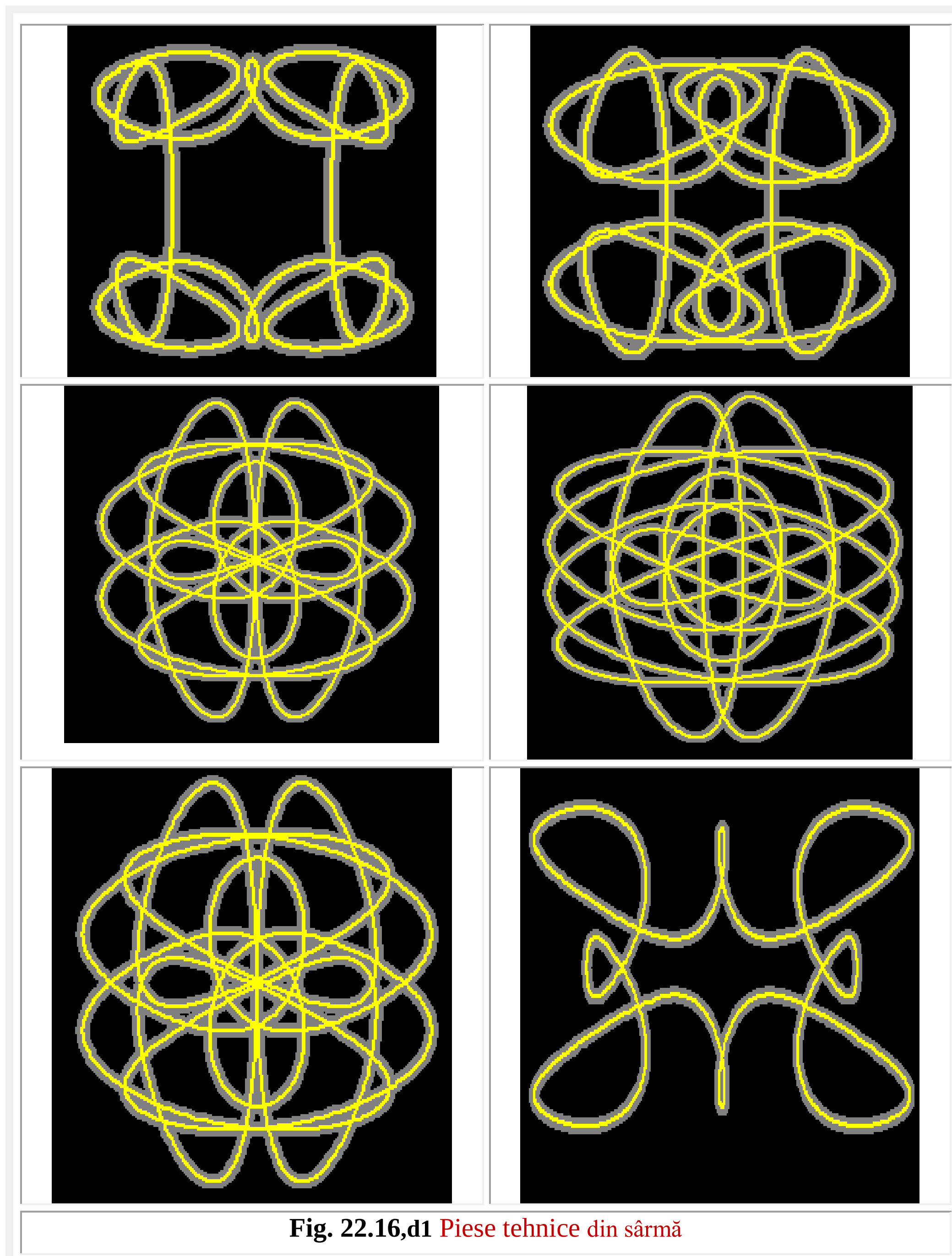


Fig. 22.16,d1 Piese tehnice din sârmă

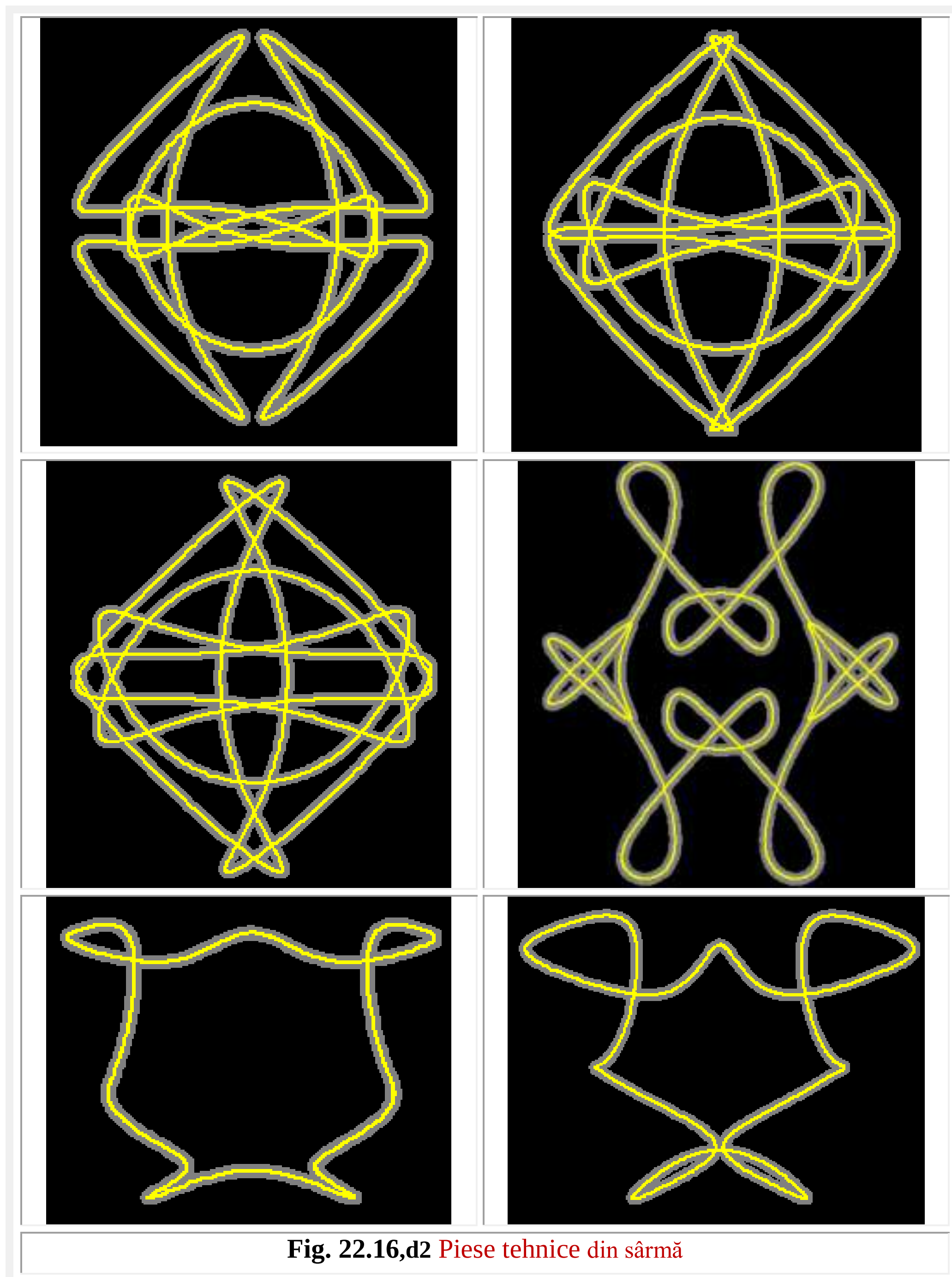


Fig. 22.16,d2 Piese tehnice din sârmă

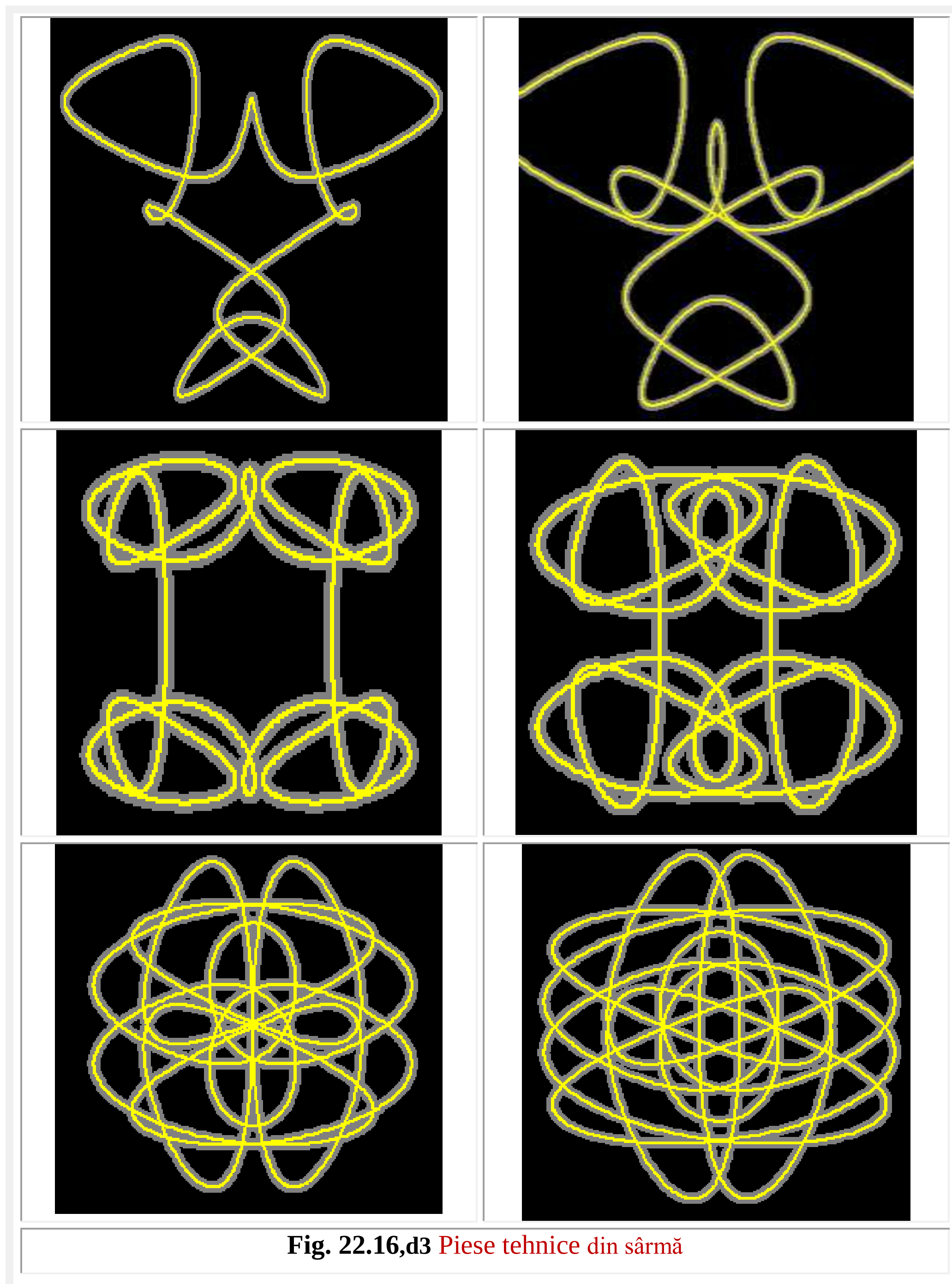
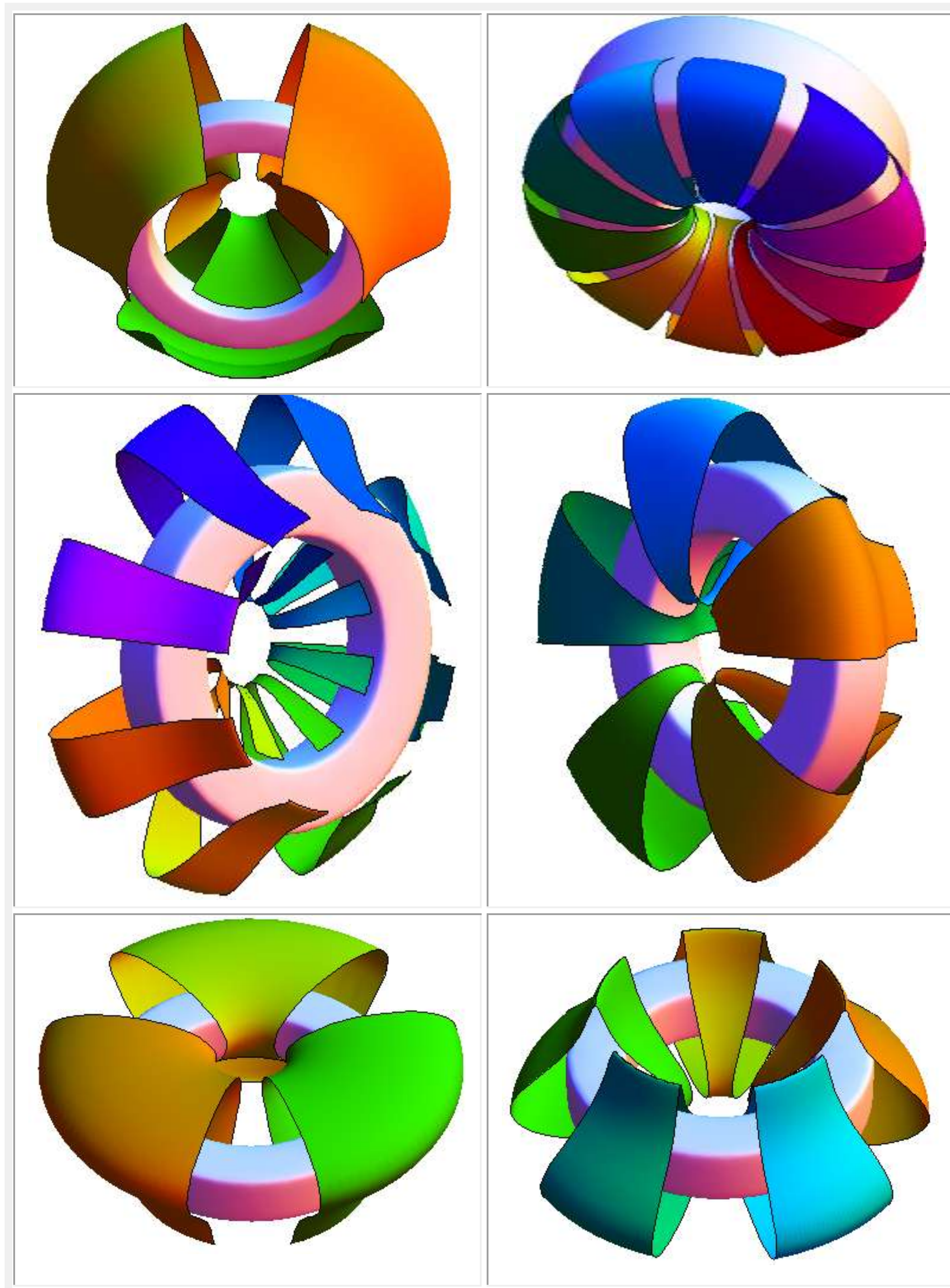


Fig. 22.16,d3 Piese tehnice din sârmă

22.5 TOR SEGMENTAT SM DE SECŢIUNE PĂTRATĂ





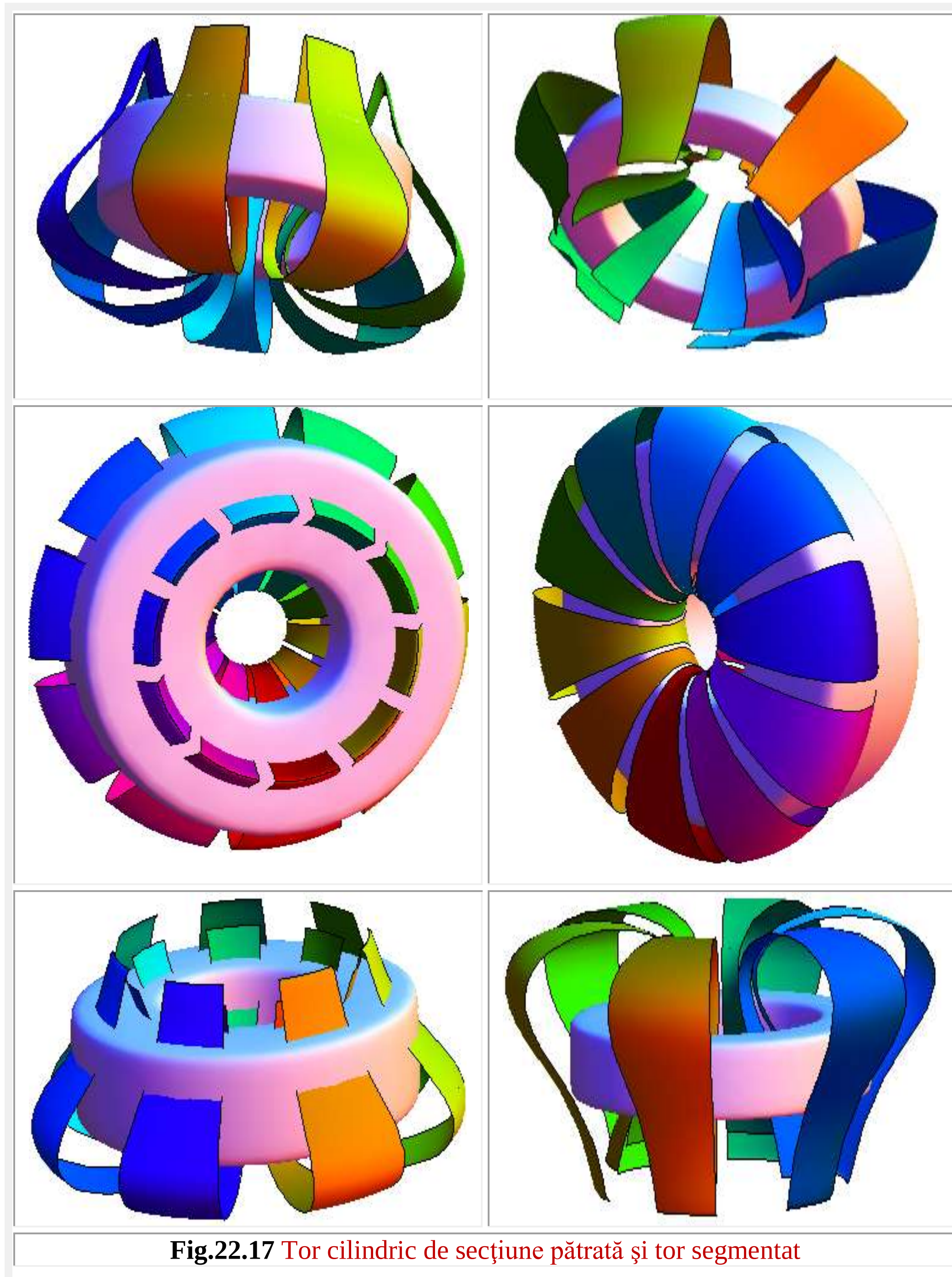
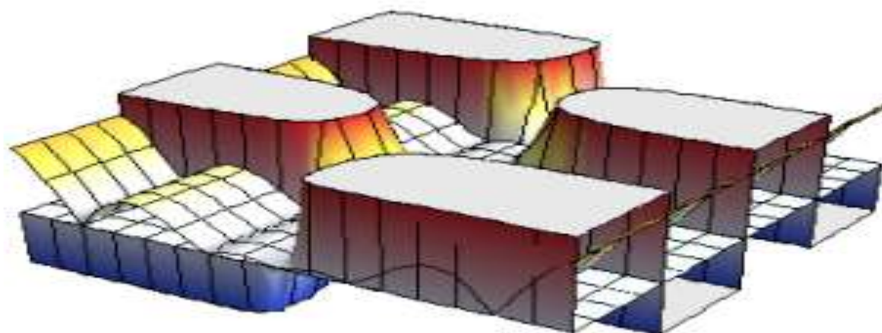
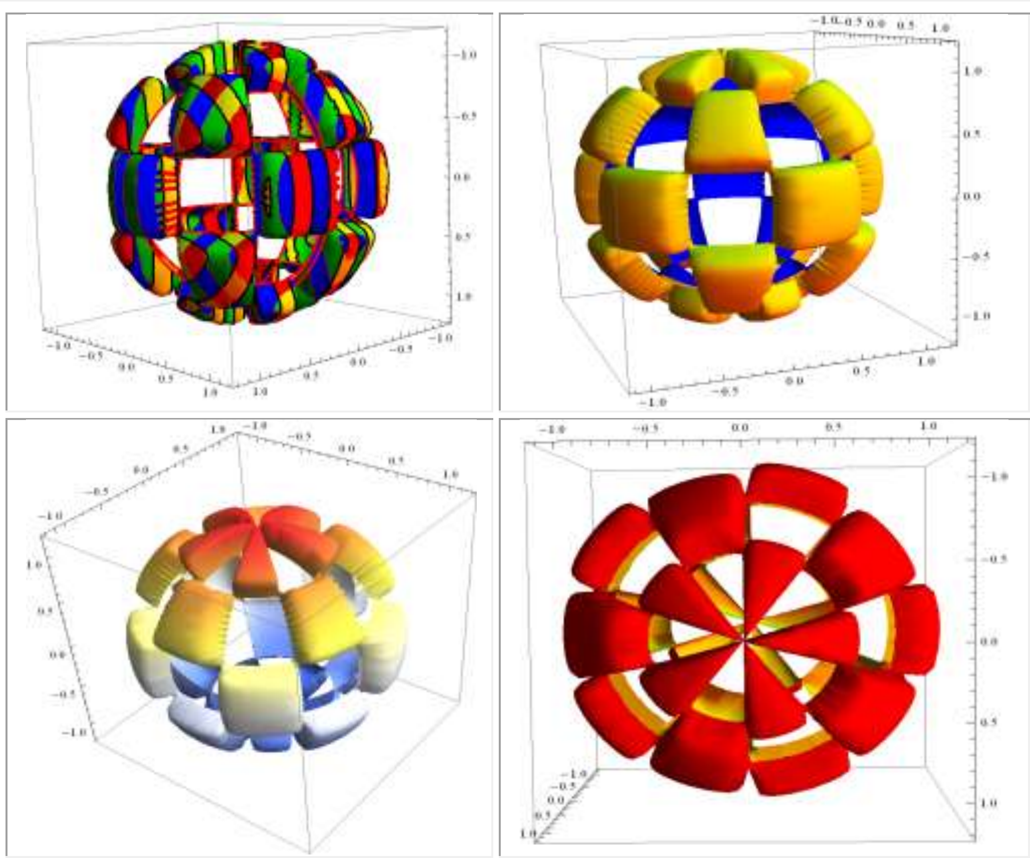


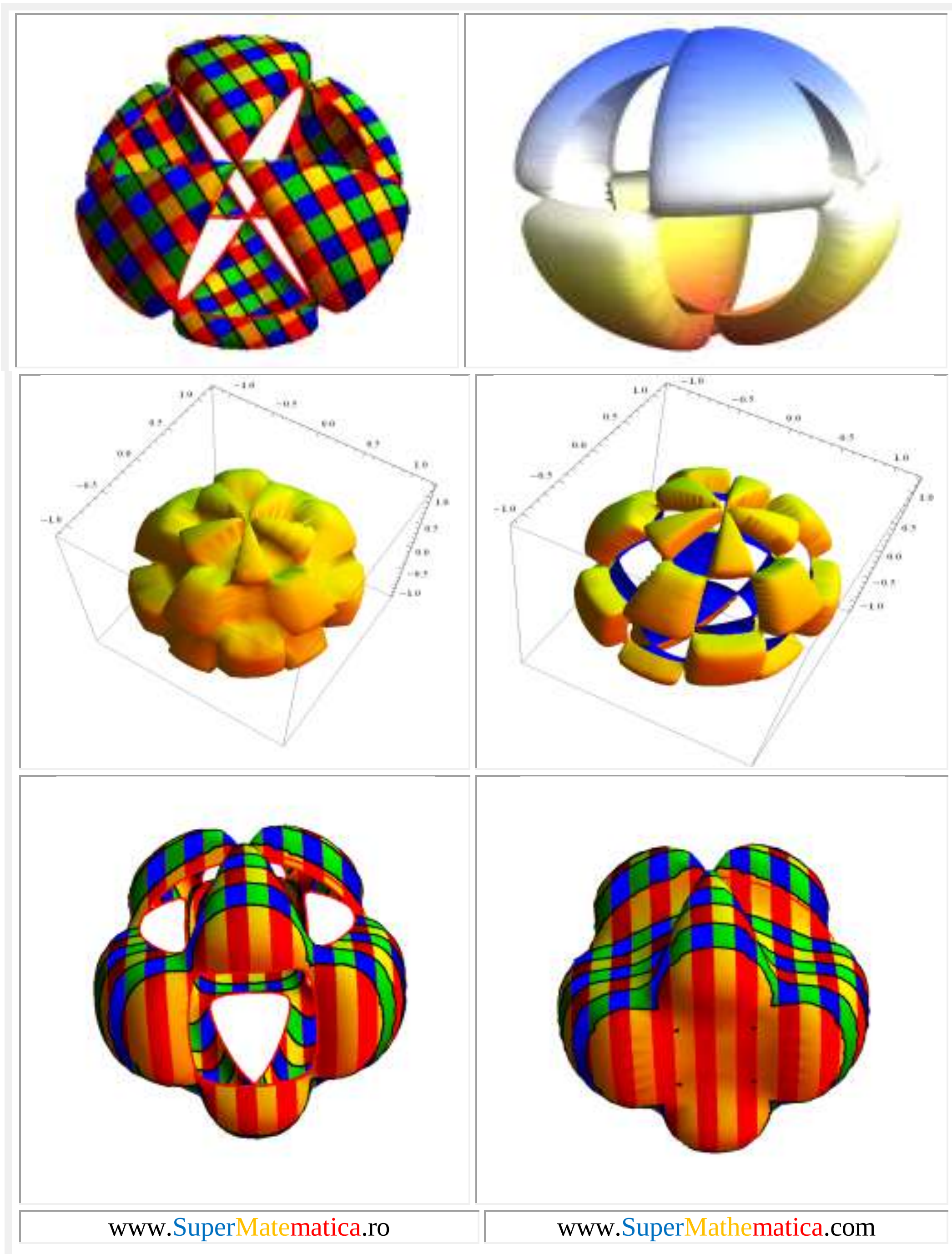
Fig.22.17 Tor cilindric de secţiune pătrată şi tor segmentat

22.6 SISTEME DE PIESE TEHNICE

```
Plot3D[{{Re[Cos[t]Sin[Iu]],Im[Sin[Iu]Sin[t-ArcSin[0.1uSin[It]]]]Sqrt[1-(0.1 u)^2]], Abs[0.2 u Cos[u]] }},
{u, -2 Pi, 2 Pi}, {t, -2 Pi, 2 Pi}]
```






www.SuperMatematica.ro
www.SuperMathematica.com

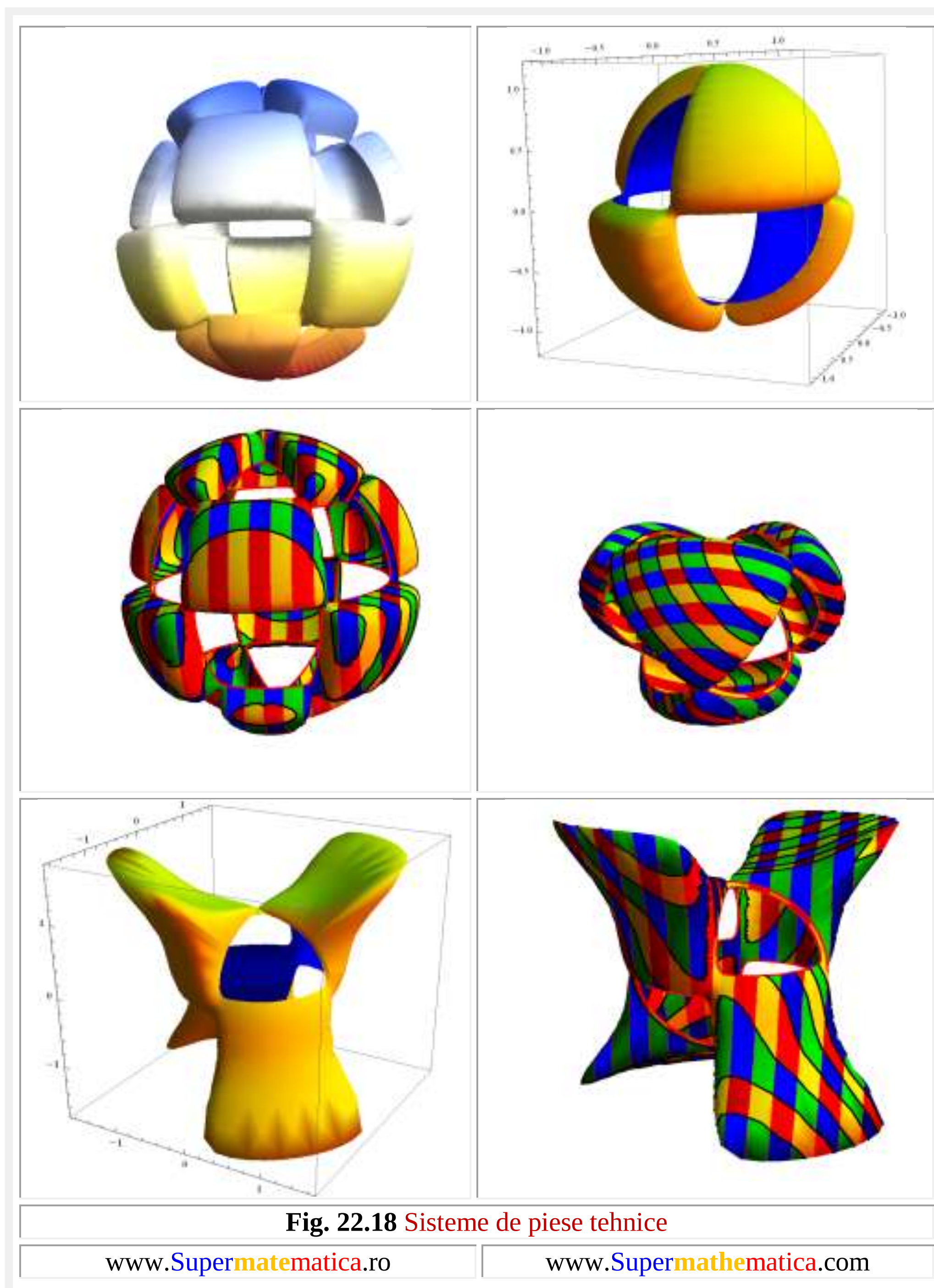
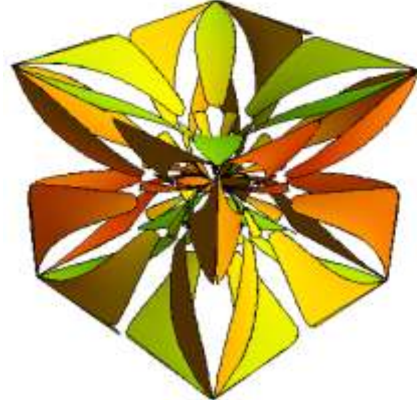
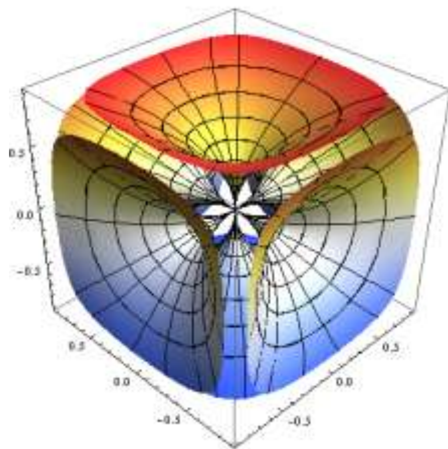


Fig. 22.18 Sisteme de piese tehnice

www.Supermatematica.ro www.Supermathematica.com

```
ParametricPlot3D[{{u^2 Cos[t]/Sqrt[1-(u^3  Sin[t])^2],u,   u ^2 Sin[t]/Sqrt[1-(u^3  Cos[t])^2]},
{u^2 Cos[t]/Sqrt[1-(u^3 Sin[t])^2],   u ^2 Sin[t]/Sqrt[1-(u^3 Cos[t])^2],-u},
{u,u^2 Cos[t]/Sqrt[1-(u^3 Sin[t])^2],   u^2 Sin[t]/Sqrt[1-(u^3 Cos[t])^2]}}, {t,-2 Pi,2 Pi},{u,-1,1}]
```

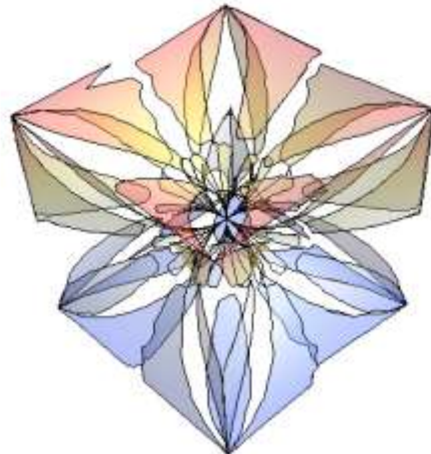
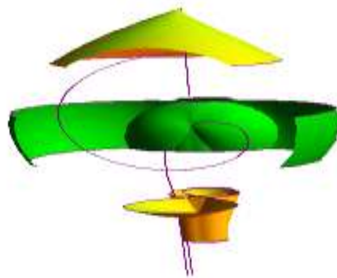


Fig. 22.19 Conopiramidă inclusă în conopiramidă



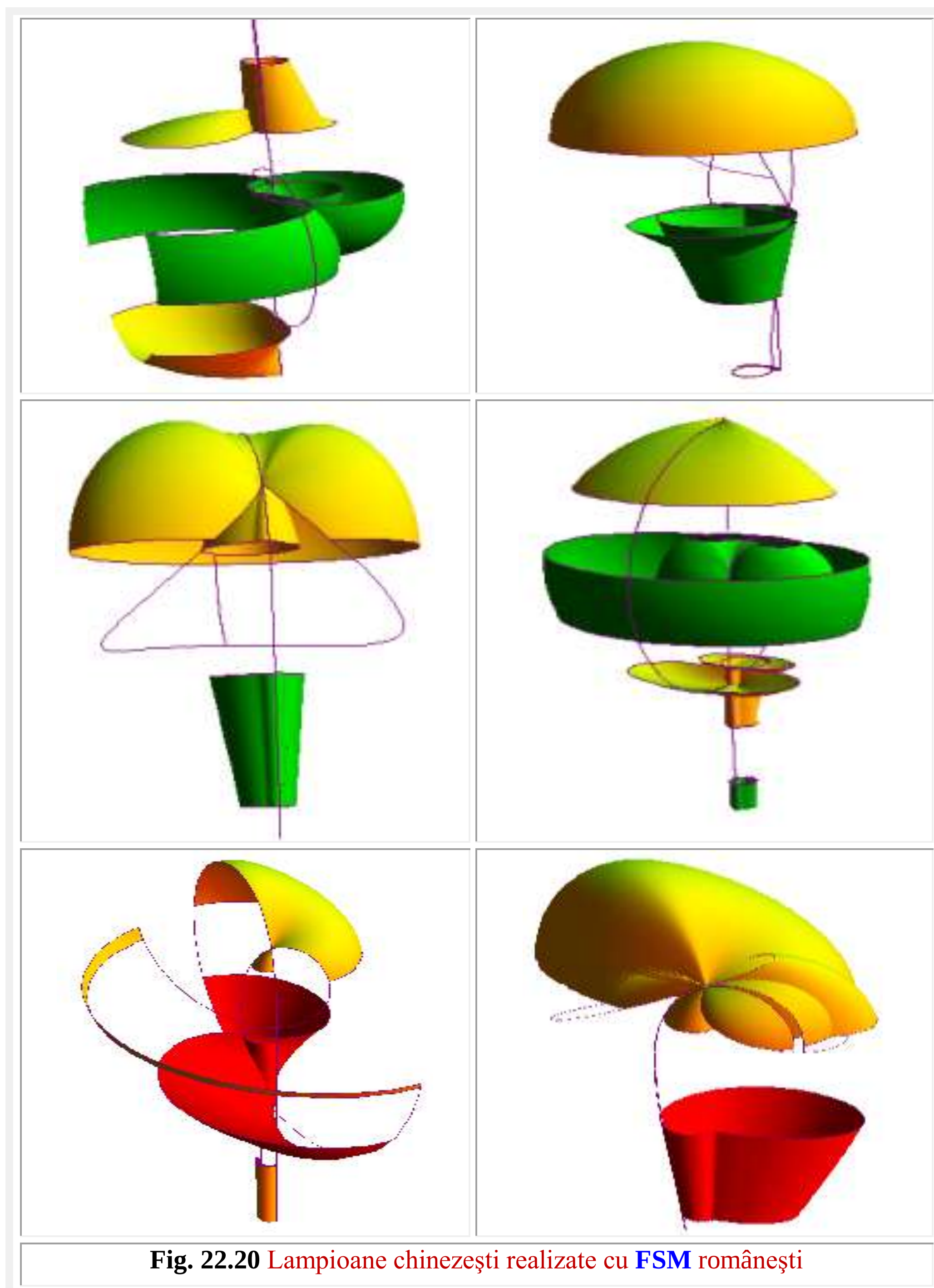



Fig. 22.20 Lampioane chinezeşti realizate cu **FSM** româneşti

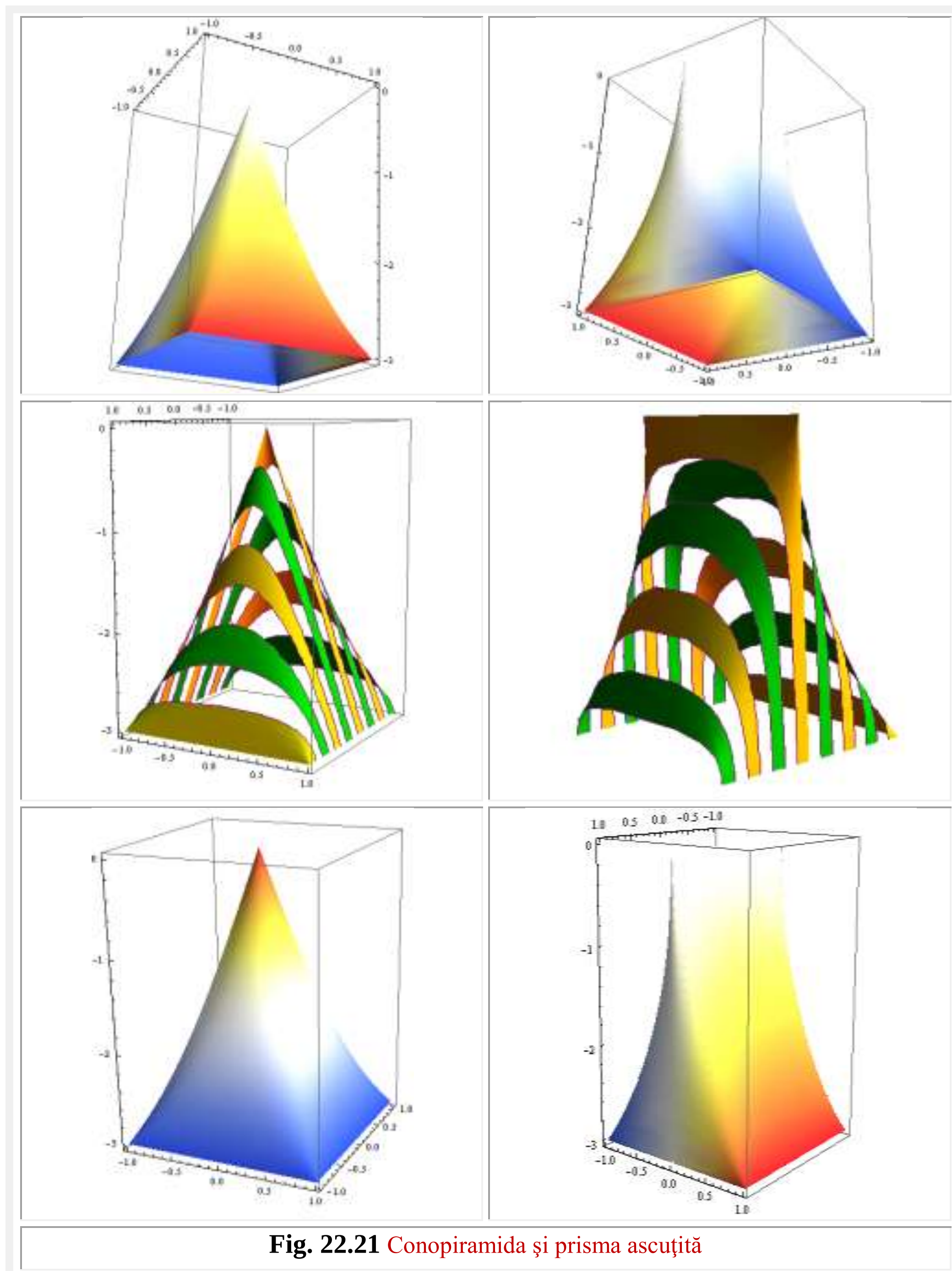


Fig. 22.21 Conopiramida şi prisma ascuţită

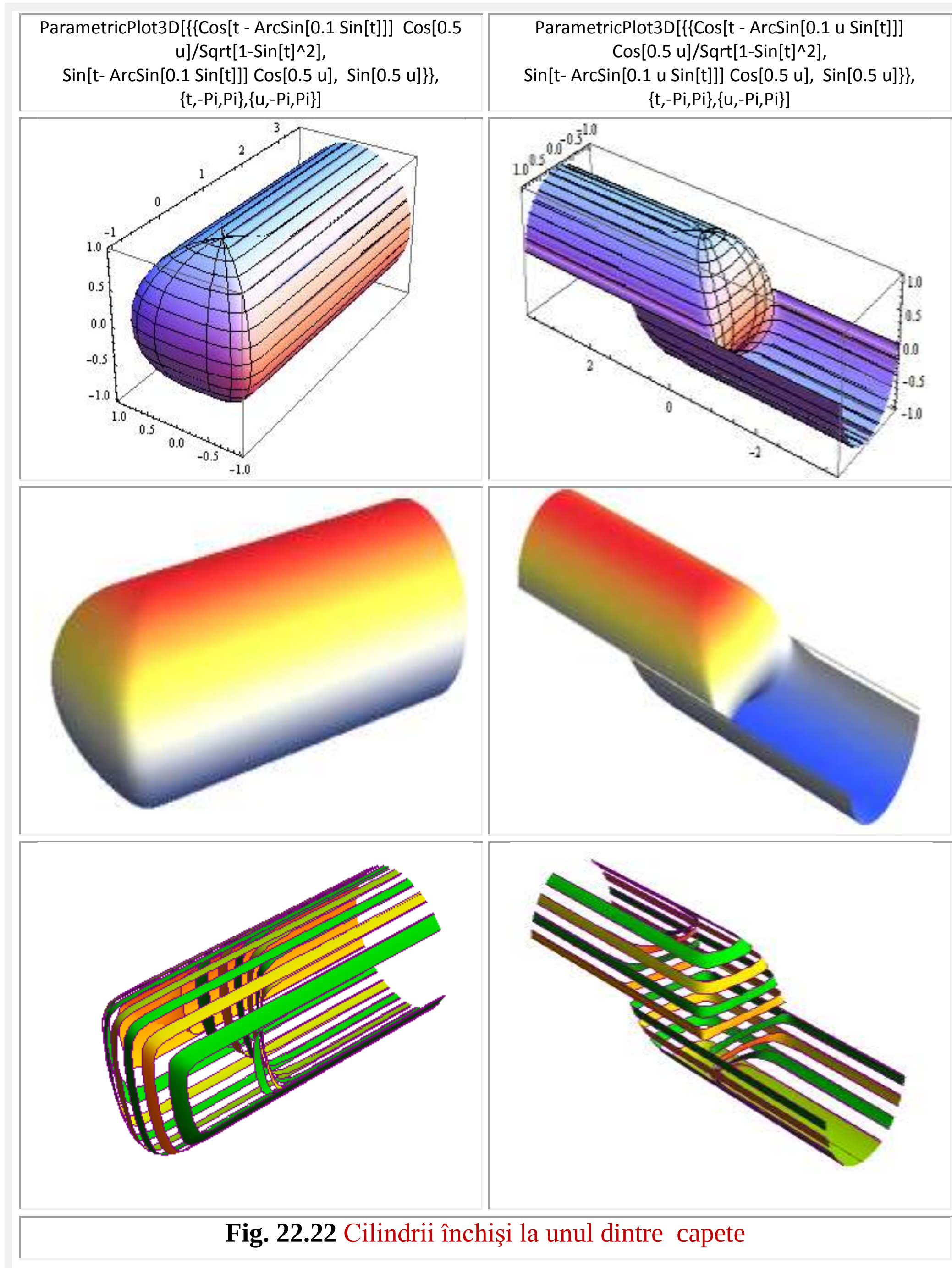


Fig. 22.22 Cilindrii închişi la unul dintre capete

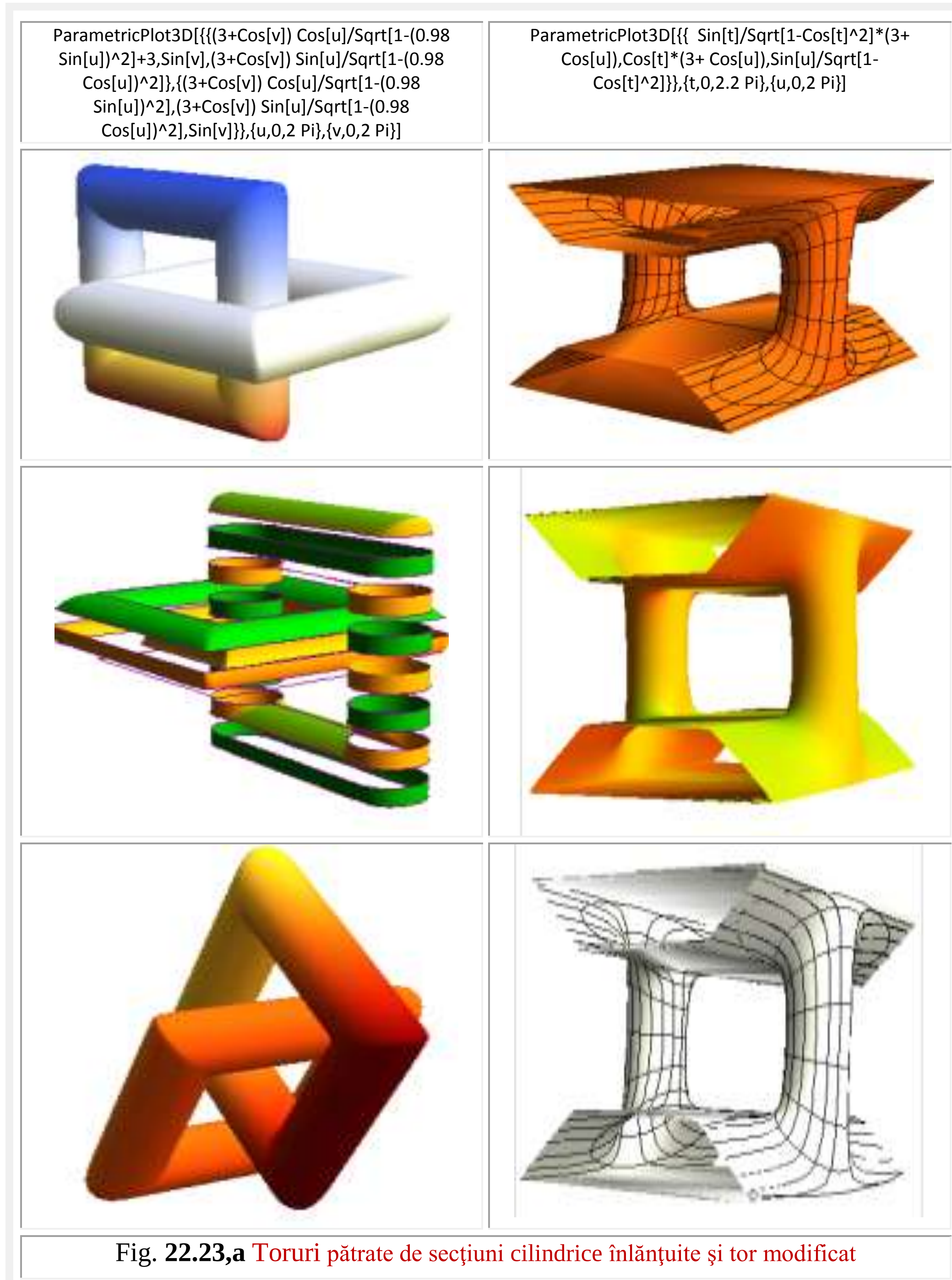


Fig. **22.23,a** Toruri pătrate de secţiuni cilindrice înlănţuite şi tor modificat



Fig. 22.23,b Toruri pătrate de secţiuni pătrate înlănţuite

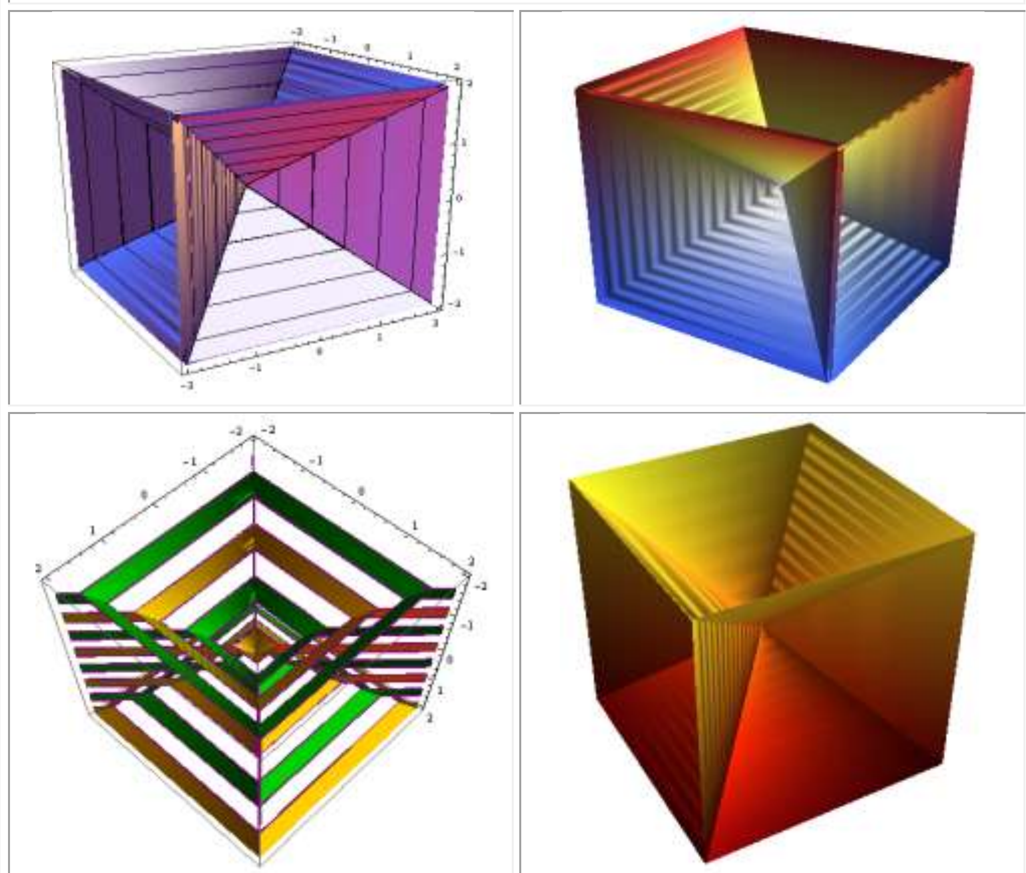


Fig. 22.24,a Cuburi româneşti, cele mai uşoare cuburi din lume, de volum zero

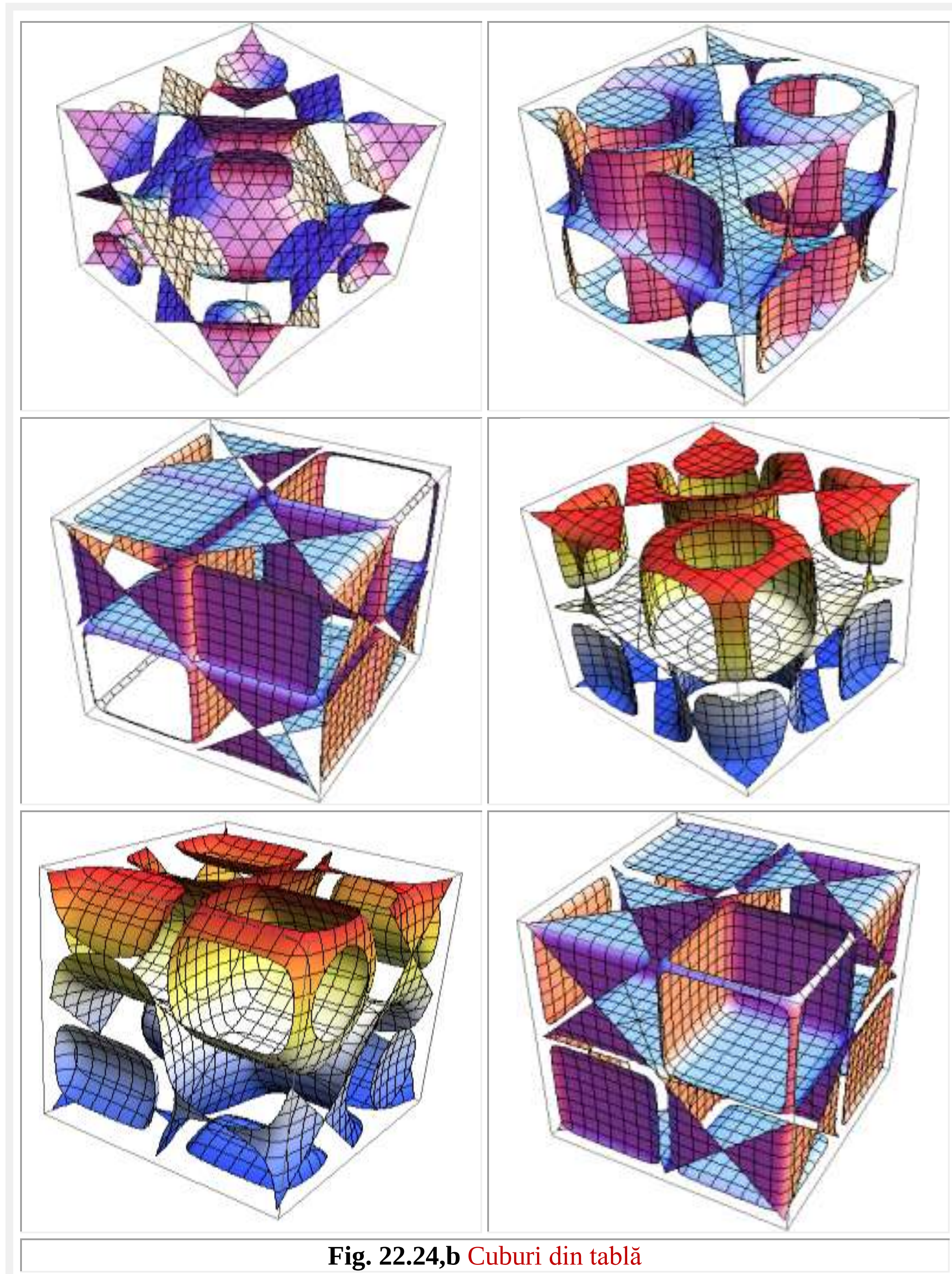


Fig. 22.24,b Cuburi din tablă

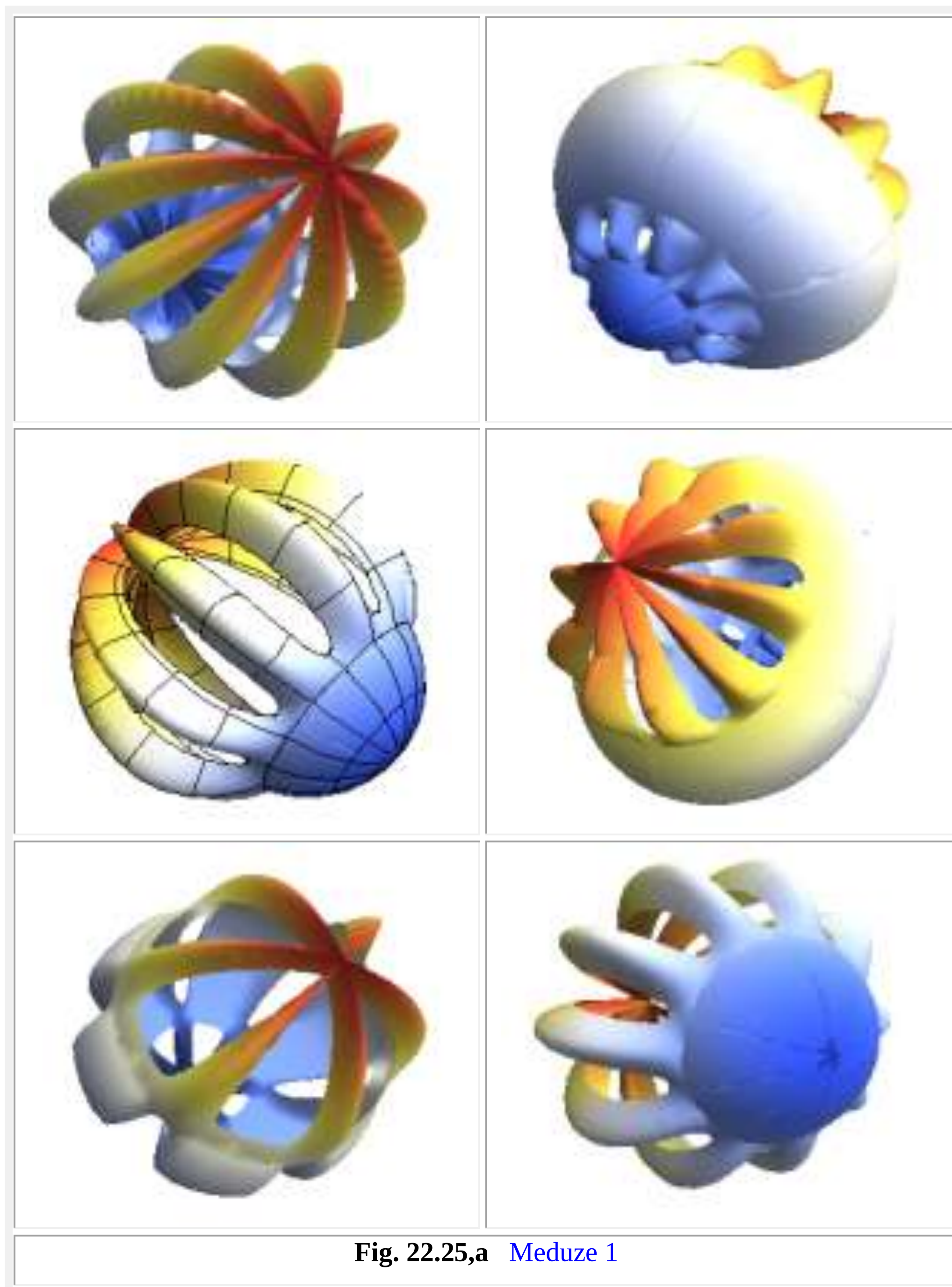


Fig. 22.25,a Meduze 1



Fig.22.25,b Meduze 2

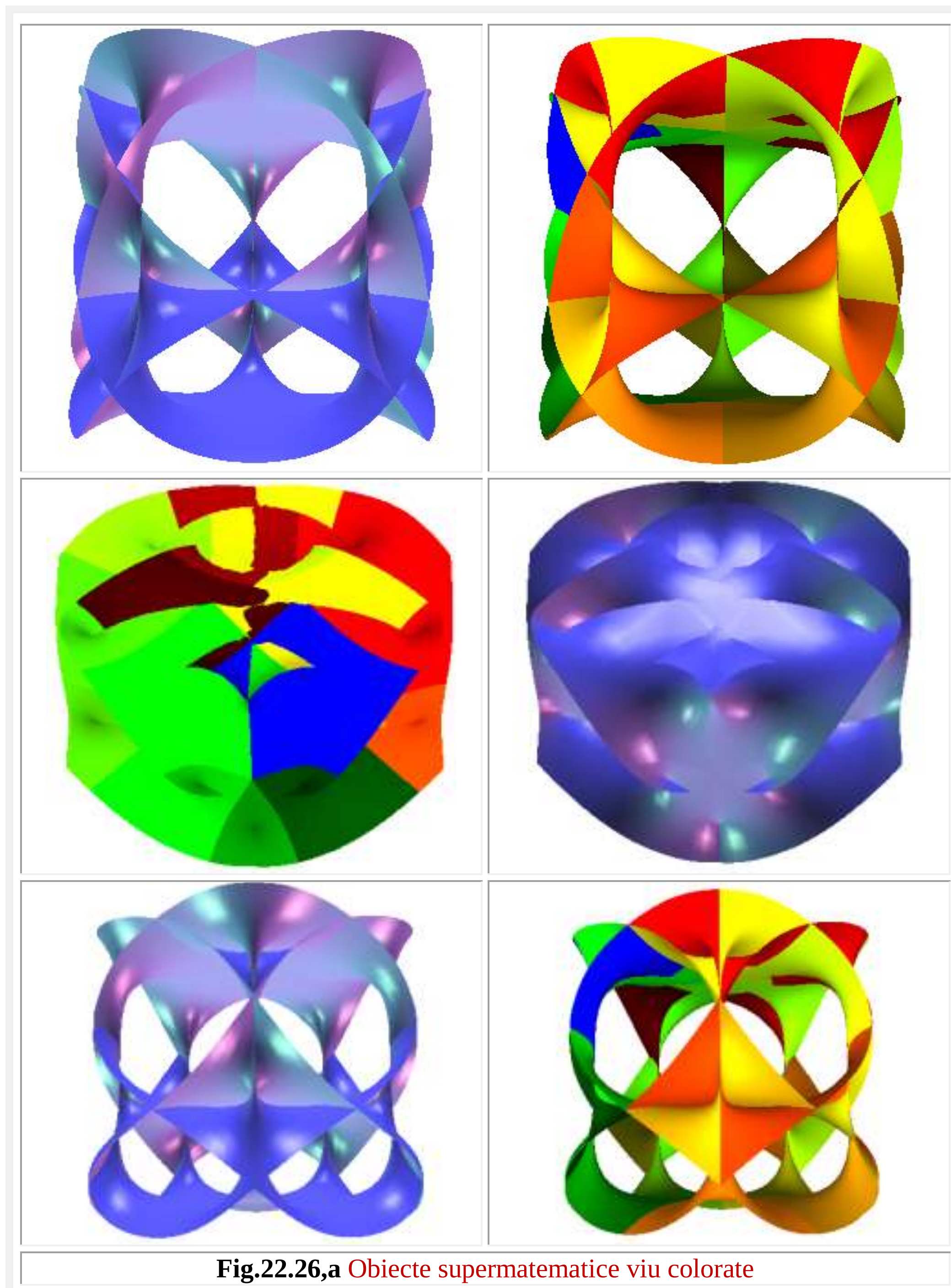


Fig.22.26,a Obiecte supermatematice viu colorate

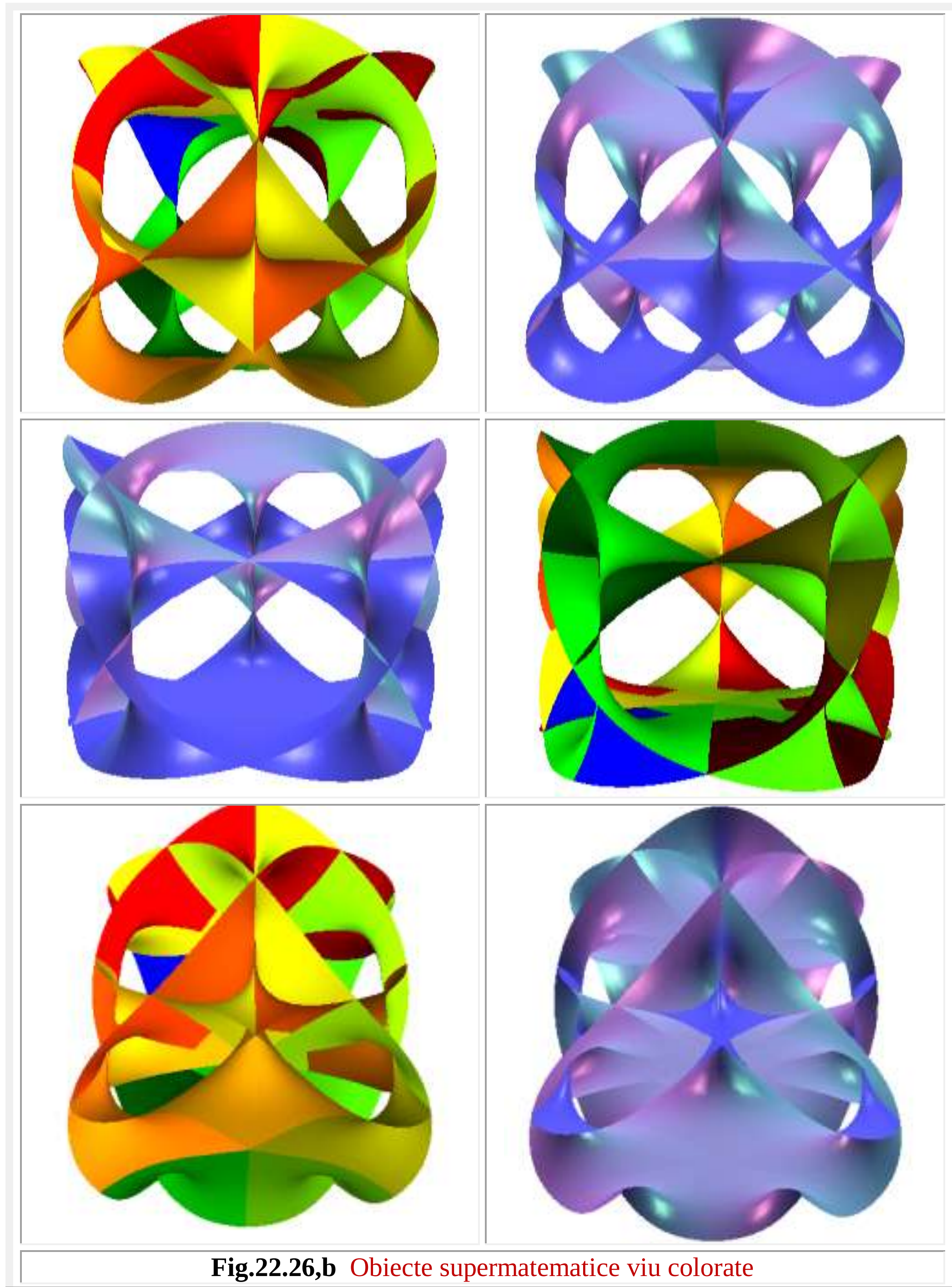


Fig.22.26,b Obiecte supermatematice viu colorate

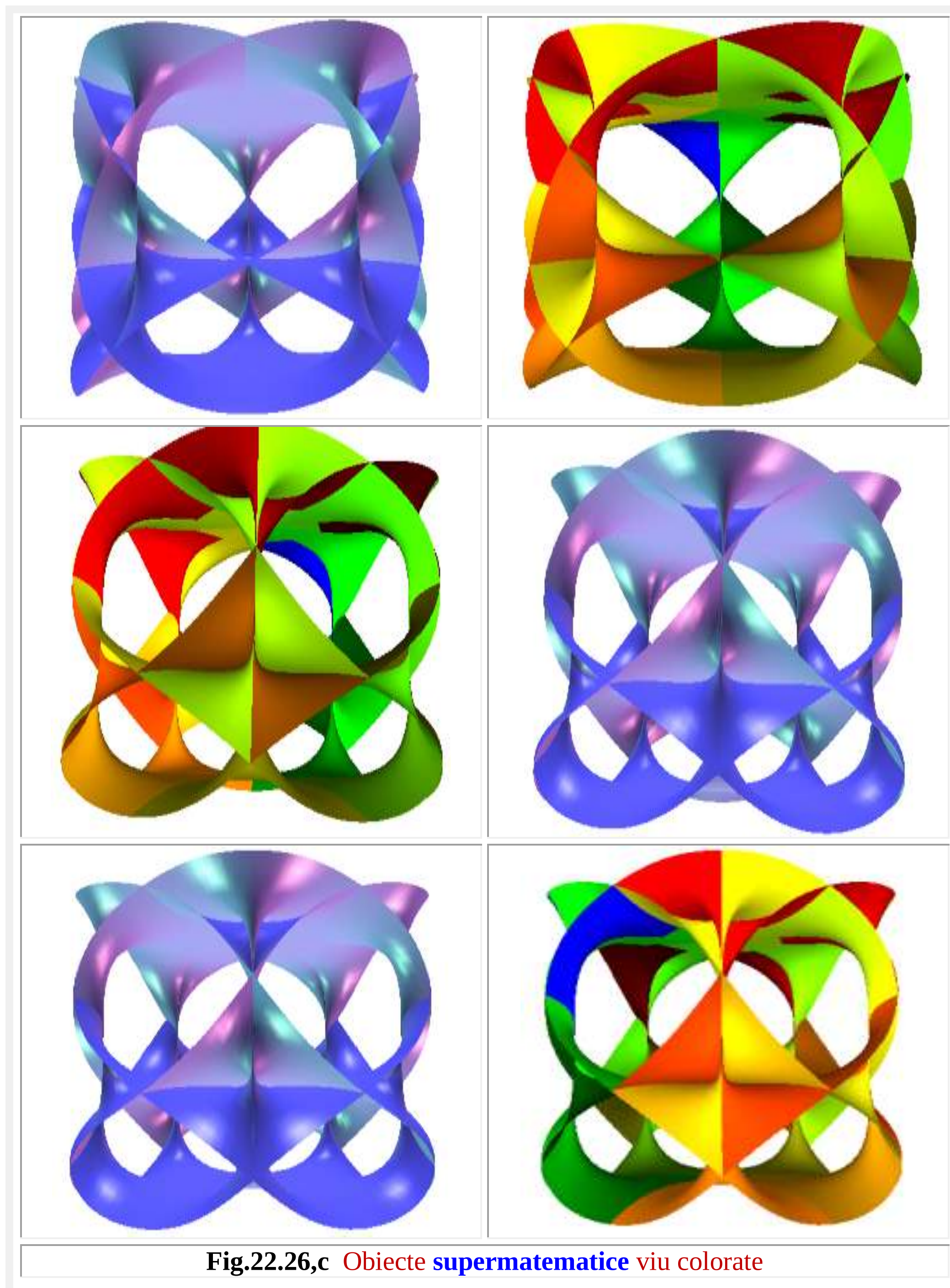


Fig.22.26,c Obiecte **supermatematice** viu colorate

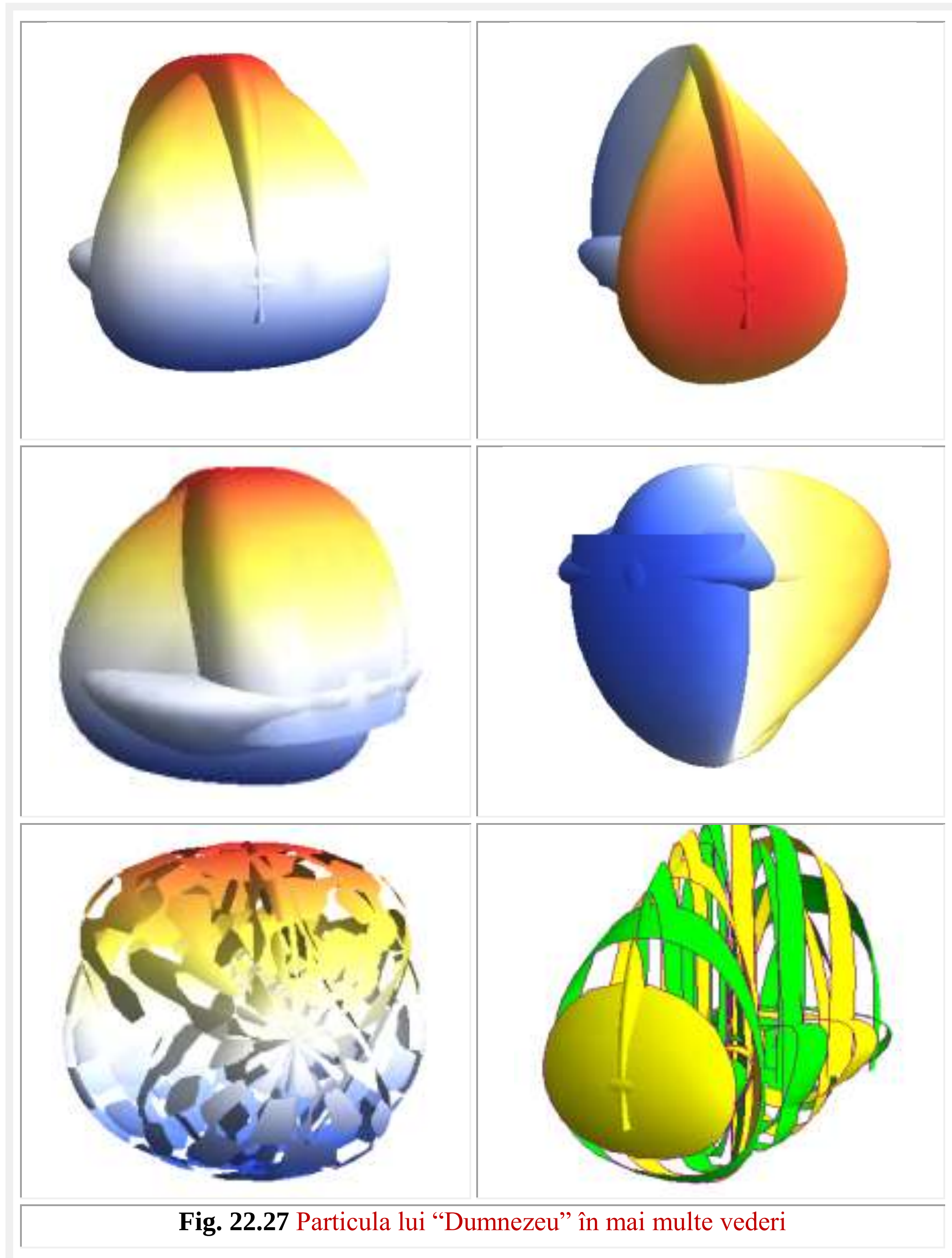
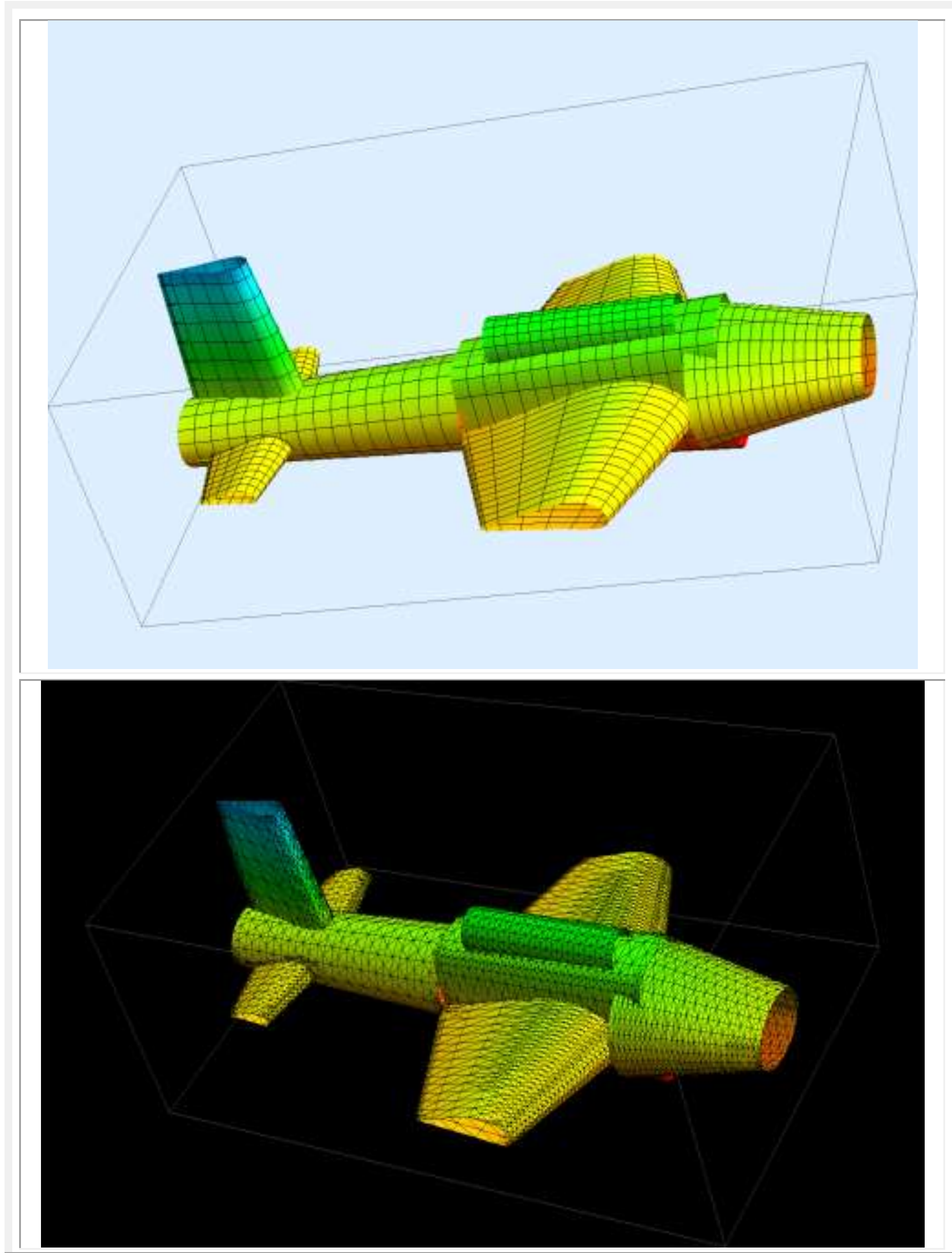


Fig. 22.27 Particula lui “Dumnezeu” în mai multe vederi



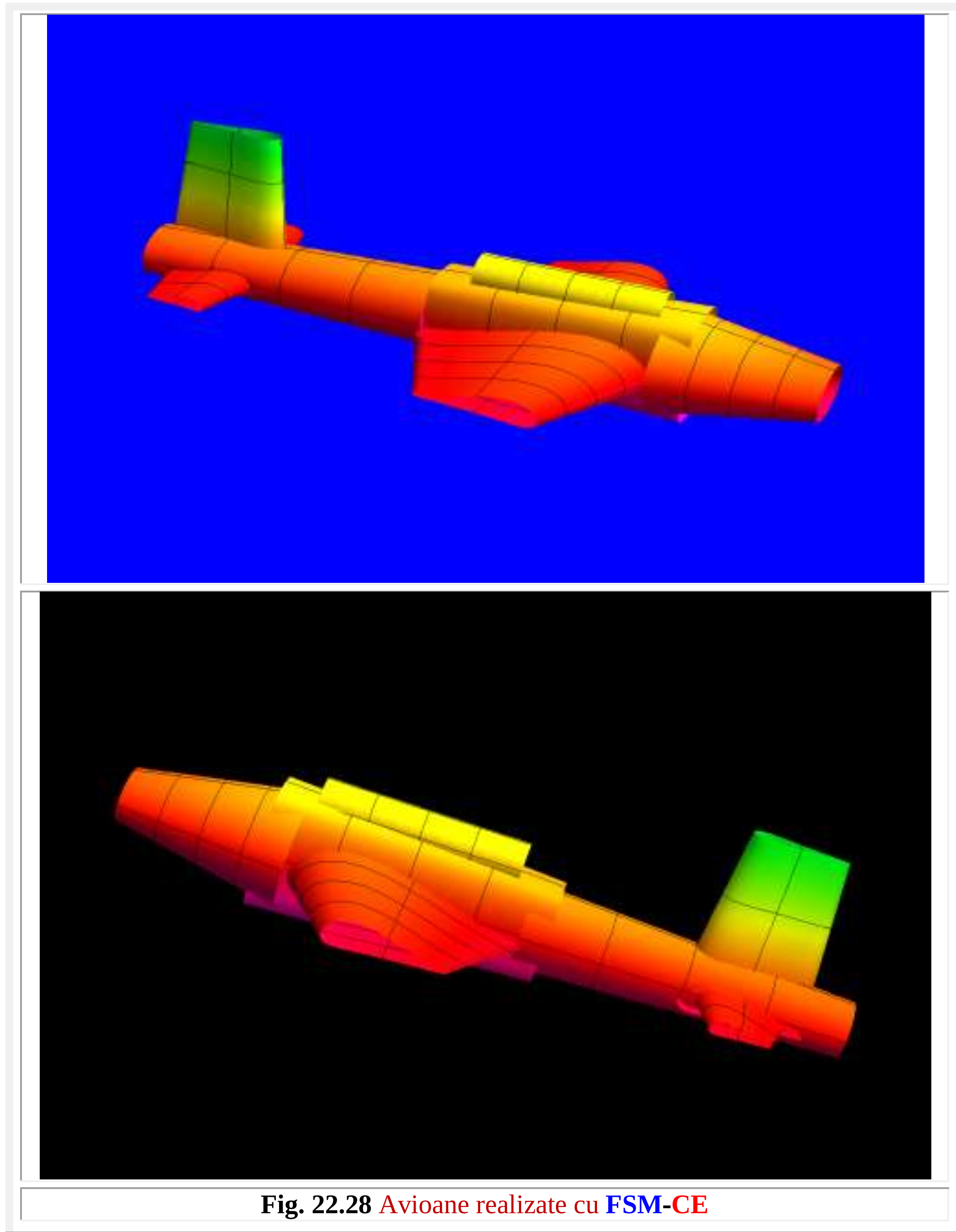


Fig. 22.28 Avioane realizate cu **FSM-CE**

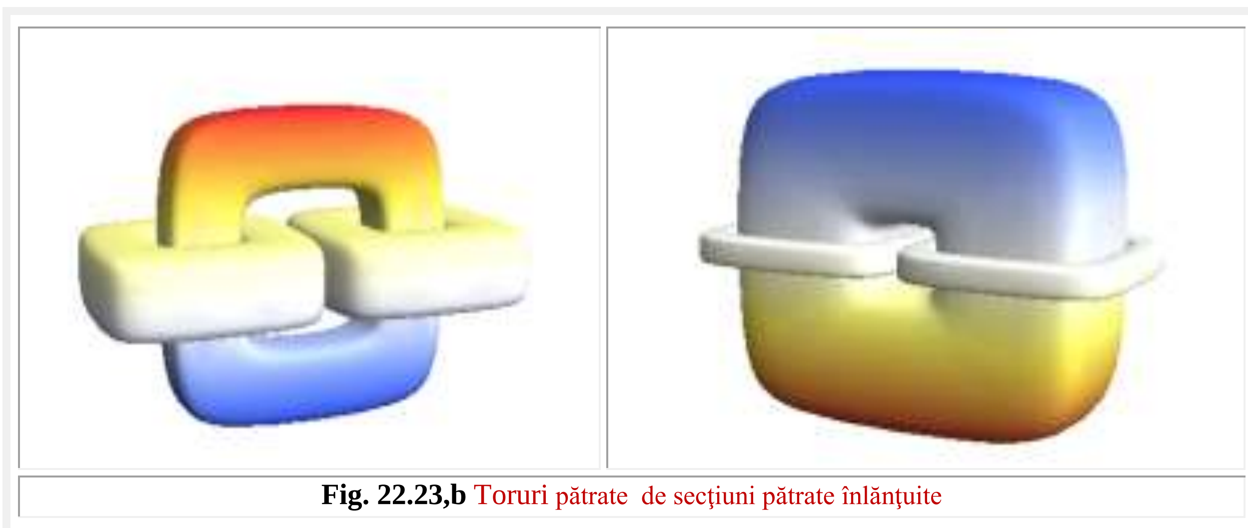


Fig. 22.23,b Toruri pătrate de secţiuni pătrate înlănţuite

Fig. 22.24,a Cuburi româneşti, cele mai uşoare cuburi din lume, de volum zero

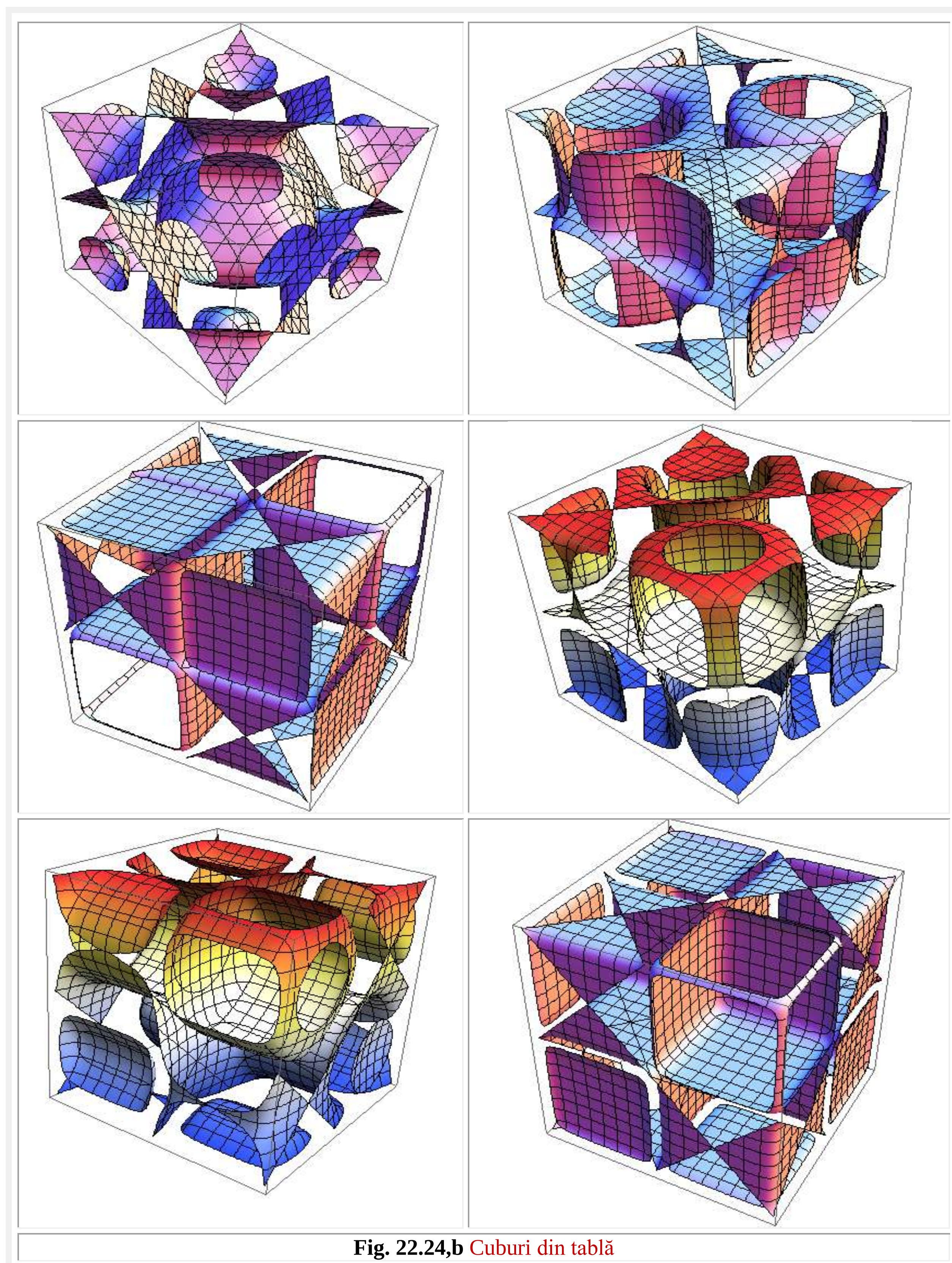


Fig. 22.24,b Cuburi din tablă

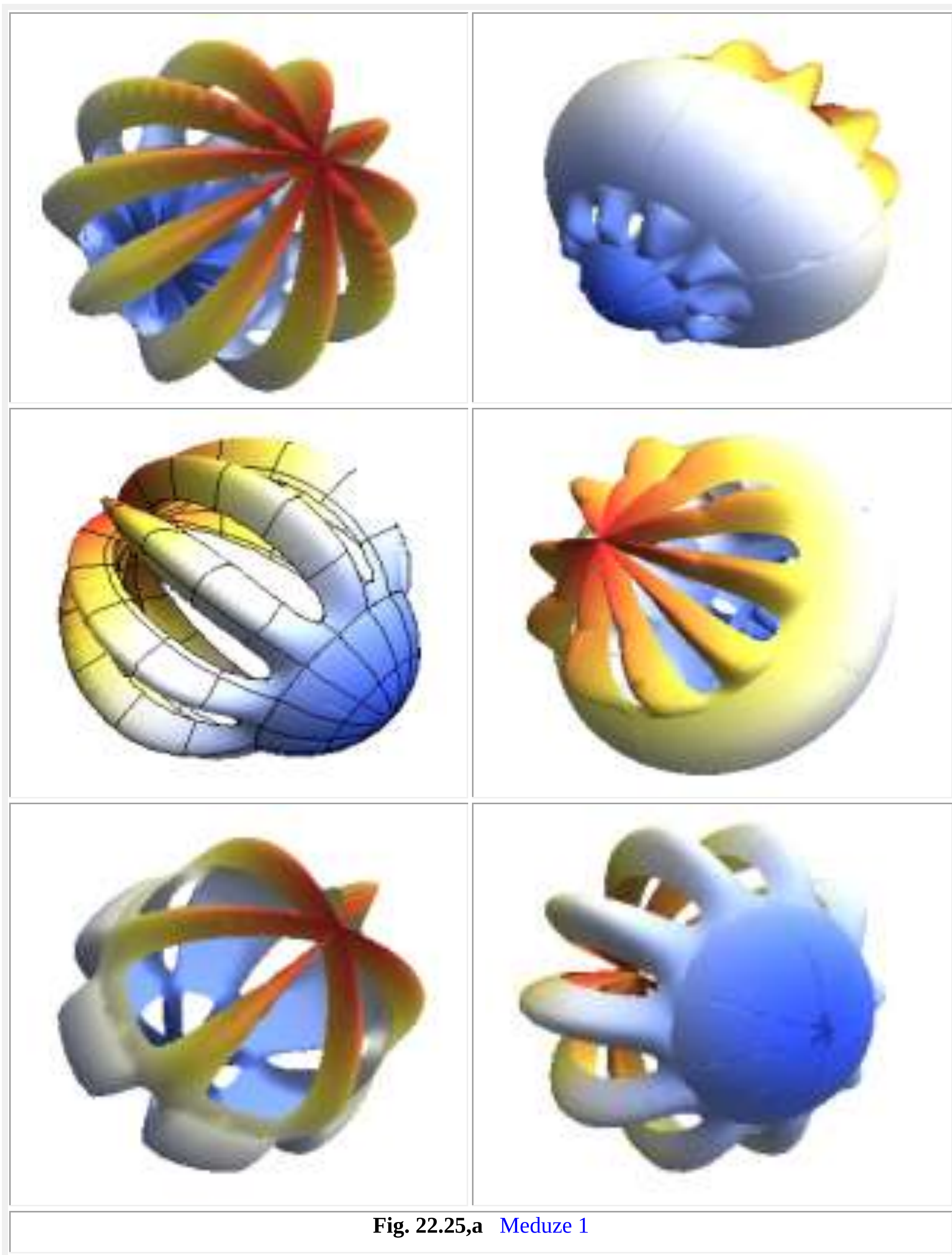


Fig. 22.25,a Meduze 1



Fig.22.25,b Meduze 2

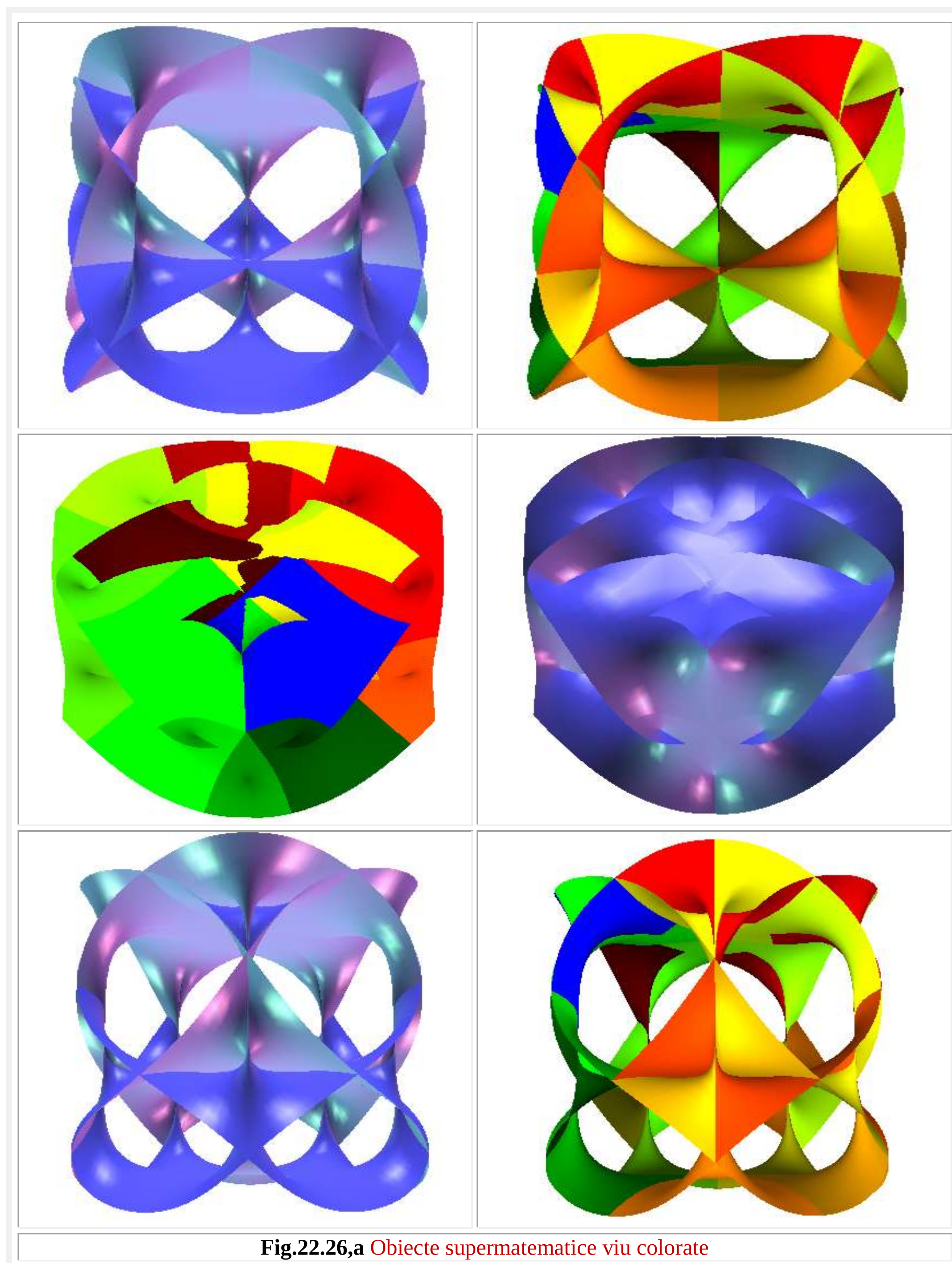


Fig.22.26,a Obiecte supermatematice viu colorate

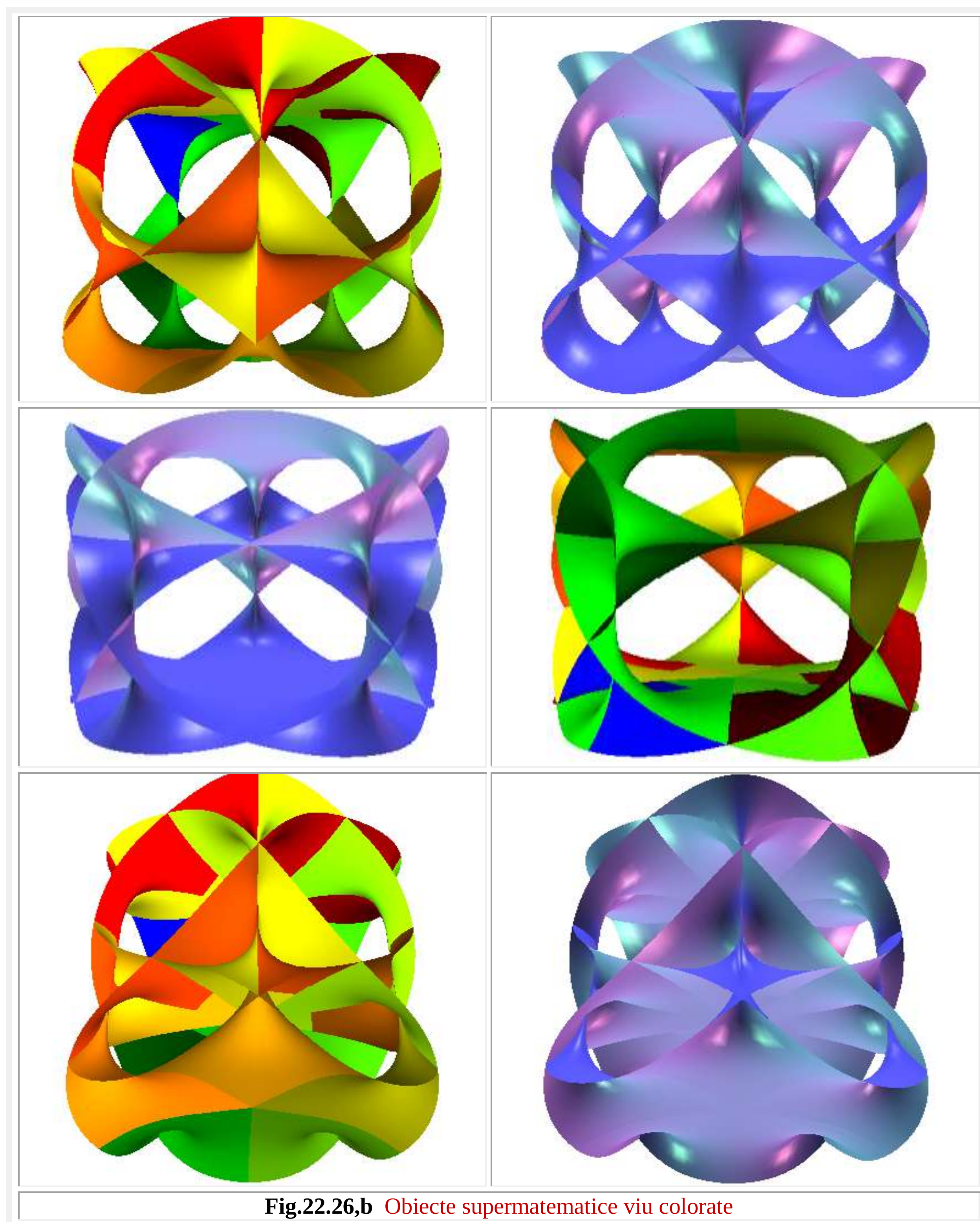


Fig.22.26,b Obiecte supermatematice viu colorate

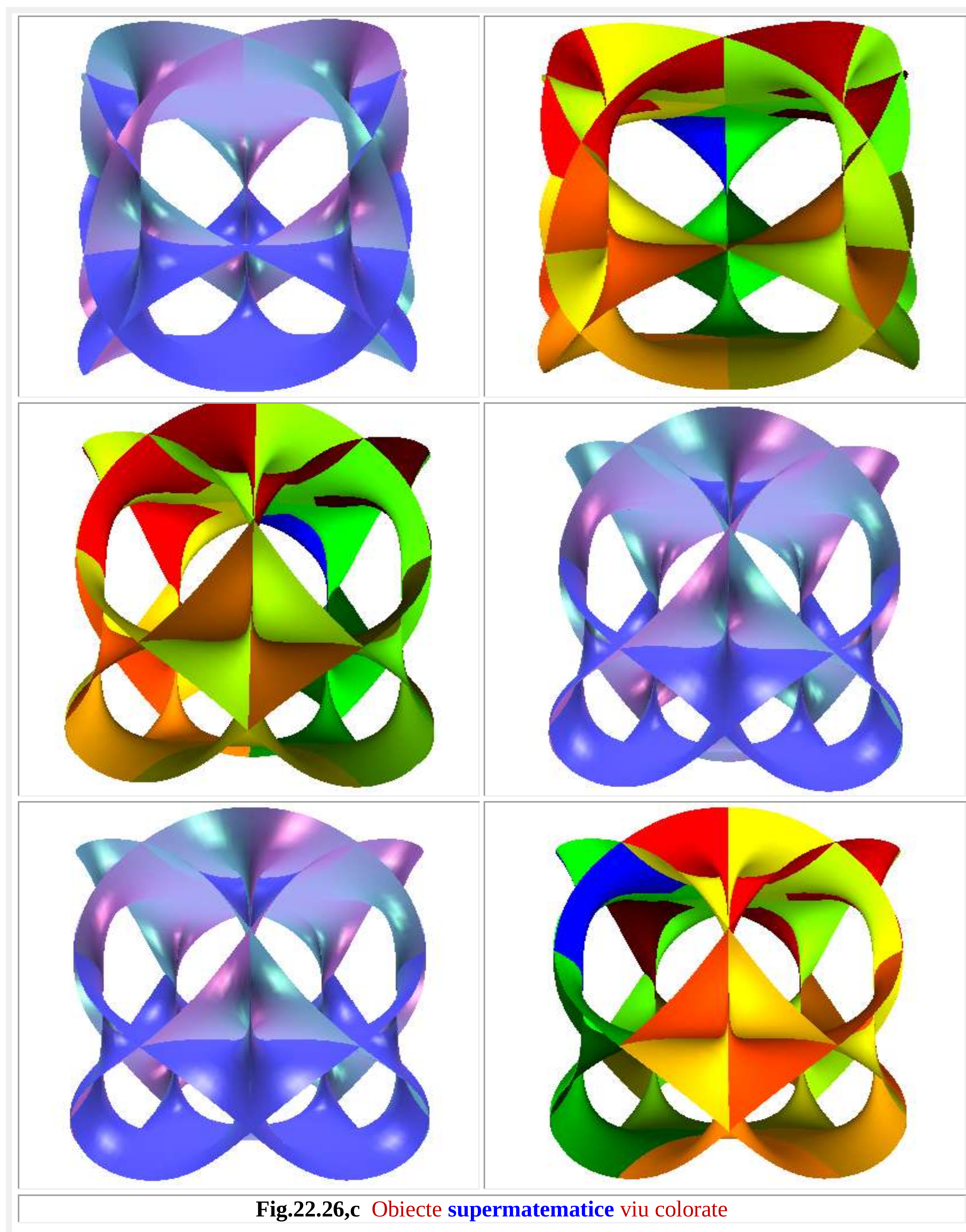


Fig.22.26,c Obiecte **supermatematice** viu colorate

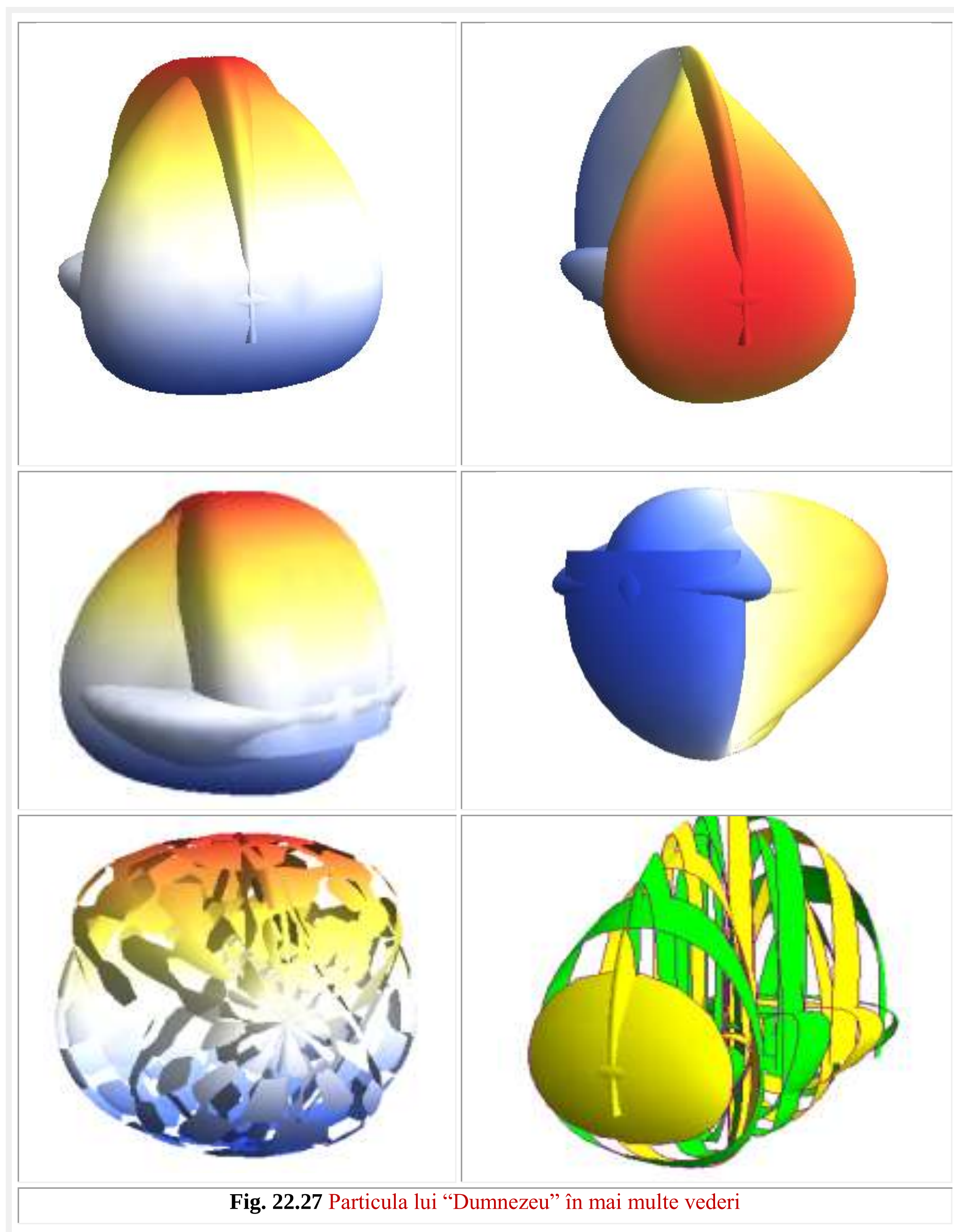
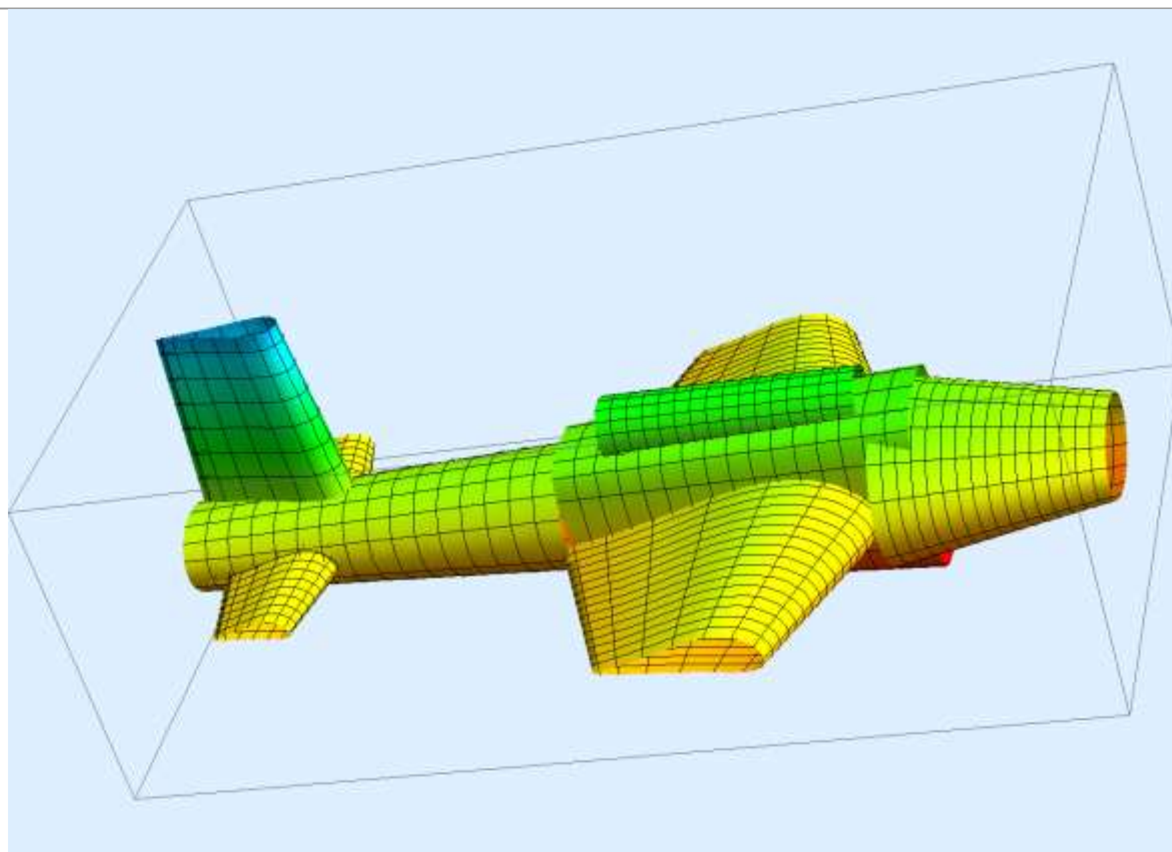
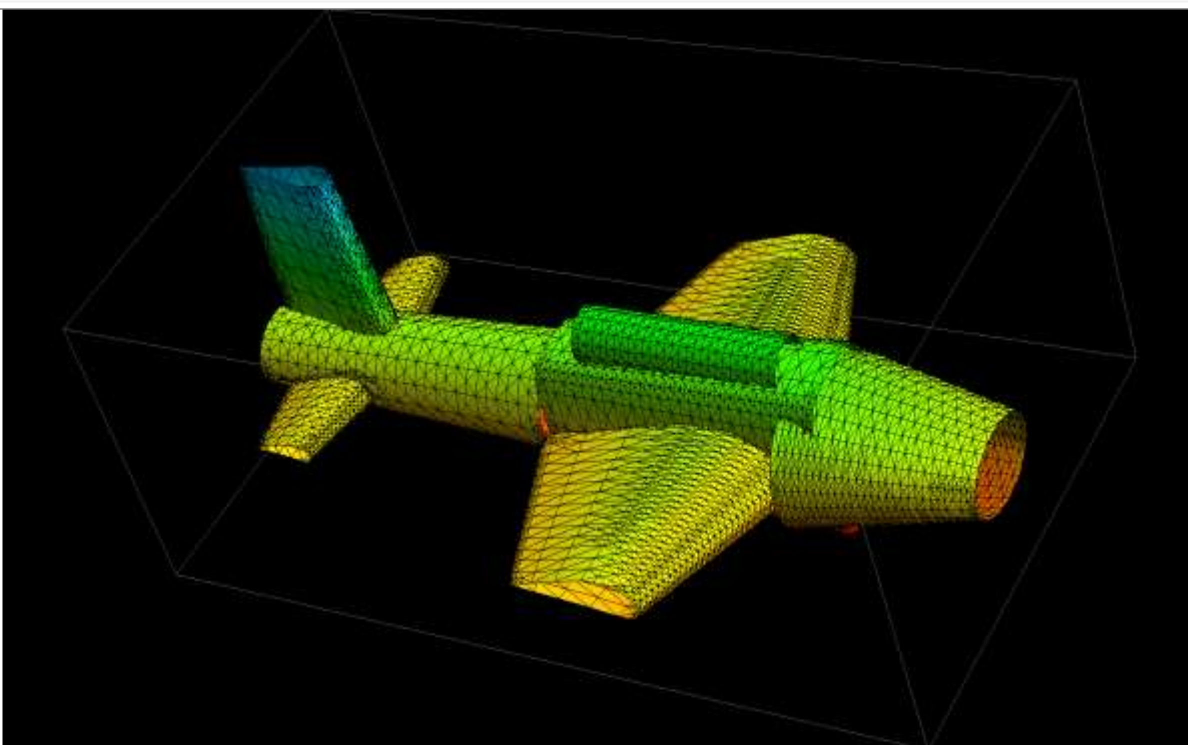
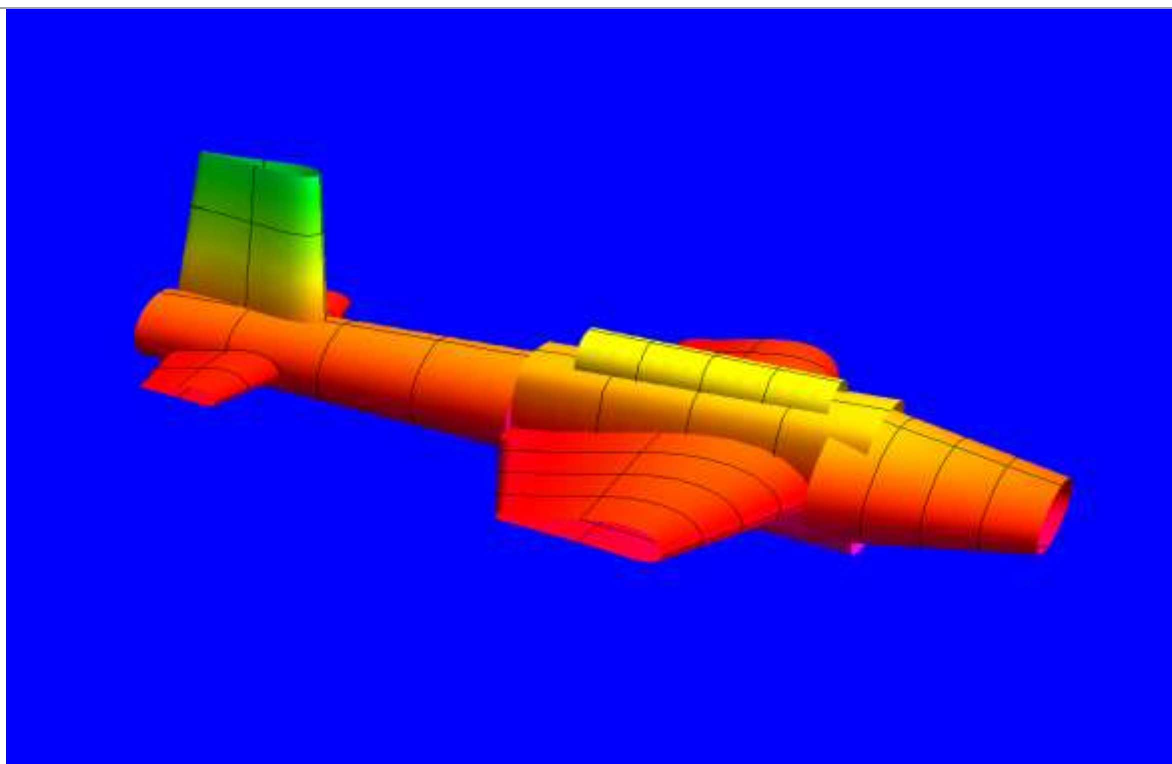


Fig. 22.27 Particula lui "Dumnezeu" în mai multe vederi







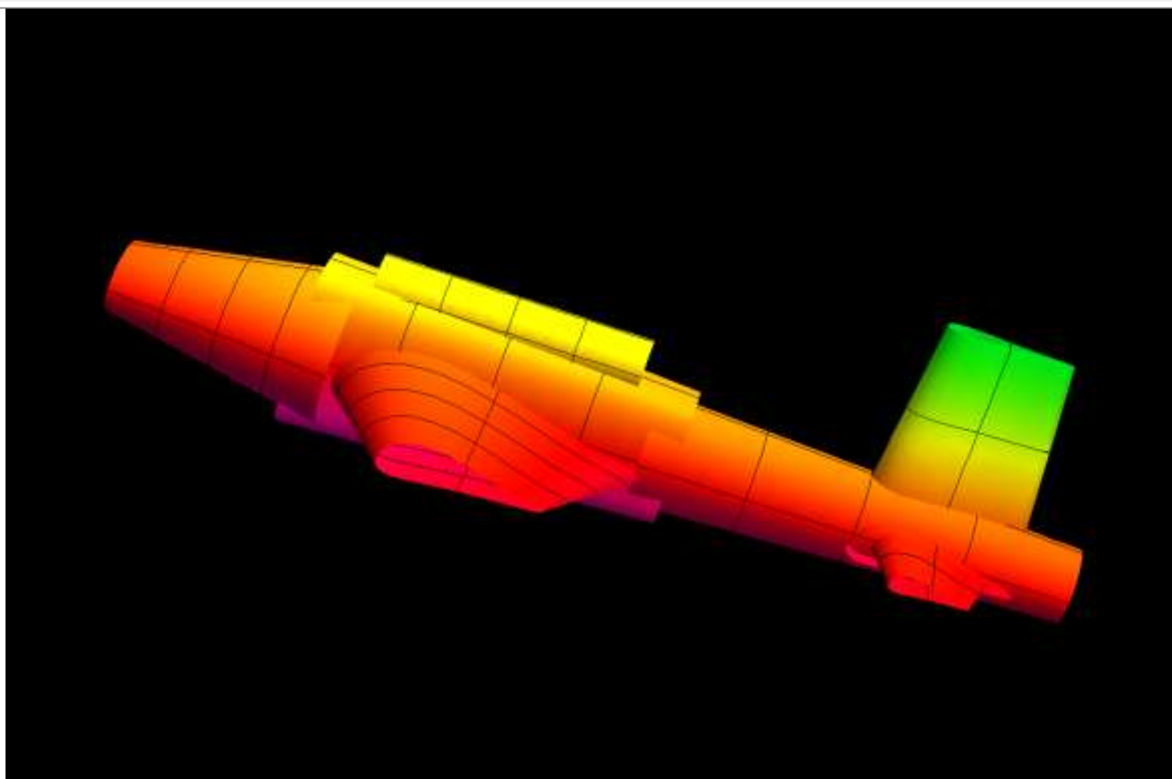


Fig. 22.28 Avioane realizate cu **FSM-CE**

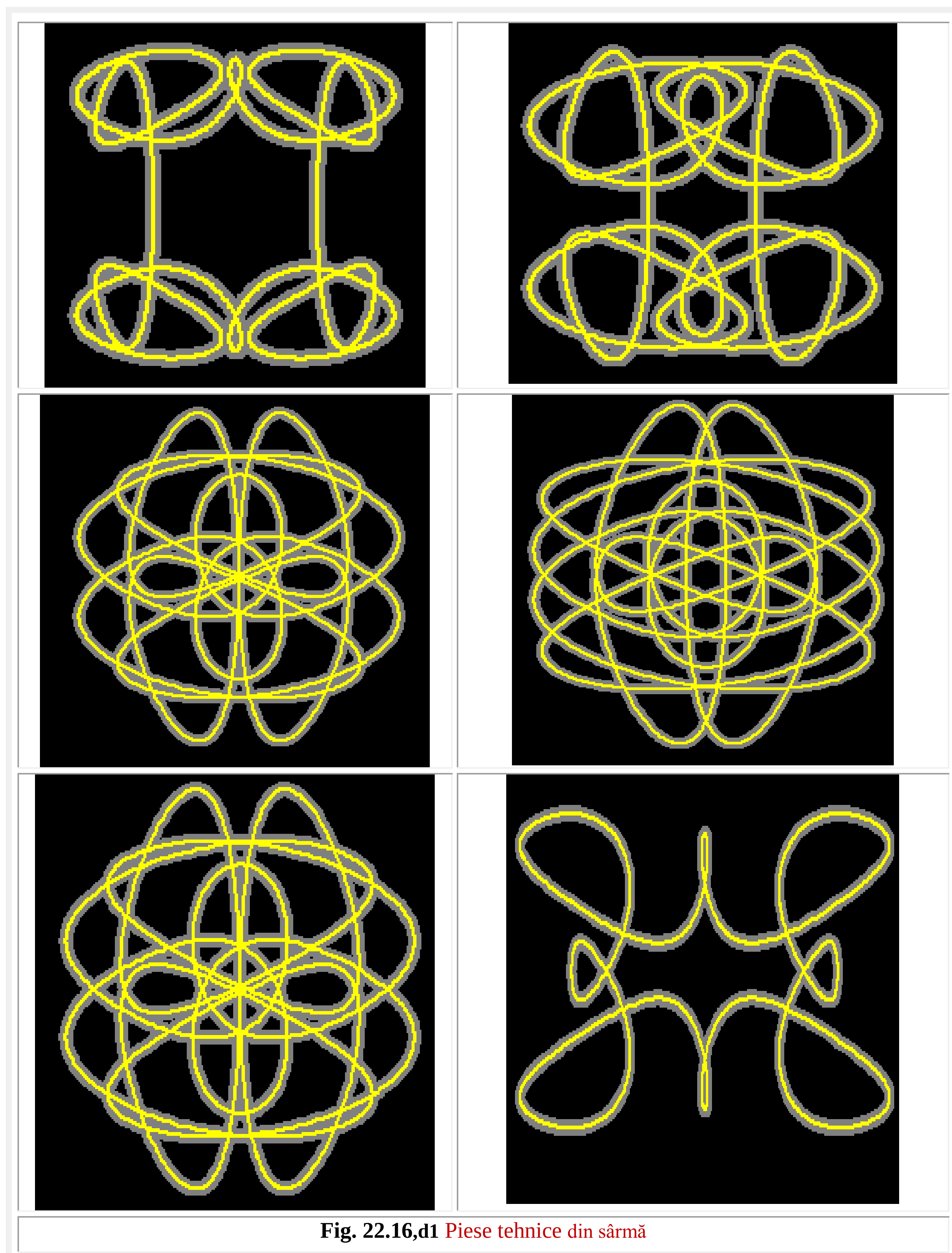


Fig. 22.16,d1 Piese tehnice din sârmă

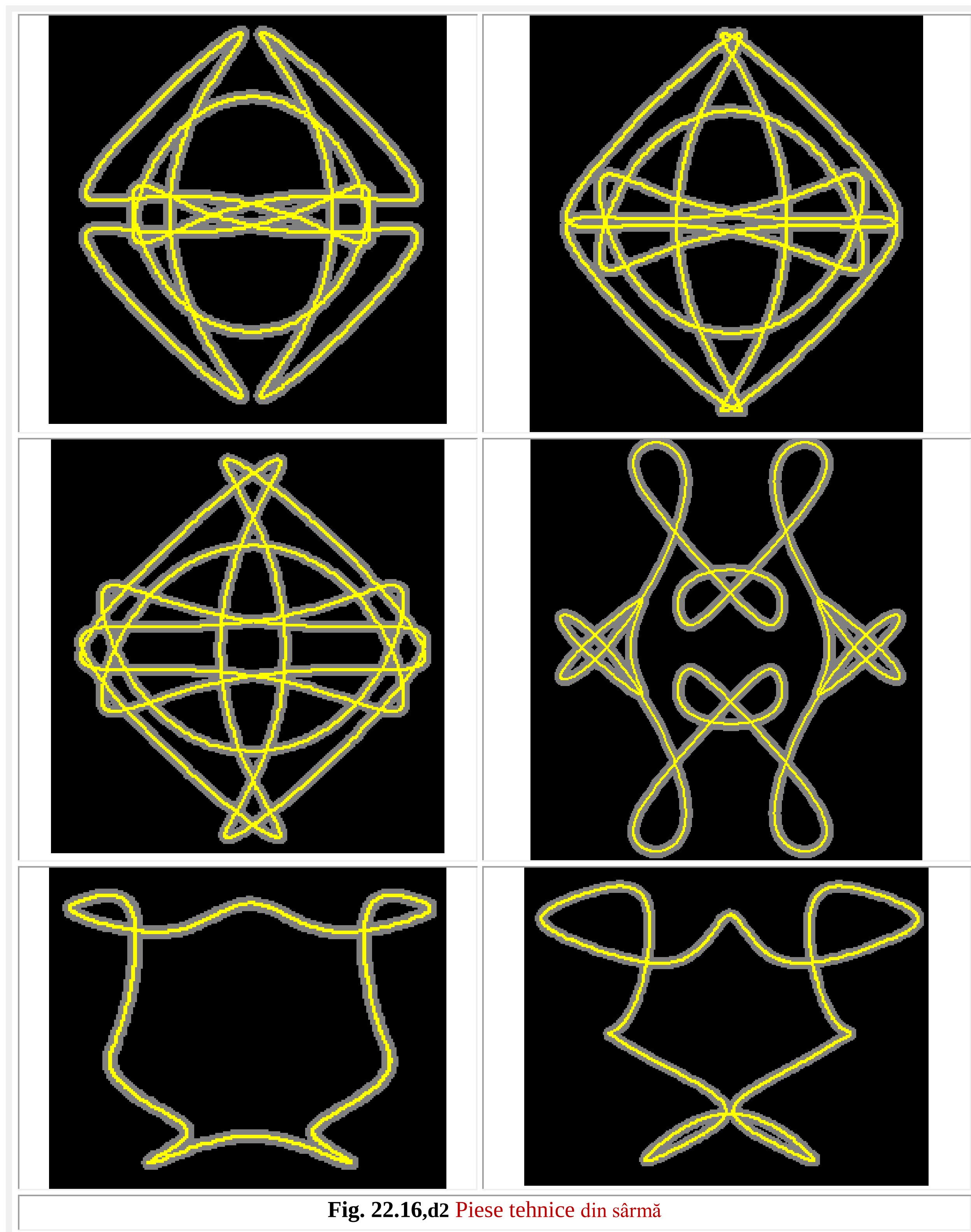


Fig. 22.16,d2 Piese tehnice din sârmă

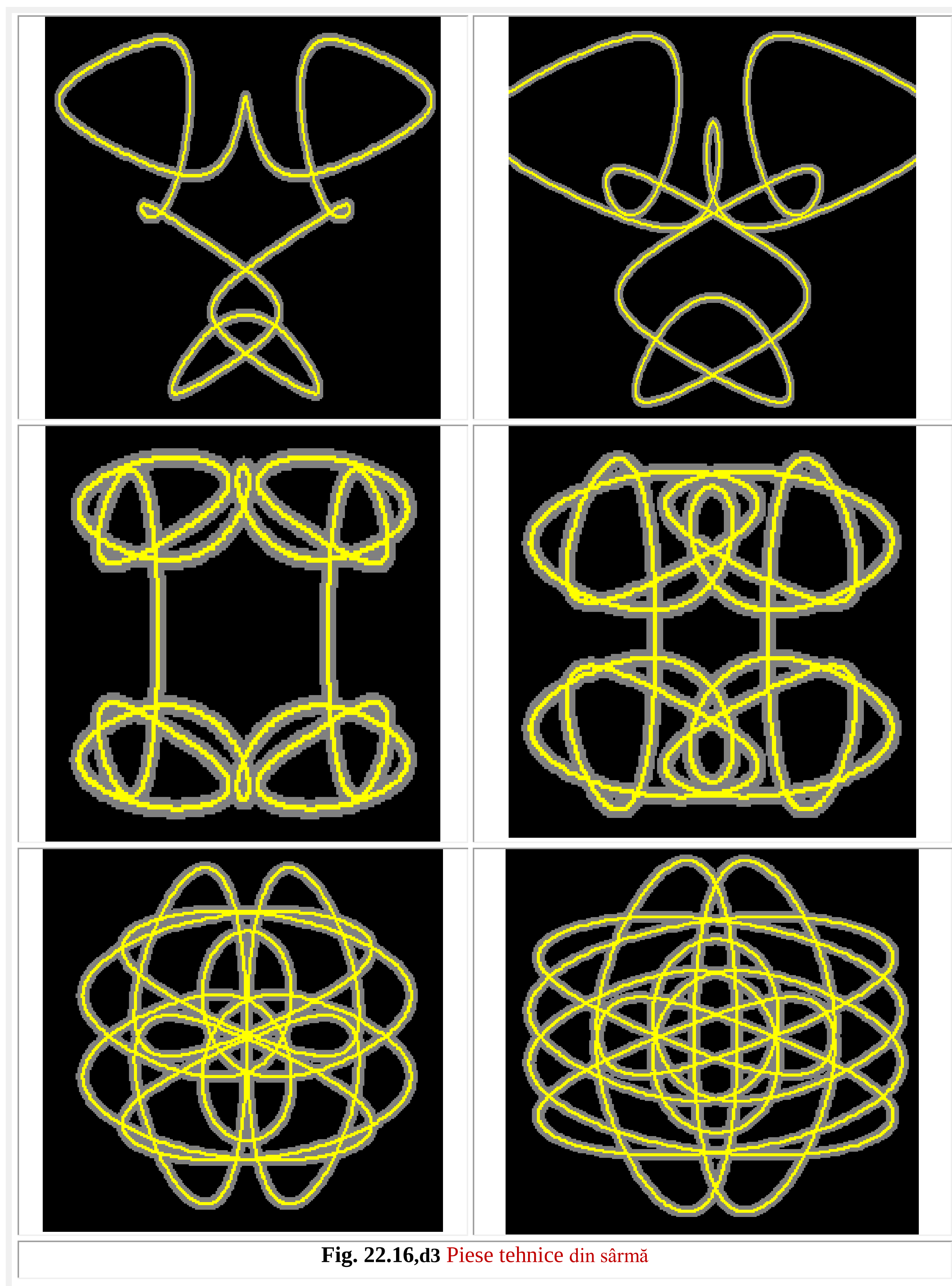
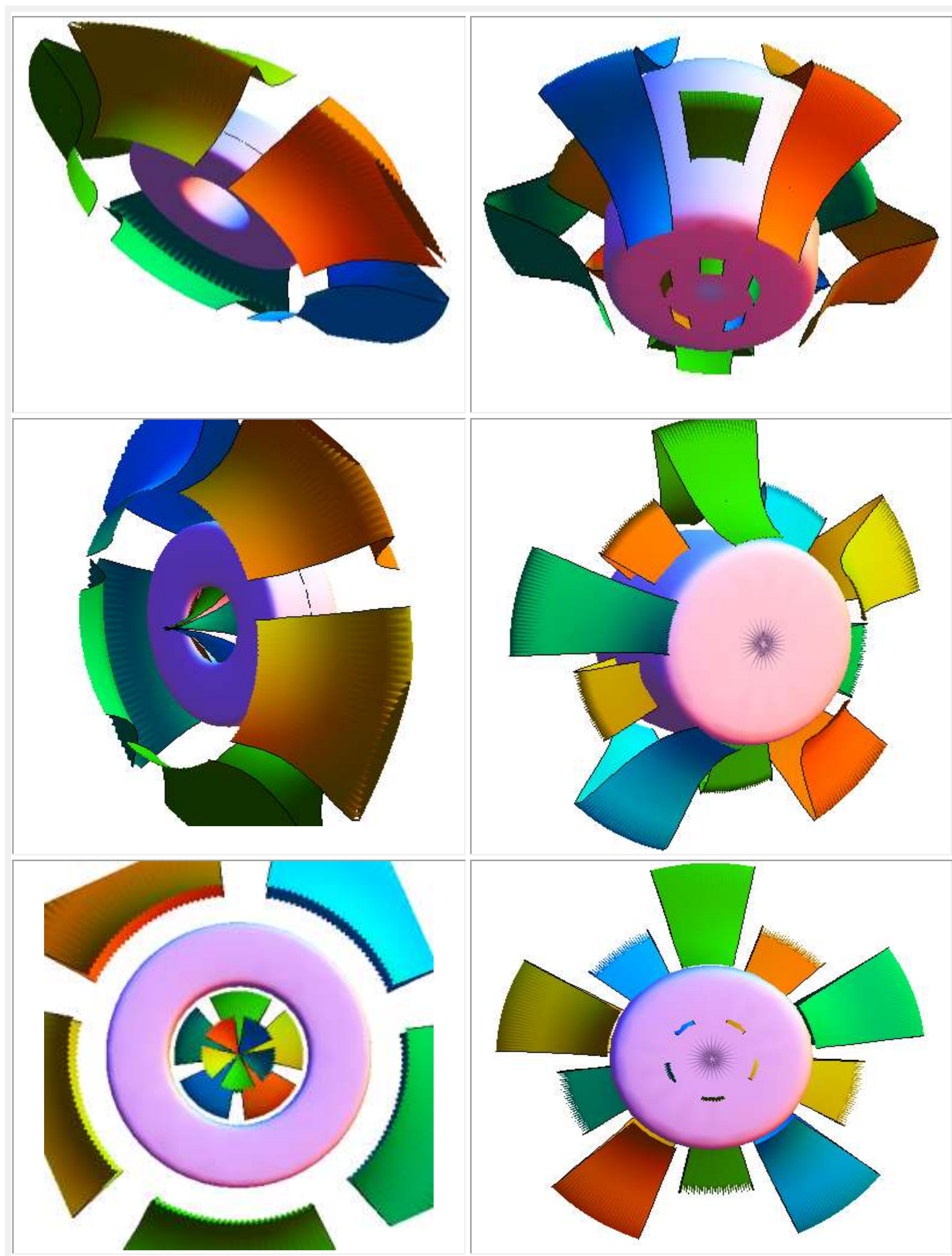
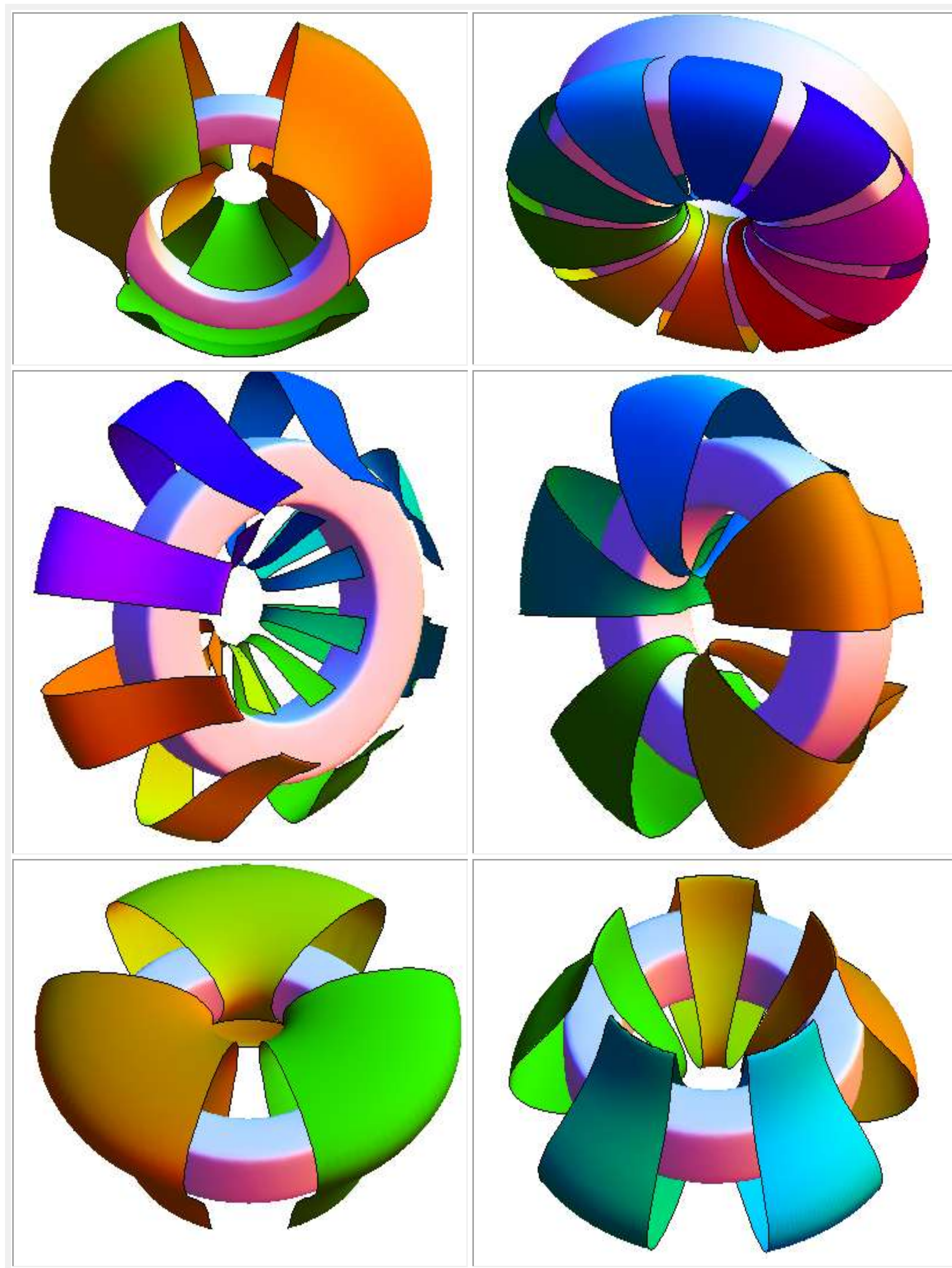


Fig. 22.16,d3 Piese tehnice din sârmă

22.5 TOR SEGMENTAT SM DE SECŢIUNE PĂTRATĂ





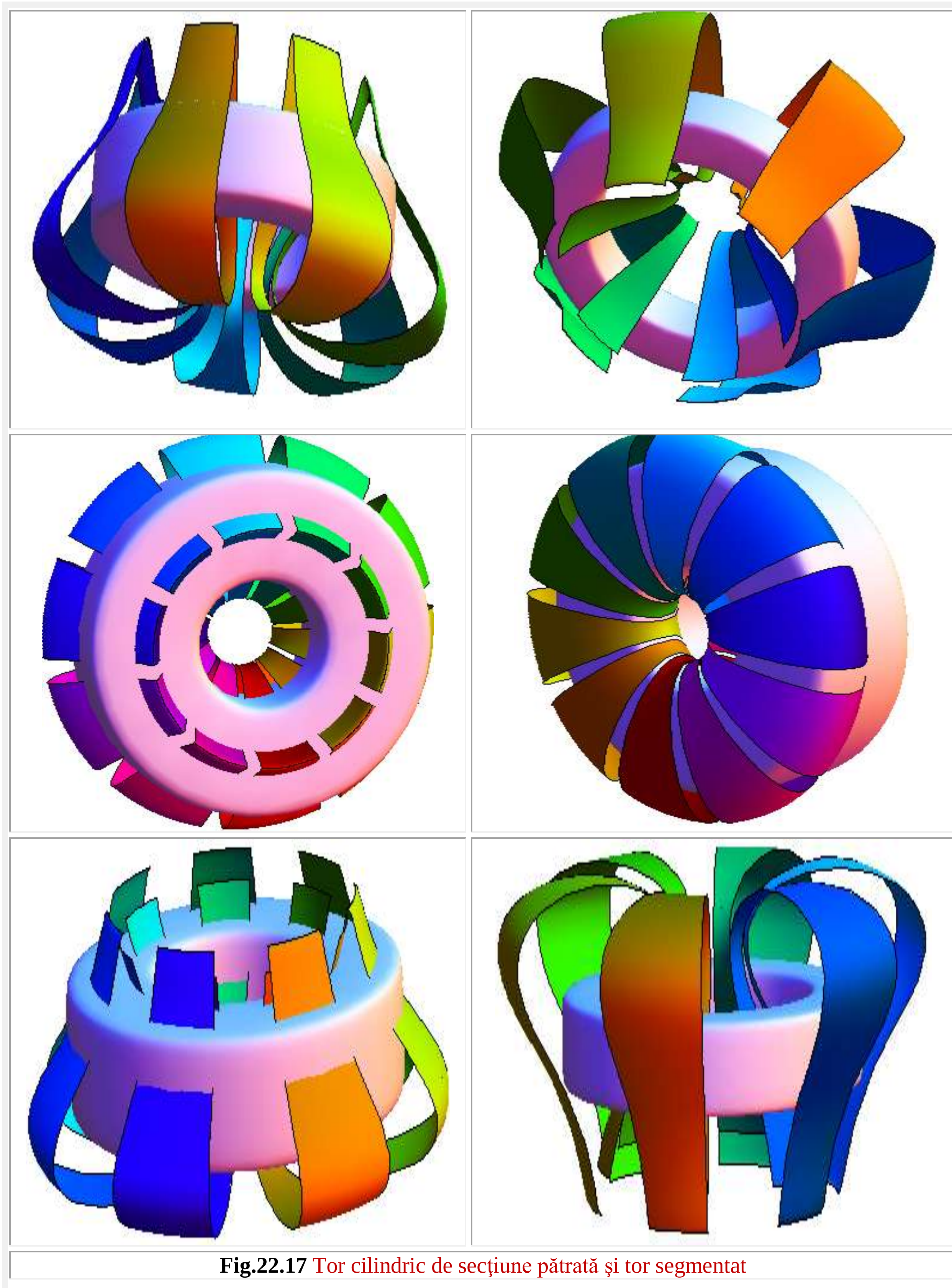
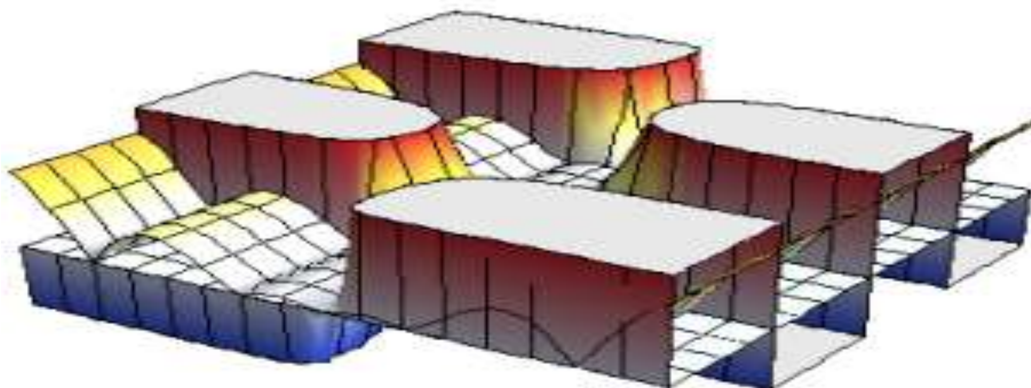
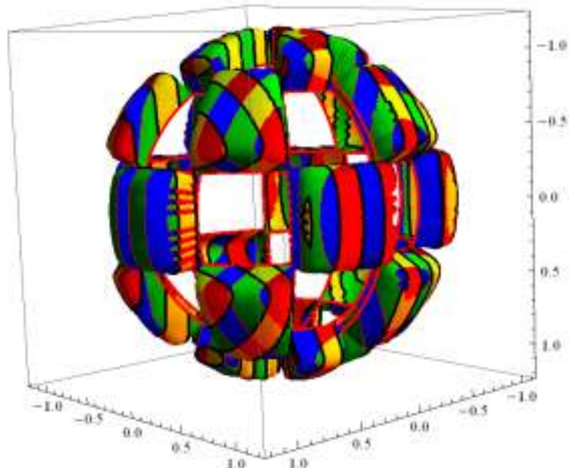


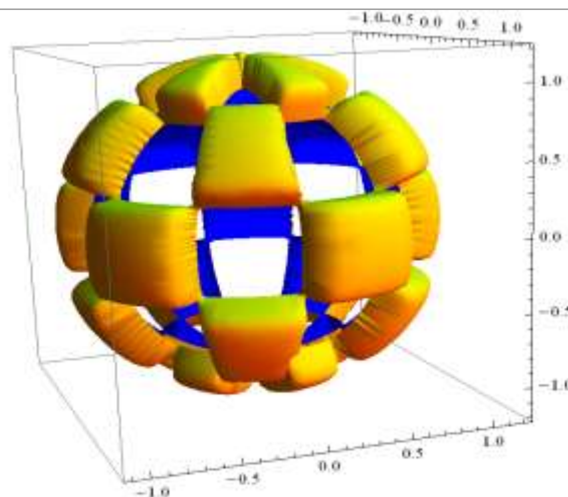
Fig.22.17 Tor cilindric de secţiune pătrată şi tor segmentat

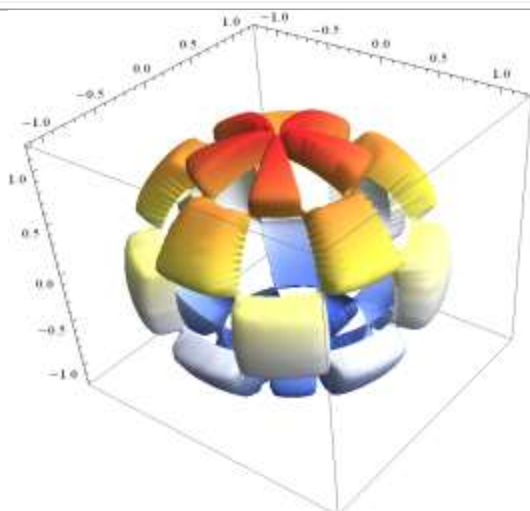
22.6 SISTEME DE PIESE TEHNICE

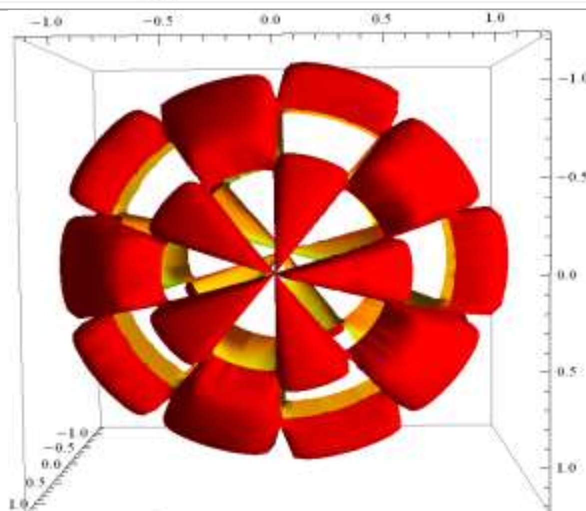
```
Plot3D[{{Re[Cos[t]Sin[Iu]],Im[Sin[Iu]Sin[t-ArcSin[0.1uSin[It]]]Sqrt[1-(0.1 u)^2]], Abs[0.2 u Cos[u]] }},
{u, -2 Pi, 2 Pi}, {t, -2 Pi, 2 Pi}]
```

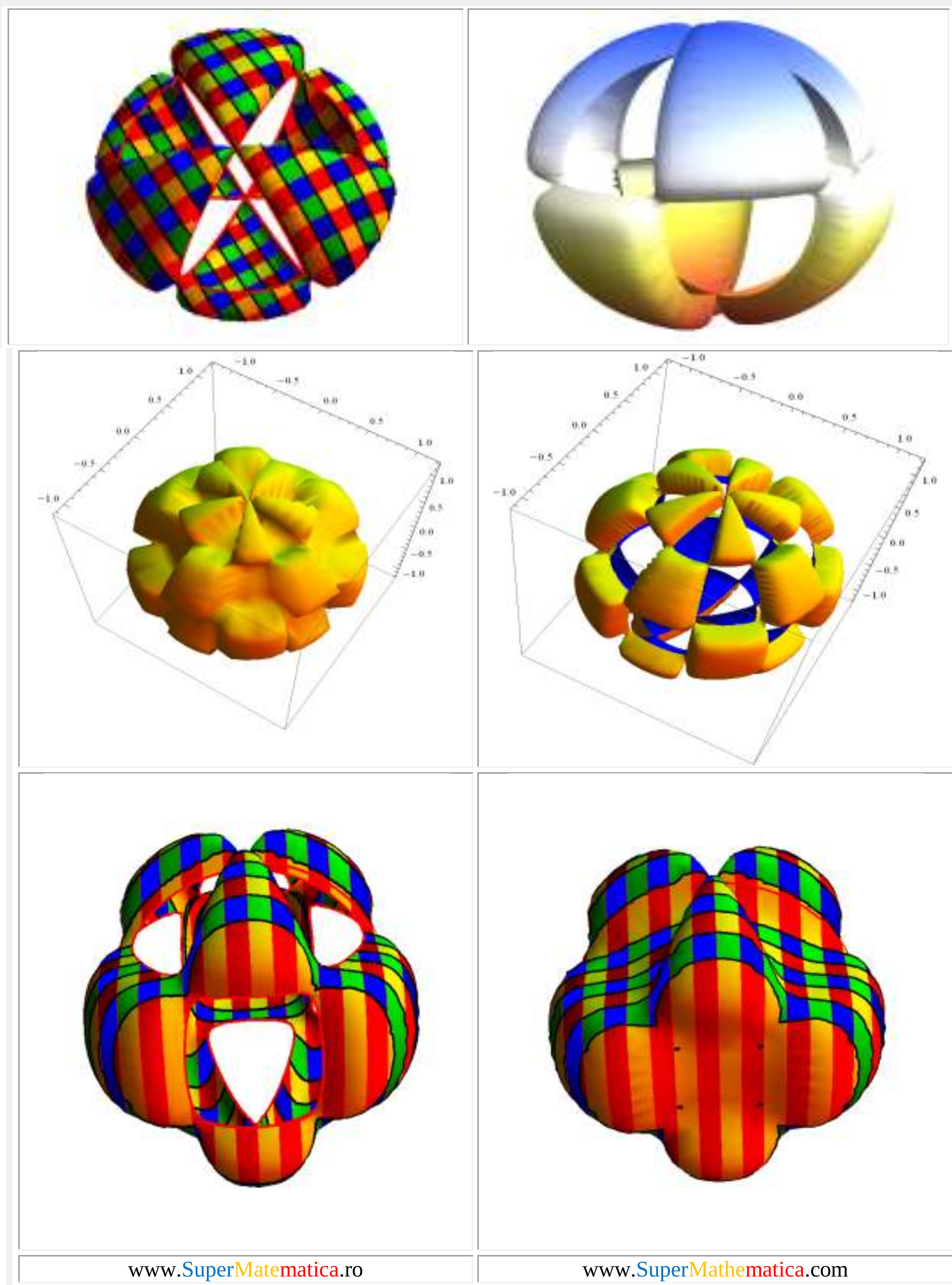











www.SuperMatematica.ro
www.SuperMathematica.com

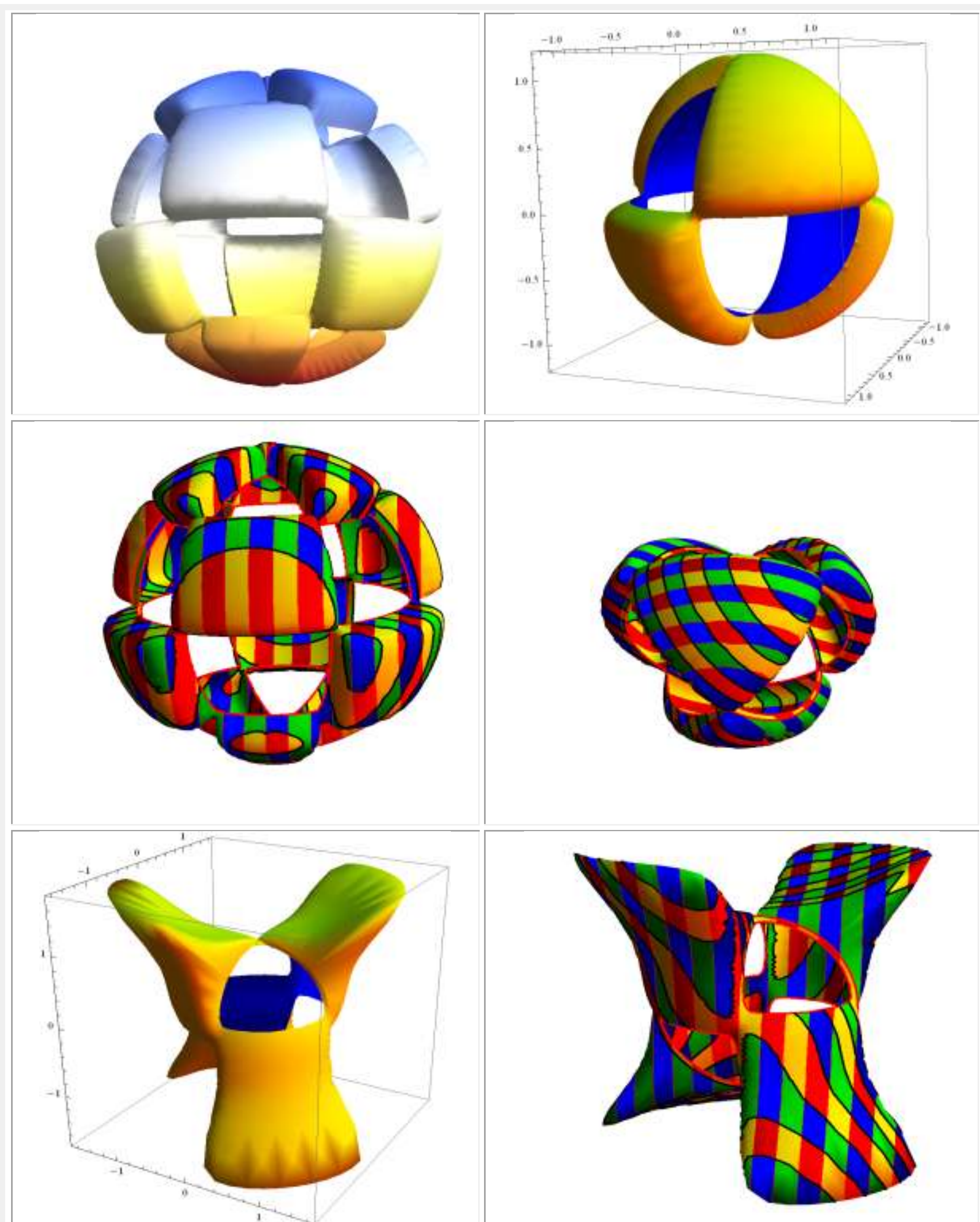
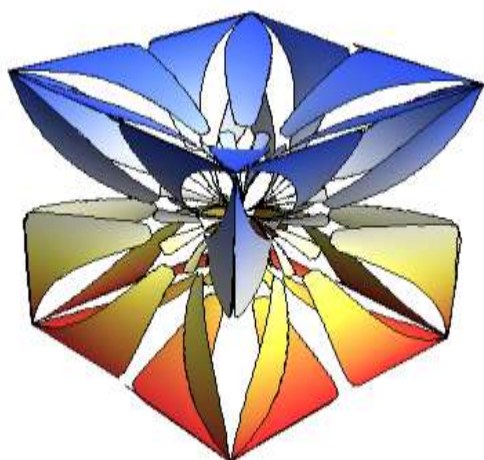
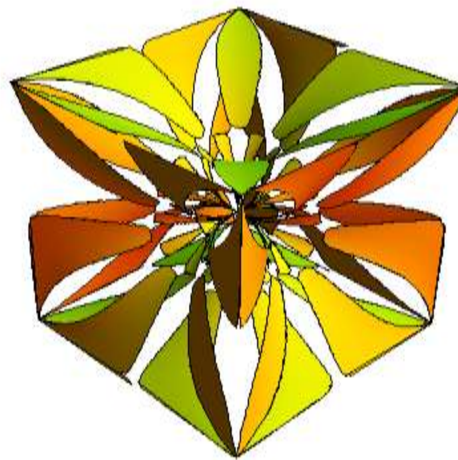


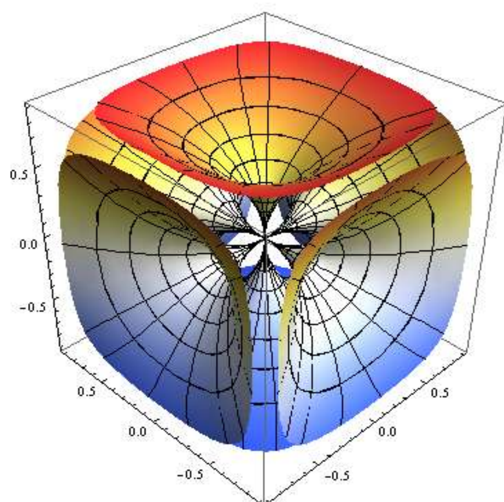
Fig. 22.18 Sisteme de piese tehnice

www.Supermatematica.ro | www.Supermathematica.com

```
ParametricPlot3D[{{u^2 Cos[t]/Sqrt[1-(u^3  Sin[t])^2],u,   u ^2 Sin[t]/Sqrt[1-(u^3  Cos[t])^2]},
{u^2 Cos[t]/Sqrt[1-(u^3 Sin[t])^2],   u ^2 Sin[t]/Sqrt[1-(u^3 Cos[t])^2],-u},
{u,u^2 Cos[t]/Sqrt[1-(u^3 Sin[t])^2],   u^2 Sin[t]/Sqrt[1-(u^3 Cos[t])^2]}}, {t,-2 Pi,2 Pi},{u,-1,1}]
```







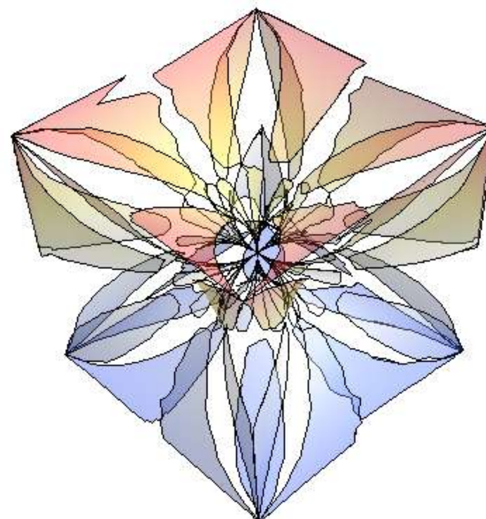


Fig. 22.19 Conopiramidă inclusă în conopiramidă

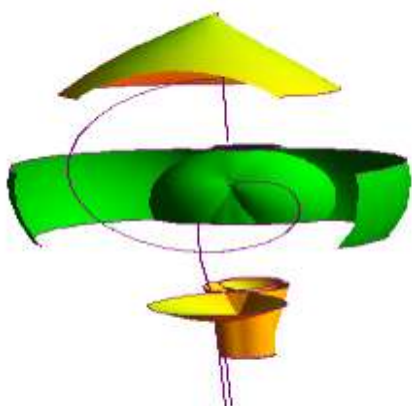






Fig. 22.20 Lampioane chinezești realizate cu **FSM** românești

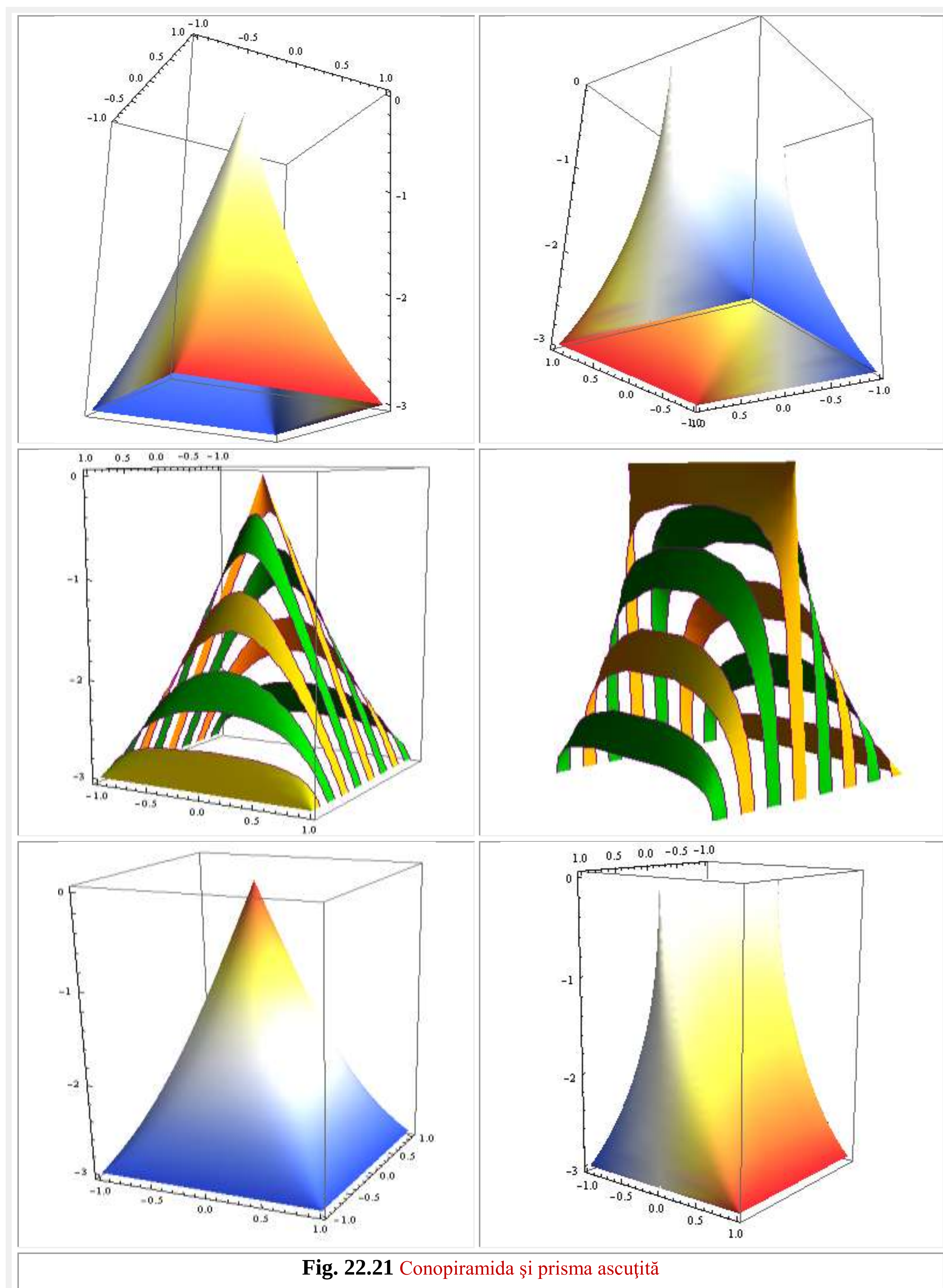


Fig. 22.21 Conopiramida şi prisma ascuţită

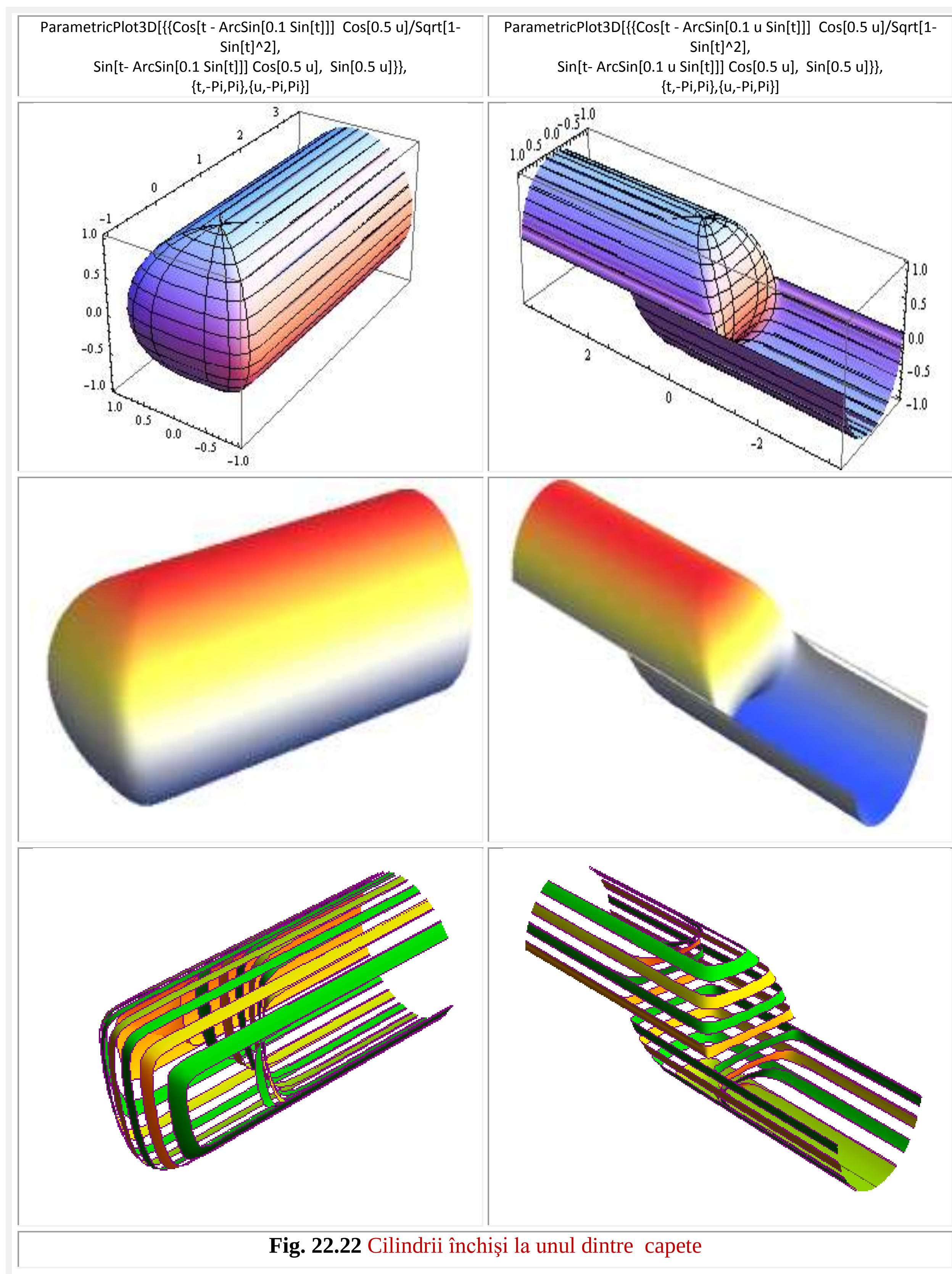


Fig. 22.22 Cilindrii închişi la unul dintre capete

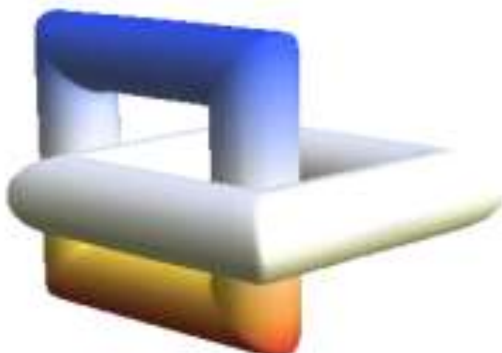
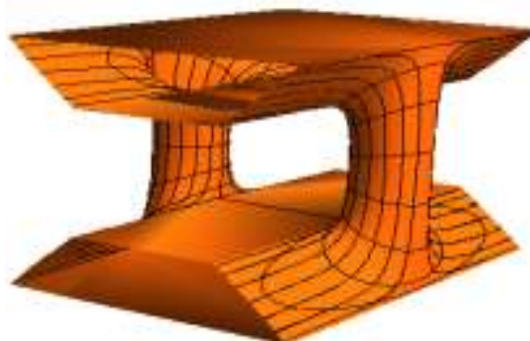
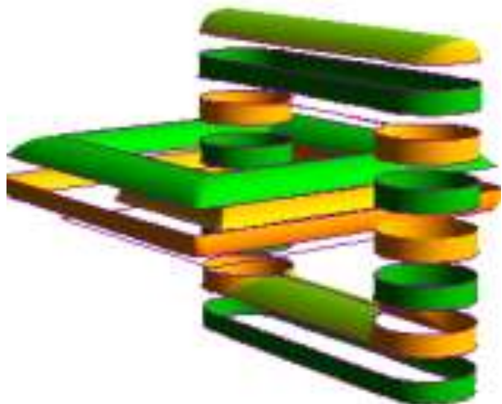
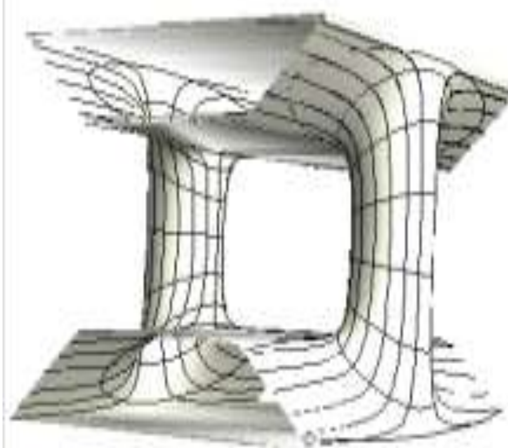
ParametricPlot3D[{{(3+Cos[v]) Cos[u]/Sqrt[1-(0.98 Sin[u])^2]+3,Sin[v],(3+Cos[v]) Sin[u]/Sqrt[1-(0.98 Cos[u])^2]},{(3+Cos[v]) Cos[u]/Sqrt[1-(0.98 Sin[u])^2],(3+Cos[v]) Sin[u]/Sqrt[1-(0.98 Cos[u])^2],Sin[v]}},{u,0,2 Pi},{v,0,2 Pi}]	ParametricPlot3D[{{ Sin[t]/Sqrt[1-Cos[t]^2]*(3+ Cos[u]),Cos[t]*(3+ Cos[u]),Sin[u]/Sqrt[1-Cos[t]^2]}},{t,0,2.2 Pi},{u,0,2 Pi}]
	
	
	

Fig. **22.23,a** Toruri pătrate de secţiuni cilindrice înlănţuite şi tor modificat

Motto: ”Lasă gândurile să zboare până în nori …”
Johann Christoph Friedrich von **Schiller**

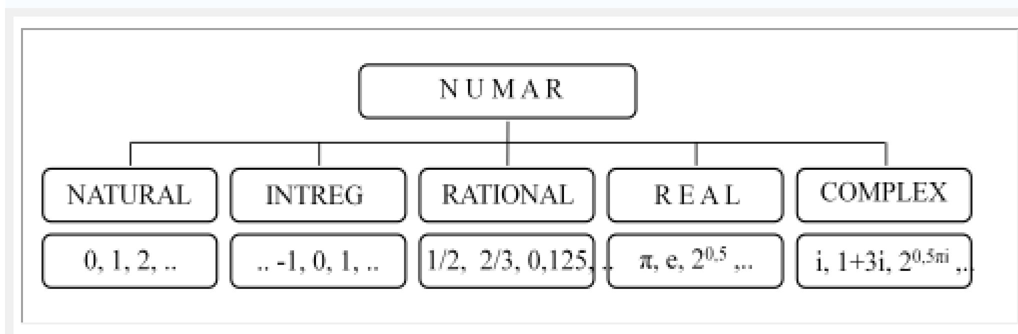
Capitolul 23

ÎN LOC DE POSTFAŢĂ :
MATERIA NEAGRĂ A UNIVERSULUI MATEMATIC

Aşa cum haosul absolut şi ordinea perfectă sunt unul şi acelaşi obiect matematic: o sferă invizibilă şi, ca urmare, de dimensiuni nemarginite, tot aşa materia neagră şi petele albe ale universului matematic exprimă, la un moment dat, una şi aceeaşi entitate matematică: sfera invizibilă a conoştinţelor matematice (încă) neconoscute la un anumit moment istoric, nefiind cunoscute sau vizibile la acea dată.

Un exemplu, relativ simplu, este din domeniul numerelor.

Iniţial, universul matematic al numerelor, universul numerelor vizibile, era format numai din **numere naturale** sau **întregi**, **pozitive** $\mathbb{N}^+$**.** Tote celelalte mulţimi de numere, şi nu sunt puţine (vezi mai jos şi **Fig.23.1**), formând, la o anumită dată, materia neagră sau invizibilă / necunoscută a universului numerelor matematice.



Omenirea a avut nevoie de mii de ani pentru a sesiza şi constata că **între** două numere întregi **n – 1** şi **n** sau între **n** şi **n + 1** există o infinitate de alte numere.

Acesta pe o singură direcţie, s-o numim X.

Apoi, numerele s-au extins pe două direcţii, sau în planul cartezian **XOY**, sau planul complex, denumit şi plan vectorial, prin **numerele complexe** $\mathbb{C}$. Ele sunt o sumă (vectorială) a două numere: unul **real** (**x**) şi unul pur **imaginar** (**iy**).

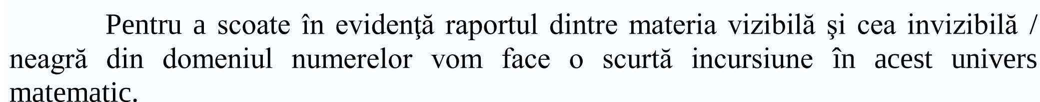
Există şi sume vectoriale în spaţiul 3D: V = ai + bj + ck, $a, b, c, \in \mathbb{R}$, în care i, j, k sunt versorii axelor / direcţiilor X, Y, Z, dar se cunosc şi numere hipoercomplexe, ca de exemplu

$\mathbb{H} = \{a1 + bi + cj + dk, \text{în care } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

În domeniul teorie numerelor, insulele albe de necunoaştere sau **materia neagră** a universului matematic sau a „cunoştinţelor matematice (încă) necunoscute” a

scăzut dramatic. Dar, totuşi, mai e suficient loc pentru unele completări. Nu acelaşi lucru s-a întâmplat şi în celelalte domenii ale universului matematic.

Fig. 23.0,a Numere întregi ℤ, numere naturale $\mathbb{N}^+$, **0** şi $\mathbb{N}^-$, numerele complexe **ℂ,** precum şi posibilitatea exprimării numerelor reale ℝ prin utilizarea excentricităţii liniare numerice s (n,**s** ∈ ℝ), n ∈ ℤ; **s ∈** ℝ



Pentru a scoate în evidenţă raportul dintre materia vizibilă şi cea invizibilă / neagră din domeniul numerelor vom face o scurtă incursiune în acest univers matematic.

23.1. PE SCURT, DESPRE NUMERE

… ℕ… ℤ… ℚ…𝕀…𝕋… ℝ… ℂ….

Lanţul de incluziuni ℕ ⊂ ℤ ⊂ ℚ ⊂ ℝ ⊂ ℂ ⊂ .. (**Fig. 23.1**) exprimă **extensia noţiunii de număr**.

23.1.1 **Numerele întregi** ℤ sunt mulţimea compusă din **numerele naturale** ℕ ={1, 2, 3, 4,...;}= $\mathbb{N}^+$, împreună cu cele negativele ale acestora $\mathbb{N}^-$ ={−1, −2, −3, −4, ...} şi cu numărul zero. Mulţimea tuturor întregilor se notează de obicei cu **Z** (sau **ℤ** îngroşat).

Numele provine de la cuvântul german **"Zahl(en)"** care înseamnă (→) "**număr, numărare**".

Introducerea **numerelor negative** şi a celor **întregi Z** a fost necesară pentru exprimarea soluţiilor ecuaţiilor de forma

(23.1) a + x = b, → x = b – a a, b ∈ ℕ, (ℕ - Mulţimea numerelor **naturale** **1,2,3, ... ,n)** iar, în cel mai general caz,

$$x \in \mathbb{Z} = \mathbb{N}^+(b > a) \cup 0(b = a) \cup \mathbb{N}^-(b < a).$$

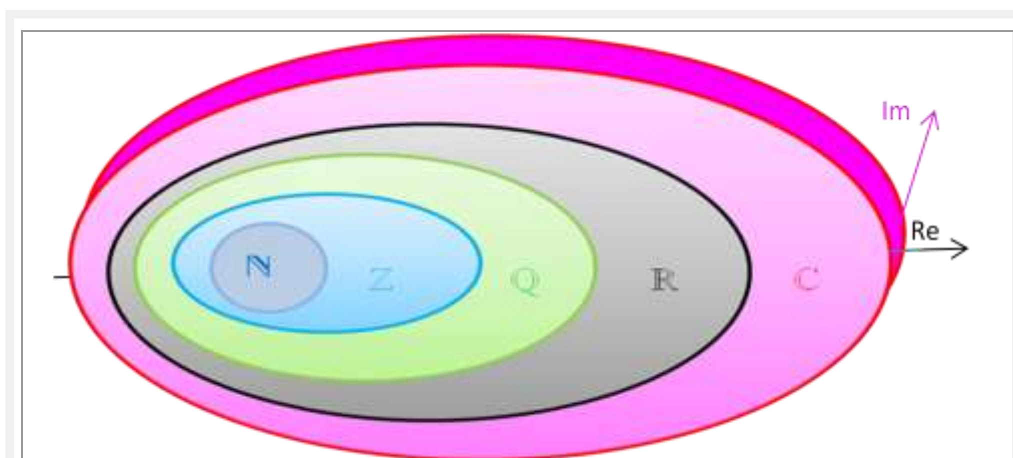


Fig. 23.1 Incluziunile mulţimilor de numere

MULŢIMI DE NUMERE			Tabelul 23.1
Numere naturale	**Numere raţionale**	**Numere reale**	**Numere complexe**
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ **Numere întregi** $Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$ $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ Orice număr **raţional** se reprezintă printr-o fracţie zecimală infinită şi periodică.	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} - \mathbb{I}$ unde $\mathbb{I}$ este mulţimea numerelor iraţionale; aceasta se mai notează $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ Orice numar iraţional se reprezintă printr-o fracţie zecimală infinită şi neperiodică, ca de exemplu: $\sqrt{2}$ = 1,4142213562 Aproximarile / trunchierile sunt numere raţionale : ▪prin lipsa, ex. $\sqrt{2}$ = 1; 1,4; 1,41; 1,414;.... ▪prin adaos, ex. $\sqrt{2}$ = 2; 1,5; 1,42; 1,415;....s.a.m.d.	$\mathbb{C} = \left\{ \begin{array}{l} a + i.b \\ \lvert a, b \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$ $i^2 = -1$, **i** - unitate **i**maginară $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

23.1.2 **Numerele raţionale** ℚ au fost întroduse pentru a exprima soluţiile ecuaţiilor algebrice de gradul **I:**

(23.2) ax + b = 0 , ➔ x = $-\ b/a$, x ∈ ℚ **a, b** ∈ ℕ (sau **a, b,** ∈ Z)

Mulţimea tuturor numerelor raţionale se notează Q, sau, în varianta îngroşată, ℚ.
Numele "**raţional**" nu provine de la "**raţiune**" = "**gândire**", ci de la "**raţie**" = "**raport**".
De aceea, ele mai sunt numite şi **fracţii** sau **numere fracţionare**.

MULŢIMEA NUMERELOR REALE $\mathbb{R}$	Tabelul 23.2
Structura algebrică	$(\mathbb{R}, +, -)$ este corp comutativ (corpul numerelor reale)
Structura de ordine	$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \rightarrow x \leq y \; sau \; y \leq x$
Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{R}$	Axa numerelor: $-\infty$ **O**(0,0) ∞ Oricărui numar real **x** îi corespunde pe axă un punct şi reciproc.Mulţimea $\mathbb{R}$ se mai numeşte **dreaptă reală** şi **numerele reale** se mai numesc **puncte**.
Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ Reperul cartezian: Oricăror perechi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ îi corespunde un punctul A din plan şi reciproc; x şi y sunt coordonatele carteziene ale lui A
Modulul	Definiţii: $\lvert x \rvert = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}, \; \forall\, x \in \mathbb{R}$ Proprietăţi: $\begin{cases} \begin{cases} \lvert x \rvert \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \lvert x \rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \lvert -x \rvert = \lvert +x \rvert \\ \lvert x + y \rvert \leq \lvert x \rvert + \lvert y \rvert \end{cases} \\ \begin{cases} \lvert x . y \rvert = \lvert x \rvert \lvert y \rvert \\ \lvert x^n \rvert = \lvert x \rvert^n, n \in \mathbb{N} \end{cases} \\ \left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert} \end{cases}$
	Observaţii: ***Fie x*** $\in \mathbb{R}$ ***şi*** $\mathcal{E} > 0$ $\begin{cases} \lvert \boldsymbol{x} \rvert = \mathcal{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \pm \boldsymbol{\varepsilon} \\ \lvert \boldsymbol{x} \rvert < \mathcal{E} \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \\ \lvert \boldsymbol{x} \rvert > \mathcal{E} \Leftrightarrow x < -\varepsilon \; sau \; x > \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\boldsymbol{\varepsilon}) \cup (\boldsymbol{\varepsilon}, +\infty) \end{cases}$

Orice număr raţional se poate scrie într-o infinitate de forme, de exemplu .. 2/6 = 1/3 = ...dar forma cea mai simplă este acea în care **a ≠ 0** şi **b** nu au divizori comuni, formă în care toate numerele raţionale pot fi scrise.

În notaţia analitică a mulţimilor, $\mathbb{Q}$ se defineşte astfel:

(23.3) $$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

23.1.3 Numerele reale (centrice ℝ) sunt obiecte ale gândirii umane rezultate printr-un îndelungat proces de abstractizare.

Mulţimea **numerelor reale** ℝ se justifică în analiza matematică şi în geometrie. **Numerele reale** pot fi **raţionale** sau **iraţionale**, **algebrice** sau **trans-cendente**, **pozitive** sau **negative**. (**Tab. 23.2**).

Din punct de vedere geometric, mulţimea numerelor reale reprezintă o dreaptă, căreia i se asociază un punct **O(0),** numit origine, corespunzător valorii **0** şi un sens de parcurgere (**Tab.23.2**): plus (→ +) corespunzător **numerelor pozitive**, iar sensul opus, minus (← –) corespunzator **numerelor negative**. Se ştie că, orice dreaptă coţine două axe, corespunzătoare celor **două sensuri** ale unei direcţii / drepte.

Ca urmare, pe o dreaptă, **coexistă** două axe: **axa numerelor pozitive** (→) şi **axa numerelor negative** (←).

Ca oricare axă, şi mulţimea numerelor reale este infinită în ambele sensuri sau pe ambele axe: **pozitivă** şi **negativă**.

Mulţimea numerelor reale este o reuniunea a mulţimii numerelor raţionale cu cele iraţionale: ℕ inclus în ℤ, ℤ inclus în ℚ, ℚ inclus în ℝ , iar mulţimea **numerelor iraţionale** se obţine prin: ℝ- ℚ.

În matematică, un **număr iraţional** este un **număr real** care **nu** se poate exprima prin raportul (sau **raţia**) a două numere întregi ℤ.

Prin contrast, numerele reale care se pot exprima ca / drept **raportul** dintre două numere întregi se numesc **numere raţionale**.

Cel mai **simplu** număr iraţional este $\sqrt{2} = 1{,}4142135624$ ...iar exemplul **clasic** al **numărului iraţional** este numărul **π** care, geometric, reprezintă rapotul dintre circumferinţa oricărui cerc şi diametrul acestuia, cu valoarea aproximativă 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944...de 60 de zecimale exacte, câte a reuşit să memoreze autorul în decursul timpului.

Se ştie că fiecărui numar real **x** îi corespunde pe axă un punct şi reciproc. Mulţimea ℝ se mai numeşte **dreaptă reală** şi **numerele reale** se mai numesc **puncte**.

Originea O(**0**) reprezintă una din graniţele submulţimii numerelor naturala ℕ inclusă în mulţimea numerelor întregi ℤ.

Cum se poate trece de la numerele naturale ℕ întregi, de exemplu, la numărele întregi ℤ , la cele raţionale ℚ, la cele reale ℝ va fi exemplificat în continuare.

23.2. NUMERE IRAŢIONALE EXCENTRICE (II)

Prin apariţia **matematicii excentrice** (extraordinare) care, împreună cu **matematica centrică** (clasică, ordinară), adică prin reunirea lor, formează ceea ce s-a numit **supermatematică**, toate obiectele matematice au fost multiplicate de la unu la infinit. Astfel, unui anumit cerc, din **domeniul centric**, de o raza R dată, îi corespund, în **domeniul excentric**, o infinitate de "**cercuri excentrice**" denumite "**excentrice circulare**", infinitate corespunzătoare infinităţii punctelor din plan în care poate fi

plasat punctul **E(e,ε),** denumit **excentru** sau **ex-centru**, pentru că a fost expulzat din centrul **O(0,0)** al cercului **C(O,R)** şi originea **O(0,0)** a unui reper cartezian drept şi / sau polar.

Odată cu multiplicarea la infinit a cercului, prin descoperirea **excentricelor circulare**, numărul **π ⊂ Π** ∈ **[**2**, 8** ∨ ∞**]** s-a dovedit a fi **doar o valoare** a acestui raport, pentru una dintre excentricele circulare, şi anume, cea de excentricitate numerică **s = 0,** adică **π = Π(s = 0),** care aparţine, deci, **domeniului centric**.

Mulţimea de valori**,** ca raport dintre circumferinţa **excentricelor circulare**, care diferă ca formă şi lungime în funcţie de poziţia excentrului **E(e,ε),** adică, de **excentricitatea numerică liniară s** şi de **excentricitatea unghiulară ε** şi de diametrul cercului, care este o constantă, este **Π.**

Valoarea minimă, când excentrica circulară se "prăbuşeşte" peste diametrul cercului unitate este $\Pi_m = 2$ (**Fig.23.2** ⇔ centru).

Valoarea **maximă**, pentru **e ∈ [-1, 1]** şi **ε = 0**, este $\Pi_M = 4 = 4 \cdot 2/2$ şi aparţine excentricei circulare degenerată într-un **pătrat perfect** (**Fig. 23.2**⇔), pătrat obţinut pentru excentricitatea numerică **s = ± 1**.

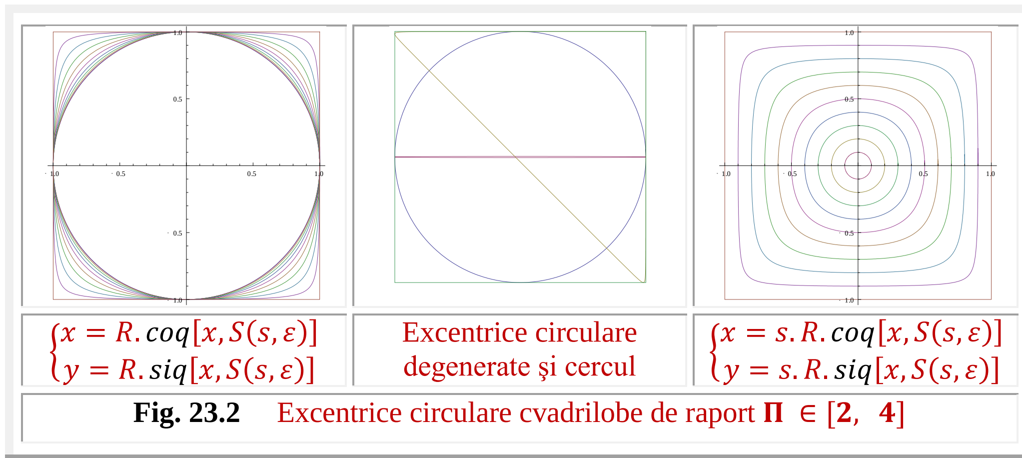


Fig. 23.2 Excentrice circulare cvadrilobe de raport **Π** ∈ [**2**, **4**]

Excentricele circulare, din părţile laterale ale **figurii 23.2**, în stânga, de acelaşi diametru $\phi D = 2R = 2$ şi în dreapta de raze variabile R = s, sunt descrise de funcţiile cosinus **R**.coqx şi sinus R.siqx **cvadrilobe**, prin ecuaţiile parametrice cunoscute

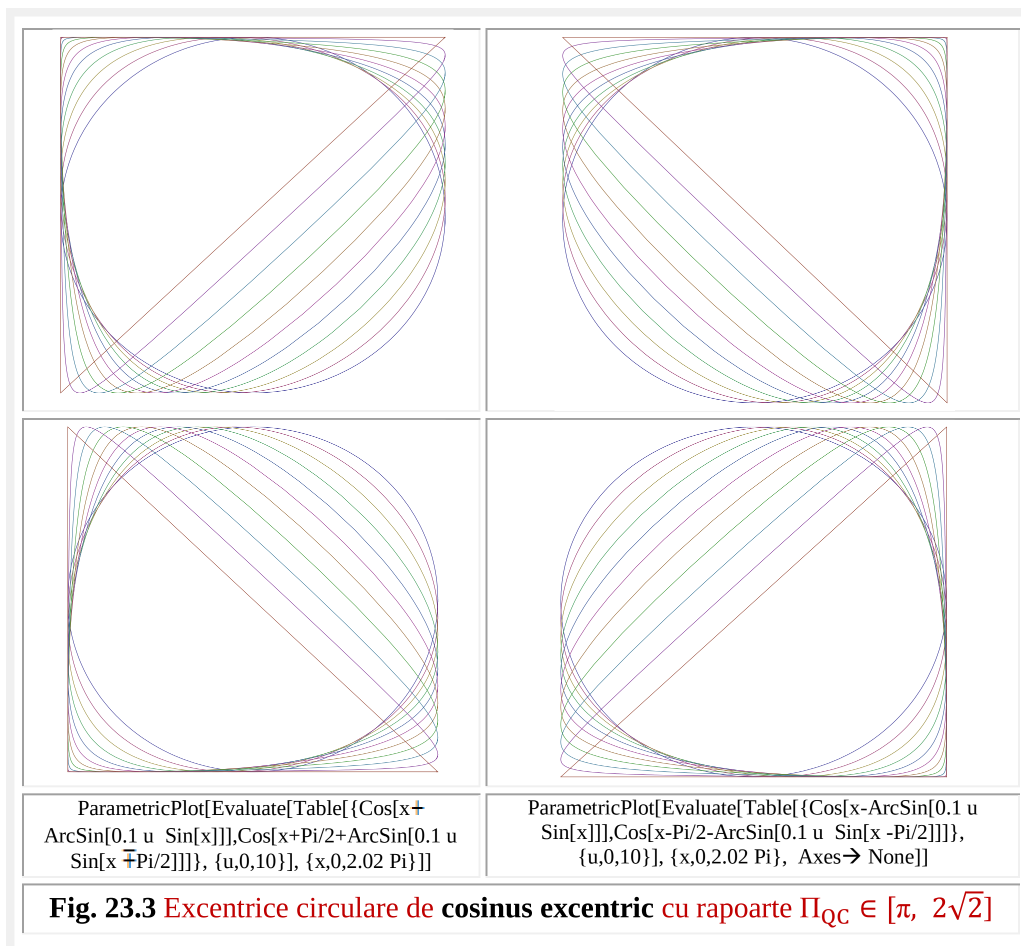
(23.4) $$\begin{cases} x = R.coq[x, S(s,\varepsilon)] \\ y = R.siq[x, S(s,\varepsilon)] \end{cases},$$

dar şi prin **FSM-CE derivată excentrică dexθ**:

(23.4') $$\begin{cases} x = R.dex\theta = R(-s.cos(\theta-\varepsilon) + \sqrt{1 - s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}) \\ y = R.dex\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = R\,(\mp s.sin[(\theta-\varepsilon)] + \sqrt{1 - s^2 cos^2(\theta-\varepsilon)}) \end{cases}$$

în care R = 1 şi au aceleaşi rapoarte Π_Q cuprinse în domeniul

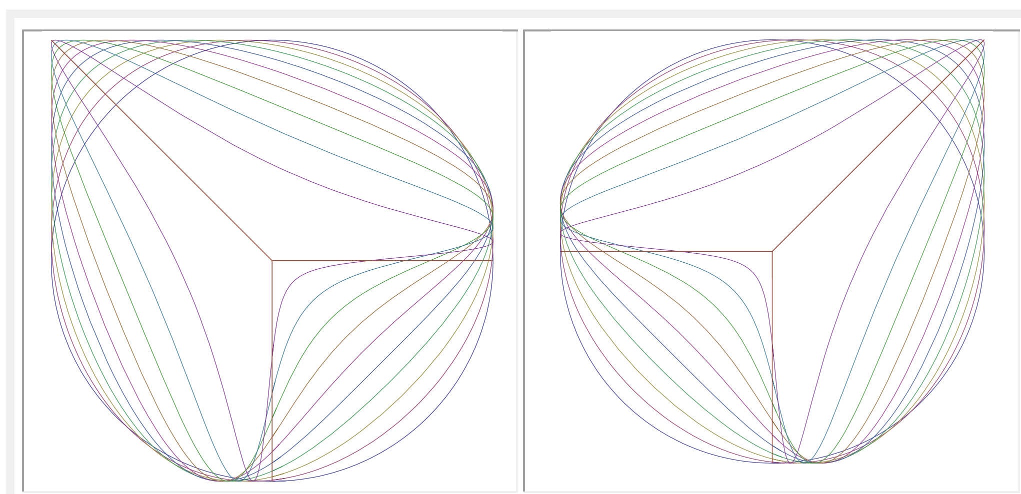
(23.5) $\Pi_Q = [2;\ (\pi = 3{,}1415\ldots);\ 4]$



ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[x± ArcSin[0.1 u Sin[x]]],Cos[x+Pi/2+ArcSin[0.1 u Sin[x ∓Pi/2]]]}, {u,0,10}], {x,0,2.02 Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[x-ArcSin[0.1 u Sin[x]]],Cos[x-Pi/2-ArcSin[0.1 u Sin[x -Pi/2]]]}, {u,0,10}], {x,0,2.02 Pi}, Axes→ None]]

Fig. 23.3 Excentrice circulare de **cosinus excentric** cu rapoarte $\Pi_{QC} \in [\pi,\ 2\sqrt{2}]$



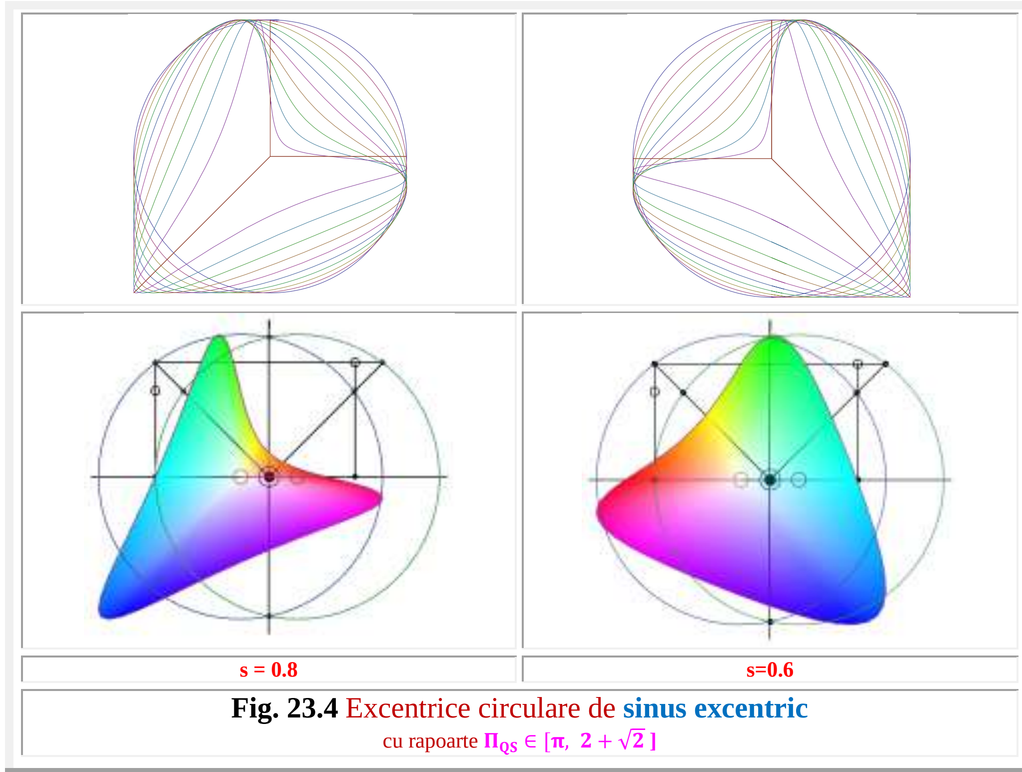
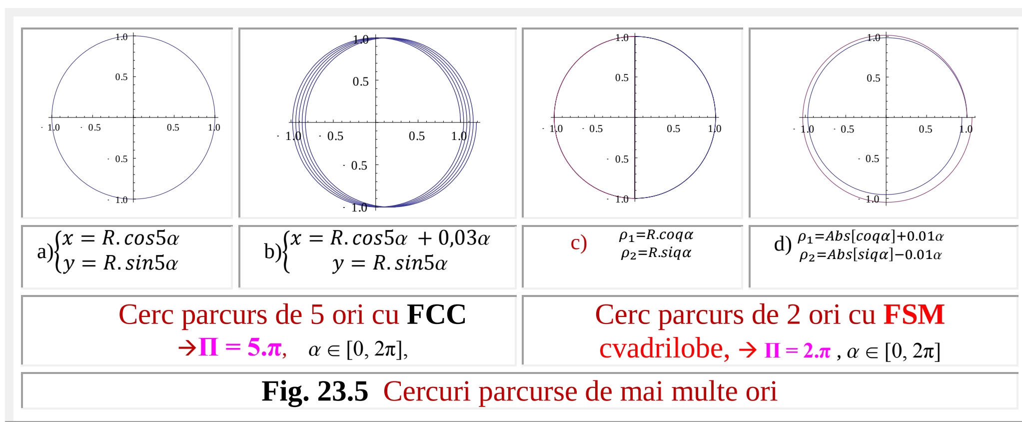


Fig. 23.4 Excentrice circulare de **sinus excentric**
cu rapoarte $\Pi_{QS} \in [\pi,\ 2+\sqrt{2}\ ]$



Cerc parcurs de 5 ori cu **FCC** $\rightarrow \Pi = 5.\pi$, $\alpha \in [0, 2\pi]$,

Cerc parcurs de 2 ori cu **FSM** cvadrilobe, $\rightarrow \Pi = 2.\pi$, $\alpha \in [0, 2\pi]$

Fig. 23.5 Cercuri parcurse de mai multe ori

Cu ecuaţiile (23.4) se obţin excentricele circulare cu centrul de simetrie plasat peste originea **O(0,0),** iar cu **FSM-CE** derivat excentrice

(23.4')
$$\begin{cases} x = R\ dex[\theta, S(s\ \in [-1,1], \varepsilon = 0)] \\ y = R\ dex[\theta \pm \frac{\pi}{2}, S(s\ \in [-1,1], \varepsilon = 0)] \end{cases}$$

se obţin aceleaşi **excentrice circulare**, dar de raze variabile R = **e**, plasate cu centrul de simetrie H în punctul H(1,1).

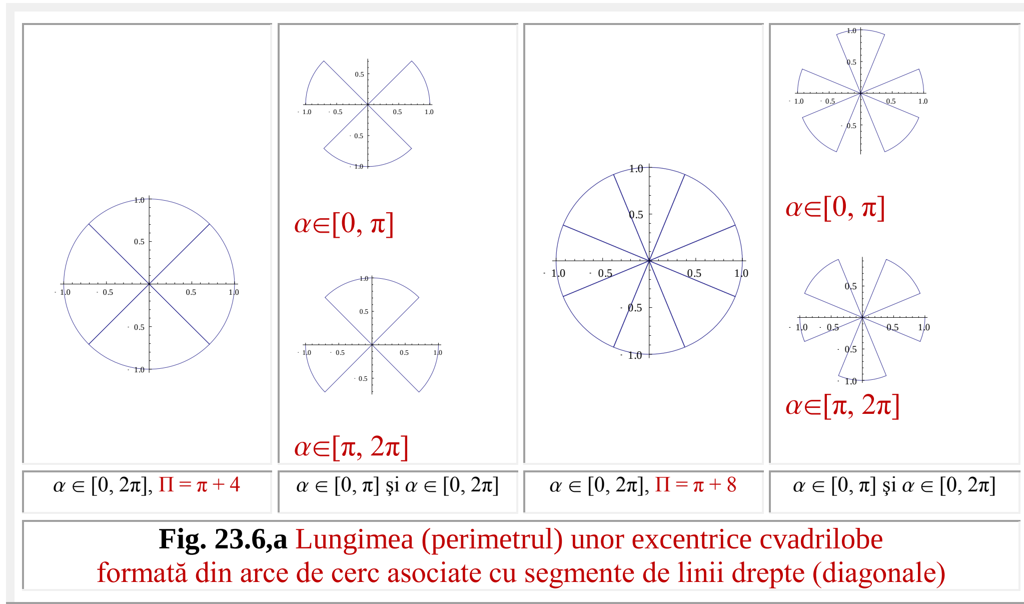


Fig. 23.6,a Lungimea (perimetrul) unor excentrice cvadrilobe formată din arce de cerc asociate cu segmente de linii drepte (diagonale)

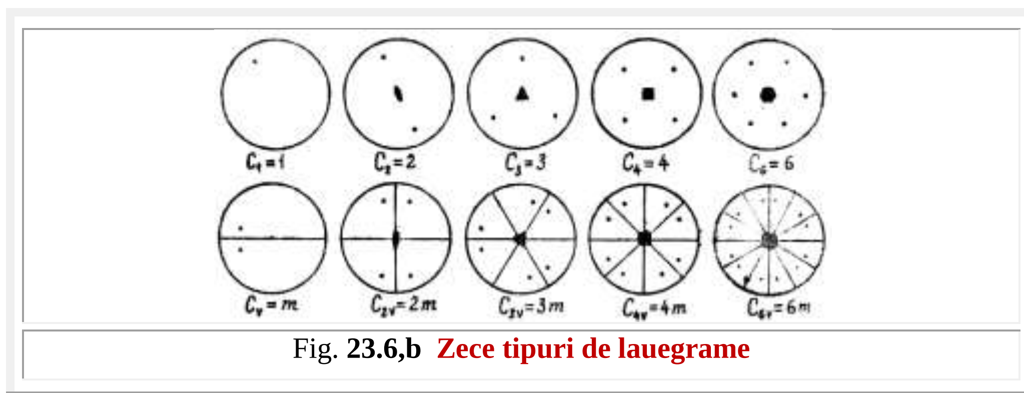
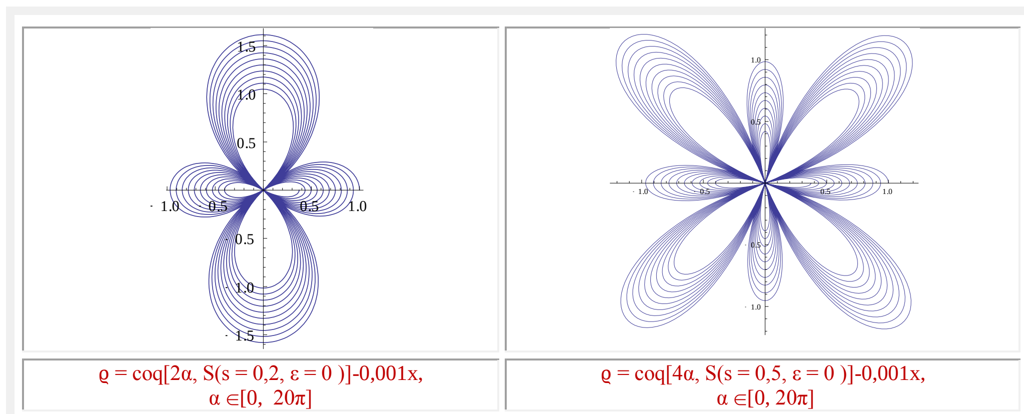
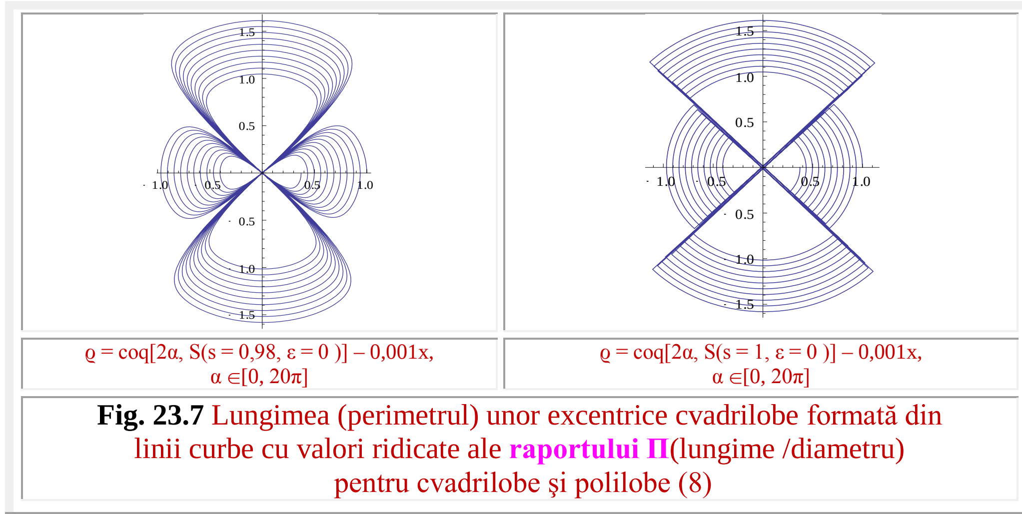


Fig. **23.6,b** **Zece tipuri de lauegrame**



ϱ = coq[2α, S(s = 0,2, ε = 0)]-0,001x, α ∈[0, 20π]

ϱ = coq[4α, S(s = 0,5, ε = 0)]-0,001x, α ∈[0, 20π]



ϱ = coq[2α, S(s = 0,98, ε = 0)] – 0,001x, α ∈[0, 20π]

ϱ = coq[2α, S(s = 1, ε = 0)] – 0,001x, α ∈[0, 20π]

Fig. 23.7 Lungimea (perimetrul) unor excentrice cvadrilobe formată din linii curbe cu valori ridicate ale **raportului Π**(lungime /diametru) pentru cvadrilobe şi polilobe (8)

Excentricele circulare din **figura 23.3** sunt descrise prin ecuaţii parametrice de **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) **cosinus excentrice**

(23.6) $$\begin{cases} x_{1,2,3,4} = cex_{1,2}[x + \begin{cases} 0 \\ \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}, S(s, \varepsilon = 0)] \\ y_{1,2,3,4} = cex_{1,2}[x \pm\frac{\pi}{2} \pm \begin{cases} 0 \\ \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}, S(s, \varepsilon = 0)] \end{cases}$$

şi cele din **figura 23.4** de funcţii **sinus excentrice** din ecuaţiile parametrice

(23.7) $$\begin{cases} x_{1,2,3,4} = sex_{1,2}[x + \begin{cases} 0 \\ \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}, S(s, \varepsilon = 0)] \\ y_{1,2,3,4} = sex_{1,2}[x \pm\frac{\pi}{2} \pm \begin{cases} 0 \\ \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}, S(s, \varepsilon = 0)] \end{cases}$$

Acestea au drept limite extreme ale lui $\Pi_{QC} \in [2\sqrt{2},\ \pi]$ şi, respectiv, $\Pi_{QS} \in [\pi,\ 2(1+\sqrt{2})]$, două **numere iraţionale** dintre cele mai cunoscute.

Dacă, în toate cazurile, valoarea minimă $\Pi_m = 2$ este un minim absolut, adică un **minim-minimorum**, nu acelaşi lucru se întâmplă cu valoarea maximă $\Pi_M = 4$, care nu este un **maxim – maximorum**. De fapt, nici circumferinţa cercului nu este întotdeauna π, ci poate fi un multiplu de π.

De exemplu, ecuaţiile parametrice

(23.8) $$\begin{cases} x = R.cos5\alpha \\ y = R.sin5\alpha \end{cases}$$

reprezintă tot un cerc (**Fig. 22.5,a**) care este parcurs de **5** ori şi, ca să devină evident acest fapt, s-a dat o deplasare a centrului cercurilor pe axa x (**Fig.23.5,b**).

În acest caz, rezultă că $\Pi = 5\pi$.

Este interesant faptul că, dacă **FSM** cvadrilobe, în ecuaţii parametrice, pentru **s = ± 1**, reprezintă un **pătrat perfect** (**Fig. 23.2**), în ecuaţii polare, pentru aceeaşi valoare a excentricităţii numerice **s = ± 1**, ele reprezintă un **cerc** (**Fig. 23.5, c** şi **d**), dat de ecuaţia polară

(23.9) ϱ = R.coq[α, **S(s = 1, ε = 0)]** şi/ sau ϱ = R.siq[α, S(s=1, ε = 0)]
pentru R = 1 şi $\alpha \in [0, 2Pi]$.

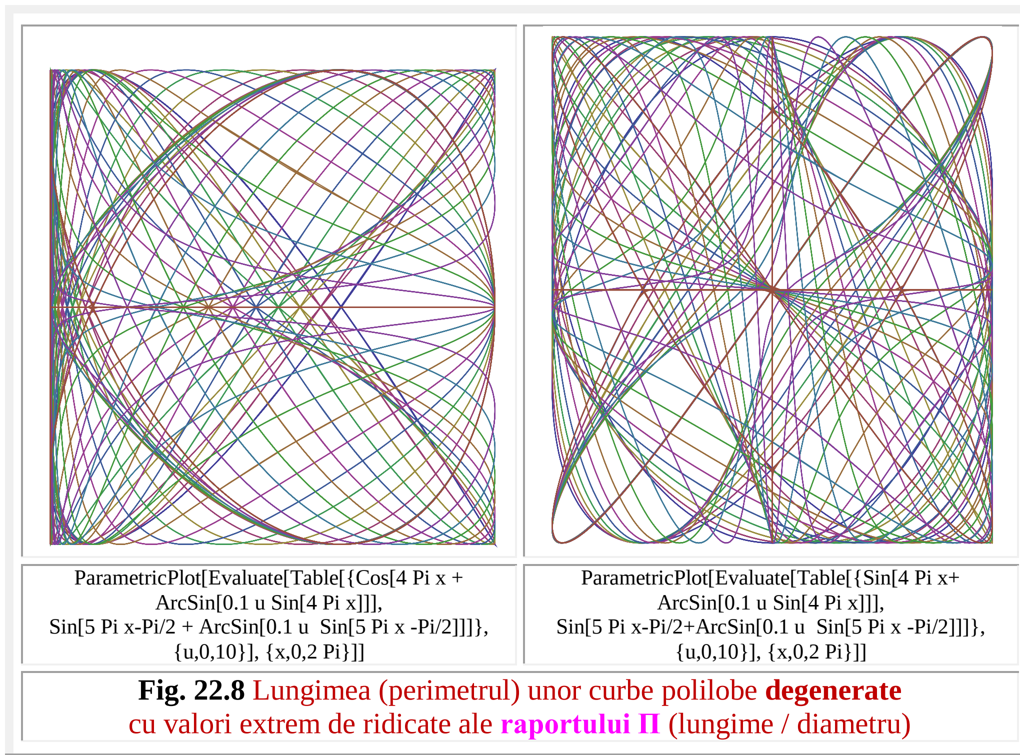


Fig. 22.8 Lungimea (perimetrul) unor curbe polilobe **degenerate** cu valori extrem de ridicate ale **raportului Π** (lungime / diametru)

Dacă în ecuaţiile (23.11) se introduce un argument multiplu, sau / şi acesta realizează mai mult de o singură rotaţie, atunci se obţin cvadrilobele din **figura 23.6** a căror raport **Π**, dintre lungimea cvadrilobei şi diametrul cercului unitate, este cu mult mai mare decât **4**.

Pentru 2α - cazul din stânga- este **$\Pi = \pi + 4$**; cele două diagonale sunt parcurse de două ori în sensuri diferite, iar în cazul din dreapta **figurii 23.6**,a pentru 4α, **$\Pi = \pi + 8$**, cele 8 diagonale sunt parcurse de două ori în sensuri diferite.

Se pare că acest raport poate fi făcut oricât de mare se doreşte, sau, altfel spus, valoarea **maximă maximorum** este **$\Pi_{MM} \rightarrow \infty$.**

În **figura 23.6,b** sunt prezentate, pentru comparaţie, lauegramele din lucrarea [„**METODE DIFRACTOMETRICE DE ANALIZĂ STRUCTURALĂ”**: library. utm. Md / lucrari / Tipografia / Samusi].

În **figura 23.7** s-a dat o deplasare a **cvadrilobelor** pe direcţia x pentru a se evita suprapunerea curbelor şi în **figura 23.8** sunt redate cvadrilobe de **4α** şi 5α**,** $\alpha \in [0, 2\pi]$ cu un raport **Π_M** şi mai înalt şi care putea fi făcut şi mai mare dar, în acest caz, curbele devin neclare.

23.3 O NOUĂ DIMENSIUNE A SPAŢIULUI. HIBRIDAREA MATEMATICĂ

Câteva idei despre spaţiu, culese de pe diverse website-uri, sunt următoarele:

***Spaţiul** este o entitate abstractă care reflectă o formă obiectivă de existenţă a materiei. Apare ca o generalizare şi abstractizare a ansamblului de parametri prin care se realizează **deosebirea între diferite sisteme** ce constituie o stare a universului.*

***SPAŢIUL**, este o formă obiectivă şi universală a existenţei materiei, insepa-rabilă de materie, care are aspectul unui întreg neîntrerupt cu trei dimensiuni şi exprimă ordinea coexistenţei obiectelor lumii reale, poziţia, distanţa, mărimea, forma, întinderea lor.*

În concluzie, se poate afirma cã spaţiul apare ca o sinteză, ca o generalizare şi abstractizare a constatãrilor cu privire la o stare, la un moment dat, a universului.

În cadrul mecanicii clasice, noţiunea de spaţiu este aceea a modelului spaţiului euclidian tridimensional (E3) omogen, izotrop, infinit.

*Când discutãm despre spaţiu, primul gând este îndreptat spre **poziţie**, adicã noţiunea de poziţie este direct asociatã noţiunii de spaţiu. **Poziţia** este exprimatã în raport cu un sistem de referinţã (reper) sau mai scurt printr-un sistem de coordonate.*

Să fie oare complete aceste definiţii ?

Un obiect tridimensional are în spaţiu E^3 **6 grade de libertate**, constituite din cele **3 translaţii**, pe direcţiile **X**, **Y** şi **Z** şi din **3 rotaţii,** notate, respectiv, cu **A, B** şi **C,** în tehnologie şi în robotică, în jurul axelor **X**, **Y** şi **Z**.

Un obiect poate fi "realizat" sau, mai precis, reprodusă imaginea lui în spaţiul virtual, când apare în 3D pe ecranul monitorului unui computer, prin folosirea unor programe tehnice (CAD) sau matematice comerciale (MATHEMATICA, MATLAB, MATHCAD, MAPLE, DERIVE, ş,a.) sau speciale, care folosesc **FSM-Excentrice, Elevate** sau / şi **Exotice -** la descrierea obiectelor, cum este **SM-CAD-CAM**.

Prin modificarea **excentricităţii**, obiectele cunoscute şi formate în domeniul centric al supermatematicii (**SM**), adică, în matematica centrică (**MC**), pot fi deformate în **domeniul excentric** al **SM**, adică, în **matematica excentrică** (**ME**) şi transformate iniţial în **obiecte hibride**, proprii **ME**, ca, apoi, să fie re-transformate în obiecte de alt gen, cunoscute în **MC**. Ca de exemplu, deformarea unui **con** perfect (e = 0) în **cono-piramide** $e \in (0, 1)$, cu baza un **pătrat perfect** şi **vârful conic**, care constituiesc **obiectele hibride**, situate între con şi piramidă, până la transformarea lor într-o **piramidă** perfectă ($e = \pm 1$) cu baza un pătrat perfect.

Obiectul poate fi realizat în fapt, prin diversele metode de prelucrare mecanice [v. **Mircea Şelariu**, Cap.17 **Dispozitive de prelucrare**, **PROIECTAREA DISPOZITI-VELOR**, EDP, Bucureşti, 1982, coordonator **Sanda-Vasii Roşculeţ**] de **formare** (turnare, sinterizare), **deformare** (la cald şi la rece), **dislocare** (decupare, aşchiere, eroziune, netezire) şi **agregare** (sudare şi lipire).

În ambele cazuri, sunt necesare **mişcări** ale sculei şi / sau ale piesei, respectiv, ale spotului luminos care delimiteaza pe ecran un pixel şi trece de la un pixel la altul.

Mişcarea este strâns legată de spaţiu şi de timp.

Mişcarea mecanică poate fi **de**

- **formare** în timp a corpurilor şi, implicit, a obiectelor ;
- **schimbarea** în timp a **poziţiei** obiectelor, sau a părţior sale, denumite corpuri, în raport cu alte corpuri, alese drept sisteme de referinţă;
- **schimbarea** în timp a **formei** corpurilor şi, implicit, a formei obiectelor, prin **deformarea** lor .

Spaţiul reflectă raportul de coexistenţă dintre obiecte şi fenomene, sau părţi ale acestora, indicând:

- **întinderea** / mărimea lor, denumită **dimensiune de gabarit;**
- **locul** obiectelor, prin coordonatele **liniare X**, **Y**, **Z**, în spatiul 3D, denumite **dimensiuni de localizare;**
- **orientarea** obiectelor, în spaţiul 3D, prin coordonatele **unghiulare** ψ, φ, θ, denumite dimensiuni de orientare;
- **poziţiile** relative sau distanţele dintre obiecte, denumite **dimensiuni de poziţionare**, dacă se refera la localizarea şi orientarea absolută şi/sau relativa a obiectelor, iar dacă se referă la părţi ale acestora, numite corpuri, atunci sunt denumite **dimensiuni de coordonare;**
- forma obiectelor şi, respectiv, evoluţia fenomenelor, denumite **dimensiuni de formare**, care definesc, totodata, şi ecuaţiile de definire a obectelor;
- deformarea obiectelor şi modificarea evoluţiei fenomenelor, denumite **dimensiuni de deformare** sau **excentricităţi;**

Ultima dimensiune, a spaţiului, **excentricitatea**, făcând posibilă apariţia **matematicii excentrice** (ME) şi realizând trecerea din domeniul **matematicii centrice** în cel al **matematicii excentrice**, precum şi **saltul** de la o singură entitate matematică, existentă în matematica şi domeniul **centric**, la **o infinitate** de entităţi, de acelaşi gen, dar deformate din ce în ce mai pronunţat, odată cu creşterea valorii **excentricităţii numerice s**, până la transformarea lor în alte genuri de obiecte, existente în domeniul centric.

Un exemplu, devenit deja clasic, este deformarea continuă a unei **sfere** până la transformarea ei într-un **cub**, prin utilizarea aceloraşi **dimensiuni de formare** (ecuaţii parametrice), atât pentru sferă cât şi pentru cub, doar excentricitatea modificându-se: fiind **e = 0** pentru **sferă** şi **e = ± 1** pentru **cub**; pentru $e \in [(-1, +1) \setminus 0]$ obţinându-se **obiecte hibride**, proprii **matematicii excentrice** (**ME**), anterior inexistente în matematică, sau, mai precis, în **matematica centrică** (**MC**).

Aşa cum s-a mai prezentat, **dreapta** este un **spaţiu unidimensional** şi, totodată, în **supermatematică** (**SM**), o **strâmbă** de excentricitate zero.

Creşterea excentricităţii de la zero la unu transformă **linia dreaptă** într-o **linie frântă**, ambele existând şi sunt cunoscute în matematica centrică, nu şi restul strâmbelor, care sunt proprii **matematicii excentrice**, fiind generate de **FSM-CE** amplitudine excentrică

$y [x, S(s, \varepsilon)] = k.aex [\theta, S(s, \varepsilon)] + C.$

Linia frântă este cunoscută în **matematica centrică** (**MC**), dar fără să i se cunoască ecuaţiile ei ! Ceea ce nu mai este cazul în **SM** şi, evident, şi în **ME**.

Un fenomen asemănător este considerat că ar avea loc şi în fizică: din vid apar continuu particule de un anumit tip şi se reîntorc în vidul cosmic. Aceleaşi sau altele ?

Cosmologia are o teorie ce se aplică întregului Univers, formulată de **Einstein** în 1916: **relativitatea generală**. Ea afirmă că forţa de gravitaţie, ce se exercită asupra obiectelor, acţionează şi asupra structurii spaţiului, care îşi pierde cadrul rigid şi imuabil, devenind maleabil şi curb, în funcţie de materia sau energia pe care le conţine. Adică, **spaţiul se deformează**.

Continuum-ul spaţiu-timp, al relativităţii generale, nu este conceput fără conţinut, deci nu admite vidul! Cum spunea şi **Einstein** ziariştilor, care îl rugau să le rezume teoria sa: ***"Înainte, se credea că, dacă toate lucrurile ar dispărea din Univers, timpul şi spaţiul ar rămîne totuşi. În teoria relativităţii, timpul şi spaţiul dispar, odată cu dispariţia celorlalte lucruri din univers."***

Ceea ce susţine teoria autorului din **SUPERMATEMATICA**. **Fundamente**. Vol. I Editura **POLITEHNICA**, Timişoara, 2007, Cap. 1 **Introducere**, prin care expansiunea universului este un proces de desvoltare a ordinii în haosul absolut, o trecere progresiva spaţiului haotic în ordine din ce în ce mai pronunţată. Sau invers ?

În concluzie, spaţiul, ca şi timpul, se **formează** şi se **deformează**, adică, **excentricitatea spaţiului**, de o anumită valoare, duce la **formare**a spaţiului, apoi, prin modificare valorii ei, spaţiul se **deformează** / modifică.

Forma modificată a spaţiului este dependentă de **valoarea excentricităţii**, care devine **o nouă dimensiune a spaţiului**: **dimensiunea de deformare**.

Energia şi masa materiei să crească odată cu creşterea **excentricităţii** ?

Sau invers ? **Excentricitatea** să determine valoarea masei şi a energiei prezente / localizate într-un anumit loc în spaţiu ?

Instalarea unei piese de prelucrat (obiect de prelucrat) în spaţiul de lucru a unei maşini-unelte moderne, cu **comenzi numerice de conturare** (**CNC**), este foarte asemănătoare cu “**instalarea**“ unui obiect matematic în spaţiul euclidian tridimensional R^3. De aceea, vom folosi unele noţiuni din domeniul tehnologic.

În tehnologie, **instalarea** este operaţia premergătoare prelucrării; numai un obiect / piesă instalat /ă poate fi prelucrat/ă.

Ea presupune următoarele faze sau operaţii tehnologice, în această succesiune / ordine strictă ; numai înfăptuirea unei faze, facând posibilă trecerea la realizarea fazei următoare:

1. ORIENTAREA, este acţiunea sau operaţia prin care elementele geometrice ale obiectului, care sunt baze de referinţă tehnologică de orientare, prescurtat baze de orientare (**BO**), primesc o **direcţie** bine determinată, faţă de direcţiile unui sistem de referinţă. În tehnologie, faţă de direcţiile unor mişcări principale şi / sau secundare de lucru, sau / şi faţă de direcţiile mişcărilor de reglare diemnsională a sistemului tehnologic.

Drept **baze de orientare (BO)** pot servi :

3) **Un plan** al obiectului, respectiv o suprafaţă plană a piesei, dacă ea există, caz în care, această suprafaţă, determinată de trei puncte de contact dintre obiect şi dispozitiv, este denumită **bază de referinţă tehnologică de orientare de aşezare (BOA)**, sau, pe scurt, **bază de aşezare (BA)**, fiind determinată, teoretic, de cele trei

puncte comune de contact ale piesei cu dispozitivul, care are sarcina de a realiza instalarea piese în cadrul maşinii de lucru. Drept **BA**, în principiu, se alege suprafaţa cea mai întinsă a piesei, dacă nu există altfel de condiţii de poziţie, sau de la care surafaţa rezultată în urma prelucrării are impusă precizia cea mai înaltă, sau condiţii de paralelism cu **BA**.

Punând condiţia păstrării contactului piesă / dispozitiv pe **BA**, obiectul / piesa pierde 3 grade de libertate, dintre care, **o translaţie** pe direcţia, s-o numim **Z**, perependiculară pe **BA** (plan) şi două rotaţii: în jurul axelor **X**, notată în tehnologie cu **A** şi în jurul axei **Y**, notată în tehnologie cu **B.**

Obiectul / piesa se mai poate roti în jurul axei **Z,** rotaţie notată cu **C** şi se poate translta pe **BA** pe direcţiile **X** şi Y păstrând în permanenţă contactu cu **BA**.

De la această suprafaţă se stabileşte, în tehnologie, coordonata **z**, de exemplu, ca distanţă dintre **BOA** şi **baza tehnologică de prelucrare (BTP)**, sau, pe scurt, **bază de prelucrare (BP)**, adică planul pe care îl va genera pe piesă scula de prelucrat.

Dacă o suprafaţă se prelucrează integral/complet (prin frezare, de exemplu, cu freze de mari dimensiuni, pentru o singura trecere), atunci celelalte coodonate/dimensiuni **y** şi **x** pot fi stabilite cu foarte mare aproximaţie, întrucât ele nu influentează precizia realizarii suprefeţei plane, la distanţa **z** de **BA**, rezultate în urma prelucrarii piesei şi denumită **bază tehnologică de prelucrare (BTP)**, sau, pe scurt, **bază de prelucrare (BP)**. A cărei cerinţă tehnologică este să fie paralelă cu **BOA** şi să fie situată la distanţa **z** de aceasta. Dimensiunea **z** fiind, în acest caz, o **dimensiune de formare** a piesei, pe de o parte şi **dimensiune de coordonare**, în acelaşi timp, pentru poziţia relativă scula-piesă, iar, d.p.d.v. tehnologic, una dintre **dimensiunile de reglare dimensională** a sistemului tehnologic **MDPS** (**M**aşină-**D**ispozitiv-**P**iesă-**S**culă).

Matematic exprimat, două suprafeţe plane situate la distanţa **z**, ca urmare, paralele între ele.

2) **O dreaptă** aparţinând obiectului, dacă aceasta există, ca axe şi / sau muchii, ca intersecţie de -suprafeţe- plane în matematică.

În tehnologie, muchiile se evită, datorită neregularităţii lor, adică, a abaterilor de la forma geometrică liniară, a semifabricatelor, ca şi a pieselor, în urma prelucrarii semifabricatelor lor.

În tehnologie, această dreaptă este determinată de cele două puncte de pe o suprafaţă a piesei, alta decât BA, comună piesei şi dispozitivului, care realizează baza de orientare a piesei şi a dispozitivului, ca elemente dedublate, dreaptă denumită bază de orientare de dirijare (**BOD**), sau pe scurt baza de dirijare (**BD**), denumire care derivă din faptul că aceste două elemente de dirijare dirijează / ghidează mişcarea obiectului / piesei în vederea localizarii lui, dacă în tot timpul mişcării se menţine contactul piesă-dispozitiv. În acest fel **BD** preia 2 grade de libertate ale obiectului: translaţia pe o direcţie perpendiculară pe dreapta determinată de cele două puncte de contact piesa /dispozitiv, ce materializează **BD**, translaţie pe direcţia **Y**, de exemplu, dacă **BD** este paralelă, întotdeauna, cu **BA** din planul **XOY** şi rotaţia în jurul axei **Z**, notată în tehnologie cu **C**.

Drept **BOD** se alege, în principiu, din motive lesen de înţeles, suprafaţa cea mai lungă a piesei, dacă nu există alte raţiuni impuse, prin desenul de execuţie al piesei.

De la **BOD** poate fi stabilită / măsurată cota / dimensiunea **y**, paralelă cu **BOA** şi perpendiculară pe **BOD**, ca de exemplu, perpendiculară pe **z**, fiindcă **BOD** este paralelă cu **BOA.**

Astfel, dacă cele două puncte aparţin unei obiect paralelipipedic, mărginit, deci, de suprafeţe plane, şi **BOD** este paralelă cu **BOA**, păstrând contactul piesă / dispozitiv pe cele două baze, printr-o mişcare de translaţie, piesa mai poate fi doar translatată, în dispozitiv, pe direcţia **X**, până când tamponează un **element de localizare**.

1) De la acesta, denumit element de localizare, respectiv **baza tehnologică de localizare** (**BTL**), sau, pe scurt, **baza de localizare** (**BL**) poate fi stabilită coordonata / dimensiunea **x** perpendiculară simultan pe **y** şi **z**. Dar fără să fie coordonate / dimensiuni / segmente concurente într-un punct comun **O(x,y,z)** ca în matematică, decât, dacă **BOD** şi **BTL** coboară la nivelul **BOA** şi, în plus, **BTL** se deplaseaza spre **BOD** şi va fi conţinută şi în ea, ambele urmând să fie conţinute în **BOA**, astfel că, punctul **O(x,y,z)** ca şi **BTL** va fi un vârf al piesei paralelipipedice, conţinut simultan în planul **BOA**, dreapta **BD** în punnctul **BL**, rezultând, în acest caz că **O(x,y,z) ≡ BL**.

Dacă, localizarea se realizează printr-o mişcare de translaţie, aşa cum s-a presupus anterior, ea mai poartă denumirea de **localizare prin translaţie (LT)**.

Dacă, localizarea se realizează printr-o mişcare de rotaţie a obiectului, atunci este denumită **localizare prin rotaţie** (**LR**). În acest caz **BD** poate fi, sau este, deobicei, o axă a unei suprafeţe de rotaţie (cilindrice sau sferice) a obiectului, denumită **baza de orientare de centrare** (**BOC**) în jurul căreia, obiectul se roteşte, până când, un alt corp al piesei, tamponează elementul de localizare prin rotaţie. Sau, până când un fixator pătrunde intr-un orificiu perpendicular pe **BOC** sau într-un canal paralel cu **BOC.**

Obiectele care nu prezintă **elemente / baze de orientare**, cum ar fi sfera în matematică şi bilele de rulment în tehnologie, de exemplu, sunt obiecte neorientabile.

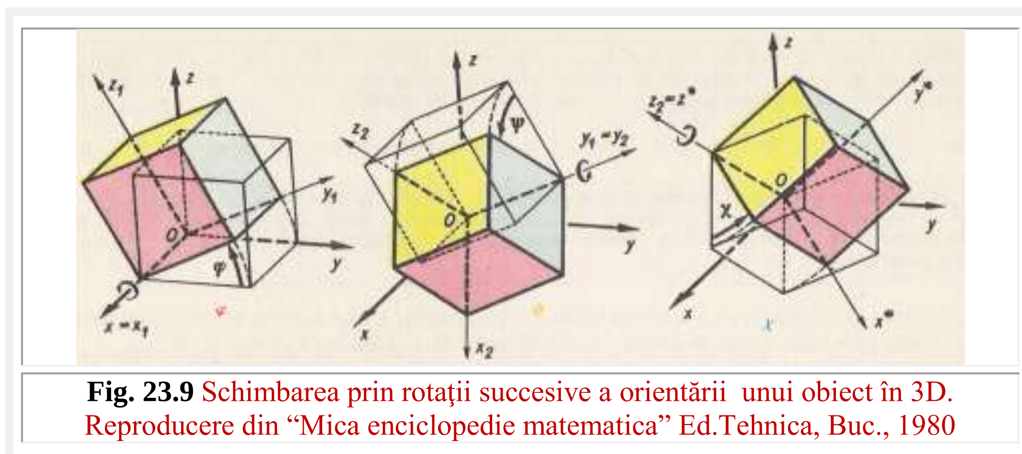


Fig. 23.9 Schimbarea prin rotaţii succesive a orientării unui obiect în 3D. Reproducere din “Mica enciclopedie matematica” Ed.Tehnica, Buc., 1980

2 **LOCALIZAREA,** este operaţia sau acţiunea de stabilire a **locul**, în spaţiul euclidian tridimensional E^3, a unui punct **O(x,y,z)** caracteristic al obiectului, ce aparţine unui element de referinţă de orientare al acestuia, de la care se stabilesc coordonatelor / dimensiunilor liniare **x, y, z** faţă de un sistem de referinţă dat, sau, în tehnologie, faţă de scula de prelucrare.

Punctul **O(x,y,z)** al obiectelor **neorientabile** este centrul de simetrie al acestora, iar al pieselor orientabile, ca cele paralelipipedice, în tehnologie, de exemplu, punctul **O(x,y,z)** este **diseminat** în trei puncte distincte, pentru fiecare coordonată în parte **Ox ⊂ BL** pentru **x** , **Oy ⊂ BD** pentru y şi **Oz ⊂ BA,** pentru **z**, aşa cum s-a explicat anterior.

In tehnologie, succesiunea orientare → localizare este obligatorie; numai un obiect orientat poate fi apoi localizat. Ca şi în matematică, dealtfel. Intâi se alege un sistem de referinţă solidar cu obiectul (O, x, y, z) apoi, unul invariant (O, X, Y, Z) ce coincide, iniţial, cu celălalt, în spaţiul 3D sau euclidian tridimensional E^3 şi apoi se operează diverse transformări de translaţii şi/sau de rotaţii aşa cum se poate observa cu rotaţiile unui cub, prezentate în **figura 23.9.**

Reuniunea dintre **orientare** şi **localizare** reprezintă cea mai importantă acţiune/operaţie tehnologică, denumită **poziţionare**, adică:

orientarea ∪ **localizarea** = **poziţionare**

Dacă **poziţionarea** obiectului este realizată/desăvârşită/implinită, atunci, poate fi menţinută poziţia relativă piesă / dispozitiv prin operţia de **fixare** a piesei în dispozitiv. În continuare pot fi stabilite cotele / dimensiunile dintre scula şi piesă, astfel, încât să se obţină piesa la dimensiunile şi preciziile impuse prin desenul de execuţie a piesei.

Această operaţie tehnologică este denumita **reglare dimensională.** Cu aceasta, operaţia de instalare este incheiată şi prelucrarea piesei poate să înceapă.

Ca urmare, **istalarea** unui obiect este o reuniune a **poziţionarii** cu **fixarea** şi cu **reglarea dimensională**, adică:

instalare = **poziţionare** ∪ **fixare** ∪ **reglare (dimensională)**

În tehnologie, **fixarea** se poate realiza prin **forţă** (**de fixare**) sau prin **formă** (care impiedică deplasarea piesei în timpul preucrării).

În matematică, fixarea se "realizeaza" mult mai simplu: prin **convenţie:** **Zicând** că sistemul (**O, x, y, z**) este legat de piesă el nu se mai poate deplasa relativ faţă de ea (dezlega), ci numai împreună cu obiectul, deci sunt "fixate" unele de altele.

Astfel, în matematică, fixarea obiectelor, faţă de sistemele de referinţa, se subînţelege, sau se realizează de la sine, ea nu mai există, pentru că în matematică nu există "**forţe matematice**"; ele fiind proprii mecanicii, în speţă dinamicii ei şi nici scule de prelucrare, nici diverse dimensiuni de coordonare, de reglare dimensionala, de prelucrare ş.a.

De aceea, în **matematica centrică** (**MC**), există doar 3 dimensiuni liniare **x**, **y**, şi **z** care sunt, totodată, şi dimensiuni de formare a obiectelor 3D, prin ecuaţiile lor parametrice, de exemplu. Ca urmare, în această matematica centrică (**MC**) entităţi ca dreapta, pătratul, cercul, sfera, cubul ş.a. sunt unice, pe când, în matematica excentrică (**ME**) şi, implicit în supermatematică (**SM**), ele sunt multiplicate la infinit prin

hibridare, hibridare posibilă prin introducerea noii dimensiuni a spaţiului **excentricitatea liniara e şi cea unghiulară ε.**

Hibridarea matematică poate fi definită ca procesul matematic de **încrucişare** a două entităţi matematice din **MC**. Adică, de trecere continuă de la o entitate oarecare, existentă în **MC**, la o altă entitate, existentă în **MC**, printr-o infinitate de entităţi hibride, proprii doar **ME**. Altfel spus, o transformare a unei entităţi **matematice centrice** în altă **entitate matematică centrică**, acţiune devenită posibilă în cadrul **matematicii excentrice** prin utilizarea funcţiilor **supermatematice**.

23.4. NUMERE COMPLEXE CENTRICE

Pentru exprimarea tuturor soluţiilor posibile ale ecuaţiilor algebric de gradul **II**

(23.10) $a x^2 + b x + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

s-au introdus, în matematică, **numerele complexe**.

MULŢIMEA NUMERELOR COMPLEXE $\mathbb{C}$		Tabelul 22.3
Definiţii, Notaţii, Relaţii	$z = a + i.b, \rightarrow$ $a, b \in \Leftarrow$ *Nr. complex* $i^2 = -1,$ $i \Longrightarrow$ *unitate imaginară* $\mathbb{C} = \left\{\boldsymbol{a + i.\frac{b}{a}, b \in R}\right\}$ → mulţimea numerelor Complexe, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	$a = \mathrm{Re}(z)$ → parte reală $b = \mathrm{Im}(z)$ → parte imaginară $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$ → z pur real $\Leftrightarrow Re(z) = 0$ $\mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) \neq 0$ → pur imaginar $\mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) = 0$ → $z = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
Egalitatea	$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)\\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)\end{cases}$	
Operaţii	Adunarea: $z_1 + z_2 = (a_1 + i.b_1) + (a_2 + i.b_2) = (a_1 + a_2) + i.(b_1 + b_2)$ Inmulţirea: $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$ $= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$ Structura algebrică: $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ este corp comutativ →(corpul numerelor complexe)	Proprietăţi: comutativitate; asociativitate; element neutru (nr. complex 0); opus: $-z = -(a + i.b) = -a - i.b, \forall z \in \mathbb{C}$ Proprietati: comutativitate; asociativitate; element neutru (nr. complex 1); invers: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+i.b} = \frac{a-i.b}{(a-i.b)(a+i.b)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}, \forall z \in \mathbb{C}$ distributivitate faţă de adunare

Puterile lui *i*	$i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; ş.a.m.d. generalizare: $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = i^2$; $i^{4k+3} = i^3 = -i, \forall k \in \mathbb{N}$		
Conjugatul	Definiţii: $z = a + i.b$ → număr complex oarecare $\bar{z} = a - i.b$ → conjugatul lui z $\bar{z} \in \mathbb{C}$	Proprietăţi: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ $z + \bar{z} = 2a \Rightarrow z + \bar{z} \in \mathbb{R}$, $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$ $z.\bar{z} = a^2 + b^2 \Rightarrow z.\bar{z} \in \mathbb{R}^2$ $\overline{z^n} = z^{-n}, n \in \mathbb{N}$, $\bar{\bar{z}} = z$	
Modulul	Definiţii: $z = a + i.b$ → număr complex oarecare modulul lui z → $\lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ în care $\lvert z \rvert > 0$ → este un nr. real, pozitiv	Proprietăţi: $\lvert z \rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$, $z.\bar{z} = \lvert z \rvert^2$ $\lvert z_1 + z_2 \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert$, $\lvert z_1 . z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \lvert z_2 \rvert$ $\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n, n \in \mathbb{N}$, $\left\lvert \frac{z_1}{z_2} \right\rvert = \frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert}$	
Numere complexe particu lare	$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ şi $\bar{\varepsilon} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ sunt soluţiile ecuaţiei : $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, (analog pentru $\bar{\varepsilon}$) $\varepsilon^3 = 1$ (analog pentru $\bar{\varepsilon}$) $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$, numerele $1, \varepsilon, \bar{\varepsilon}$ sunt radăcinile cubice ale unităţii	$\propto = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ *şi* $\bar{\propto} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ sunt soluţiile ecuaţiei : $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ $\propto^3 = -1$ (analog pentru $\bar{\propto}$)	$(1 + i)^2 = 2i$ $(1 - i)^2 = -2i$

Ele au fost descoperite de **Niccolo Tartaglia** (1499–1557) şi **Gerolamo Cardan** (1501–1575) din dorinţa lor de a rezolva, prin radicali, ecuaţiile algebrice de gradul III şi / sau IV cu coeficienţi reali.

Se cunosc forme **algebrice** (aritmetică şi exponenţială), **trigonometrică**, **geometrică** – în planul numerelor lui **Gauss** – şi **vectorială** ale numerelor **complexe ℂ**.

Ultimele două forme, **vectorială** şi **complexă,** fiind, de fapt, aproape identice, iar mulţimea numerelor complexe sau planul complex $\mathbb{C}$ se mai notează $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, fiind un spaţiu vectorial euclidean bidimensional E^2.

Numerele complexe au apărut ca soluţii ale ecuaţiilor de forma

(22.10') $x^2 + p = 0$, cu **p** număr real strict pozitiv, aşa cum numerele iraţionale au apărut din necesitatea de a descrie soluţii ale ecuaţiilor de forma

(22.10") $x^2 - q = 0$, unde **q** nu este un pătrat perfect.

Mulţimea numerelor complexe se notează cu C sau cu $\mathbb{C}$ şi este

(22.10) $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{z \mid z = x+iy,\ x,y \in \mathbb{R}\}$

Numerele complexe se reprezintă geometric prin punctele unui plan (numit planul complex sau planul lui **Gauss**) în care s-a ales un sistem de axe ortogonale xOy.

Număr complex se notează cu **z = a + bi** şi i se asociază punctul **M**(a,b) de coordonate (*a*, *b*). Aceste puncte se numesc **imaginile geometrice** ale numerelor **complexe z, iar numărul z = a + bi** se numeşte **afixul punctului** **M**.

Forma **trigonometrică** a operaţiilor cu numere complexe este cunoscută ***numai*** pentru inmulţirea şi împărţirea lor, precum şi pentru ridicarea la o putere, ca o operaţie repetată de înmulţire a numarului complex cu el însuşi (formula lui **Moivre**), sau extragerea radicalului de un ordin oarecare.

Până în prezent, nu a existat o ***formă trigonometrică a sumei şi a diferenţei*** numerelor complexe, deoarece nu au existat nici funcţiile trigonometrice **radα** şi **derα** (**rexθ**, **Rexα** şi **dexθ**, **Dexα**), cu ajutorul cărora acest lucru să devină posibil. Şi nici **ME** care realizează **şi mai bine** acest lucru, ceea ce s-a putut vedea într-un capitol cu privire la funcţia radial excentric **rexθ** **(v. Vol I).**

23.5 FORMA TRIGONOMETRICA A SUMEI ŞI A DIFERENŢEI NUMERELOR COMPLEXE CENTRICE

Se cunoaşte [**Homentcovshi, D.** „**FUNCŢII COMPLEXE CU APLICAŢII ÎN ŞTIINŢĂ ŞI TEHNICĂ**", Ed. Tehnică, Buc.,1986] că sumă şi diferenţă a două numere complexe z_1 şi z_2 este numărul complex **Z**, definit de cele două diagonale ale paralelogramului construit pe cei doi vectori $\vec{r_1}$ şi $\vec{r_2}$.

Diagonala cea mai lungă reprezentând **suma** ($Z_\Sigma = z_1 + z_2$) şi diagonala mai scurtă **diferenţa** ($Z_\Delta = z_2 - z_1$), aşa cum se arata în **figura 23.8**.

Lungimile diagonalelor $R_{\Sigma,\Delta}$, care sunt şi modulele numerelor complexe $Z_{\Sigma,\Delta}$, formează cu vectorii $\vec{r_1}$ şi $\vec{r_2}$ câte un triunghi (**Fig. 23.8**) în care se poate aplica teorema cosinului sau **teorema lui Pitagora generalizată**.

Unghiul $\gamma_{\Sigma,\gamma}$ dintre cele două laturi opuse rezultantelor $R_{\Sigma,\Delta}$, care interesează, în acest caz, este

(23.11) $\gamma_\Sigma = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1)$ şi $\gamma_\Delta = \alpha_2 - \alpha_1$, astfel

(23.12) $\cos\gamma_{\Sigma,\gamma} = \pm\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$

şi, în consecinţă, rezultă, scris concentrat, **modulele rezultantelor**

(23.13) $R_{\Sigma,\Delta} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 cos\gamma_{\Sigma,\Delta}}$,

sau, dacă $r_2 > r_1$, scoţând forţat pe r_2 în faţa radicalului, şi pe r_1, în caz contrar, rezultă

(23.14) $\mathbf{R}_{\Sigma,\Delta} = \mathbf{r}_2\sqrt{1+s^2-2s\cos\gamma_{\Sigma,\Delta}} = \mathbf{r}_2\sqrt{1+s^2\pm 2s.\cos(\propto_2-\propto_2)}$,
în care, semnul **plus** este pentru **suma** şi semnul minus este pentru diferenţă, iar **s** este raportul **s = r_1/r_2 < 1** (sau **excentricitatea numerică,** sau r_2/r_1 < 1) şi, se poate anticipa că, modulul sumei şi a diferenţei numerelor complexe, este dat de **FSM-CE** radial excentric de **α (Rex α)** exprimată pe cercul de raza **R = r_2**, respectiv (r_2/r_1 < 1), **R = r_1**.

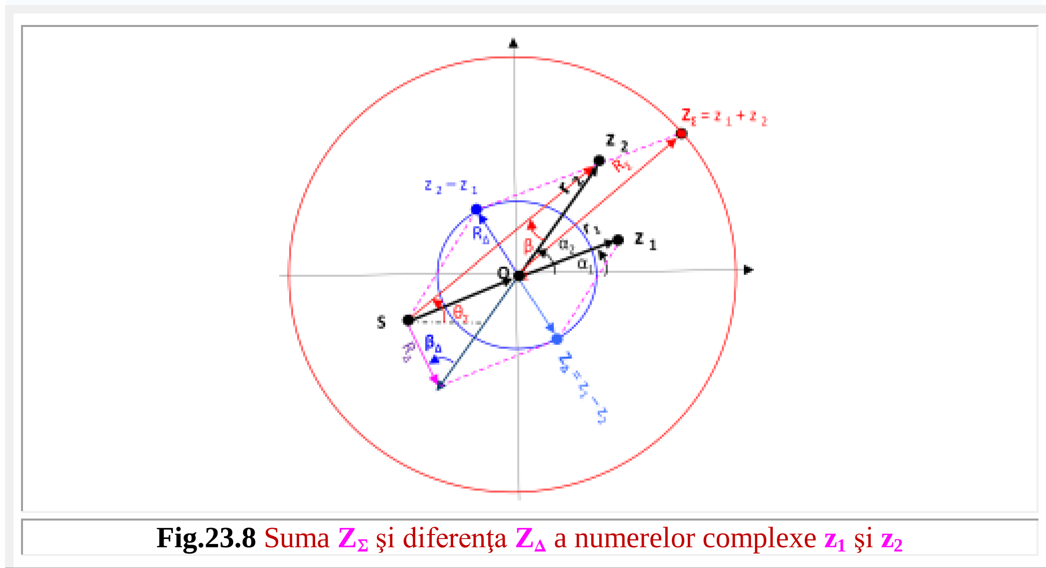


Fig.23.8 Suma Z_Σ şi diferenţa Z_Δ a numerelor complexe z_1 şi z_2

In final, expresia **trigonometrică** a sumei şi a diferenţei celor două numere complexe, exprimate cu ajutorul **FCC radα** este

(23.15) $Z_{\Sigma,\Delta} = z_1 \pm z_2 = \mathbf{r_1}.\mathrm{rad}\alpha_1 \pm \mathbf{r}_2.\mathrm{rad}\alpha_2 =$

$\mathbf{r}_2\sqrt{1+s^2\pm 2s.\cos(\propto_2-\propto_2)}.\mathbf{rad}\theta_{\Sigma,\Delta}$

în care

(23.16) θ = α – β = α – arcsin [s.sin(α - ε)], β fiind unghiul dintre $R_{\Sigma,\Delta}$ şi r_2 astfel că $\theta_{\Sigma,\Delta} = \alpha_2$ — [± arcsin(r_1 sin($\alpha_1 - \alpha_2$) / $R_{\Sigma,\Delta}$] =

$= \alpha_2 + \mathrm{bex}_2[\propto_2, S(\frac{r_1}{R\Sigma,\Delta}, \propto_1)] = \mathrm{aex}[\propto_2, S(\frac{r_1}{R\Sigma,\Delta}, \propto_1)]]$.

În rezumat, modulul sumei şi a diferenţei a două numere complexe este dat de **FSM-CE** de **variabilă centrică α** (**Rexα**) sau poate fi exprimată prin **teorema cosinus** (**Pitagora** generalizată), iar direcţia este dată de **unghiul la excentru θ** respectiv de funcţia **rad*θ*** şi, astfel, numărul complex sumă şi, respectiv, diferentă $Z_{\Sigma,\Delta}$ este **complet** determinat / definit sub **<u>formă trigonometrică</u>** sau, mai precis, sub forma unei **trigonometrii excentrice** aparţinâd domeniului **matematicii excentrice** (ME) care, la rândul ei, aparţine **supermatematicii (SM)**.

De ce n-a putut fi realizată, mult mai devreme, forma trigonometrică a sumei şi a diferenţei numerelor complexe ?

Pentru că nu se cunoşteau noile funcţii trigonometrice excentrice, sau **FSM-CE**, radial excentric de variabilă excentrica **rex*θ*** şi de **variabilă centrică Rex*α*.**

Pentru că nu se ştia, că cele două forme ale teoremei lui **Pitagora** generalizată, sunt aceleaşi cu **funcţiile radial excentrice**.

Dintre cele două forme, prima formă, ca funcţie de variabila excentrică, s-a pierdut în decursul vremurilor, ea fiind menţionată doar în ediţia din anul 1900 a **MANUALULUI INGINERULUI** vol I (**Hütte**), 1900 în limba germană, iar a doua formă împânzeşte foarte multe manuale de fizică, mecanică şi de matematică.

23.6 NUMERE REALE EXCENTRICE

Mulţimea este unul dintre cele mai importante concepte ale matematicii moderne. Cuvinte frumoase despre **mulţimi**, pe care le-a numit **grămezi**, a rostit marele nostru filozof **Constantin Noica**.

Există "mulţimi" sau "gramezi" cu un singur obiect sau chiar fără niciunul, cum este, de exemplu, "mulţimea" vidă ϕ ! Se va păstra, oare, această denumire, de **mulţime**, în limba ramână, în tot mileniul III ?

Deşi **teoria mulţimilor** a apărut abia la sfârşitul secolului XIX, aceasta este acum omniprezentă încă din şcoala elementară, în educaţia matematică.

În teoria mulţimilor, **FUNCŢIILE** sunt **definite SINTETIC**, adică corespund acelor funcţii

(23.17) f : A• B

pentru care se indică fiecarui element x din A elementul y = f (x) din B, ca în următoarele exemple .

Unele mulţimi pot fi descrise în cuvinte, cum ar fi: ***A*** este mulţimea primelor zece numere naturale. ***B*** este mulţimea stelelor de pe steagul USA sau mulţimea culorilor de pe steagul Romaniei.

Prin convenţie, o mulţime poate fi definită listând explicit elementele sale între acolade, de exemplu: ***C* = {1, 2, 3, 4}, *D* =** {albastru, **galben**, **roşu**} şi mai sunt şi alte moduri de definire a unei mulţimi.

Funcţiile F : A • B definite cu ajutorul unei (unor) **formule** sau a unor **proprietăţi** sunt funcţii **definite analitic**. Corespondenţa F leagă între ele elementul arbitrar x din A de imaginea sa F(x) din B.Cea mai frecventă reprezentare a unei funcţii în matematică este printr-o **formulă**. În acest caz, elementele domeniului de definiţie şi ale domeniului valorilor nu pot fi decât numere sau "obiecte matematice" pentru care s-au introdus reguli de calcul corespunzatoare.

EXEMPLE:

(23.18) Fie funcţia f : R•R , f(x) = x^2.

Aceasta funcţie asociază fiecărui numar real x din domeniul de definiţie al funcţiei R pătratul lui, x^2 din codomeniul funcţiei f : R x R .

(23.19) Funcţia f : Z • Z, $f(x) = \begin{cases} x-1, & pentru\ x\ par \\ x+1, & dacă\ x\ este\ impar \end{cases}$

este exemplu de funcţie definită prin două formule. Funcţiile definite prin mai multe formule se numesc funcţii multiforme.

Numerele reale **excentrice** ℝ𝔼 au apărut din necesitatea unei interfeţe între numerele reale centrice ℝ**C** şi cele naturale şi / sau raţionale ℤ, care să facă legătura dintre cele două mulţimi de numere şi trecerea dintr-o mulţime în alta.

Pentru a facilita inţelegerea, se va compara baza de numeraţie cu baza de date **trigonometrice centrice** şi **excentrice** utilizate la aproximarea funcţiilor / curbelor, baze de date prezentate în lucrarea **Mircea Eugen Şelariu**, **Dumitru Bălă**, "**WEIS OF PRESENTING THE DELTA FUNCTION AND AMPLITUDE FUNCTION JACOBI**" Procedings of the 2nd World Congress on Science, Economics and Culture, 25-29 August 2008, New York, ARS Academia Bucureşti, 2008, pag. 42… 55.

a) SISTEMUL TRIGONOMETRIC CENTRIC

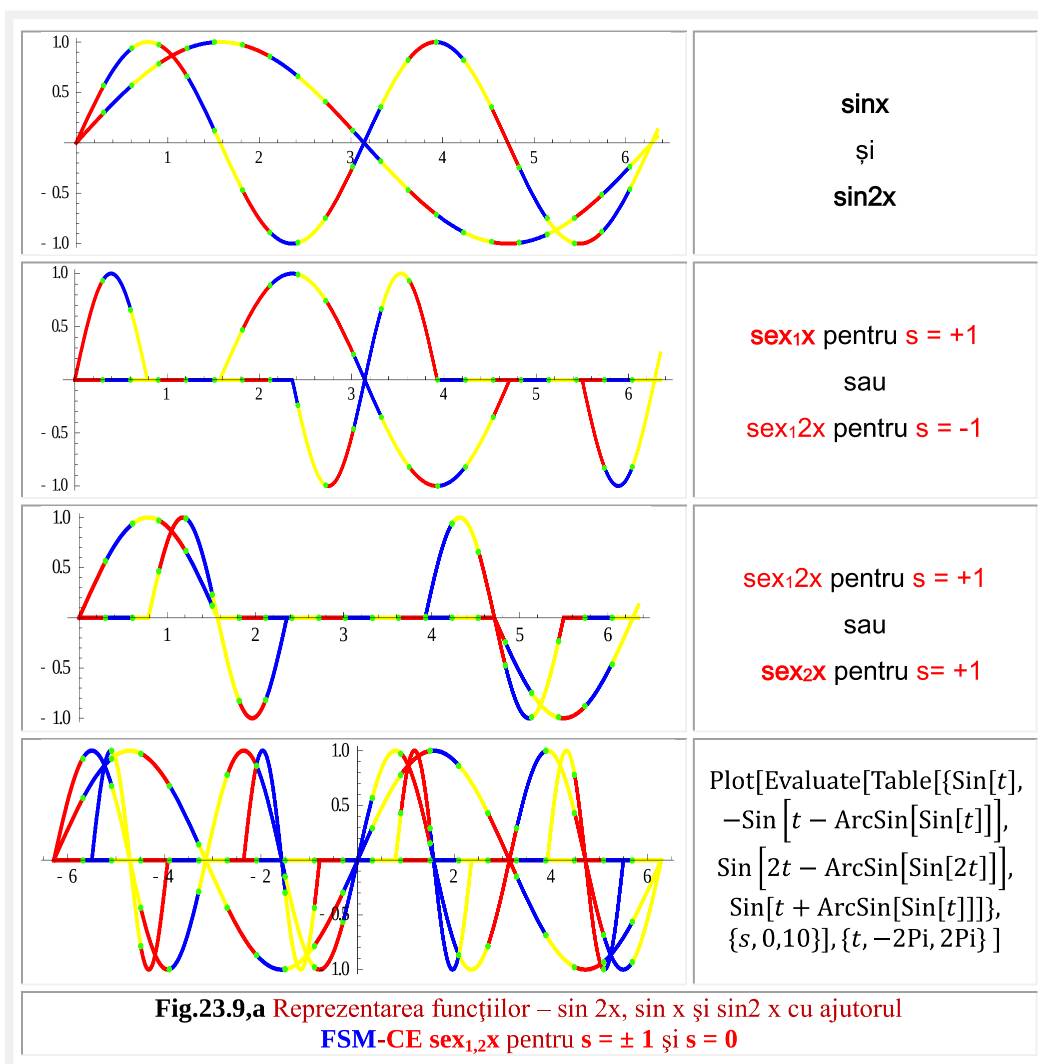


Fig.23.9,a Reprezentarea funcţiilor – sin 2x, sin x şi sin2 x cu ajutorul **FSM-CE** **$sex_{1,2}x$** pentru **s = ± 1** şi **s = 0**

Există o multitudine de metode de aproximare a funcţiilor / curbelor. Dintre acestea, unele folosesc drept bază sistemul trigonometric, pe care suntem obligaţi sa-l denumim şi **centric** (**STC**), pentru a-l distinge de noul **sistem trigonometric excentric** (**STE**), apărut odată cu descoperirea funcţiilor supermatematice **circulare / trigonometrice excentrice** (**FSM-CE**).

STC este format din asocierea funcţiilor cosinus şi sinus centrice, de multiplii de arce, care formează un **sistem discret**

(23.20) $$\begin{cases} \mathbf{1, cos \propto, cos\, 2 \propto, .., cos\, n \propto, .. n \subset 1, N} \\ \mathbf{0, sin \propto, \ sin\, 2 \propto, .., sin\, n \propto, .. n \subset 1, N} \end{cases}$$

În realitate, doar mulţimea infinită (23.20) {1, sinα, cosα, sin2α, cos2α , ... , sin nα, cosnα,..} , n → ∞ formează o bază a spaţiului de funcţii, care s-a dovedit deosebit de eficientă în aproximarea funcţiilor periodice, adică pentru N → ∞.

Este simplu de observat că, între **cos(n – 1)α** şi **cosnα** ca şi între **cosnα** şi **cos(n +1)α** precum şi intre **sin(n – 1)α** şi **sinnα** ca şi între **sin nα** şi **sin (n+1)α** exista, până de curând, până la apariţia **FSM-CE**, un imens gol, care aparţinea materiei negre, sau materiei invizibile, a universului matematic al funcţiilor periodice.

b) SISTEMUL TRIGONOMETRIC EXCENTRIC (STE)

Este format prin asocierea funcţiilor cosinus şi sinus **excentrice** de variabilă excentrică şi alcătuesc un **sistem continuu**

(23.21) STE $$\begin{cases} \mathbf{1, cex\theta, cex2\theta, \dots, cexn\theta, ..} \\ \mathbf{0, sex\theta, sex2\theta, \ \ , sexn\theta, ..} \end{cases}$$

Aşa cum s-a mai afirmat, într-un anumit interval, o singura **FCE** din baza supermatematică **STE** poate reprezenta trei **FCC** din baza centrică: una pentru s = e = 0 şi două pentru valorile **marginale** ale excentricităţ numerice **s,** din domeniul **± 1,** şi o infinitate de alte funcţii, pentru valorile intermediare ale lui.

De exemplu, **sexθ** exprima pe **sinθ,** pentru **s** = 0 şi pe **sin2θ**, pentru s = –1 şi – **sin (2*θ*)** pentru s = +1, aşa cum se poate observa în **figura 23.9,a**.

În mod similar, un număr intreg natural ℕ, excentric poate reprezenta trei numere naturale centrice: pe ℕ pentru s = 0 şi pe ℕ **± 1** pentru s = ± 1 şi o infinitate de numere reale cuprinse între ℕ **–1** şi ℕ **+ 1** pentru **s ∈ {(–1, + 1)\0}.**
Pentru s = {–1, 0, 1} → R ∈ ℕ, iar pentru **s** ≠ {−1, 0, 1} ∈ (−1, +1)\0→ R ∈ ℝ

Introducerea **mulţimii reale excentrice** (23.1) permite o definire a mulţimilor mult mai apropiată de definirea ordinară, comună, a unei funcţii matematice, prin funcţiile **definite analitic**.

Mulţimiile reale excentrice pot face trecerea şi, totodată, legăturala numerelor **reale** ℝ cu cele intregi naturale ℕ, dar şi invers, prin relaţiile

(23.22) $$\begin{cases} R = N(1+s), \ \begin{cases} N \subset \mathbb{N} \\ s \in (-1,+1)\backslash 0 \subset \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow R \subset \mathbb{R} \\ R = N(1+s), \ \begin{cases} N \subset \mathbb{N} \\ s = \{-1, \ 0, +1\} \subset \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow R \subset \mathbb{Z} \end{cases},$$

în care **s** este **excentricitatea numerică** care aparţine **mulţimii numerelor reale,** subunitare dacă **s ∈ (–1,+1)\0**∈ℝ şi mulţimii numerelor raţionale ℤ dacă **s ={–1,0,+1}.**

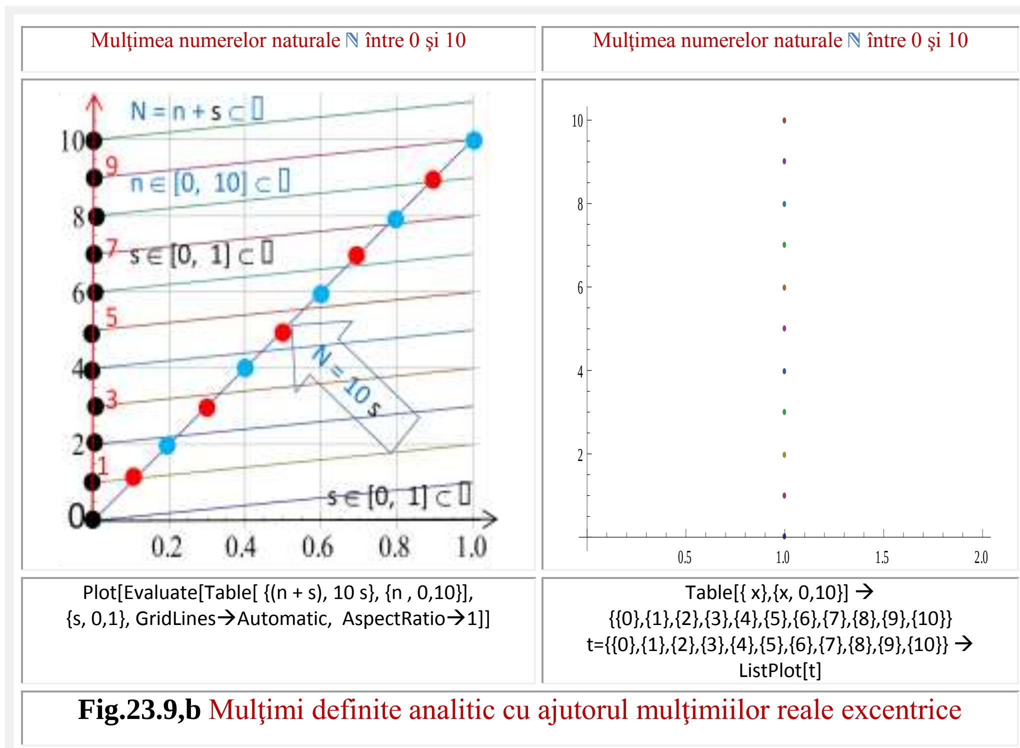


Fig.23.9,b Mulțimi definite analitic cu ajutorul mulțimiilor reale excentrice

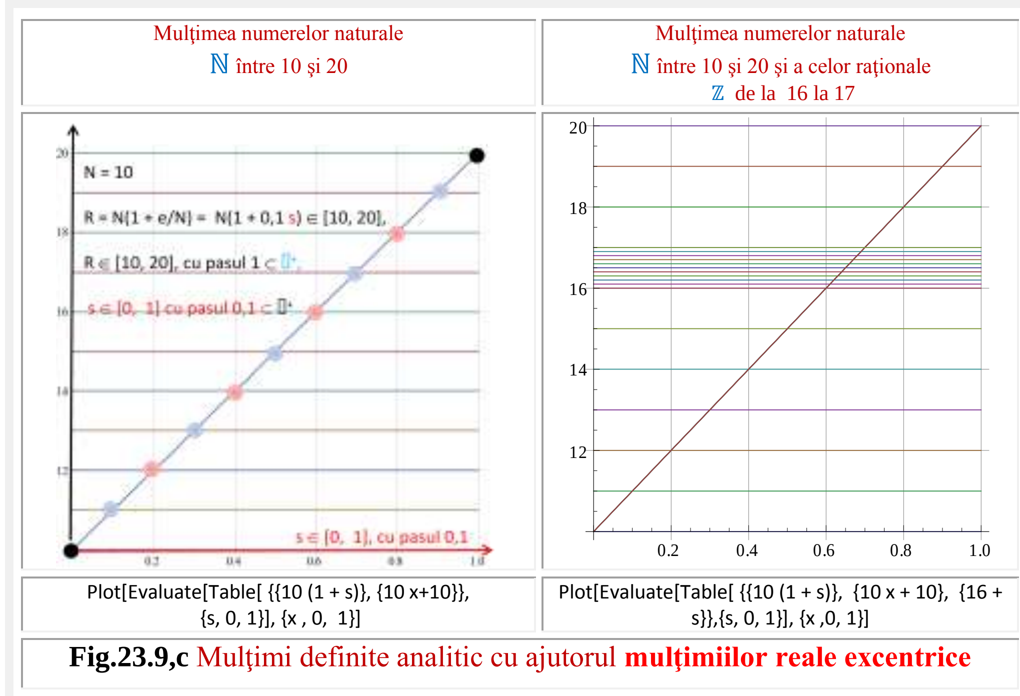


Fig.23.9,c Mulțimi definite analitic cu ajutorul **mulțimiilor reale excentrice**

Pentru **s = 0** → R = $N \in \mathbb{N}$, iar pentru **s = ± 1**→ **R = N ± 1** $\in \mathbb{N}$.

Rezultă, încă odată, că introducerea în matematică a unei noi dimensiuni, a **excentricităţii liniare e** ca şi a celei unghiulare **ε**, a dimensiunilor de deformare a spaţiului, este deosebit de benefică pentru matematică.

Acest aspect este mult mai uşor vizibil în domeniul funcţiilor periodice, în care, apariţia excentricităţii în domeniul matematicii excentrice (**ME**), face posibilă multiplicarea la infinit a tuturor funcţiilor cunoscute din matematica centrica (**MC**) şi apariţia unor funcţii noi, deosebit de importante.

Ca urmare, ceea ce s-a întâmplat, cu mii de ani în urmă, în domeniul numerelor se întâmplă, acum, în domeniul funcţiilor periodice: mari insule albe de pe harta cunoaşterii matematice, populate de materia negră sau nevăzută sunt relevate şi apar clar vizibile pe suprafaţa lucie a oceanului cunoaşterii.

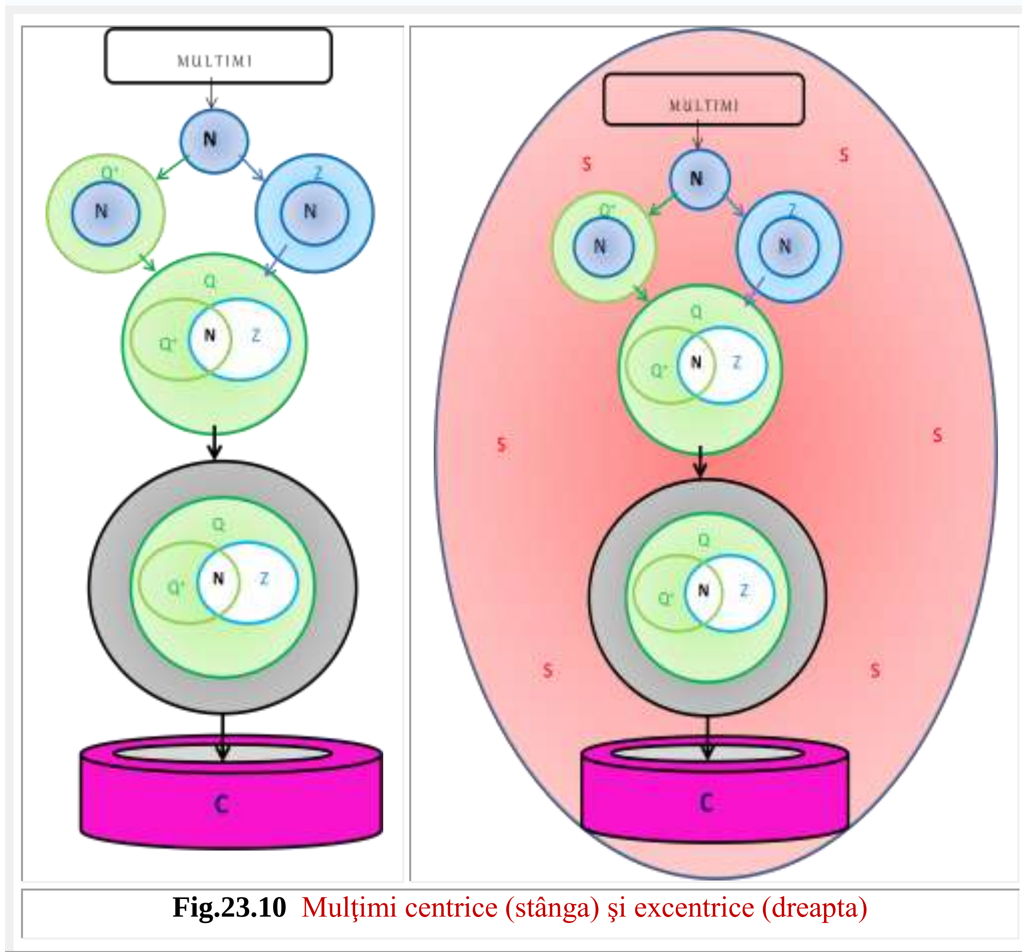


Fig.23.10 Mulţimi centrice (stânga) şi excentrice (dreapta)

Şi, aşa cum s-a prezentat anterior, există şi posibilitetea trecerii de la unele numere la altele şi la înglobarea lor într-un tot unitar prin utilizarea execntricităţii, aşa cum se sugerează în schema din **figura 23.10**.

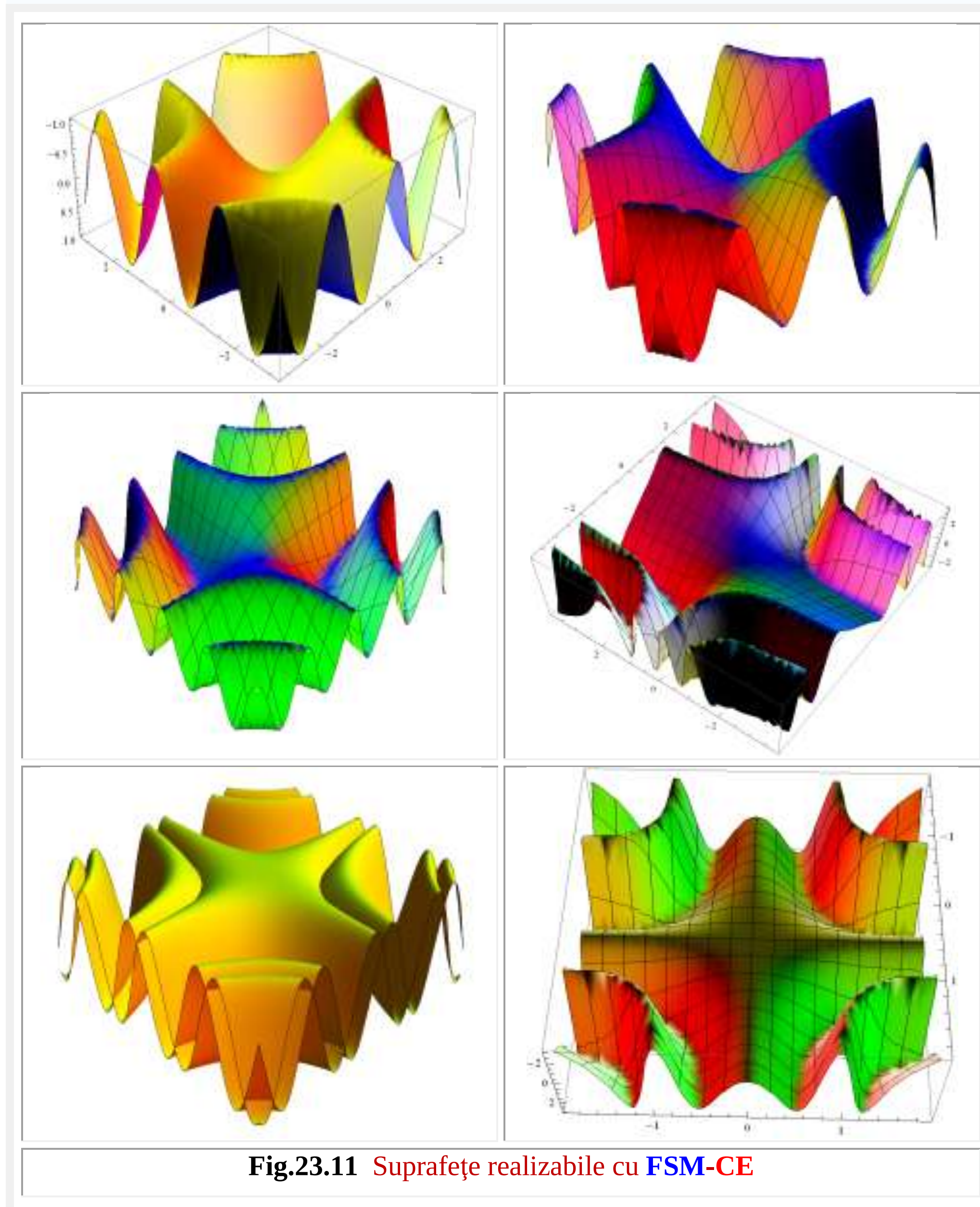


Fig.23.11 Suprafeţe realizabile cu **FSM-CE**

Motto:""**DIVIDE ET IMPERA**" se traduce în ştiinţele matematice prin
"DIVIDE ET DISSOLVENDAM INTEGRUM", pe româneşte
"**Descompune în serie şi integrează termen cu termen**"
Autorul

Capitolul 24.

UNELE DERIVATE ŞI INTEGRALE ALE FSM

Principalele **funcţii supermatematice circulară excentrică** (**FSM-CE**) sunt **aex**, **bex**, **cex**, **dex**, **rex**, **tex**, **texv**, adică amplitudine, **beta**, **cosinus**, **derivată**, **radial**, **tangenta**, **tangenta Voinoiu**, toate **circulare excentrice**, de **variabilă excentrică θ** şi, respectiv, **centrică α** sunt **Aex**, **Bex**, **Cex**, **Dex**, **Rex**,**Tex**, **Texv**

Tabelul 24.1,a PRINCIPALELE FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (FSM-CE) - în prima lor determinare, de indice **1** -

DENUMIREA FUNCŢIEI **NOTAŢII**	**DE EXCENTRU S(s, ε) ŞI DE** **VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ**
Amplitudine excentrică aexθ, Aexα	$\mathbf{aex}\theta = \alpha(\theta) = \theta - \beta(\theta) = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] = \theta - arctan\frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$
Beta excentrică bexθ, Bexα	$\mathbf{bex}\theta = \beta(\theta) = bex[\theta, S(s,\varepsilon)] = \arcsin[s.\mathbf{sin}(\theta-\varepsilon)] = arctan\frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$
Beta excentrică de cosinus $bex_c\theta$, $Bex_C\alpha$	$\mathbf{bex_c}\theta \equiv \beta_c(\theta) = bex_c[\theta, S(s,\varepsilon)] = \arcsin[s.\mathbf{cos}(\theta-\varepsilon)] = arctan\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\cos^2(\theta-\varepsilon)}}$
Cosinus excentric cexθ, Cexα	$\mathbf{cex}\theta = \mathbf{cos}[\alpha(\theta)] = \mathbf{cos}[\mathbf{aex}\theta] = \mathbf{cos}\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\} =$ $= \mathbf{cos}\{\theta - arctan\frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}\} = \mathbf{cos}\theta\sqrt{1-s^2.\sin^2(\theta-\varepsilon)} + \mathbf{s.sin}\theta.\sin(\theta-\varepsilon)$
Derivată excentrică dexθ, Dexα	$\mathbf{dex}\theta = \frac{d\alpha(\theta)}{d\theta} = 1 - \frac{s.Cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} = \frac{-s.Cos(\theta-\varepsilon)+\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} = \frac{rex\theta}{del\theta}$
Radial excentric rexθ, Rexα	$\mathbf{rex}\theta = \frac{d\alpha}{du} = -s.Cos(\theta-\varepsilon) + \sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}$ $= \frac{sex\theta - s.\sin\varepsilon}{\sin\theta} = \frac{sex\theta}{\sin\theta} - s\frac{\sin\varepsilon}{\sin\theta}$, $u = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-s^2\sin^2\theta}}$
Sinus excentric sexθ, Sexα	$\mathbf{sex}\theta = \mathbf{sin}[\alpha(\theta)] = \mathbf{sin}[\mathbf{aex}\theta] = \mathbf{sin}\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\} =$ $= \mathbf{sin}\{\theta - arctan\frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}\} = \mathbf{sin}\theta\sqrt{1-s^2.\sin^2(\theta-\varepsilon)} - \mathbf{s.cos}\theta.\mathbf{sin}(\theta-\varepsilon)$
Tangentă excentrică texθ, Texα	$\mathbf{tex}\theta = \frac{sex\theta}{cex\theta} = tan\alpha(\theta) = tan(aex\theta) = \mathbf{tan}\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\} =$ $= \mathbf{tan}\{\theta - arctan\frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}\}$
Tangentă excentrică **Voinoiu** texvθ, Texvα	$\mathbf{texv}\theta = \frac{sex\theta}{Abs[cex\theta]}$

Unele dintre ele şi combinaţiile lor pot fi derivate şi integrate fără dificultate, altele…

Principalele **FSM-CE** sunt prezentate concentrat în **tabelele 24.1,a şi 24.1,b** împreuna cu ecuaţiile lor de definiţie, scrise cu **funcţii circulare centrice** (**FCC**).

Pe baza acestor ecuaţii pot fi determinate imediat, fără dificultate, derivatele şi integralele lor nedefinite, ca operaţie opusă derivatei. Termenul "integrală" – nedefinită- se poate referi şi la noţiunea de primitivă a unei funcţii, adică o funcţie integrand sau de integrat **F**, a cărei derivată este funcţia dată **f.**

Tabelul 24.1,b PRINCIPALELE FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (FSM-CE) - în prima lor determinare, de indice **1** -	
DENUMIREA FUNCŢIEI NOTAŢII	**VARIABILĂ CENTRICĂ α**
Amplitudine excentrică aexθ, Aexα	**Aexα = θ (α) = α + β(α)** $= \alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}}$ $= \alpha + \arctan\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}$
Beta excentrică bexθ, Bexα	**Bexα** = β(α) = $\arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = = \arctan\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}$
Beta excentrică de cosinus $bex_c\theta$, $Bex_C\alpha$	**$Bex_c\alpha$** ≡ $\beta_c(\alpha) = \arcsin\frac{s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\sin(\alpha-\varepsilon)}} = = \arctan\frac{s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\sin(\alpha-\varepsilon)}$
Cosinus excentric cexθ, Cexα	**Cexα = cos[α(θ)] = cos[Aexα] =** $= \cos[\alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}}] = \cos[\alpha + \arctan\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}]$
Derivată excentrică dexθ, Dexα	**Dexα** = $\frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} = \frac{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{Rex^2\alpha} = \sum_0^\infty s^n \cos n\alpha$
Radial excentric rexθ, Rexα	**Rexα** = $\frac{d\alpha}{du} = \sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} = \frac{1}{e^{\sum_1^\infty \frac{s^n}{n}\cos n\alpha}}$, u = $\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{Rex\alpha}$
Sinus excentric sexθ, Sexα	**Sexα = sin[α(θ)] = sin[Aexα] =** $= \sin[\alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}}] = \sin[\alpha + \arctan\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}]$
Tangentă excentrică texθ, Texα	**Texα** = $\frac{Sex\alpha}{Cex\alpha} = \tan\{Aex\alpha\} == \tan[\alpha + \arctan\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}] = $ $= \tan[\alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}}]$
Tangentă excentrică **Voinoiu** texvθ, Texvα	**Texvα** = $\frac{Sex\alpha}{Abs[cex\alpha]}$

Tabelul 24.2,a Derivatele FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE (**FSM-CE**) DE **VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ**	
FSM-CE(θ)	**DERIVATELE** $\frac{d[FSM-CE(\theta)]}{d\theta}$
α(θ) = **aexθ** ≡ aex[θ,S(s, ε)] = α = θ – β(θ) = θ – arcsin[s.sin(θ – ε)].	$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{d(aex\theta)}{d\theta}$ = **dexθ** ≡ dex[θ, S(s, ε)] $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)]}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$.
β (θ) = **bexθ** ≡ bex [θ,S(s, ε)] = = arcsin[s.**sin**(θ – ε)] = arctan$\frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$.	$\frac{d\beta s(\theta)}{d\theta}$ = **coqθ** ≡ coq[θ, S(s, ε)] $\frac{d\,bex(\theta)}{d\theta} = \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$.
$\beta_c(\theta)$ = **$bex_c\theta$** ≡ bex_c[θ,S(s, ε)] = = arcsin[s.**cos**(θ – ε)] =	$\frac{d\beta_c(\theta)}{d\theta} = coq_c\theta\,\frac{d(bex_c\theta)}{d\theta} \equiv$

$= \arctan\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\cos^2(\theta-\varepsilon)}}$.	$\frac{d}{d\theta}\text{coq}_c[\theta, S(s,\varepsilon)] = \frac{-s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\cos(\theta-\varepsilon)}}$.
r(θ) = **rexθ** = – scos(θ – ε) = $+\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}$ $= \frac{d\alpha}{du}$, u = $\int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{Rex\alpha} = \int_0^{\theta}\frac{d\theta}{del\theta} = = \int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$.	$\frac{dr(\theta)}{d\theta} = \frac{d(\mathbf{rex\theta})}{d\theta} = s.\sin(\theta-\varepsilon) - \frac{s^2\sin(\theta-\varepsilon).\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$ = s.sin$(\theta-\varepsilon)[1-\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}]$ = =s.sin$(\theta-\varepsilon).dex\theta = \frac{d\theta}{du}$.
d(θ) = **dexθ** = $1-\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}} = \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{1}{\mathbf{Dex\alpha}} = \frac{d\alpha}{d\theta}$ =	$\frac{d(\theta)}{d\theta} = \frac{d(\mathbf{dex\theta})}{d\theta} = \frac{d^2\alpha}{d\theta^2} = \frac{s(1-s^2).\sin(\theta-\varepsilon)}{[1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)]^{\frac{3}{2}}}$.
x(θ) = **cexθ** = cos[aexθ] = cos{θ – arcsin[s.sin(θ – ε)]}= =cosθ$\sqrt{1-s^2\cos(\theta-\varepsilon)}$ + s.sin$\theta.\sin(\theta-\varepsilon)$.	$\frac{d[x(\theta)]}{d\theta} = \frac{d(cex\theta)}{d\theta}$ =**– sexθ.dexθ.**
y(θ) = **sexθ** = sin[aexθ] = sin{θ – arcsin[s.sin(θ – ε)]} = = sinθ$\sqrt{1-s^2\cos(\theta-\varepsilon)}$ – s.cos$\theta.\sin(\theta-\varepsilon)$.	$\frac{d[y(\theta)]}{d\theta} = \frac{d(sex\theta)}{d\theta}$ == **cexθ.dexθ.**
X(θ) = **coqθ** = $\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-s^2\sin^2\theta}}$	$\frac{dX(\theta)}{d\theta} = \frac{(s^2-1)\sin\theta}{(1-s^2\sin^2\theta)^{3/2}} = \frac{d(coq\theta)}{d\theta} = \frac{(s^2-1)}{1-s^2\sin^2\theta}$tanθ. **coqθ**
Y(θ) = **siqθ** = $\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-s^2\cos^2\theta}}$	$\frac{dY(\theta)}{d\theta} = -\frac{(s^2-1)\cos\theta}{(1-s^2\cos^2\theta)^{3/2}} = \frac{d(siq\theta)}{d\theta} = \frac{-(s^2-1)}{1-s^2\cos^2\theta}$cotθ. **siqθ**

DERIVATA	F U N C Ţ I A	E X P R E S I A	ALTE EXPRESII
$\frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta} = \frac{d(aex_{1,2}\theta)}{d\theta}$ = dex$_{1,2}\theta$ = $= \frac{d(\theta_{1,2}-\beta_{1,2})}{d\theta} = 1 - \frac{d\beta_{1,2}}{d\theta}$ =	$d_{1,2}(\theta) = dex_{1,2}\theta = \frac{1}{Dex\alpha_{1,2}} = \frac{rex_{1,2}\theta}{\cos\beta_{1,2}}$	$= 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)]}{\pm\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$ = $= \sqrt{rex_{1,2}^2\theta + \left(\frac{drex_{1,2}\theta}{d\theta}\right)^2}$	$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}s^n.\cos n\alpha_{1,2}}$
$\frac{d\alpha_{1,2}}{du} = \frac{d(aex_{1,2}\theta)}{du}$ = rex$_{1,2}\theta$ = $= \frac{d(\theta_{1,2}-\beta_{1,2})}{du} = \cos\beta_{1,2} - \frac{d\beta_{1,2}}{du}$ = $= (1-s)\cos\beta_{1,2}$	$r_{1,2}(\theta) = rex_{1,2}\theta = \frac{1}{Dex\alpha_{1,2}} = \frac{rex_{1,2}\theta}{\cos\beta_{1,2}}$	= -sw.cos(θ–ε) ± $\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}$ = $\sqrt{\left(\frac{d\alpha_{1,2}}{d\theta}\right)^2 - \left(\frac{dr_{1,2}}{d\theta}\right)} = \sqrt{dex_{1,2}^2\theta - \frac{d(rex_{1,2}\theta)}{d\theta}}$	$= e^{-\sum_1^{\infty}\frac{s^n}{n}\cos n\theta} = \frac{1}{Rex\alpha_{1,2}}$ = $= \sum_{n=0}^{\infty}s^n P_n.\cos\alpha_{1,2}$

Tabelul 24.2,b Integralele FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE (FSM-CE) DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ

$\int$ **FSM – CE(θ).dθ**	**INTEGRALE**
$\int \mathbf{dex\theta}.d\theta = \int d\alpha. \to \int\frac{d\alpha}{d\theta}d\theta = \alpha(\theta)$ = **aexθ**.	$\int\left(1-\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)]}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}\right)d\theta = \alpha(\theta)$ = θ – arcsin[s.sin(θ – ε)]= **aexθ**
$\int$ **coqθ**.dθ = $\int$ d[βs(θ)] = **bexθ.**	$\int\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}d\theta = \int$ **coqθ**dθ = arcsin[s.**sin**(θ – ε)] = arctan$\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$ = **bex [θ,S(s, ε)]**
$\int$ **coq$_C$θ**.dθ = $\int$ dβ$_C$(θ) = **bexCθ**. =	$\int\frac{-s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\cos^2(\theta-\varepsilon)}}d\theta$ = arcsin[s.**cos**(θ – ε)]= **bex$_c$[θ,S(s, ε)]**
$\int s.\sin(\theta-\varepsilon).dex\theta.d\theta = \int\frac{dr(\theta)}{d\theta}d\theta$ = r(θ) = **rexθ**.	$\int[s.\sin(\theta-\varepsilon) - \frac{s^2\sin(\theta-\varepsilon).\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}]d\theta$ = = – scos(θ – ε) +$\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}$= **rex[θ,S(s,ε)]**
$\int dex\theta.d\theta = \int\frac{d^2\alpha}{d\theta^2}.d\theta = \int\frac{d(\theta)}{d\theta}d\theta$ = d(θ) = **dexθ**.	$\int\frac{s(1-s^2).\sin(\theta-\varepsilon)}{[1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)]^{\frac{3}{2}}}d\theta = 1-\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$ = **dex[θ,S(s,ε)]**

$\int -\,\mathrm{sex}\theta.\mathrm{dex}\theta.d\theta = \int \frac{d[x(\theta)]}{d\theta} d\theta = \int \frac{d(cex\theta)}{d\theta} d\theta = \boldsymbol{cex\theta}.$	$\int -\{\sin\theta\sqrt{1-s^2cos(\theta-\varepsilon)} + s.\cos\theta.\sin(\theta-\varepsilon)\} * \left\{1-\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2sin^2(\theta-\varepsilon)}}\right\} d\theta = \mathbf{cex\theta}$
$\int \mathrm{cex}\theta.\mathrm{dex}\theta.d\theta = \int \frac{d[y(\theta)]}{d\theta} d\theta = \int \frac{d(sex\theta)}{d\theta} d\theta = \boldsymbol{sex\theta}.$	$\int\{\cos\theta\sqrt{1-s^2cos(\theta-\varepsilon)} + s.\sin\theta.\sin(\theta-\varepsilon)\} * \left\{1-\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2sin^2(\theta-\varepsilon)}}\right\} d\theta = \mathbf{sex\theta}$
$s\int coq\theta.d\theta = \mathbf{bex\theta}$	$s\int \frac{(s^2-1)\sin\theta}{(1-s^2\sin^2\theta)^{3/2}} d\theta = \mathbf{coq\theta}$
$s\int siq\theta.d\theta = \mathbf{bex_C\theta}$	$s\int -\frac{(s^2-1)\cos\theta}{(1-s^2\cos^2\theta)^{3/2}} d\theta = \mathbf{siq\theta}$
$\int$ **FSM − CE(θ).dθ**	**INTEGRALE**
$\int \boldsymbol{dex\theta}.d\theta = \int d\alpha. \to \int \frac{d\alpha}{d\theta} d\theta = \alpha(\theta) = \mathbf{aex\theta}.$	$\int \left(1-\frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)]}{\sqrt{1-s^2sin^2(\theta-\varepsilon)}}\right) d\theta = \alpha(\theta) = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] = \mathbf{aex\theta}$

Tabelul 24.3,a Derivatele FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE (FSM-CE) de variabilă centrică **α**

DERIVATELE $\boldsymbol{\frac{d\theta}{d\alpha}}$

$\theta(\alpha) = \mathbf{Aex\alpha} \equiv \mathrm{Aex}[\alpha, S(s,\varepsilon)] =$ $\theta(\alpha) = \alpha + \beta(\alpha) =$ $\begin{cases} \alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2scos(\alpha-\varepsilon)}} \\ \alpha + \arctan\frac{s.\boldsymbol{sin}(\alpha-\varepsilon)]}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)} \end{cases}$	$\frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d(\mathbf{Aex\alpha})}{d\alpha} = \mathbf{Dex\alpha} \equiv \mathrm{Dex}[\alpha, S(s,\varepsilon)]$ $= \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+s^2-2scos(\alpha-\varepsilon)} = \frac{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{Rex^2\alpha}$ $= \frac{1}{dex\theta} = \sum_0^\infty s^n.\cos(n\alpha)$
$\beta(\alpha) = \mathbf{Bex\alpha} \equiv \mathrm{Bex}[\alpha, S(s,\varepsilon)] = \arctan\frac{s.\boldsymbol{sin}(\alpha-\varepsilon)]}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)} =$ $= \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2scos(\alpha-\varepsilon)}} = \sum_1^\infty \frac{s^n}{n}\sin(n\alpha)$	$\frac{d[\beta s(\alpha)]}{d\alpha} = \boldsymbol{Coq\alpha} \equiv Coq[\alpha, S(s,\varepsilon)] = s\frac{\cos(\alpha-\varepsilon)-s}{1+s^2-2scos(\alpha-\varepsilon)} =$ $= s\frac{\cos(\alpha-\varepsilon)-s}{Rex^2\alpha} = \sum_1^\infty s^n cosn\alpha = \frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} - 1 = \mathbf{Dex\alpha\ -1}$
$\beta_C(\alpha) = \mathbf{Bex_C\alpha} \equiv \mathrm{Bex_C}[\alpha, S(s,\varepsilon)] =$ $= \arctan\frac{s.\boldsymbol{cos}(\alpha-\varepsilon)]}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)} = \arcsin\frac{s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2scos(\alpha-\varepsilon)}} =$ $= \sum_1^\infty \frac{s^n}{n}\sin(n\alpha)$	$\frac{d[\beta C(\alpha)]}{d\alpha} = \boldsymbol{Coq_C\alpha} \equiv Coq[\alpha, S(s,\varepsilon)] = \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2sin^2(\theta-\varepsilon)}} =$ $= s\frac{\cos(\alpha-\varepsilon)-s}{\sqrt{1+s^2-2scos(\alpha-\varepsilon)}} = s\frac{\cos(\alpha-\varepsilon)-s}{Rex^2\alpha}$
$D(\alpha) = \mathbf{Dex\alpha} = \boldsymbol{\frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha}} = \frac{1-s.cos(\alpha-\varepsilon)}{1+s^2-2scos(\alpha-\varepsilon)} =$ $= \frac{1-s.cos(\alpha-\varepsilon)}{Rex^2\alpha} = \sum_0^\infty s^n cosn\alpha$	$\frac{dD(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d^2\theta(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{-s[\cos(\alpha-\varepsilon)-s]}{Rex^4\alpha} =$ $= -\sum_1^\infty n.s^n.sinn\alpha = \frac{\epsilon}{\Omega^2}$
$D(\alpha) = \boldsymbol{\frac{d\theta}{d\alpha}} = \mathbf{Dex\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{dex\theta}} = \boldsymbol{\frac{d\alpha}{d\theta}}$	$\frac{dD(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d^2\theta}{d\alpha^2} = \frac{d^2B(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{-s(1-s^2)sin\alpha}{Rex^4\alpha} =$
$R(\alpha) = \mathbf{Rex\alpha} = \boldsymbol{\frac{d\alpha}{du}}$	$\frac{dR(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d^2R(\alpha)}{d\alpha\,du} = \mathrm{Sin}[\mathbf{Bex\alpha}] = \frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2scos(\alpha-\varepsilon)}}$
$X(\alpha) = \cos[\mathbf{Aex\alpha}] = \mathbf{Cex\alpha} = \cos[\alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2scos(\alpha-\varepsilon)}}] =$ $= \frac{\cos\alpha-s}{\sqrt{1+s^2-2scos\alpha}} = \frac{cos\alpha-s}{Rex\alpha}$	$\frac{dX(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\mathbf{d(Cex\alpha)}}{d\alpha} = \mathbf{-Dex\alpha.\ Sex\alpha} = \frac{sin\theta[1-s.cos(\alpha-\varepsilon)]}{Rex^3\alpha}.$
$Y(\alpha) = \sin[\mathbf{Aex\alpha}] = \mathbf{Sex\alpha} = \sin[\alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2scos(\alpha-\varepsilon)}}]$ $= \frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Rex}\alpha}$	$\frac{dY(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\mathbf{d(Sex\alpha)}}{d\alpha} = \mathbf{Dex\alpha.\ Cex\alpha} = \frac{(cos\alpha-s)[1-s.cos(\alpha-\varepsilon)]}{Rex^3\alpha}.$
$T(\alpha) = \mathbf{Tex\alpha} = \frac{Sex\alpha}{Cex\alpha} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha-s}$	$\frac{dT(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\mathbf{d(Tex\alpha)}}{d\alpha} = \frac{1-s.\cos\alpha}{(\cos\alpha-s)^2}$
$T_V(\alpha) = \mathbf{Texv\alpha} = \frac{Sex\alpha}{Abs[Cex\alpha]} = = \frac{sin\alpha}{Abs[cos\alpha-s]}$	$\frac{dT_V(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\mathbf{d(Texv\alpha)}}{d\alpha} = \frac{(\cos\theta+\sin^2\theta)}{\mathrm{Abs}[\cos\theta-s]}$

Tabelul 24.3,b Integralele FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE (**FSM-CE**) de variabilă centrică **α**

INTEGRALE	
$\int \mathbf{Dex\alpha}.d\alpha = \int \frac{d\theta}{d\alpha} d\alpha \to \int d\theta. = \theta(\alpha) = \mathbf{Aex\alpha}$	$\int \frac{1 - s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} d\alpha = \theta(\alpha) = \alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \alpha + \arctan\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)} = \mathbf{Aex\alpha}$
$\int \mathbf{Coq\alpha}.d\alpha = \int \frac{d[\beta(\alpha)]}{d\alpha} d\alpha. \to \int d[\beta(\alpha)] = \beta(\alpha) = \mathbf{Bex\alpha}$	$\int \frac{s.\cos(\alpha-\varepsilon) - s^2}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} d\alpha == \int \frac{s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1-s^2\sin^2(\alpha-\varepsilon)} d\alpha =$ $\beta(\alpha) = \alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \alpha + \arctan\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)} = \mathbf{Bex\alpha}$
$\int \mathbf{Coq_C\alpha}.d = \int \frac{d[\beta_C(\alpha)]}{d\alpha} d\alpha. \to \int d[\beta_C(\alpha)] = \beta_C(\alpha) = \mathbf{Bex_C\alpha}$	$\int \frac{s.\cos(\alpha-\varepsilon) - s^2}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} d\alpha = \int \frac{s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1-s^2\sin^2(\alpha-\varepsilon)} d\alpha =$ $\theta_C(\alpha) = \alpha + \arcsin\frac{s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \alpha + \arctan\frac{s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)} = \mathbf{Bex_C\alpha}$
$\int \mathbf{Dex\alpha}.d\alpha = \int \frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} d\alpha = \theta(\alpha) = \mathbf{Aex\alpha}$	$\int \frac{1 - s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} d\alpha == \alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \alpha + \arctan\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)} = \mathbf{Aex\alpha}.$
$\int \mathbf{Dex\alpha}\, d\alpha = n\int \frac{d\theta}{d\alpha} d\alpha = \theta(\alpha) = \mathbf{Aex\alpha}$	$-\int \frac{s(1-s^2)\sin\alpha}{Rex^4\alpha} d\alpha = \frac{1 - s.\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} = \mathbf{Dex\alpha}$
$\int \mathrm{Sin}[\mathbf{Bex\alpha}]d\alpha = \mathbf{Rex\alpha}$	$\int \frac{d\alpha}{du} d\alpha = \int \frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} d\alpha == \sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)} = \mathbf{Rex\alpha}$
$\int -\mathbf{Dex\alpha}.\mathbf{Sex\alpha} = \mathbf{Cex\alpha}$	$-\int \frac{\sin\theta[1-s.\cos(\alpha-\varepsilon)]}{[1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)]^{\frac{3}{2}}} d\alpha = \mathbf{Cex\alpha}$
$\int \mathbf{Dex\alpha}.\mathbf{Cex\alpha} = \mathbf{Sex\alpha}$	$\int \frac{(\cos\alpha - s)[1 - s.\cos(\alpha-\varepsilon)]}{Rex^3\alpha} d\alpha = \mathbf{Sex\alpha}$
$\int \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - s} d\alpha = \int \mathbf{Tex\alpha}\, d\alpha = -\mathrm{Log}[\cos\alpha - s]$	$\int \frac{1-s.\cos\alpha}{(\cos\alpha-s)^2} d\alpha = \frac{\mathbf{d}(\mathbf{Tex\alpha})}{d\alpha} = \mathbf{Tex\alpha}$
$\int \frac{\sin\alpha}{Abs[\cos\alpha - s]} d\alpha =$? (Deocamdată)	$\int \frac{(\cos\theta + \sin^2\theta)}{\mathrm{Abs}[\cos\theta - s]} d\alpha = \int \frac{\mathbf{d}(\mathbf{Texv\alpha})}{d\alpha} d\alpha = \mathbf{Texv\alpha}$

Dacă derivatele oricărei **FSM-CE** nu ridică probleme insurmontabile, nu acelaşi lucru se poate spune despre integrarea lor. În tabelele anterioare, aşa cum se poate observa, au fost prezentate doar integralele derivatelor unor **FSM-CE** şi nu integralele lor. Chiar şi integrarea celei mai simple **FSM-CE** ridică probleme.

Astfel, dacă **FSM-CE beta excentrică** de variabilă excentrică θ, componenta şi a **FSM-CE aexθ,**

(1) $\mathrm{bex}\theta \equiv \beta(\theta) = \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]$; $\mathrm{aex}\theta \equiv \alpha(\theta) = \theta - \beta(\theta) = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]$

cu graficele din **figura 24.1,a** şi **figura 24.3** se poate deriva fără probleme (**Fig.24.4**), ca oricare altă **FSM-CE,** integrarea ei directă, nedefinită, sub forma (1) nu poate fi, deocamdată, realizată, păstrându-se încă necunoscută.

De aceea, este necesar să se apeleze la “divide şi stăpâneşte”, adică la dezvoltarea expresiei lui **bexθ** în serie de puteri şi, apoi, integrarea termen cu termen.

Funcţia supermatematică circulară excentrică (**FSM-CE**) beta excentrică, de variabilă excentrică **θ**, poate fi integrată doar prin dezvoltarea ei în următoarea serie de puteri

(2) $\arcsin z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7} + \ldots = \sum_0^\infty \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(2n+1)} z^{2n+1} = \sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!}{2n!!} z^{(2n+1)}$

şi are graficele din **figura 24.1,a** cu **4** termeni şi în **figura 24.1,b** cu **5** şi cu **6** termeni**.**

Prin înlocuirea lui **z** din **arcsinz** cu

(3) $z = \mathbf{s}.\sin(\theta - \varepsilon)$, $\mathbf{s} \leq 1$

expresia (1) devine

(4) $$\arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] = \sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!}{2n!!}[s.\sin(\theta-\varepsilon)]^{(2n+1)} =$$
$$= s.\sin(\theta-\varepsilon)] + \frac{1}{2}\frac{[s.\sin(\theta-\varepsilon)]^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{[s.sin(\theta-\varepsilon)]^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{[s.sin(\theta-\varepsilon)]^7}{7} + \ldots =$$
$$= \sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!}{2n!!}[s\sin(\theta-\varepsilon)]^{(2n+1)}$$

Ca urmare, integrala nedefinită a **FSM-CE θ** este

(5) $$\int bex\theta.d\theta = \int \sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\left[s.\sin(\theta-\varepsilon)\right]^{(2n+1)} d\theta =$$
$$= -\sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!}{2n!!} s\frac{\cos(\theta-\varepsilon)}{2n+1}\left\{sin^{2n}\theta + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{k+1}n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)cos^{2n-2k}\theta}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k-1)}\right\} =$$
$$= \sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\left\{-s.\mathrm{Cos}[t].\mathrm{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{2}, -n, \frac{3}{2}, \cos^2\theta\right] sin^{2n}\theta(\sin^2\theta)^{-n}\right\}.$$

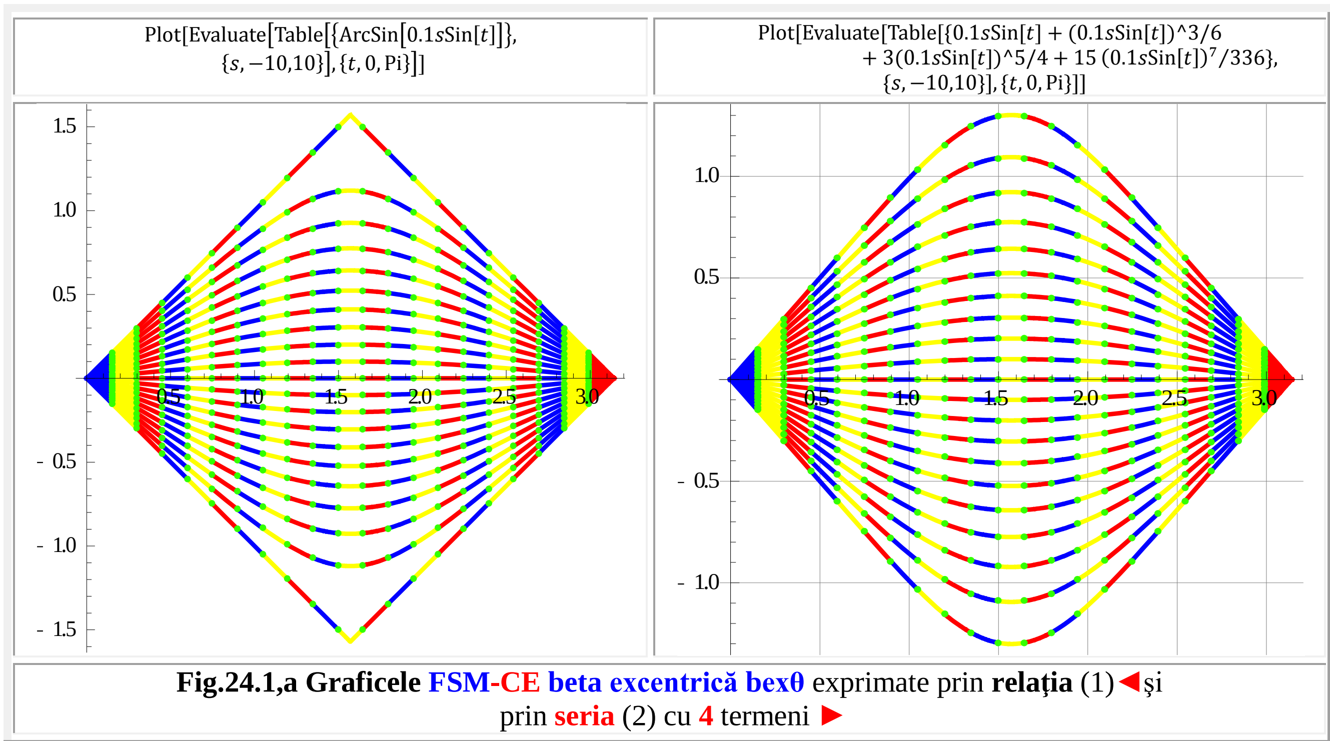


Fig.24.1,a Graficele FSM-CE beta excentrică bexθ exprimate prin **relaţia** (1) ◀ şi prin **seria** (2) cu **4** termeni ▶

Şi, aşa cum se poate observa, expresia integralei nu este deloc simplă, decât pentru cei ce operează frecvent cu **funcţii hipergeometrice**. Pentru noi, ceialalţi, am extras câteva informaţii din lucrarea **Rîjik I. M.** şi **Gradştein I. S.** "**Tabele de INTEGRALE, SUME, SERII ŞI PRODUSE**" Ed. Tehnică 1955, pag 415, sau din lucrarea lui **Milton Abramowitz** şi **Irene A. Stegun** "**HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS WITH FORMULAS, GRAPHS AND MATHEMATICAL TEBELES**" Ed. **NATIONAL BIREAU OF STANDARDS APPLIED MATHEMATICS SERIES** -55, 1964, pag.370. În prima lucrare, seria este notată cu F(a, b; c;z), în lucrarea următoare est notată cu **F(α, β; γ, z)** şi are expresia

(6) $$F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z) = F(b, a; c; z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!}.$$

Din **figurile 24.1,a** şi **24.1b** rezultă că numărul termenilor dezvoltărilor în serie, în acest caz, au o influenţă apropae nulă asupra graficelor funcţiilor **beta excentrice bexθ.**

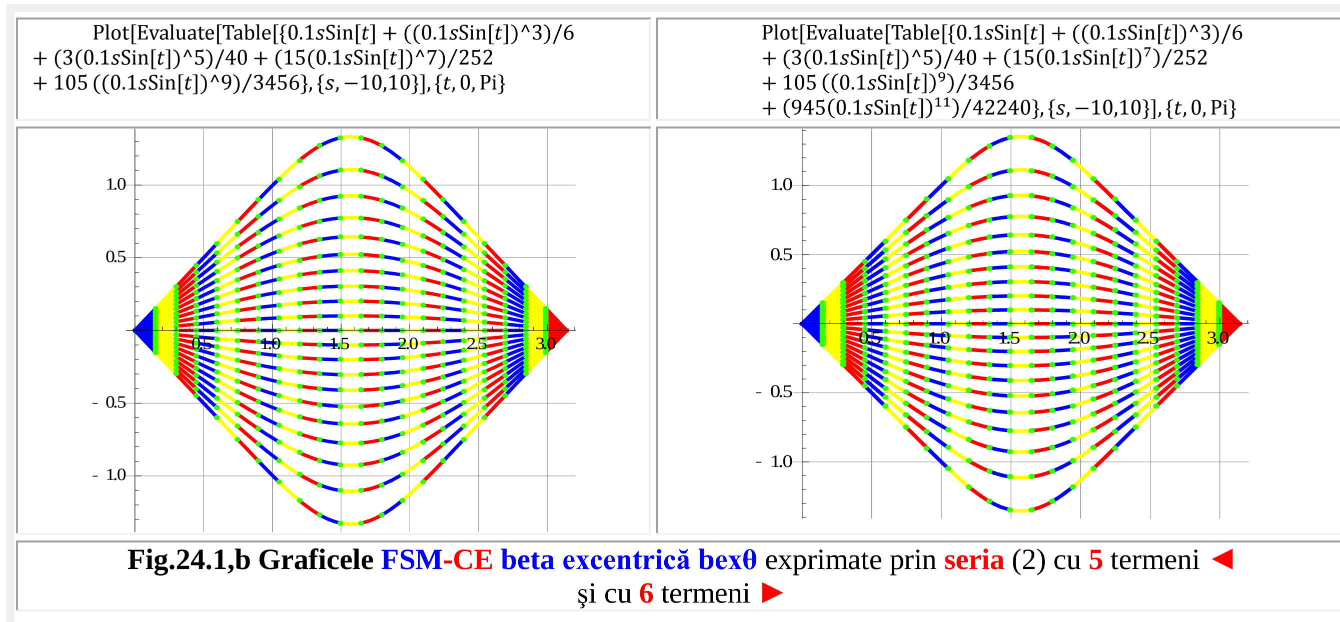


Fig.24.1,b Graficele FSM-CE beta excentrică bexθ exprimate prin **seria** (2) cu **5** termeni ◄ şi cu **6** termeni ►

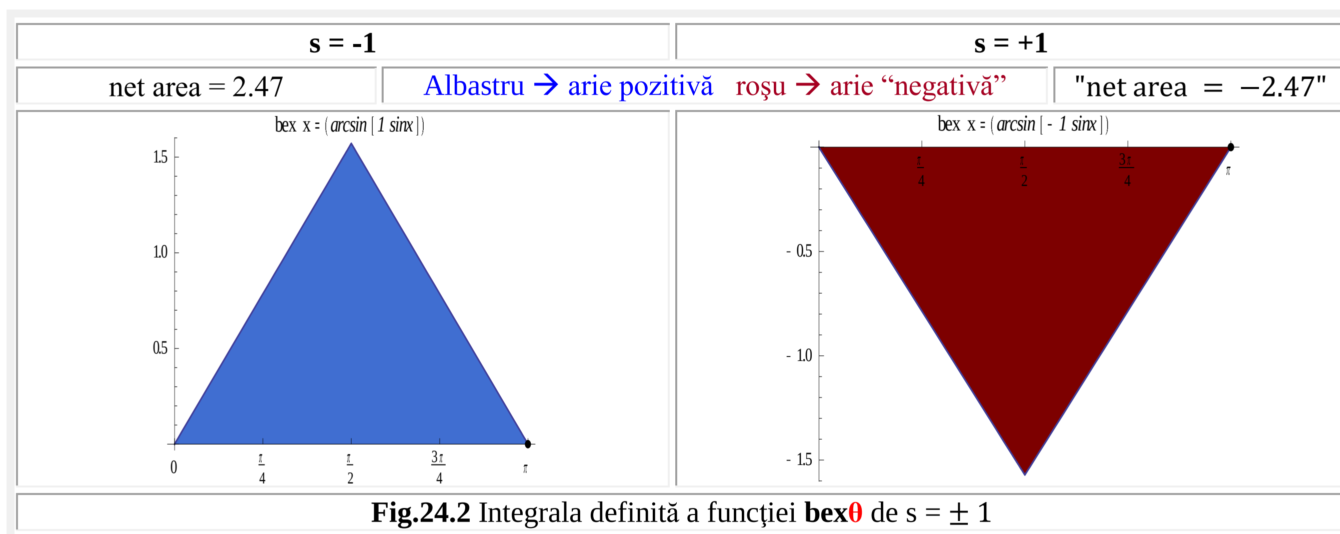


Fig.24.2 Integrala definită a funcţiei **bexθ** de s = ± 1

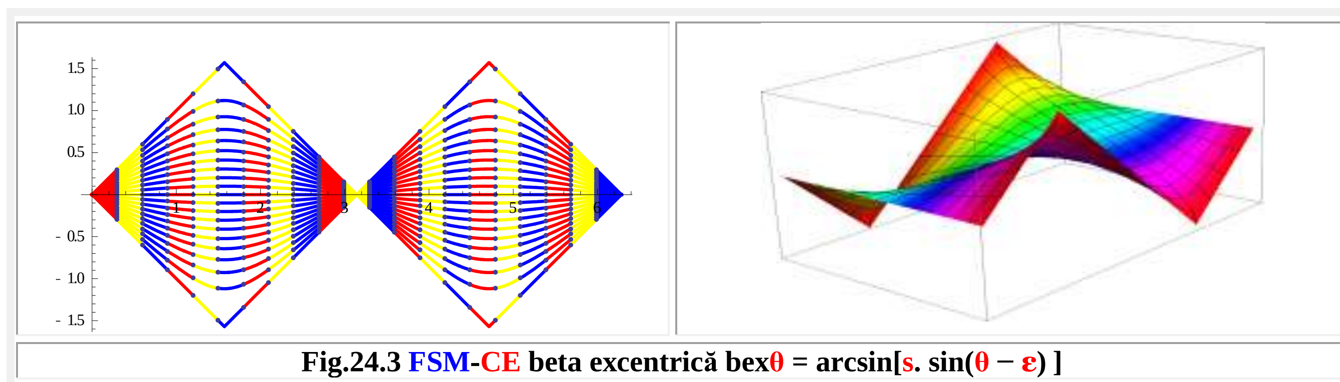


Fig.24.3 FSM-CE beta excentrică bexθ = arcsin[s. sin(θ − ε)]

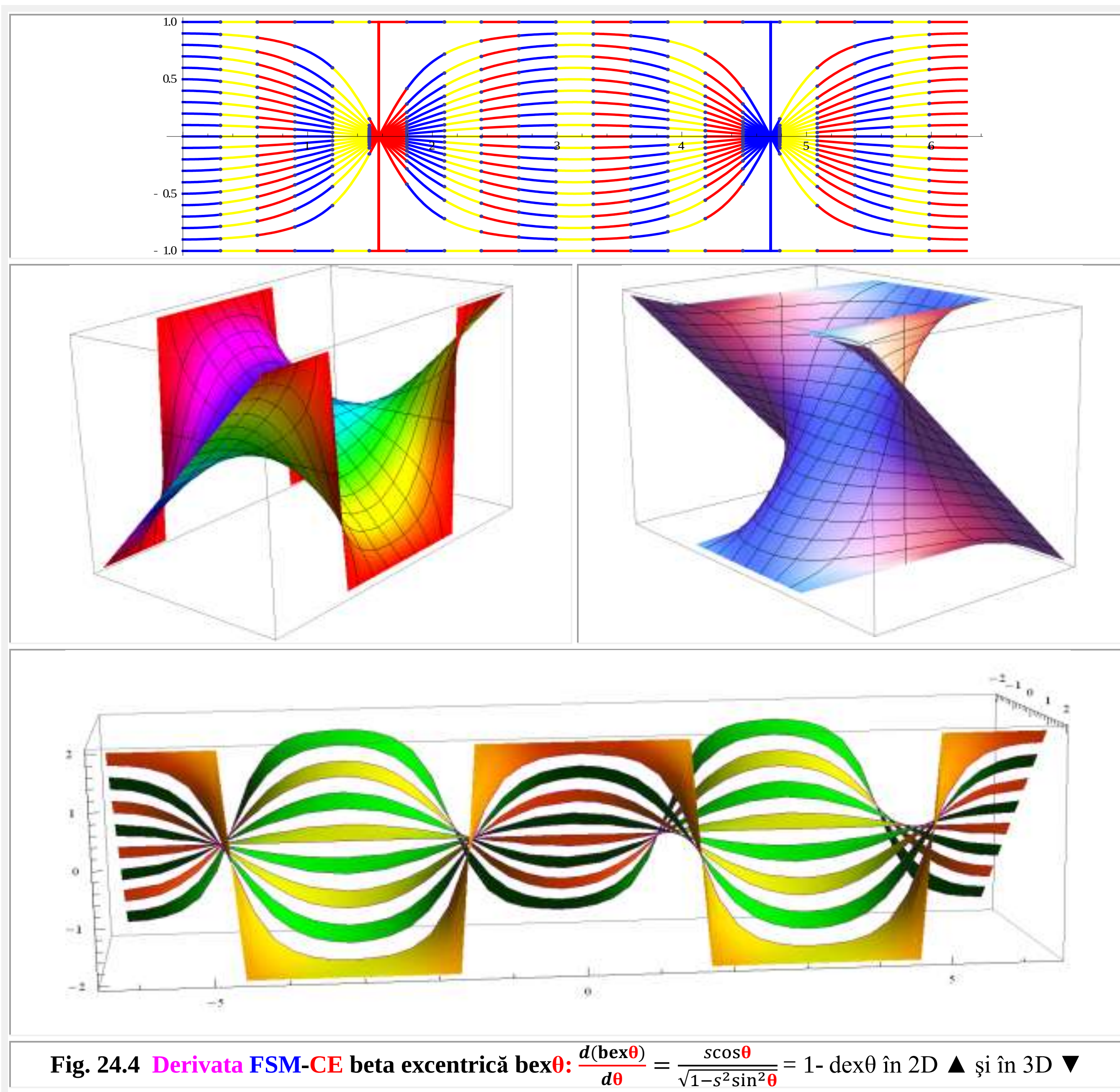


Fig. 24.4 **Derivata FSM-CE beta excentrică bexθ:** $\frac{d(\text{bex}\theta)}{d\theta} = \frac{s\cos\theta}{\sqrt{1-s^2\sin^2\theta}}$ = 1- dexθ în 2D ▲ şi în 3D ▼

Deşi funcţia **bexθ** este inclusă în expresiile funcţiilor aex, cex, sex ş.m.a, care pot fi integrate fără dificultate, cu ajutorul unor programe performante de matematică, cum este **Mathematica 9** a lui **Stephan Wolfram**, **bexθ** nu poate fi integrată nedefinit direct. În schimb poate fi integrată definit

La comanda de integrare nedefinită şi, respectiv, definită

Integrate[ArcSin[0.8Sin[x]], x], Integrate[ArcSin[0.8Sin[x]], {x, 0, Pi}]

răspunsul este

$\int$ ArcSin[0.8Sin[x]] dx, respectiv $\int_0^\pi$ ArcSin[0.8Sin[x]] dx.

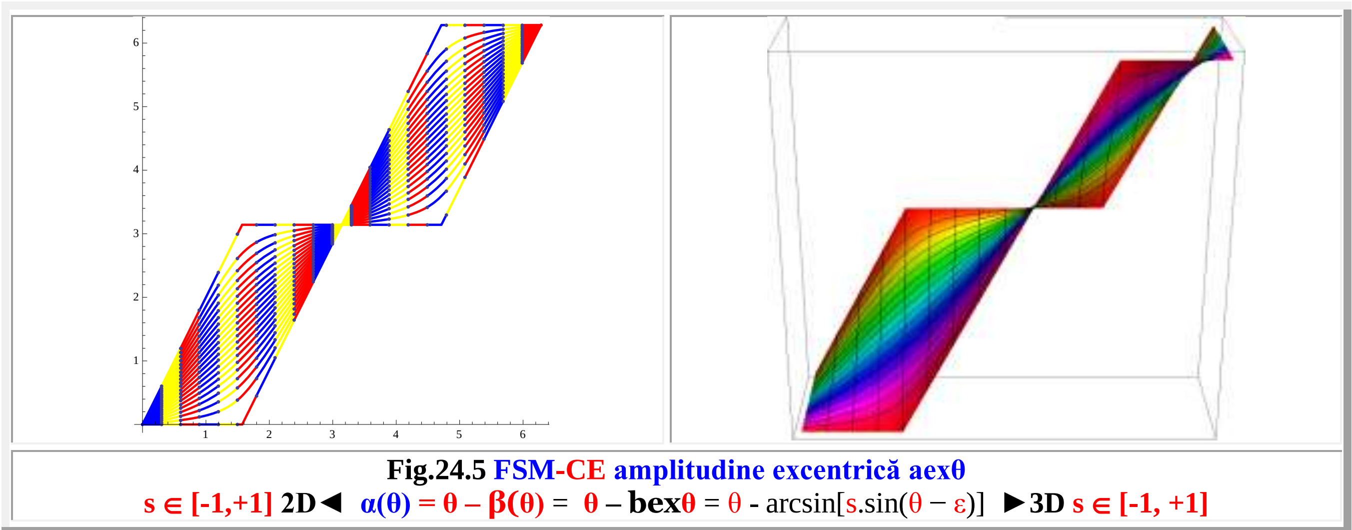


Fig.24.5 FSM-CE amplitudine excentrică aexθ

s ∈ [-1,+1] 2D◄ α(θ) = θ – β(θ) = θ – bexθ = θ - arcsin[s.sin(θ − ε)] **►3D s ∈ [-1, +1]**

Fig. 24.6 Derivata FSM-CE amplitudine excentrică d(aexθ): $\frac{d(aex\theta)}{d\theta} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-s^2\sin^2\theta}}$

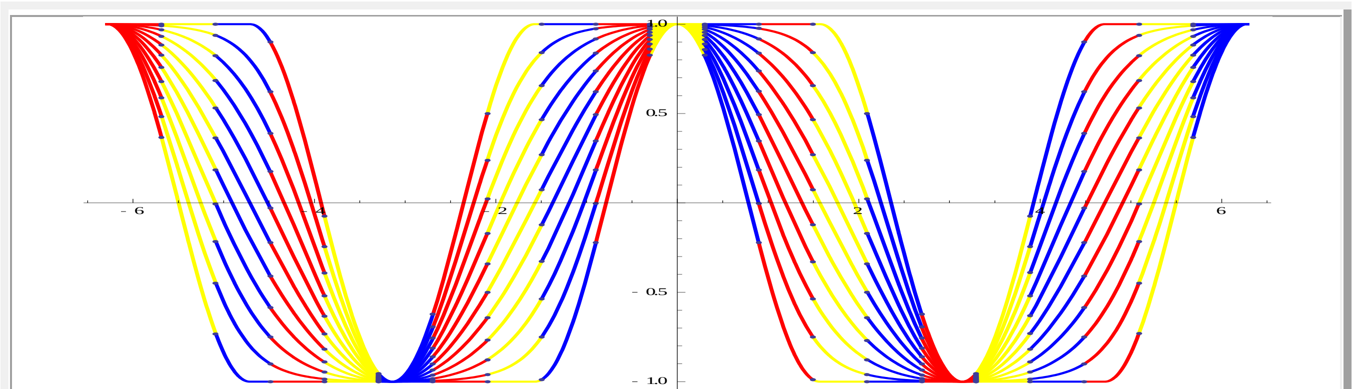
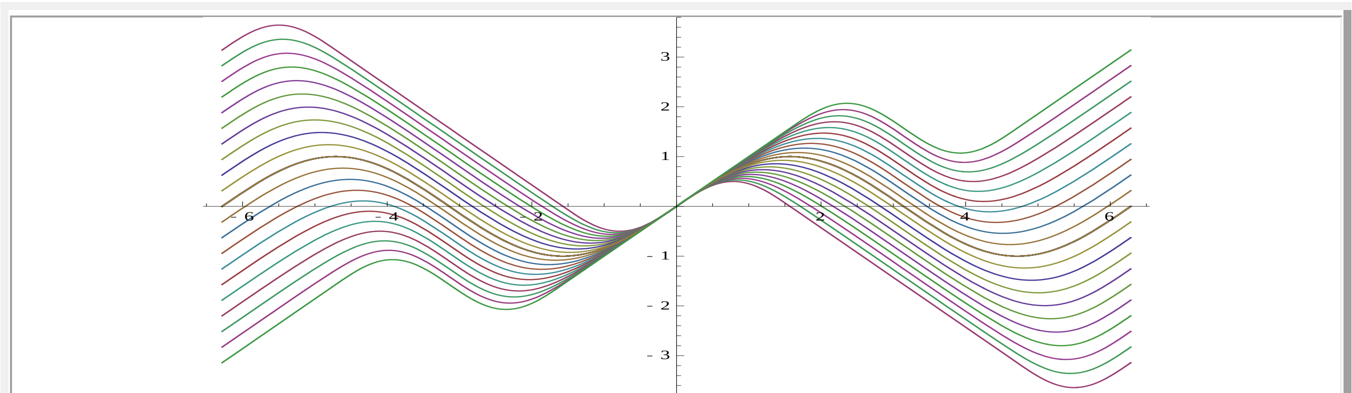


Fig.24.7,a Funcţia supermatematică cosinus excentric de cex $\boldsymbol{\theta}$

$cex_{1,2}\theta = \cos[\mathbf{aex\theta}] = \cos[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon))] = s.\sin\theta.\sin(\theta-\varepsilon) \pm cos\theta\sqrt{1-s^2sin^2(\theta-\varepsilon)}$



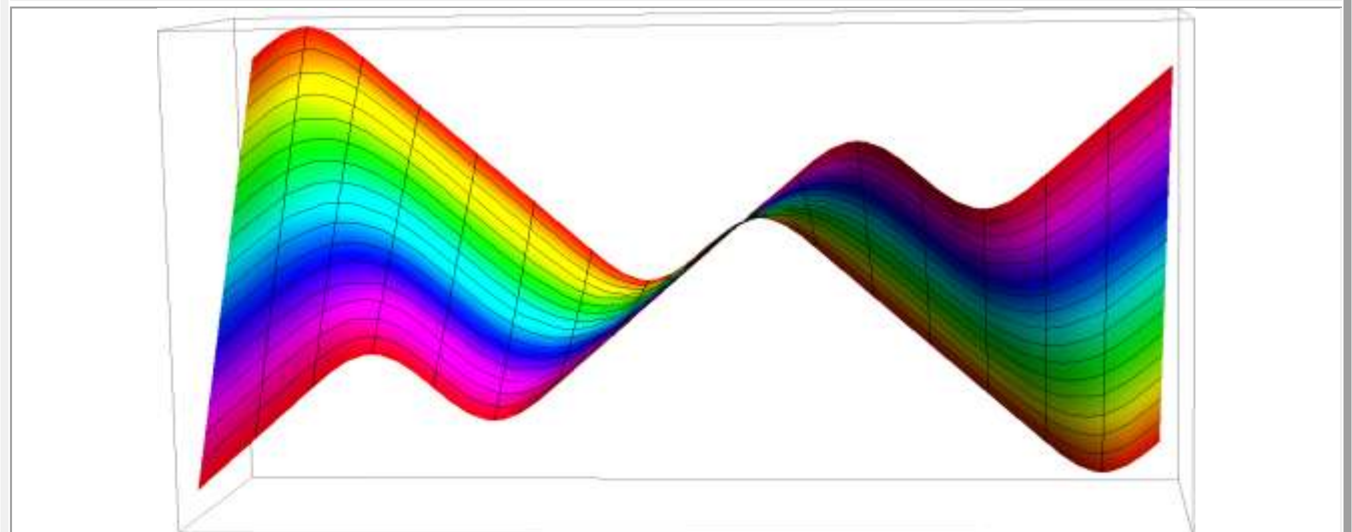


Fig.24.7,b INTEGRALELE funcţiilor supermatematică cosinus excentric de **cex** $\boldsymbol{\theta}$

$I = \int cex\theta.d\theta = \int \cos[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon))]\,d\theta$, $\theta \in [-2\pi, +2\pi$; **S**(s $\in$ [-1,1], $\varepsilon = 0$)

$$I = \frac{1}{4}\left[s.\cos(2x) - 2\cos x\,\sqrt{1-s^2\sin^2 x} + \frac{2(s^2-1)\log[\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2-s^2\sin^2 x}]}{\sqrt{s^2}}\right]$$

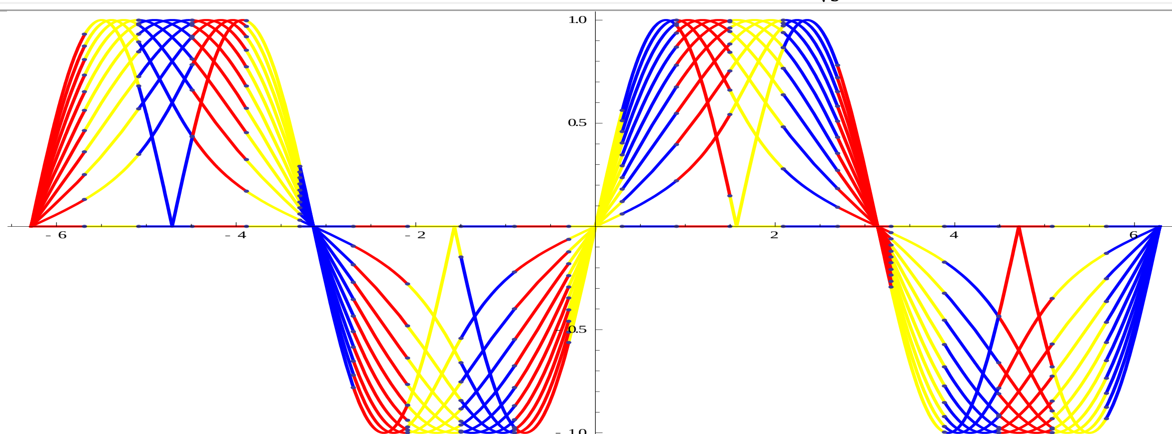


Fig.24.8,a Funcţia supermatematică sinus excentric de θ

$sex_{1,2}\theta$ = sin $[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]]$ = -s. cos $\theta.\sin(\theta-\varepsilon) \pm \sin\theta\sqrt{1-s^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}$

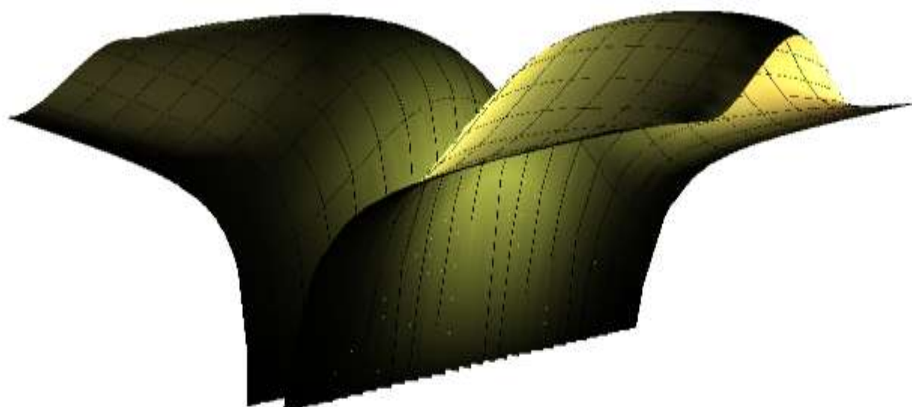
Datorită simetriei curbelor / graficelor lui **bexθ**, faţă de θ = π, este de netăgăduit că integrarea definită în domeniul 0…2π, pentru toate valorile lui s $\in$ [-1, +1], este nulă. Singura valoare a excentricităţii numerice **s**, pentru care programele de matematică pot integra funcţia **bexθ** este **s = ∓1** (**Fig.24.2**) şi, evident, **s = 0**, când funcţia este nulă peste tot şi aria este şi ea, evident, nulă.

Tot ceea ce s-a scris / spus despre **FSM-CE bexθ** este valabil şi pentru **FSM-CE aexθ**, cu graficele din **figura 24.5** şi derivatele sale din **figura 24.6**. Adică, programele existente (comerciale) de matematică nu pot integra aceste funcţii, în schimb pot integra *funcţiile care sunt funcţii de aceste funcţii*, precum cos[**aexθ**] = cos[**θ** - **bexθ**] = cex**θ**, sin[**aexθ**] = sin[**θ** - **bexθ**] = sex**θ** ş.m.a.

Funcţia SM – **CE** cosinus excentrică, de variabilă excentrică θ şi integralele ei sunt prezentate în **figura 7,a** şi, respectiv, **figura 24.7,b**, în 2D şi în 3D.

Familia **FSM-CE sexθ = sin[aexθ] = sin[θ - arcsin [s sin[θ - ε]]]** sunt prezentate în **figura 24.8,a,** iar integralele lor sunt prezentate în figura **24.8 b** în **2D** şi în **3D** cu ecuaţiiler şi graficele lor.

s $\in$ [-1, 0],	s $\in$ [0, +1],



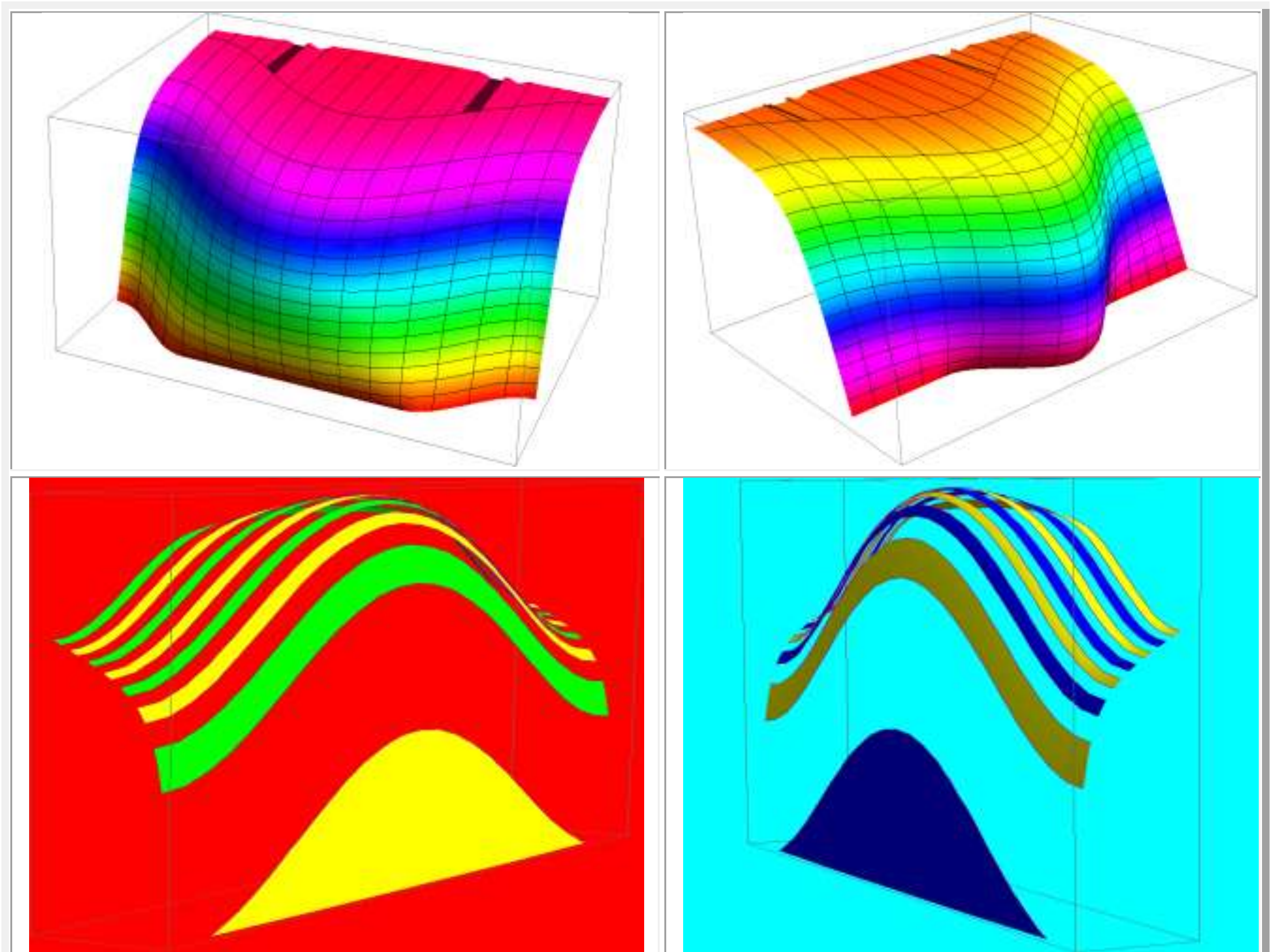


Fig.24.8,b INTEGRALELE funcţiilor supermatematică sinus excentric **sex** $\boldsymbol{\theta}$

$$I = \int sex\theta . d\theta = \int \sin\left[\theta - \arcsin\left[s.\sin(\theta - \varepsilon)\right)\right].d\theta, \ \theta \in [-2\pi, +2\pi \ ; \mathbf{S}(s \in [-1,1], \varepsilon = 0)$$

$$= \frac{1}{4}\left(s\cos[2x] - 2\cos x\sqrt{1 - s^2\sin^2 x} + \frac{2(-1+s)(1+s)\mathrm{Log}[\sqrt{2}\sqrt{s^2}\cos[x] + \sqrt{2 - s^2\sin^2 x}]}{\sqrt{s^2}}\right)$$

Motto: „Oamenii se tem de gândurile originale mai mult decît de orice altceva, mai mult decât de ruină, mai mult decât de moarte.”
Bertrand Russel

Capitolul 25

FUNCŢII SUPERMATEMATICE bex , Bex ŞI aex, Aex CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE (FSM-CEI)

25.1 REMEMBAR : FUNCŢII CIRCULARE CENTRICE INVERSE

O funcţie f : X →Y este ***inversabilă*** sau ***biunivocă*** dacă există o funcţie g : Y → X, astfel încât f ° g = 1Y şi g ° f = 1X, în care 1M : M → M, 1M(x) = x, oricare ar fi x din M, se numeşte aplicaţia identică a mulţimii M. În cazul în care X = Y, are loc egalitatea f ° g = g° f = 1X.

Mulţimea funcţiilor monotone, crescătoare şi descrescătoare, este conţinută în mulţimea funcţiilor inversabile. O funcţie monotonă este inversabilă, pe când o funcţie inversabilă nu este neapărat monotonă.

Dacă există g, ca inversă a funcţiei directe f, atunci are loc echivalenţa
y = f(x) ⇔ x = g(y),
în care x parcurge domeniul de definiţie X al funcţiei f, iar y, imaginea lui x prin funcţia f, parcurge domeniul de definitie Y al funcţiei g sau codomeniul funcţiei f.

Fie funcţia f : X → Y, bijectivă. Inversa unei aplicaţii bijective este din nou bijectivă.

Funcţia g : Y → X, care asociază fiecărui element din y din Y elementul unic x din X, astfel încât f(y) = x, se numeşte funcţie inversă a funcţiei f şi se poate nota cu $g = f^{-1}$.

Funcţia **directă** f care are ca inversă funcţia $f^{-1} = g$, (funcţia **inversă** a lui f) se zice că este inversabilă.

Funcţia directă y = x, care reprezintă ecuaţia primei bisectoare, are drept funcţie inversă funcţia x = y. Ca urmare, prima bisectoare este, în acelaşi timp, şi funcţie directă şi funcţie inversă.

Toate funcţiile inverse au graficele ca simetrice ale funcţiilor directe faţă de prima bisectoare.

Se notează cu **Arcsinx** mulţimea ***tuturor arcelor*** a căror sinus este egal cu x şi cu **arcsinx**, **arccosx**, **arctanx** etc. ***determinarile principale ale inverselelor*** funcţiilor **sinx**, **cosx**, **tanx**, etc.

OBSERVAŢIE :

Notaţiile determinarilor principale ale funcţiilor inverse, cele monogene sau uniovoce, sunt uneori invers notate în alte culturi decât în cea matematică românească.

Astfel, în continuare, se vor nota numai cu **arc** *determinările principale* ale funcţiilor inverse, cele uniforme sau univoce şi cu **Arc** funcţii inverse multiforme sau multivoce din domeniul matematicii centrice (**MC**), atât cele de arc simplu cât şi cele de arc multiplu sau multivoce.

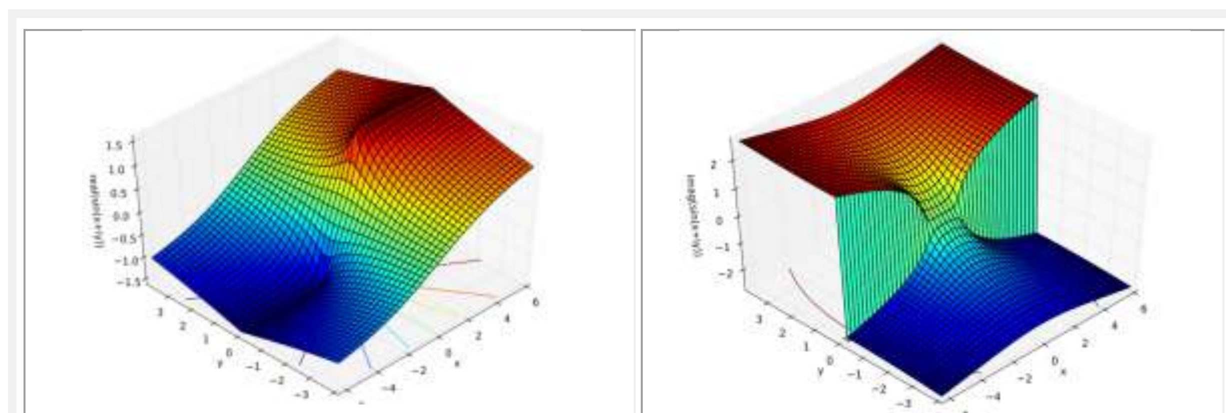
Astfel, Arccosz = 2kπ ± arccosz şi $\text{Arcsinz} = \begin{cases} 2k\pi + arcsinz \\ (2k+1)\pi - arcsinz \end{cases}$,
cu notaţiile recomandate în **Nicolescu, L.J**. şi **Stoka M.I**. “**MATEMATICI PENTRU INGINERI**”, Ed.Tehnică, 1969, pag. 130-131.

Aceste notaţii **convenţionale** sunt ***inverse*** celor din unele scrieri de specialitate din literatura germană, cum este **KLEINE ENZYKLOPÄDIE MATHEMATIK**, VEB Verlag Enzyklopädie, Leipzig, 1968, pag. 279, ca şi a celei din literatura engleză, “**MATHEMATICS AT A GLANCE**” după cari a fost tradusă lucrarea “**MICĂ ENCICLOPEDIE MATEMATICĂ**”, Ed.Tehnică, Buc. 1980, pag. 279. Dacă nu cumva în **figura 10.1.20** explicativă, din această lucrare, s-a strecurat o greşală, deoarece acolo notaţiile sunt inverse decât cele din **figura** noastră **25.1,c** stânga ◄.

Funcţia circulară / trigonometrica directă **centrică cosinus**, restricţionată la intervalul X ∈ [0, π], adică f : [0, π] → [-1, +1], f(x) = y = cosx este inversabilă şi admite ca **inversă**, notată **arccos** (arccosinus) , pe g = f^{-1} : [−1, + 1] → [0, π]], g = f^{-1} (y) = **x = arccosy**, cu graficul din **figura 25.1,a**◄şi inversele **arccosx** şi arcsinx în **figura 25.2** ◄,iar in dreapta ►**coqθ** şi **arccoqθ**, precum şi funcţiile cvadrilobe **siqθ** şi **arcsiqθ.** inversabilă şi admite ca **inversă**, notată Arcsinus, pe g = f^{-1} :[−1, + 1] → $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, g = f^{-1} (y) = **x = Arcsiny**, cu graficul din **figura 25.1,c** dreapta ►.

Plot[{t, Cos[t], **ArcCos[t]**, Pi, 0,1, −1}, {t, −1, Pi}, PlotStyle → Thick, AspectRatio → Automatic]	Plot[{ Sin[t],t,Pi/2, -Pi/2,1,-1,**ArcSin[t]}**,{t,-Pi/2,Pi/2}, PlotStyle→Thick, AspectRatio→Automatic]
arccosx; +1; 0; π; -1; Y ∈ [-1, +1]; X∈ [0, π]	arcsinx; +1; −π/2; π/2; -1; Y ∈ [-1, +1]; X∈ [−π/2, +π/2]
Fig.25.1,a Graficele funcţiei directe **cosinus** şi a determinării principale a inverseiei ei centrice univoce **arccosθ**	**Fig.25.1,b** Graficele funcţiei directe **sinus** şi a determinării principale a inverseir ei centrice univoce **arcsinθ**
π; Arcsinx; π/2; arccosx; arcsinx; 0; O (0, 0); O (0, 0); − π/2; Arccosx; Arcsinx	10; 5; − 10; − 5; 5; 10; 5; 10

Fig. 25.1,c Graficele funcţiilor directe cosinus şi sinus centrice şi a inverselor lor centrice multivoce **Arccosθ** şi **Arcsinθ** în stânga ◄şi, în dreapta ▼, sunt prezentate **FCC** tangentă **Voinoiu tanv(x)** şi $tanv^{-1}(x)$ = **inv.**tanv(x) ca funcţii multivoce **Arctanv(x)**



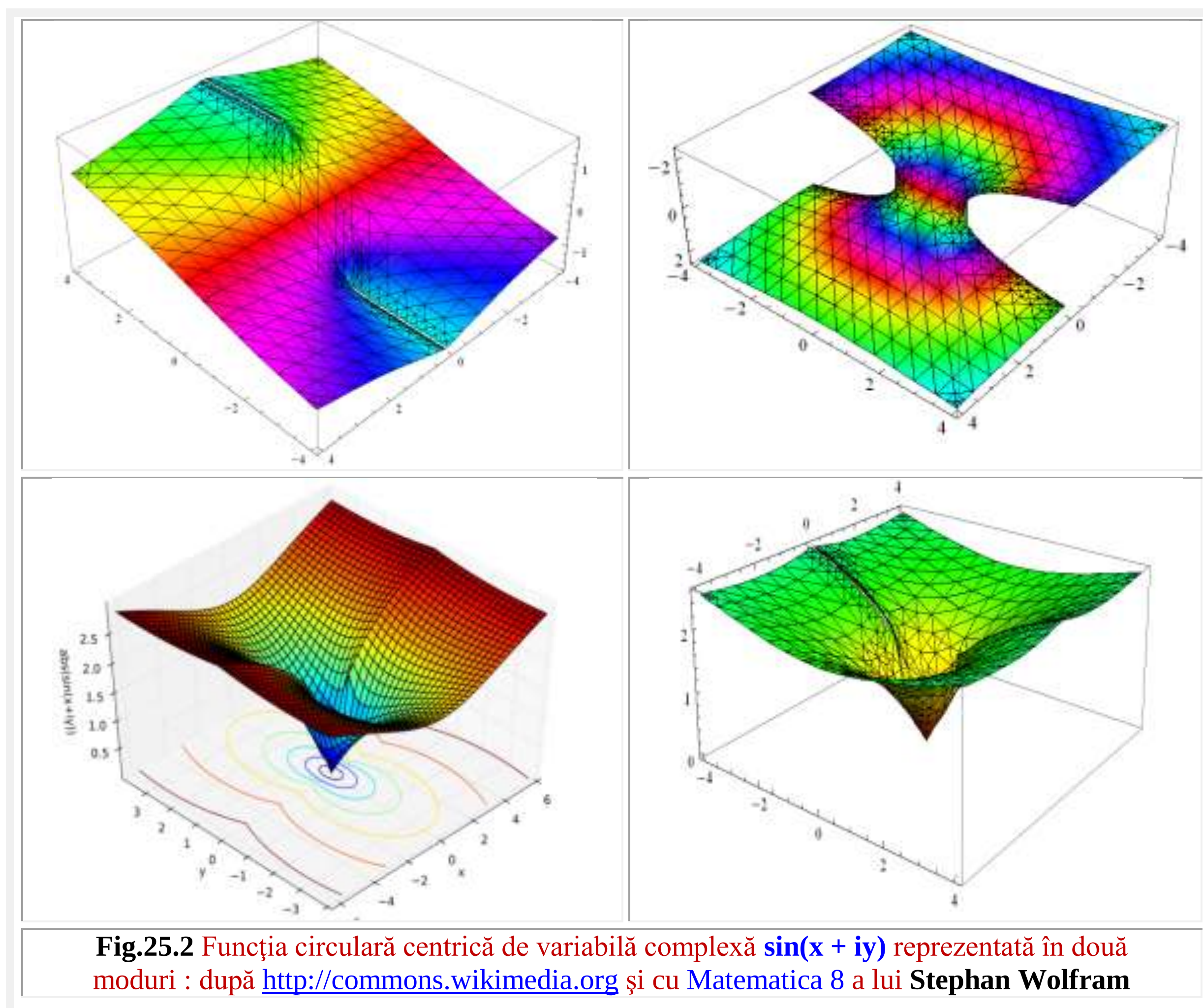


Fig.25.2 Funcţia circulară centrică de variabilă complexă **sin(x + iy)** reprezentată în două moduri : după http://commons.wikimedia.org şi cu Matematica 8 a lui **Stephan Wolfram**

Oricare funcţie poate fi de variabilă reală sau de variabilă complexă z = x + i.y, care au şi ele inversele lor, evident, tot de variabilă complexă.

25.2 INTRODUCERE.

Denumirea de ***arcfuncţie*** (arccosx, **arc**sinx, **Arc**tanx, **Arc**cotx etc.) provine din limba latină. *Arcus cuius sinus x est* înseamnă ***arcul al cărui sinus este egal cu x***.

Deoarece funcţiile trigonometrice / circulare directe sunt funcţii de arc, din însăşi denumirea funcţiei **Arc** / **arc** rezultă că ea este inversa funcţiei directe.

Ca urmare, ecuaţiile parametrice ale funcţiei directe **sinx** sunt

(1) $\begin{cases} x = x \\ y = \sin x \end{cases}$, → **sinx**, sin t = z

iar a inversei ei, **arcsin x**, pentru x ∈ [0, π] şi Arcsinx pe toată axa reala x este

(2) $\begin{cases} x = \sin x \\ y = x \end{cases}$ → **arcsinx = sin^{-1}x,** t = Arcsin z = $(-1)^k$ arcsin z + kπ.

(2') Arcsin z = - i.Arcsh iz

Pe cât de simplu se pot obţine graficele funcţiilor inverse, în coordonate parametrice, pe atât de complicat se pot obţine expresiile lor analitice, deoarece este necasar să se rezolve unele ecuaţii algebrice neliniare. Pentru a căror soluţionare printr-o metodă exactă, numerică (!), extrem de simplă şi rapidă vă recomandăm "***Metoda determinarii succesive a cifrelor consecutive ale unui număr***" soluţie din "**MATEMATICA ATOMICA**" **www.cartiaz.ro**), dar numai pentru soluţii numerice.

Astfel, dacă expresia funcţiei directe sin x este

(3) $y(x) = sinx = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + \cdots$ şi nu este chiar simplă !

Pentru determinarea expresiei funcţiei inverse, este necesar să se rezolve ecuaţia neliniara

(4) $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + \cdots - y = 0$ → x(y) = ?

Soluţia ei este, după cum se ştie

(5) $x(y) = \arcsin y = y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 + \ldots \quad |y| < \frac{\pi}{2}$

Dar soluţia poate fi dată şi în serii hipergeometrice astfel

(6) $arcsinz = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz = \int_0^x 1F_0\left(\frac{1}{2};;\ z^2\right)dz = z_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right)\Big|_0^x = x_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2)$

în care **seria $_1F_0$** = $_1F_0$ (a; ; z) = $(1 - z)^{-a}$ = $\frac{1}{(1-z)}$ a cărei ecuaţie diferenţială este $\frac{d}{dz}w = (z\frac{d}{dz})w$ sau $(1 - z)\frac{dw}{dz} = aw$ şi a cărei soluţie este w = k(1 - z) $^{-a}$ este un caz particular al seriilor hipergeomertrice.

Se mai ştie că o legătura între funcţia inversă **Arcsin** şi logaritmul natural **ln** este

(6') Arcsinx = - i ln (ix + $\sqrt{1-x^2}$).

În privinţa determinării analitice a inversei unei funcţii există şi excepţii, adică funcţii a căror inverse se determină imediat.

O astfel de funcţie este **FSM-CE beta excentrică** sau **β(θ)** = bexθ, de variabilă excentrică θ, una din cele mai importante **funcţii supermatematice**, a cărei expresie este

(7) y (θ) = β(θ) = θ – α(θ) = bexθ = arcsin[s.sin(θ – ε)]

astfel că rezolvarea excuaţiei

(8) y (θ) – arcsin[s.sin(θ – ε)] = 0 , sau y (θ) = arcsin[s.sin(θ – ε)]

este simplă. Scriind

(9) siny(θ) = sin{arcsin[s.sin(θ – ε)]} → siny(θ) = s.sin(θ – ε)

(10) (θ–ε) = arcsin $\frac{siny}{s}$ → θ(y) = arcsin $\frac{siny}{s}$ + ε ,

care este inversa lui bexθ, adică

(11) **inv**bexθ = $bex^{(-1)}θ$ = arcsin $\frac{siny}{s}$ + ε = **Arc**bexθ = **arc**bex ≠ arc(bexθ) =

= arc[arcsin[s.sin(θ – ε)]], (dacă ***funcţiile clasice de arc*** **Arc**bexθ şi **arc**bex ar fi cunoscute, altele decât (10), dar nu sunt), ceea ce poate fi verificat în **figura 25.3,a** şi **25.3,b**.

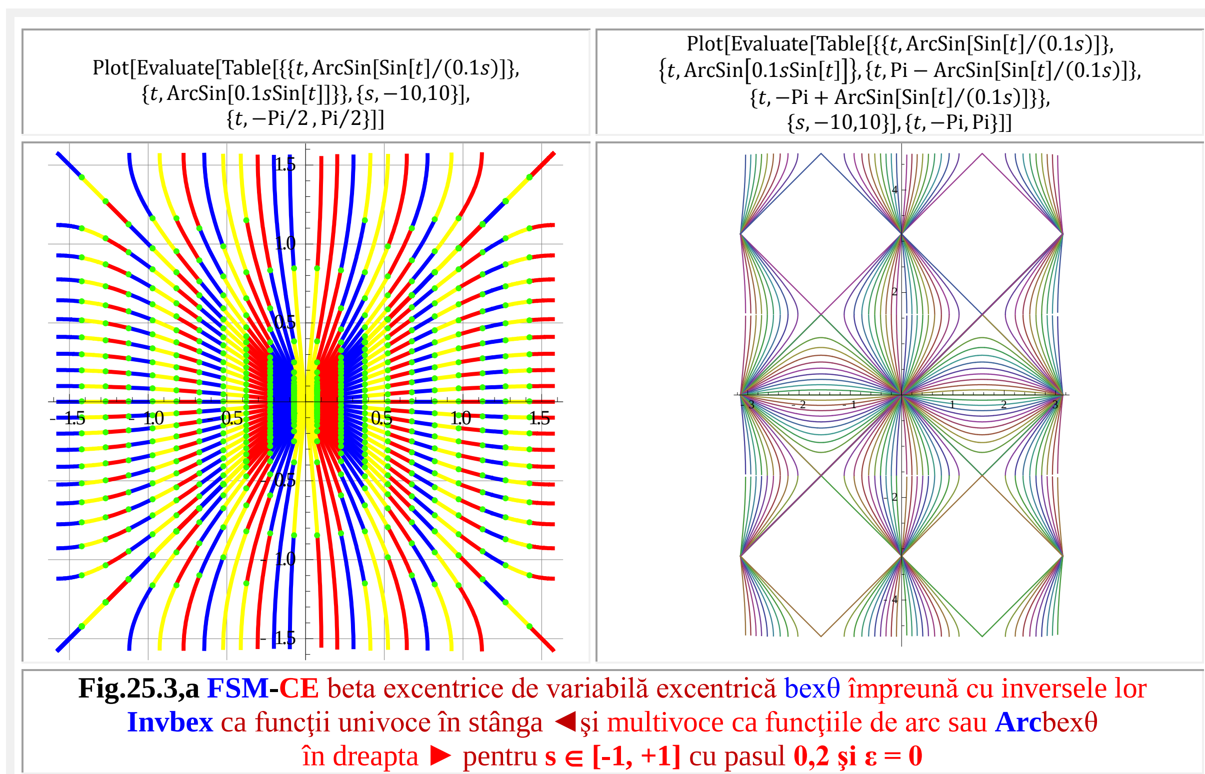


Fig.25.3,a FSM-CE beta excentrice de variabilă excentrică bexθ împreună cu inversele lor **Invbex** ca funcţii univoce în stânga ◄şi multivoce ca funcţiile de arc sau **Arc**bexθ în dreapta ► pentru **s ∈ [-1, +1]** cu pasul **0,2 şi ε = 0**

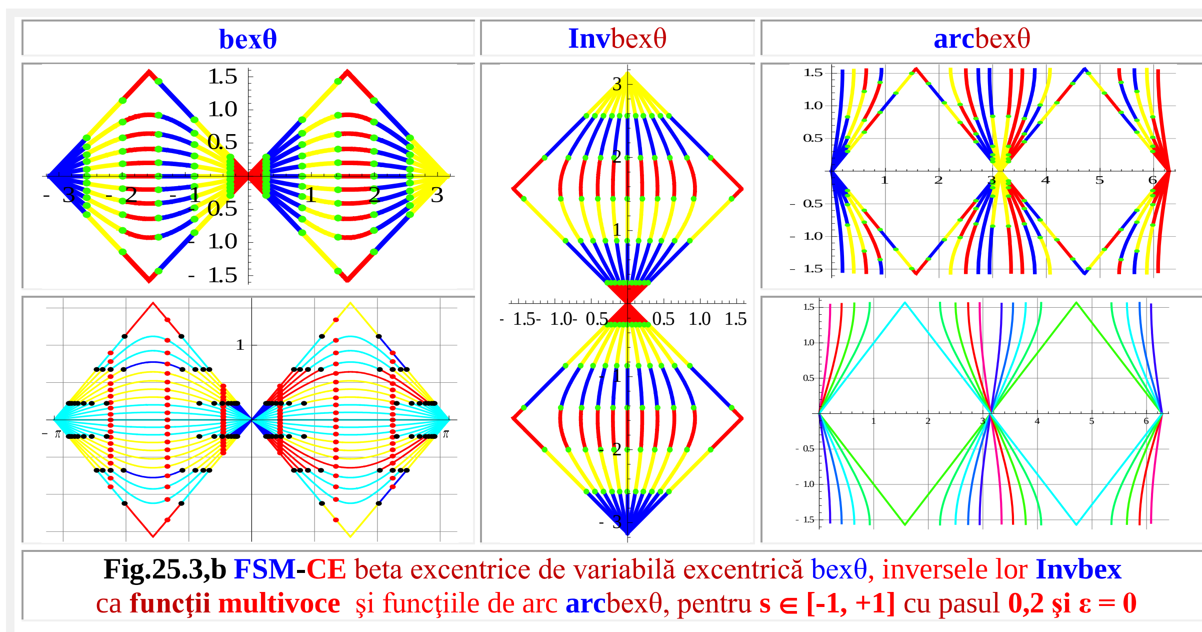
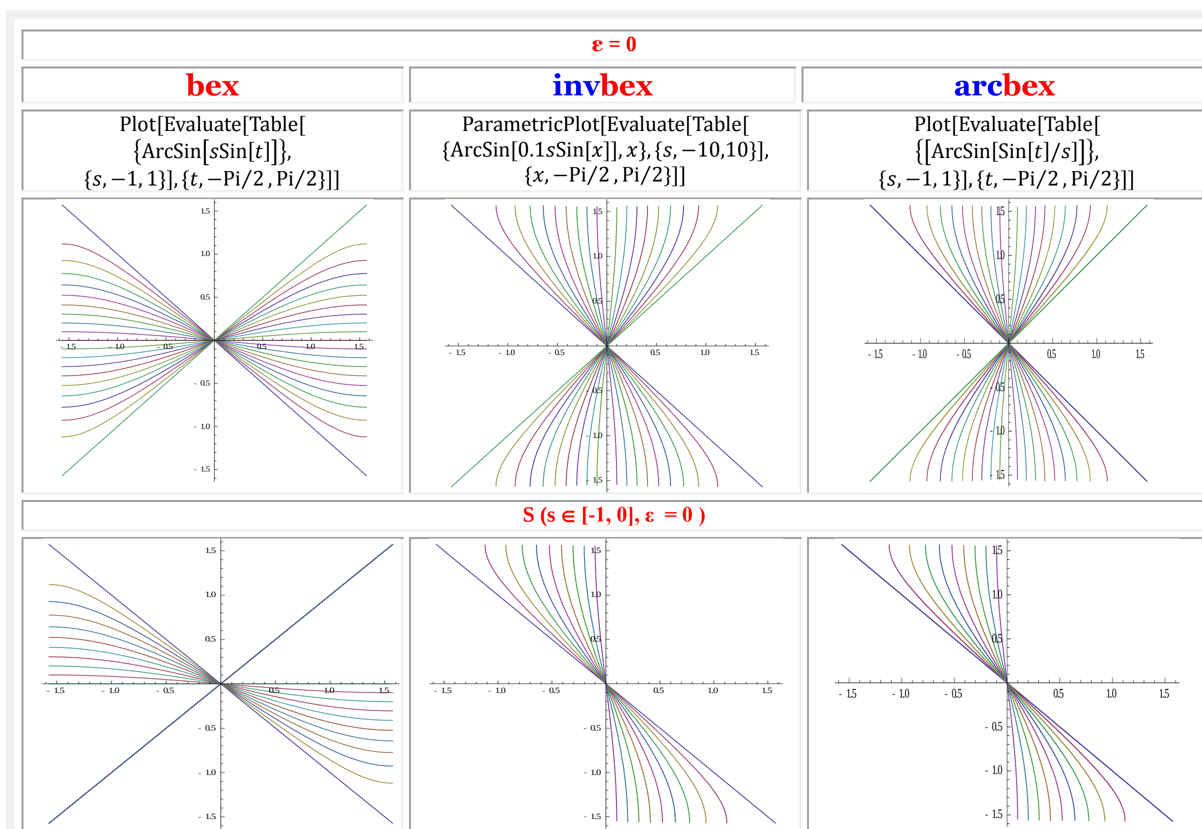


Fig.25.3,b FSM-CE beta excentrice de variabilă excentrică bexθ, inversele lor **Invbex** ca **funcţii multivoce** şi funcţiile de arc **arc**bexθ, pentru **s ∈ [-1, +1]** cu pasul **0,2 şi ε = 0**

De ce trebuie notată inversa lui bexθ cu **inv** sau **Inv** şi nu cu **arc** sau **Arc** ?

Pentru că **arc**bexθ ≠ **inv**bexθ ca şi **Arc**bexθ ≠ **Inv**bexθ aşa cum se poate observa din graficele din **figura 25.3,a**. Notaţiile cu majuscule (**Inv** şi **Arc**) corespund funcţiilor inverse multivoce, ca cele reprezentate în **figura 25.3,a►** şi **25.3,b**, iar cele univoce, notate **inv** şi **arc**, în **figurile 25.3,c** şi **25.3,d.** din **figurile 1,c**. Se observă facil că, inversele sunt simetrice funcţiilor, ceea ce corespunde definiţiei de inversă, iar arcul nu mai respectă această cerinţă, deoarece funcţia **arc** se calculeaza cu o serie în care, pentru cazul lui bexθ se înlocuieşte variabila **x ≡ θ** cu funcţia **β(θ) = arcsin[s.sin(θ − ε)]** în care → **S(s, ε)** este un excentru în planul cercului unitate.



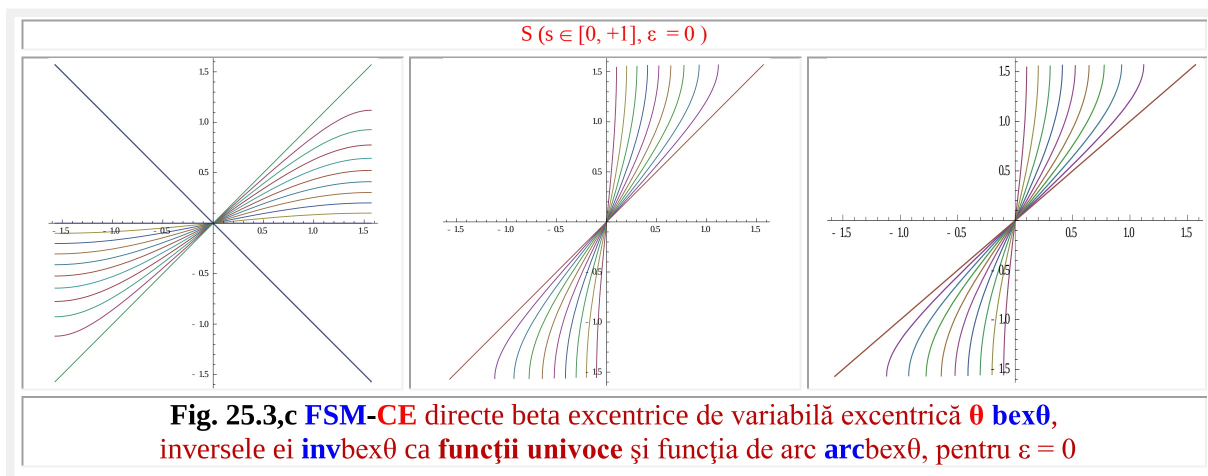


Fig. 25.3,c FSM-CE directe beta excentrice de variabilă excentrică **θ bexθ**, inversele ei **inv**bexθ ca **funcţii univoce** şi funcţia de arc **arc**bexθ, pentru ε = 0

ε = 1

bexθ	**inv**bexθ	**arc**bexθ
Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[s. Sin[t − 1]], t}, {s, −1, 1}], {t, −π/2, π/2}],	ParametricPlot[Evaluate[Table[{{ ArcSin[0.1sSin[x − 1]], x}, {x, x}}, {s, −10,10}], {x, −Pi/2 , Pi/2}	Plot[Evaluate[Table[{ ArcSin[Sin[x]/(0.1s)] + 1}, {s, −10,10}], {x, −Pi/2 , Pi/2}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, ArcSin[s. Sin[x − 1]]}, {ArcSin[s. Sin[x − 1]], x}}, {s, −1,1}], {x, −Pi/2 , Pi/2}	Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1sSin[x − 1]], ArcSin[Sin[x]/(0.1s)] + 1}, {s, −10,10}], {x, −Pi/2 , Pi/2}

Fig. 25.3,d FSM-CE directă **bexθ**, beta excentrică de variabilă excentrică **θ**, inversa ei **inv**bexθ şi funcţia de arc **arc**bexθ, pentru **ε = 1**

În **figura 25.3,c** au fost reprezentate **FSM-CE** beta excentrice **bex** ◄ în stânga, precum şi inversele ei **inv**bexθ ▌în centru, iar funcţiile **arcbex** în extrema dreaptă ► numai ca **funcţii univoce**, în domeniul θ ∈ [$-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$].

În această figură au fost reprezentate funcţiile pentru un excentru **S** plasat pe axa Ox, adică de excentricitate unghiulară nulă (**ε = 0**) şi de excentricitate liniară numerică **s** în domeniul **s ∈ [-1, 1]** sus ▲, **s ∈ [-1, 0]** la mijloc ▬ şi **s ∈ [0, 1]** jos ▼.

FSM-CE beta excentrice **bex** a fost reprezentată pentru a se putea verifica / compara cu inversa ei şi cu cea de arc.

Situaţia este asemănătoare şi în domeniul complex: **FSM-CE** beta excentrice de variabilă complexă

(12) **bex** (x + i.y) = arcsin[s.sin(x + i.y)]

care are funcţia inversă

(13) $\begin{cases}\textbf{bex}\ (x + i.y) \\ \quad (x + i.y)\end{cases}$ → **inv**bex(x + i.y) = bex^{-1} (x + i.y) = arc**bex** (x + i.y) = arcsin($\frac{sin(x + i.y)}{s}$ + ε)

reprezentate în **figura 25.3,b** şi a căror inverse clasice (***funcţii de arc clasice***) sunt necunoscute

(14) **invbex**(x+ i.y) = arcsin $\frac{\sin(x+i.y)}{s}$

Pentru sinx, de exemplu, din domeniul / intervalul x∈ [$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$], rezultă codomeniul lui y = sinx ∈ [− 1 + 1], iar pentru y = arcsinx, inversa lui sinx, rezultă domeniul de definiţie x ∈ [− 1, + 1] şi codomeniul funcţiei inverse y = arcsinx ∈ [$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$] (**Fig.25.4,b**).

Mai rezultă, totodată, că funcţiile directă şi inversă sunt simetrice faţă de prima bisectoare şi, în consecinţă, sunt inverse una alteia (**Fig.25.3,f**).

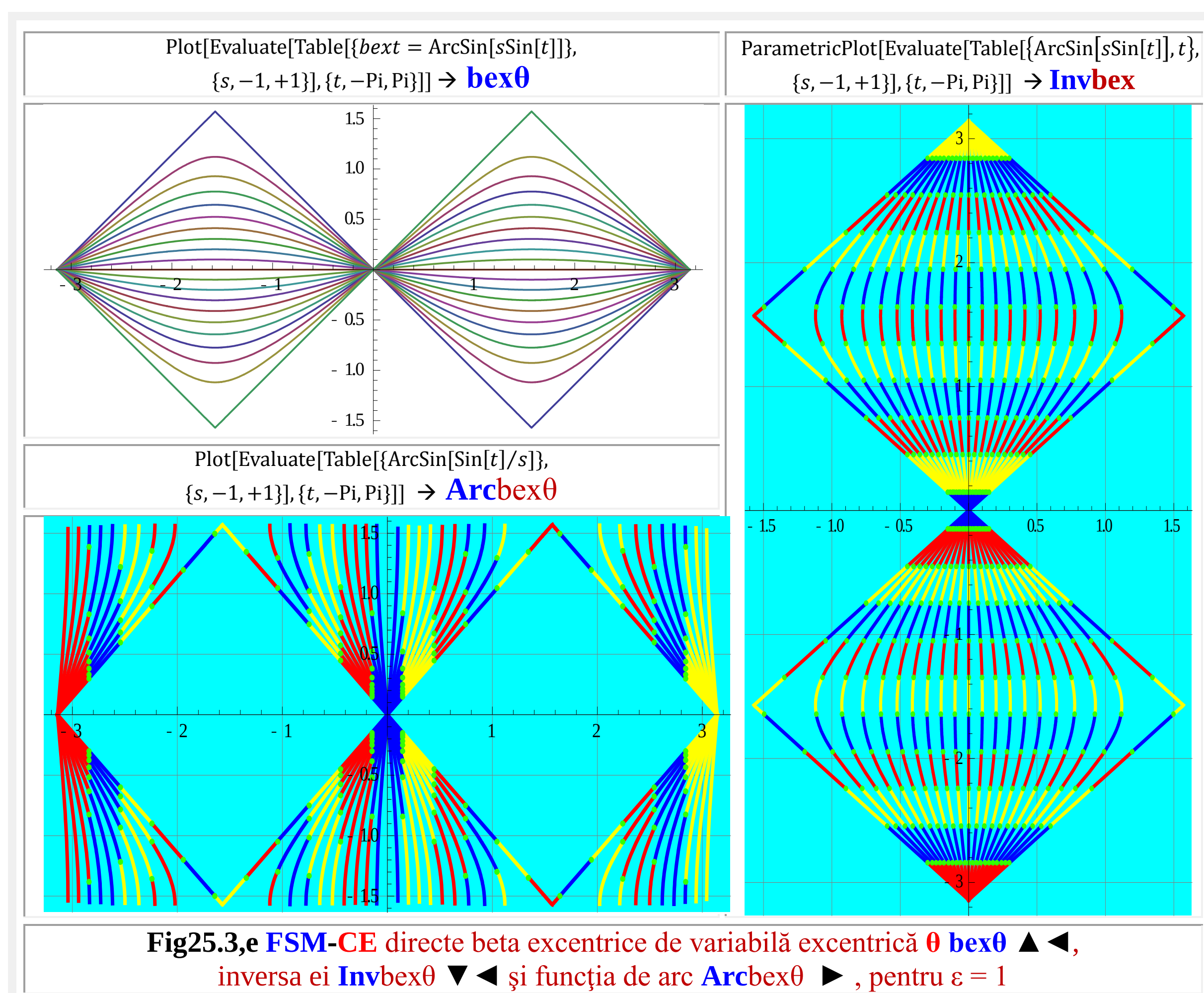


Fig25.3,e FSM-CE directe beta excentrice de variabilă excentrică **θ bexθ** ▲◄, inversa ei **Inv**bexθ ▼◄ şi funcţia de arc **Arc**bexθ ► , pentru ε = 1

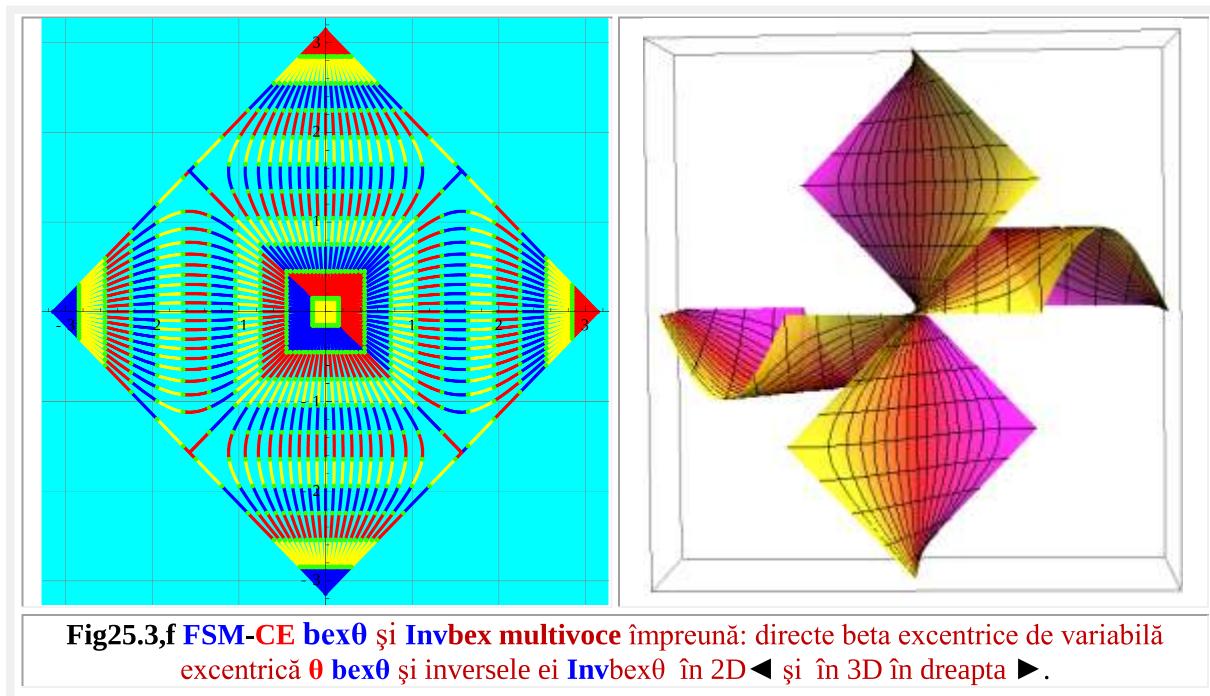


Fig25.3,f FSM-CE bexθ şi **Invbex multivoce** împreună: directe beta excentrice de variabilă excentrică **θ bexθ** şi inversele ei **Inv**bexθ în 2D◄ şi în 3D în dreapta ►.

ParametricPlot3D[{{t, ArcSin[0.1sSin[t]],0.1s}}, {s, −10,10}, {t, −Pi/2 , Pi/2}]

ParametricPlot3D[{{ArcSin[0.1sSin[t]], t, 0.1s}}, {s, −10,10}, {t, −Pi/2 , Pi/2}]

ParametricPlot3D[{{ArcSin[0.1sSin[t]], t, 0.1s}, {t, ArcSin[0.1sSin[t]],0.1s}}, {s, −10,10}, {t, −Pi/2 , Pi/2}]

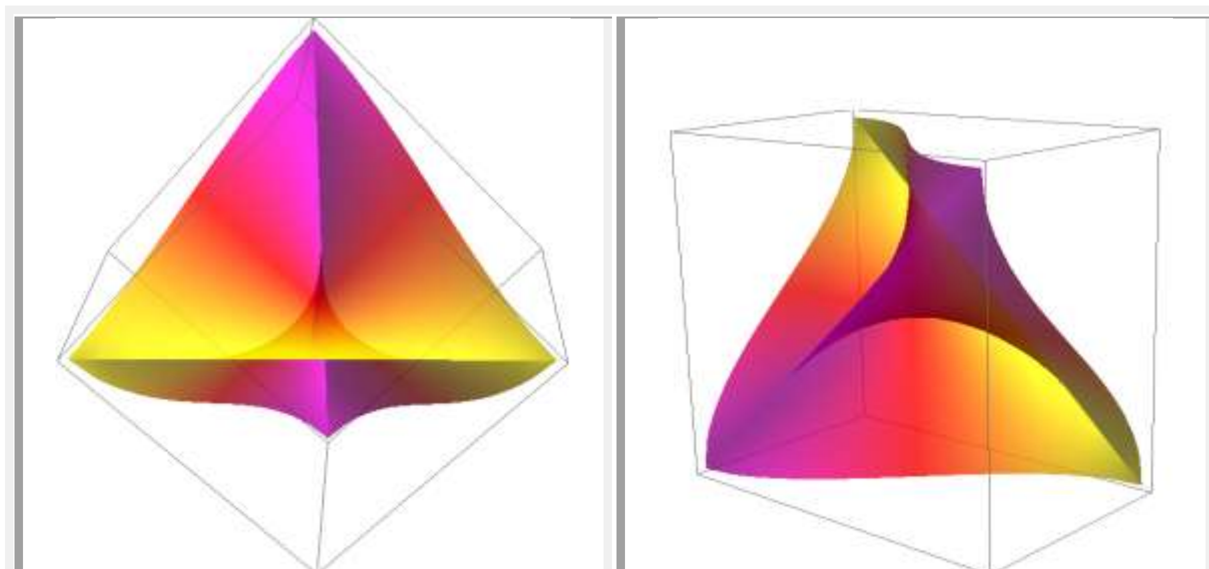


Fig25.3,g FSM-CE bexθ şi **Invbex univoce** împreună: directe beta excentrice de variabilă excentrică **θ bexθ** ▲◄şi inversele ei **Inv**bexθ ▲► în 3D (în 4 vederi)

Plot3D[Re[ArcSin[sSin[x + Is]]], {x, −2Pi, 2Pi}, {s, −1,1}]	Plot3D[Re[ArcSin[Sin[x + Is]/s]], {x, −Pi/2 , Pi/2}, {s, −1,1}
Re[ArcSin[sSin[x + Is]]]]	Re[ArcSin[Sin[x + Is]/s]]
Im[ArcSin[sSin[x + Is]]]]	Im[ArcSin[Sin[x + Is]/s]]
Abs[ArcSin[sSin[x + Is]]]]	Abs[ArcSin[Sin[x + Is]/s]]

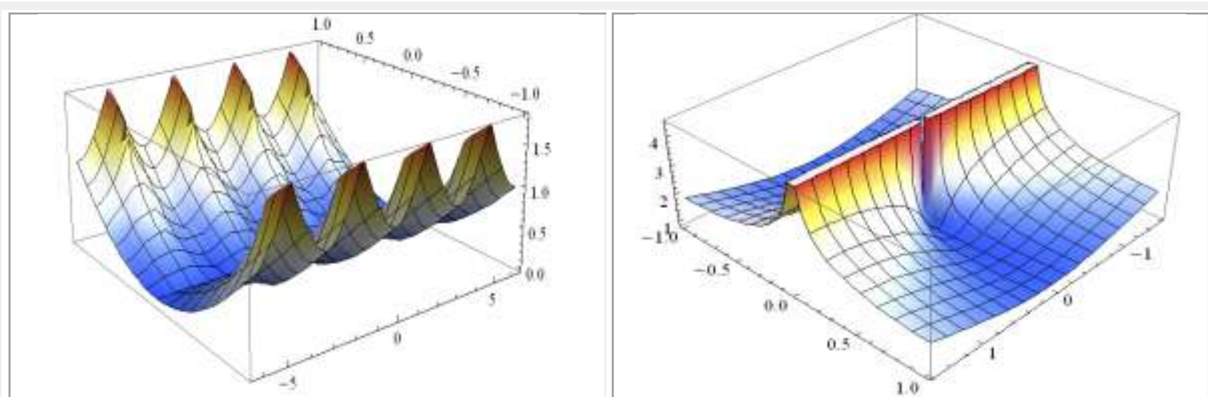


Fig.25.4,a FSM-CE directe **beta excentrice** de variabilă excentrică complexa **bexθ** şi inversele lor **inv**bex (x = i.y) de s = ∈ [-1, 1] şi ε = 0

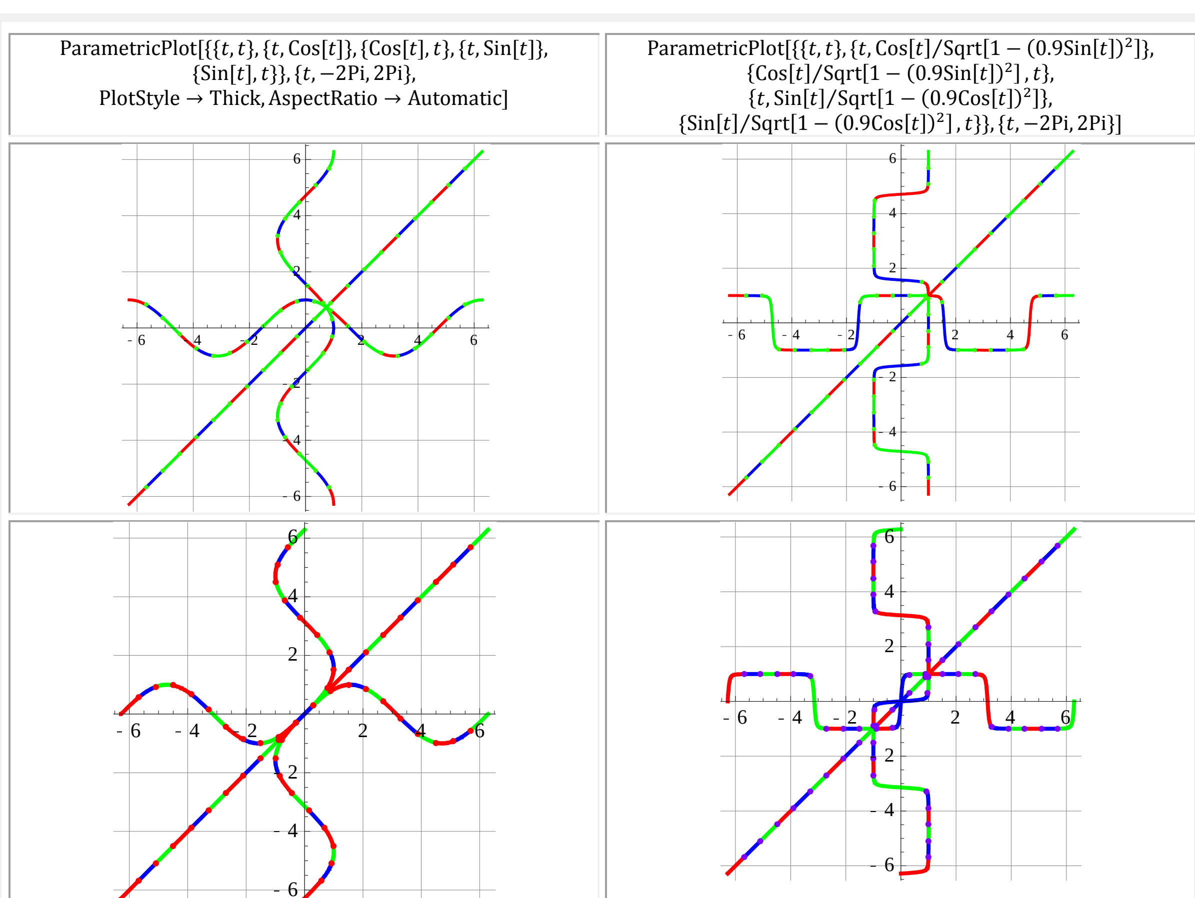


Fig.25.4.b Graficele funcţiilor **cosθ, sinθ** şi **tanθ** şi a funcţiilor **Arccosθ Arcsinθ** şi **Arctanθ** în stânga ◄precum şi funcţiile supermatematice cvadrilobe cosinus **coqθ** sinus **siqθ** şi cvadrilobe ca şi funcţiile lor inverse corespondente **Invcoqθ** şi **Invsiqθ** de excentricitate liniară numerică **s = 0,998 în dreapta►**

FSM-CE directe beta excentrice de variabilă reală şi inversele lor au fost reprezentate împreună în 3D în 4 vederi în **figura 25.3,g** doar pentru a sublinia frumuseţea obiectelor astfel obţinute.

S-a insistat mult asupra **FSM-CE** directe beta excentrice de variabilă reală şi a inverselor lor deoarece ele stau la baza edificiului **supermatematicii** (**SM**).

Aceleaşi funcţii, dar de variabilă complexă, sunt prezentate în **figura 25.4,a,** iar în **figura 25.4,b** sunt prezentate funcţiilor matematice centrice directe **sin(x + i.y)** de variabilă complexă

În figura **4,a** sunt prezentate sus▲ funcţiile directe şi inverse **arccosx** şi **arcsinx** şi în stânga jos◄▼ funcţiile **arccos** şi **Arccos,** precum şi **arcsin** şi **Arcvsin,** iar în dreaptă jos ►▼sunt prezentate FCC tangenta **Voinoiu** directe si inverse.

Pentru comparaţie, în **figura 25.4,b** sunt prezentate inversele **FSM** cvadrilobe cosinus **coqx** şi sinus **siqx** de excentru **S**(0,98; 0), în care excentricitatea liniară numerică este **s = 0,98**, iar cea unghiulară **ε = 0**.

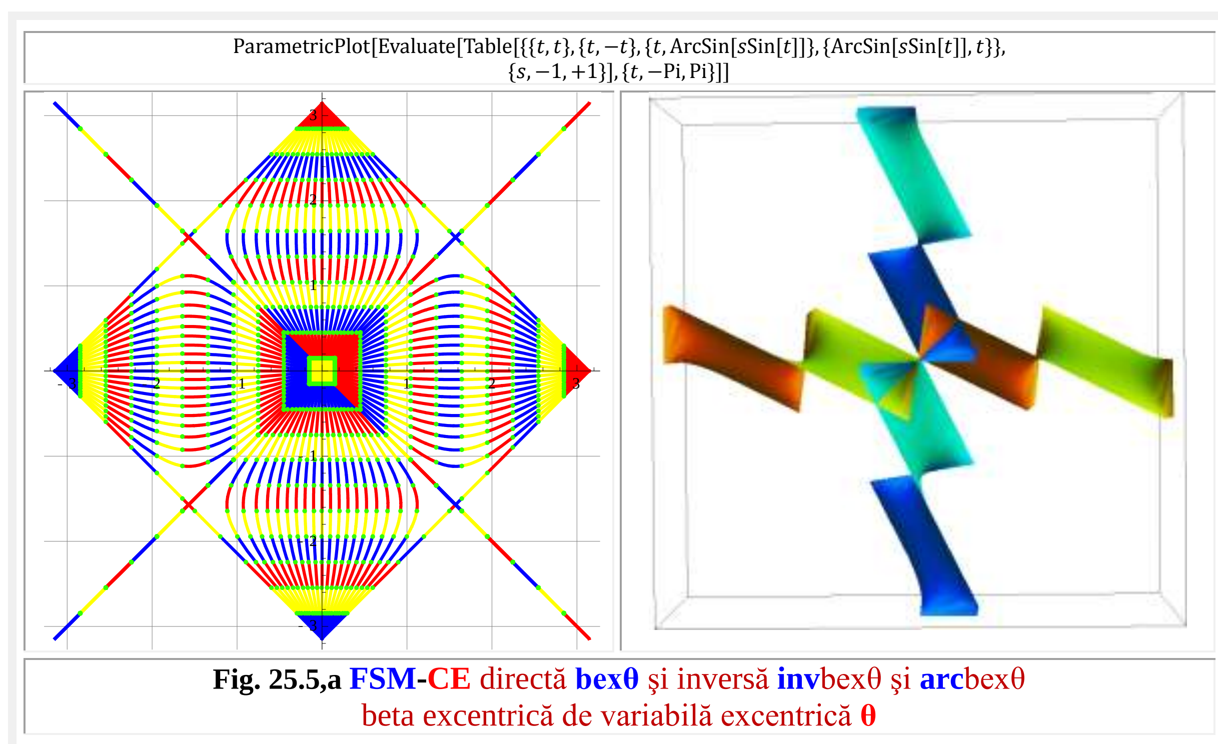
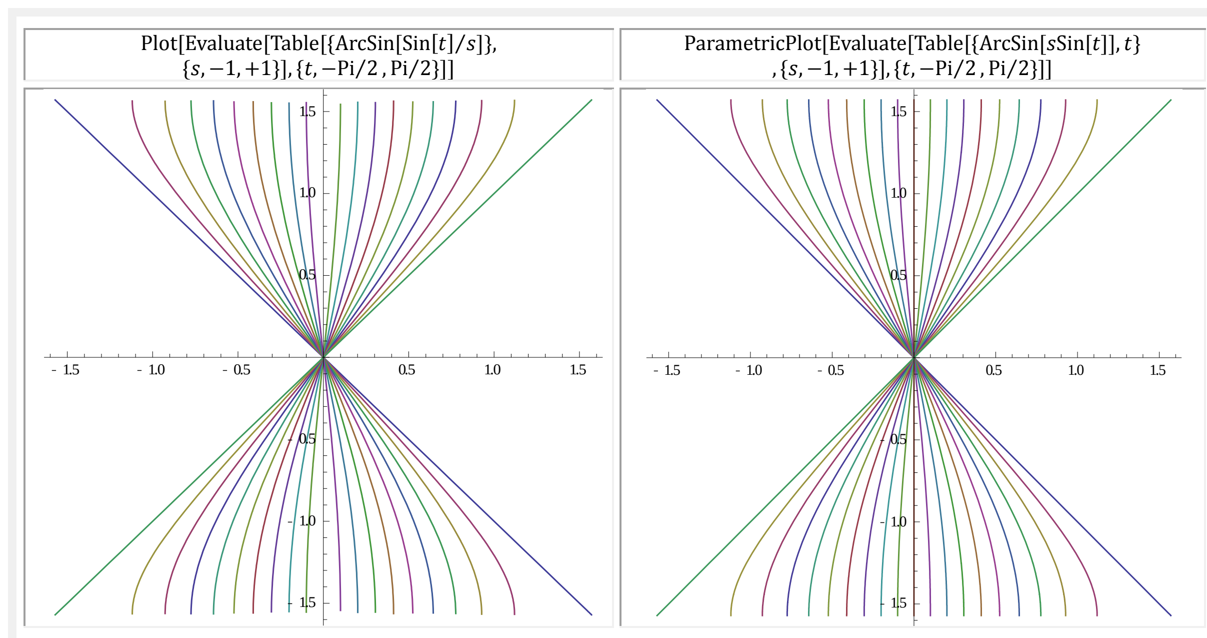


Fig. 25.5,a FSM-CE directă **bexθ** şi inversă **inv**bexθ şi **arc**bexθ
beta excentrică de variabilă excentrică **θ**



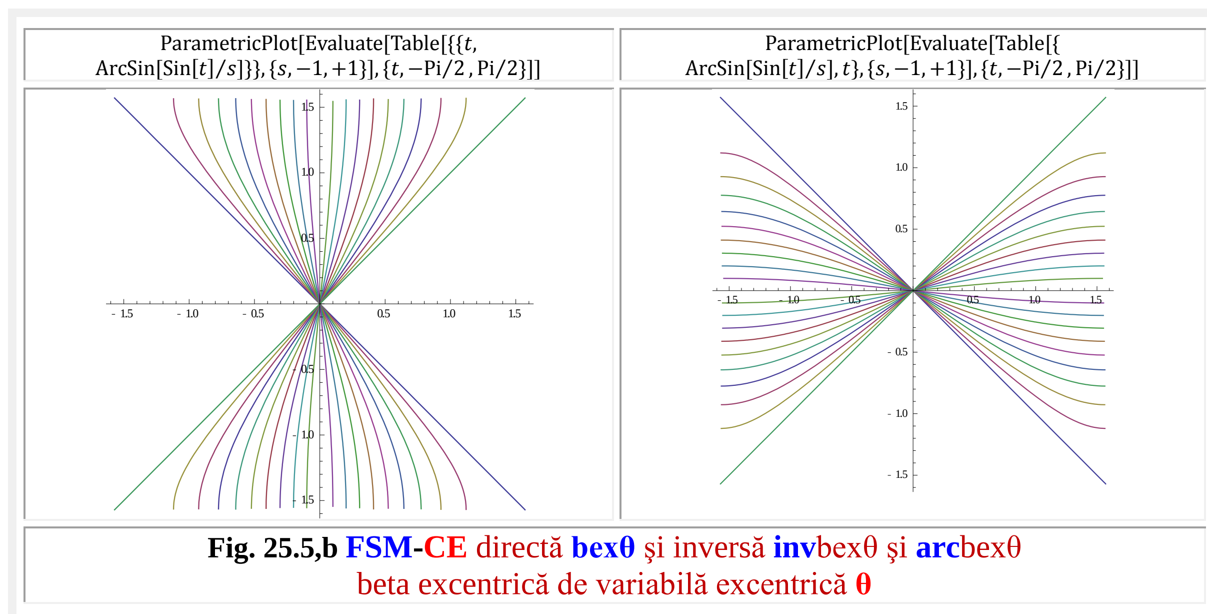


Fig. 25.5,b FSM-CE directă **bexθ** şi inversă **inv**bexθ şi **arc**bexθ
beta excentrică de variabilă excentrică **θ**

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{t, ArcSin[sSin[t]]}, {ArcSin[sSin[t]], t}},], {t, −2Pi, 2Pi}]]

s∈[-1 0]◄ ►s∈ [0,1

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{t, t}, {t, ArcSin[sSin[t]]}, {ArcSin[sSin[t]], t}}, {s, −1,1}], {t, −2Pi, 2Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{t, t}, {t, −ArcSin[sSin[t]]}, {t − ArcSin[sSin[t]], t}}, {s, −1, 1}], {t, −2Pi, 2Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{t, t}, {t, −ArcSin[0.1sSin[t]]}, {t − ArcSin[0.1sSin[t]], t}}, { t, −2Pi, 2Pi}]]

s∈[-1 0]◄ ►s∈ [0,1

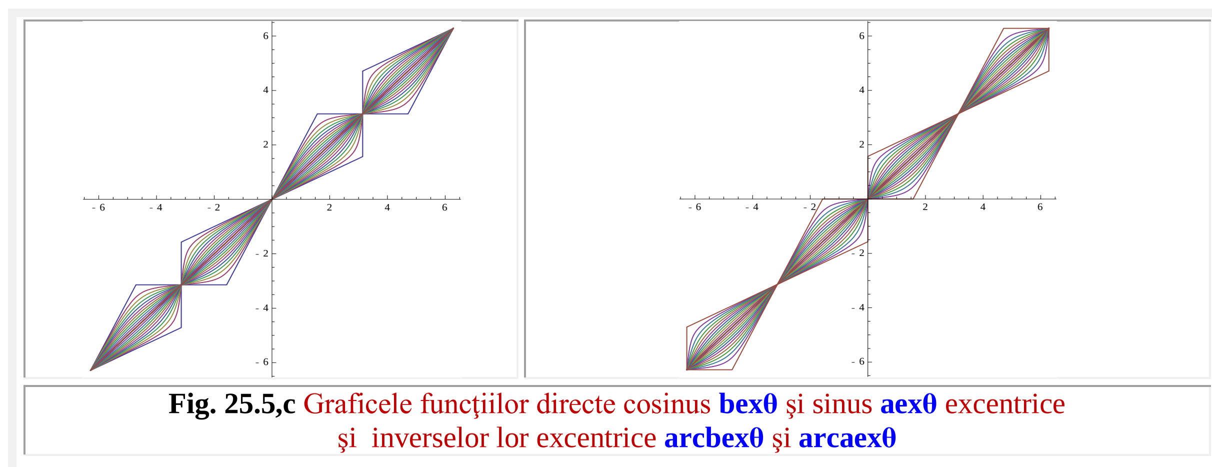


Fig. 25.5,c Graficele funcţiilor directe cosinus **bexθ** şi sinus **aexθ** excentrice şi inverselor lor excentrice **arcbexθ** şi **arcaexθ**

25.3 FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE (FSM-CEI) DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ

Funcţiile circulare centrice directe (**FCC**) au fost introduse în matematică de elveţianul **Leonhard Euler** (1707-1783), care a constatat că funcţiile trigonometrice pot fi reprezentate ca intersecţie a unui cerc de rază R = 1 - trigonometric sau unitate **CU**(O,1) – cu o semidreaptă turnantă în jurul originii O(0, 0) a unui reper cartezian drept.

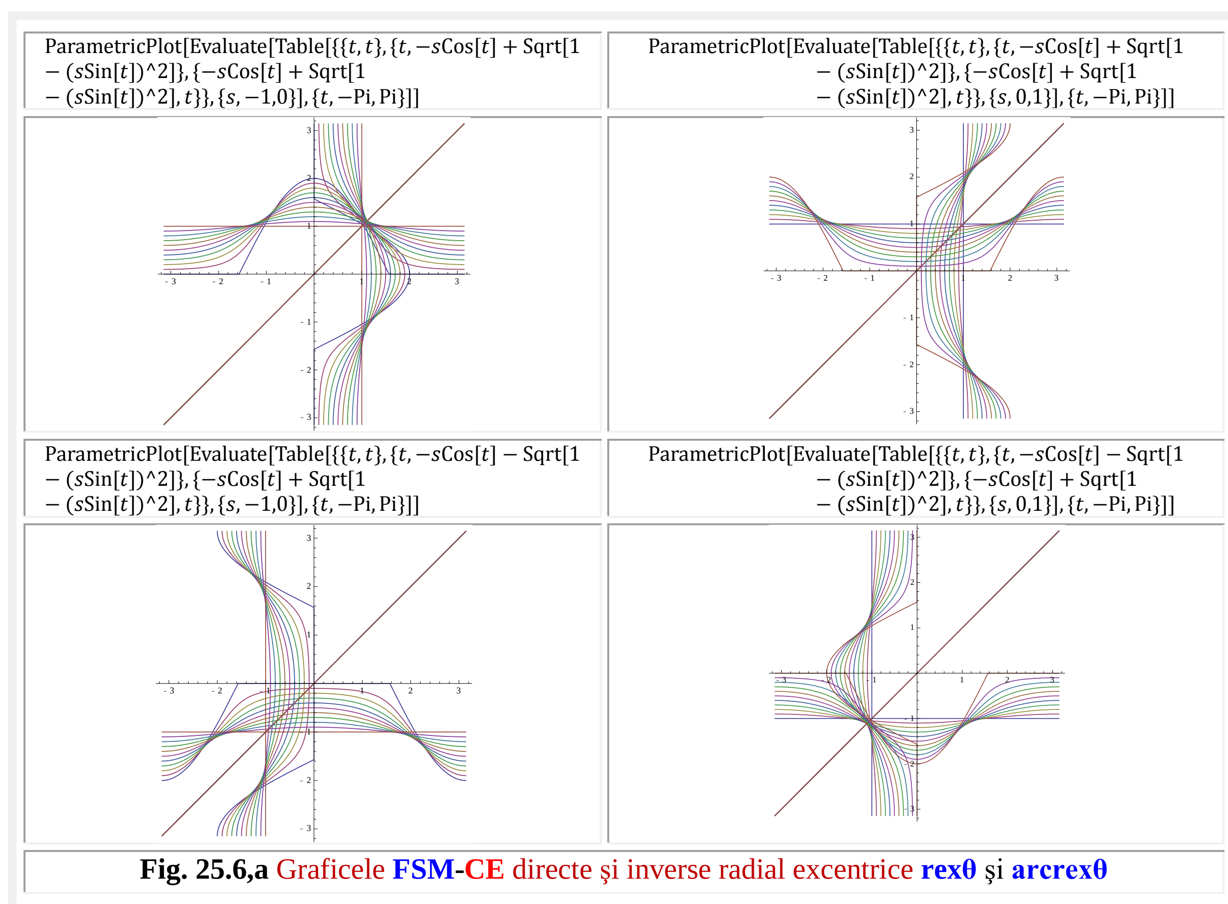


Fig. 25.6,a Graficele **FSM-CE** directe şi inverse radial excentrice **rexθ** şi **arcrexθ**

Tot **Euler** este acela care a definit funcţia exponenţială pentru numere complexe şi a făcut legătura dintre aceasta şi funcţiile trigonometrice prin celebra formulă

(24.1) $\boldsymbol{e^{i\alpha} = cos\alpha + i.sin\alpha}$

funcţie exponenţială care, acum, este funcţia **radial centrică** $\boldsymbol{rad\alpha}$, un fazor de la O(0, 0) la punctul curent **M**(x = cos$\boldsymbol{\alpha}$, y = sin$\boldsymbol{\alpha}$) de pe **CU**(O, 1) [23], fazor turnant în jurul centrului şi al originii O(0,0)

(24.2) $$\begin{cases} \boldsymbol{e^{i\alpha} = rad\alpha} \\ \boldsymbol{\frac{d}{d\alpha}(rad\alpha) = i.e^{i\alpha} = der\alpha} \end{cases}$$

şi a cărui derivată este fazorul **derivată centrică** $\boldsymbol{der\alpha}$, fazor tangent în punctul curent **M** la **CU**.

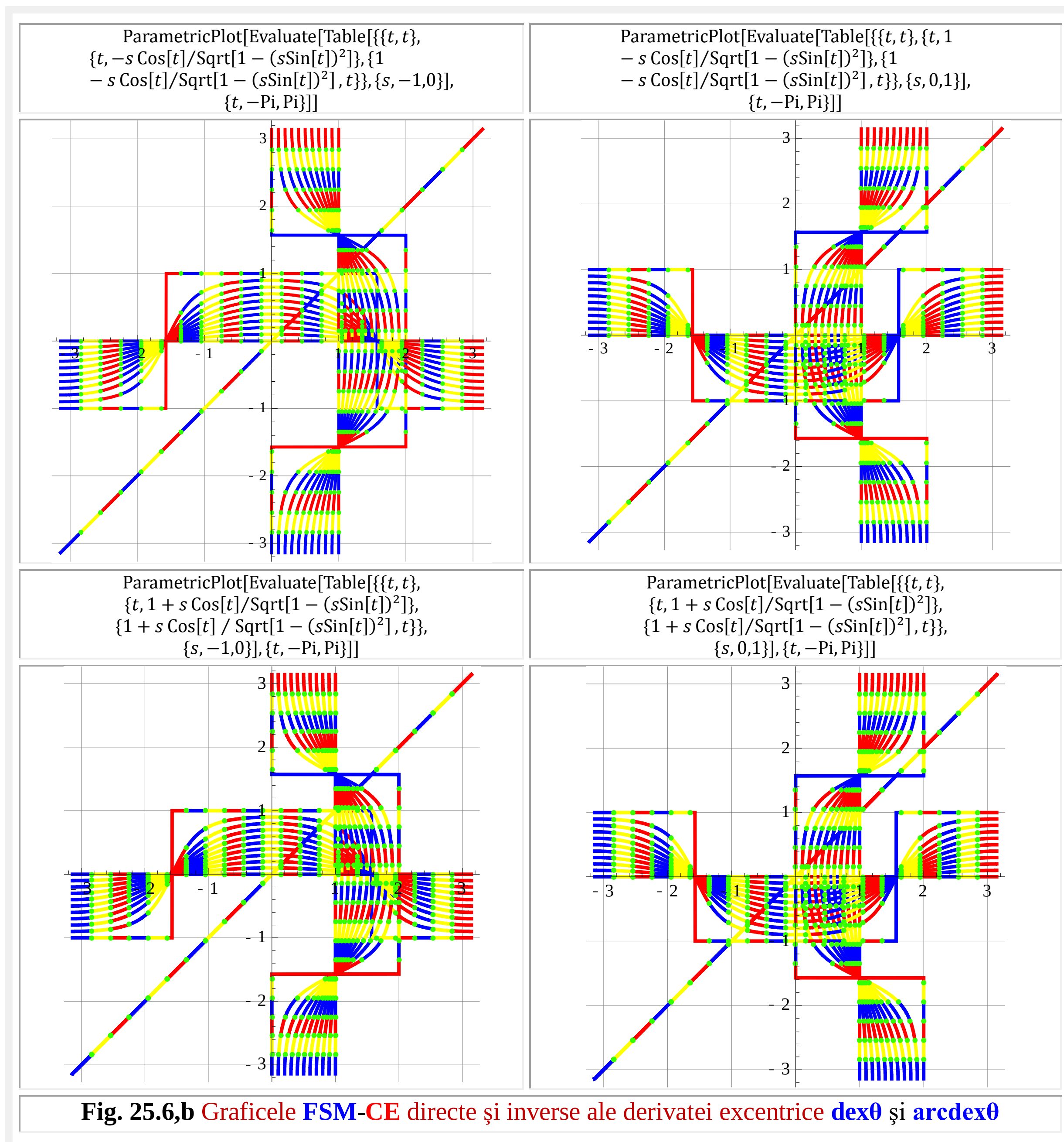


Fig. 25.6,b Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale derivatei excentrice **dexθ** şi **arcdexθ**

Funcţiile sau fazorii $\boldsymbol{rad\alpha}$ şi $\boldsymbol{der\alpha}$ sunt echivalenţii vectorilor **centrici** $\vec{R}(\boldsymbol{\alpha}) = \overrightarrow{OP}(\boldsymbol{\alpha})$ - $|\vec{R}(\boldsymbol{\alpha})| = |\boldsymbol{rad\alpha}| = 1$- şi a derivatei acestuia $\vec{V}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{d}{d\alpha}\vec{R}(\boldsymbol{\alpha})$, tangent la CU în **M**, $|\vec{V}(\boldsymbol{\alpha})| = |\boldsymbol{der\alpha}| = 1$ şi au, evident, modulele lor egale cu unitatea.

Din cele expuse anterior, se poate deduce facil că, la definirea funcţiilor trigonometrice ca funcţii circulare, **Euler** a ales **<u>trei puncte confundate</u>**: centrul cercului **C**(0,0),originea reperului **O**(0,0) şi

polul **P**(0,0) al semidreptei centrice **D**$^+$ ale cărei intersecţie cu **CU,** punctul M**(x, y),** dau funcţiile circulare considerate elementare dar şi **unice** **x = cosα** şi **y = sinα**.

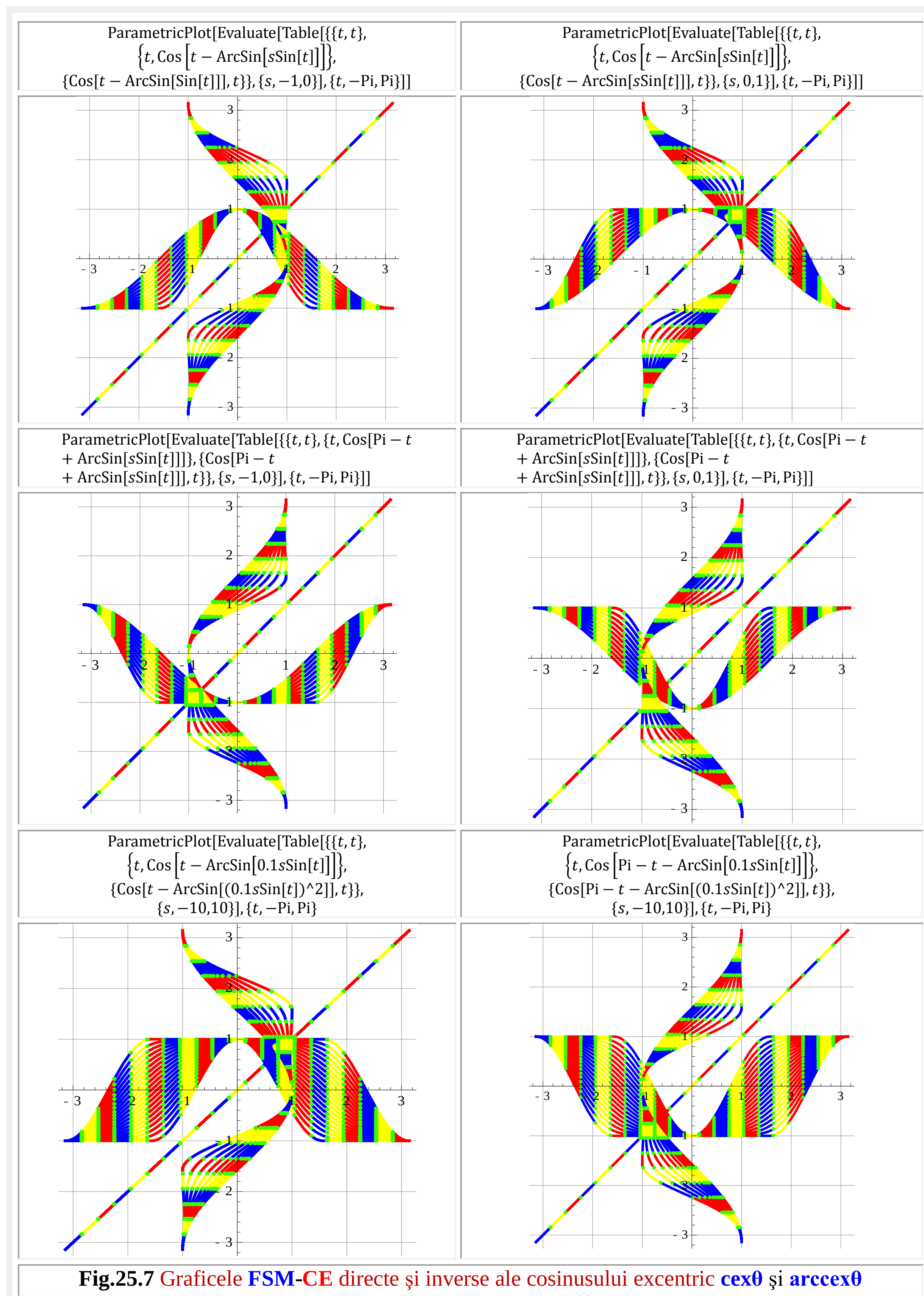


Fig.25.7 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale cosinusului excentric **cexθ** şi **arccexθ**

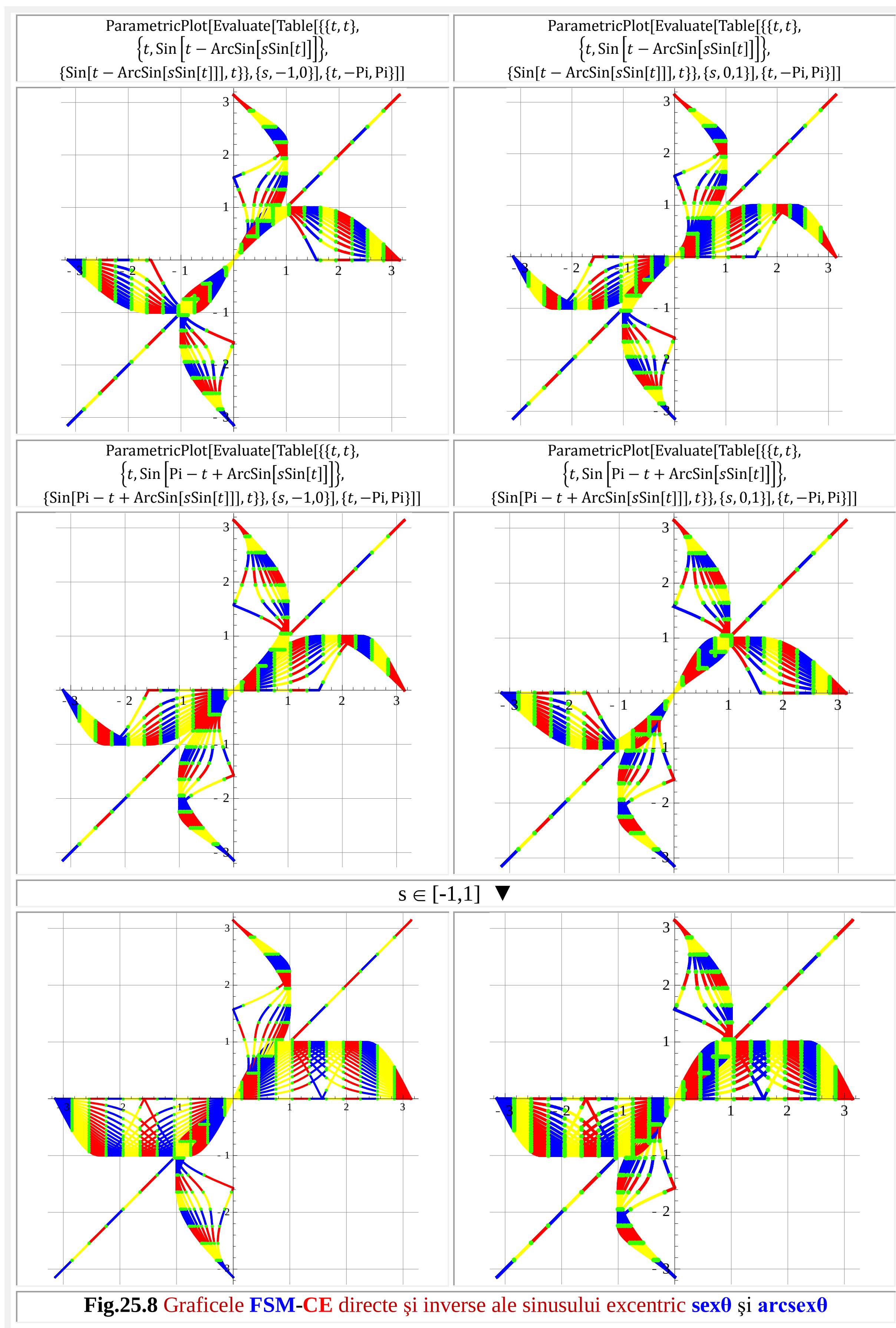


Fig.25.8 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale sinusului excentric **sexθ** şi **arcsexθ**

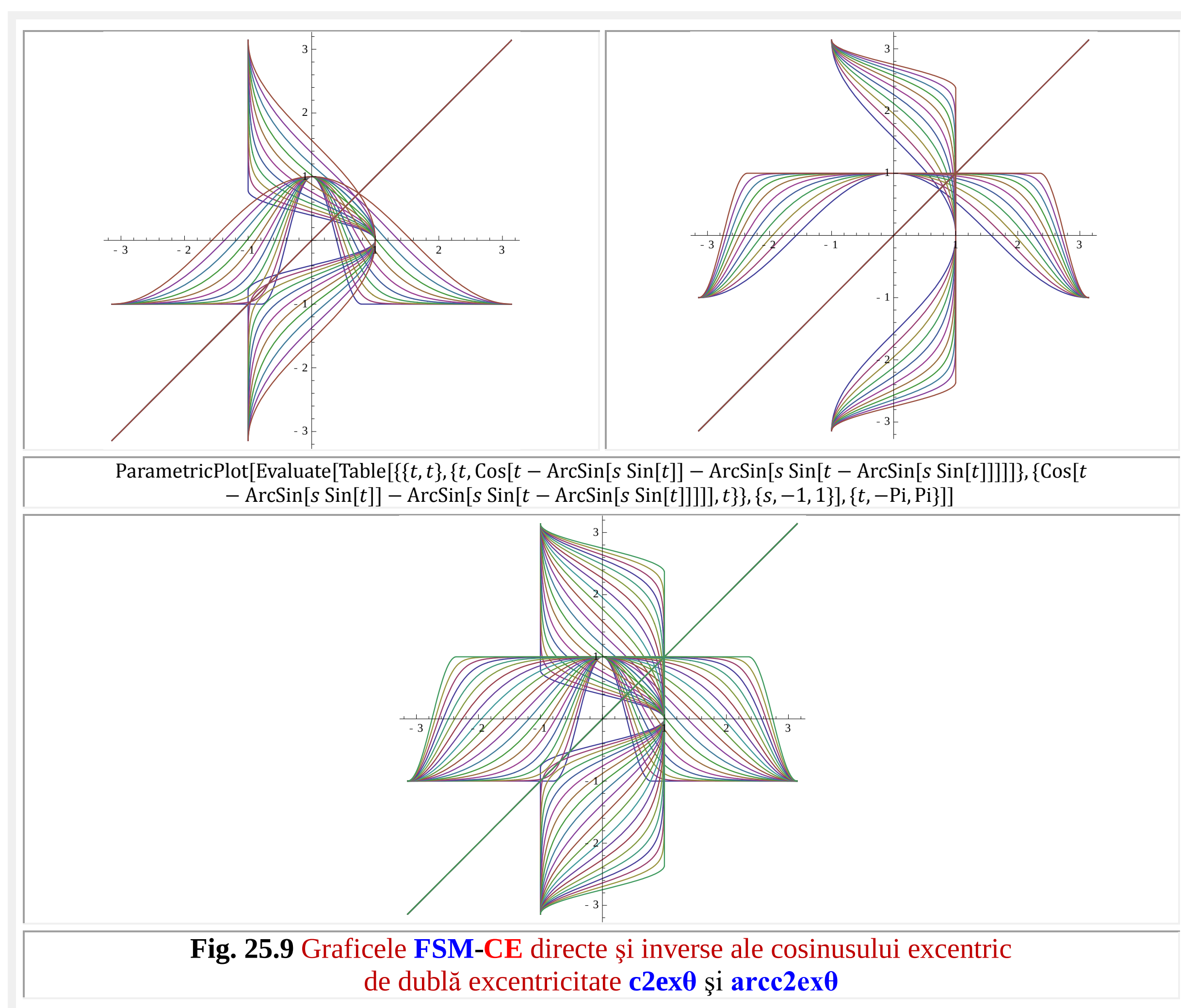
Din această cauză, apariţia unei infinităţi de funcţii circulare / trigonometrice cosinus şi sinus, precum şi a multor altora, a fost amânată din anul 1778 până în anul 1978 cu exact 200 de ani ! 200 de ani în care nimeni n-a observat că această suprapunere de puncte a sărăcit enorm matematica şi nimeni, dar nimeni, n-a mişcat din centru nici măcar un punct suprapus.

Matematica excentrică (**ME**) este cea care s-a născut prin expulzarea polul **P** din O(0, 0) şi la denumit excentru **E**(e, **ε**) pentru un cerc oarecare de rază R şi **S**(**s**, ε) pentru CU, denumind excentricitate liniară reală pe **e** şi excentricitate liniară numerică pe **s**, iar pe **ε** excentricitate unghiulară. Câte puncte există în planul cercului unitate, atâtea perechi de funcţii excentrice cosinus **cexθ** şi sinus **sexθ** au apărut şi există acum, adică o infinitate !

De abea acum s-a putut observa că nu sinusul şi cosinusul sunt funcţiile elementare, ci unele noi apărute: funcţia radial excentrică **rexθ** şi derivată excentrică **dexθ**, care sunt modulele vectorilor de poziţie $\vec{r}_{1,2} = \overrightarrow{SW}_{1,2} = rex_{1,2}\theta.rad\theta$, faţa de S şi, respectiv derivata acestuia

$\vec{v}_{1,2} = \vec{r}_{1,2}{}' = dex_{1,2}\theta.der\theta$ şi au echivalentele lor din domeniul centric fazorii **radα** şi **derα.**

Unghiul **α** la centrul **O(0,0)** a fost denumit **variabilă centrică**, iar unghiul **θ** la excentrul **S**(**s**, **ε**) a fost denumit **variabilă excentrică**.



ParametricPlot[Evaluate[Table[{{t, t}, {t, Cos[t − ArcSin[s Sin[t]] − ArcSin[s Sin[t − ArcSin[s Sin[t]]]]]}, {Cos[t − ArcSin[s Sin[t]] − ArcSin[s Sin[t − ArcSin[s Sin[t]]]]], t}}, {s, −1, 1}], {t, −Pi, Pi}]]

Fig. 25.9 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale cosinusului excentric de dublă excentricitate **c2exθ** şi **arcc2exθ**

Deoarece, funcţiile excentrice de variabilă excentrică (cexθ, sexθ, texθ etc.) sunt continue numai pentru $s^2 < 1$, adică s ∈[-1, 1] ce corespunde unui excentru **S** plasat în interiorul discul cercului unitate, au fost introduse şi funcţiile excentrice de **variabilă centrică α,** care sunt continue pentru toate valorile lui **s**, adică pentru **s** ∈ [−∞, +∞] sau pentru un excentru **S** plasat în oricare punct din

planului cercului unitate. Ele sunt notate, prin convenţie, cu majuscule (Cexα, Sexα,Texα, Rexα, Dexα, etc) pentru a se distinge de cele de variabilă excentrică θ.

La îndemnul şi sugestia unui mare matematician, l-am numit pe Prof.dr. math. **Horst Klepp,** de a pune de acord trigonometria, care opera cu **semidrepte**, cu geometria analitică care operază cu **drepte**, au fost redefinite funcţiile excentrice ca intersecţie a **dreptei excentrice**, pentru că este turnantă în jurul excentrului **S**, **d** = $\mathbf{d^+ \cup d^-}$, cu cercul unitate **CU(O, 1)**, rezultând, astfel, două determinări: una principală, de indice 1, sau fãra indice când confuziile sunt excluse, din intersecţia cu semidreapta $\mathbf{d^+}$ şi una secundară, de indice 2, ca intersecţie cu semidreapta $\mathbf{d^-}$.

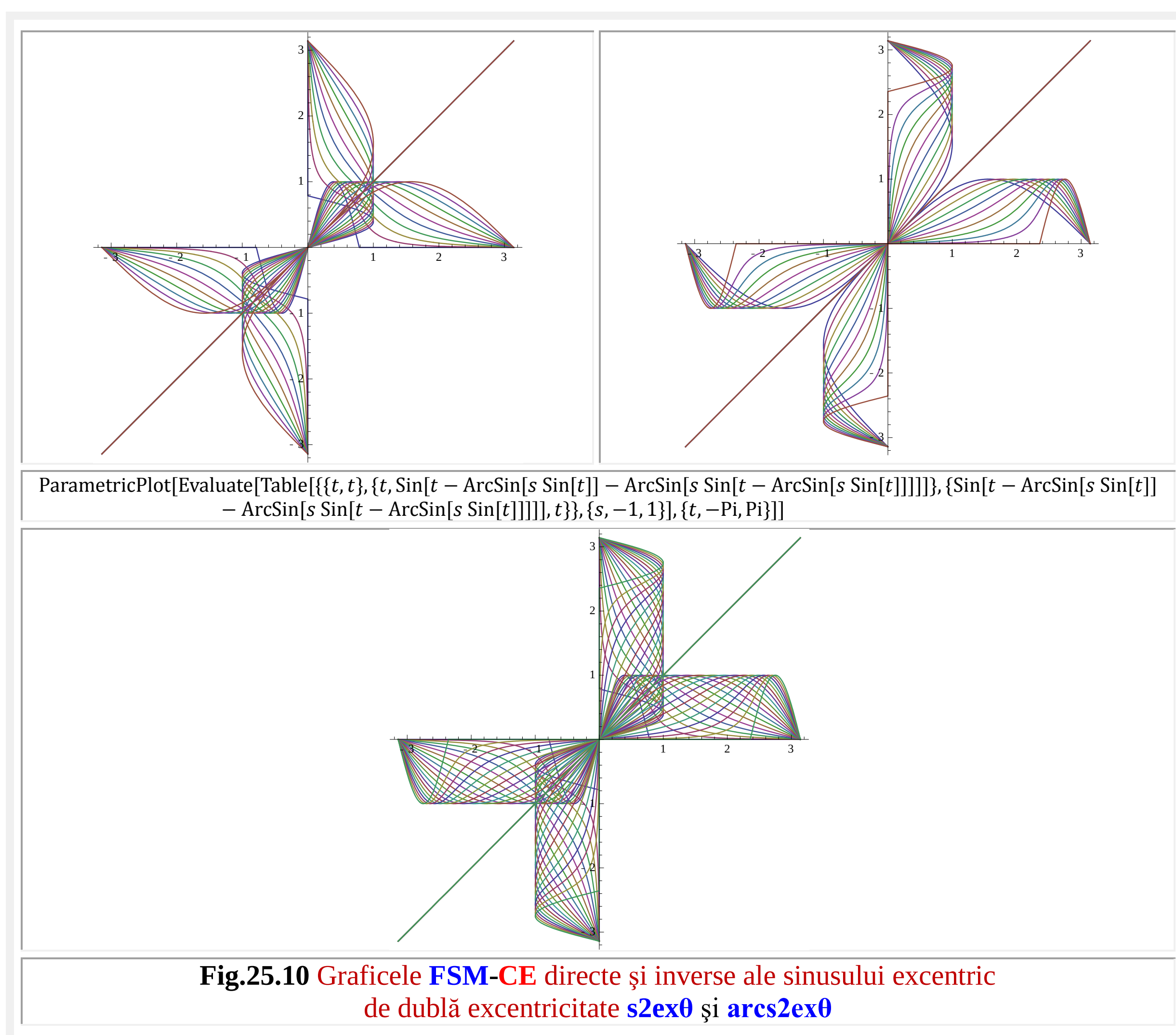


Fig.25.10 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale sinusului excentric de dublă excentricitate **s2exθ** şi **arcs2exθ**

Matematica elevată (MEL) este cea în care s-a mai considerat deplasat un punct, şi anume, originea O din C(0, 0) în excentrul **S**(**s**, **ε**) ≡ O(**s**, **ε**) şi astfel au apărut funcţiile super-matematice circulare **elevate** (**FSM**-**CEL**), precum cosinus elevat **celθ** şi **Celα**, sinus elevat **selθ** şi **Selα**, tangentă elevată **telθ** şi **Telα** etc.

Au fost denumite **elevate**, pentru că **celθ** şi **selθ**, de exemplu, îşi elevează poziţia codomeniului în funcţie de poziţia excentrului S, în timp ce, codomeniul funcţiilor excentrice cexθ şi sexθ rămâne acelaşi I ∈ [-1, 1], indiferent de poziţia lui S în plan.

După 240 de ani s-a renunţat la coinciderea vreunui punct, astfel că cele 3 puncte au devenit toate distincte în cadrul **matematicii exotice** (MEX), care a dat naştere funcţiilor supermatematice **circulare exotice** (**FSM**-**CEX**) cosinus exotic **cexoθ** şi **Cexoα**, sinus exotic **sexoθ** şi **Sexoα**, tangentă exotică **texoθ** şi **Texoα** etc.

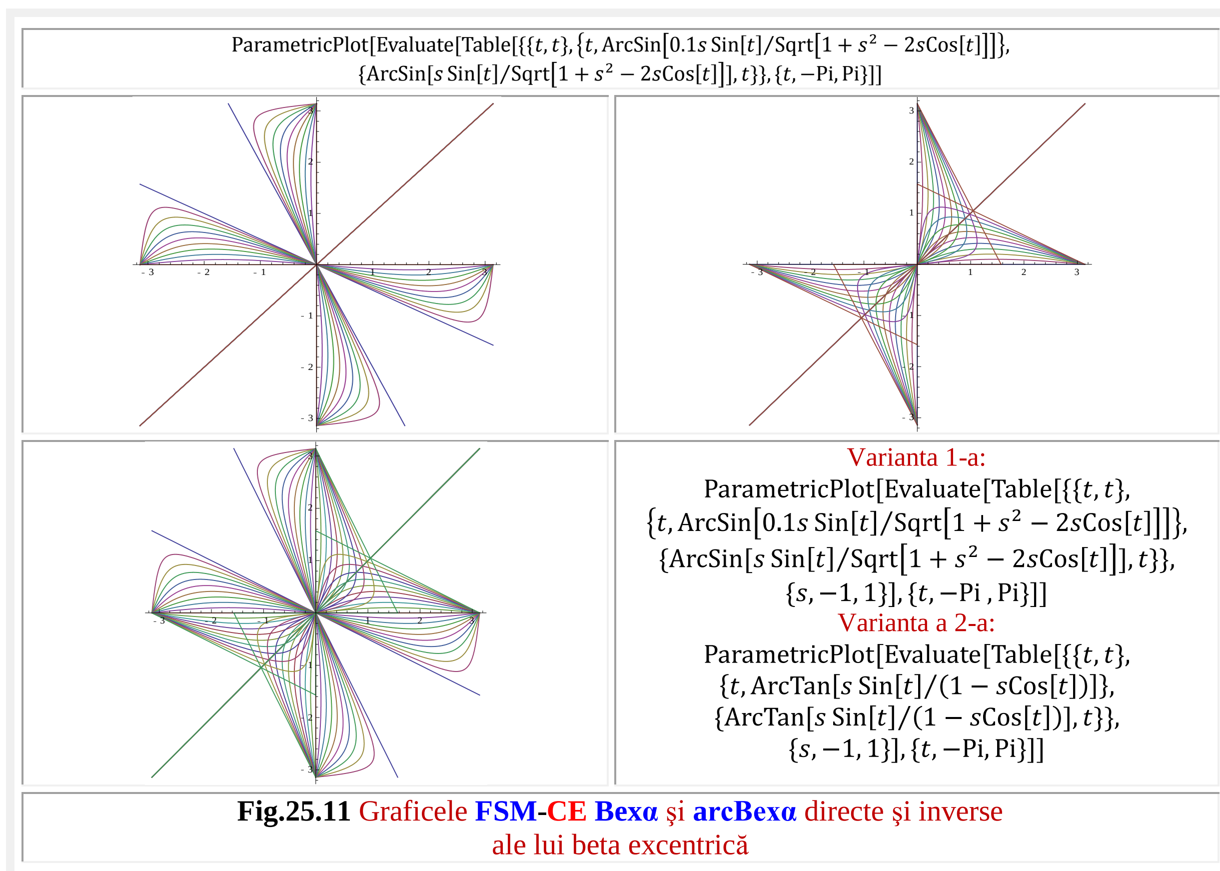


Fig.25.11 Graficele **FSM-CE Bexα** şi **arcBexα** directe şi inverse ale lui beta excentrică

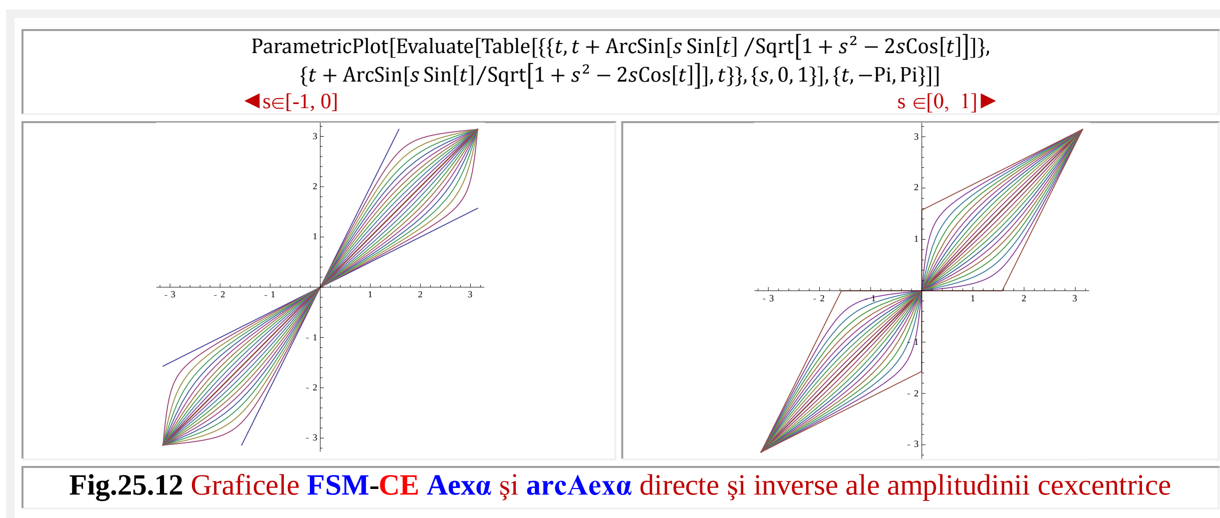


Fig.25.12 Graficele **FSM-CE Aexα** şi **arcAexα** directe şi inverse ale amplitudinii cexcentrice

Deoarece, în toate cele trei tipuri de matematici excentricitatea este prezentă şi diferită de zero, ele aparţin toate domeniului **matematicii excentrice** (**ME**). Pentru **s** = **e** = 0, **ME** →**MC.**
În toate aceste matematici, excentricităţile liniară **s** şi unghiulară **ε** sunt prezente ca a 3-a şi a 4-a dimensiune a spaţiul 2 D dacă **s** şi **ε** sunt **constante** şi diferite de zero, astfel că **S**(**s**, **ε**) este un punct fix în plan, a 5-a şi a 6-a dimensiune a spaţiului bi-dimensional, dacă **S** este un punct mobil în plan, care se deplasează după anumite legi, guvernate de o funcţie centrică sau tot excentrică de acelaşi excentru **S** (denumite funcţii de dublă excentricitate) sau o altă excentricitate $s_1 - s(\theta, s_1)$ – ş.a.m.d. până la a n-a dimensiune a spaţiului 2D.

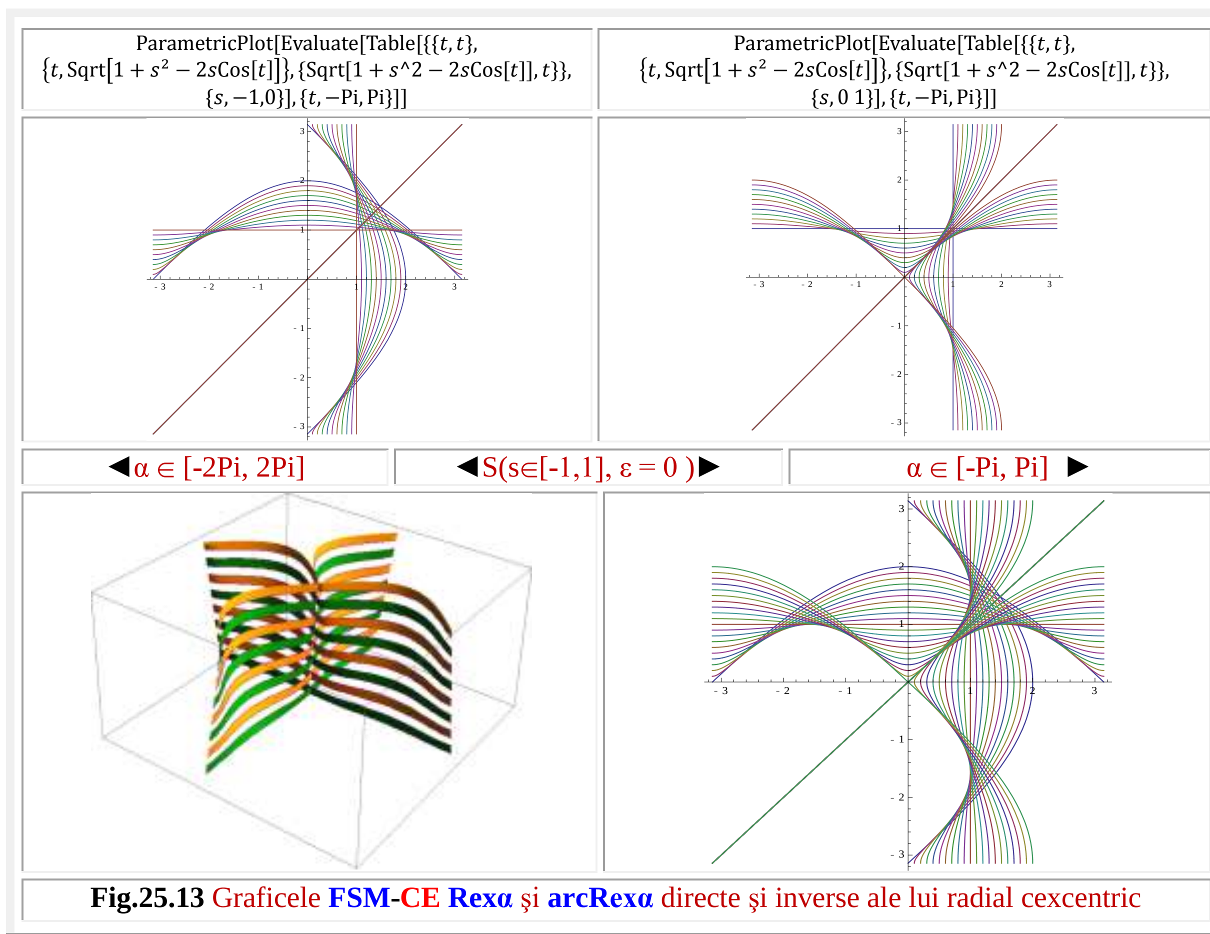
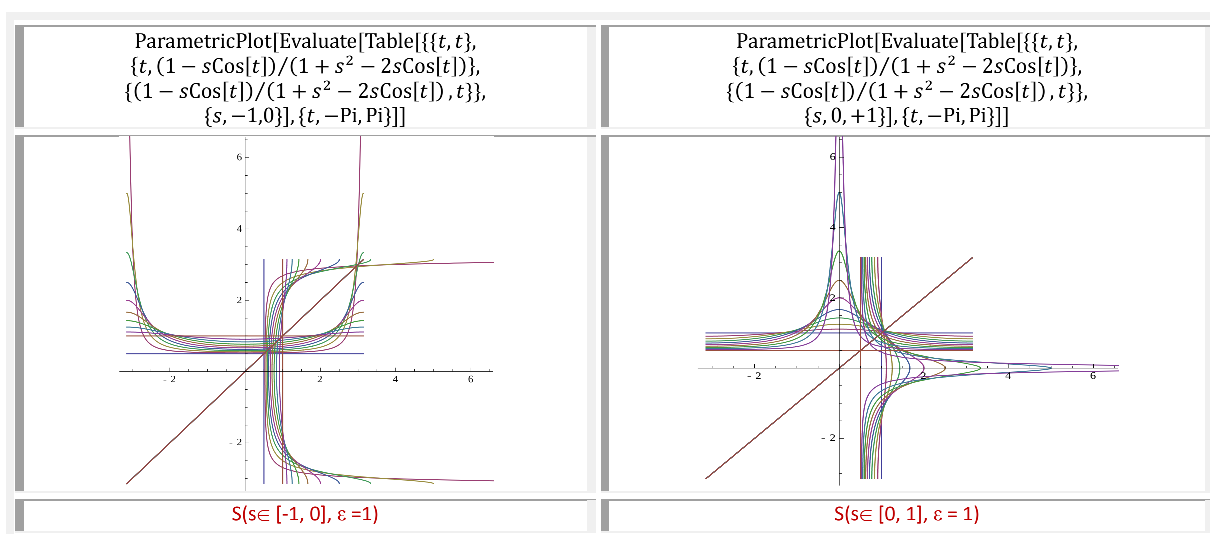


Fig.25.13 Graficele **FSM-CE Rexα** şi **arcRexα** directe şi inverse ale lui radial cexcentric

Totodată, excentricitatea poate fi a 4-a şi a 5-a dimensiune a spatiului 3D, dacă **s** şi **ε** sunt constante şi **S** un punct fix în spaţiul 3D, a 6-a sau/şi a 7-a dimensiune dacă **s** sau/şi **ε** sunt variabile, a 8-a şi a 9-a dimensiune a spaţiului 3D dacă **s** sau/şi **ε** sunt variabile ş.a.m.d., aidoma cazului 2D, până la a n-a dimensiune a spaţiului 3D.



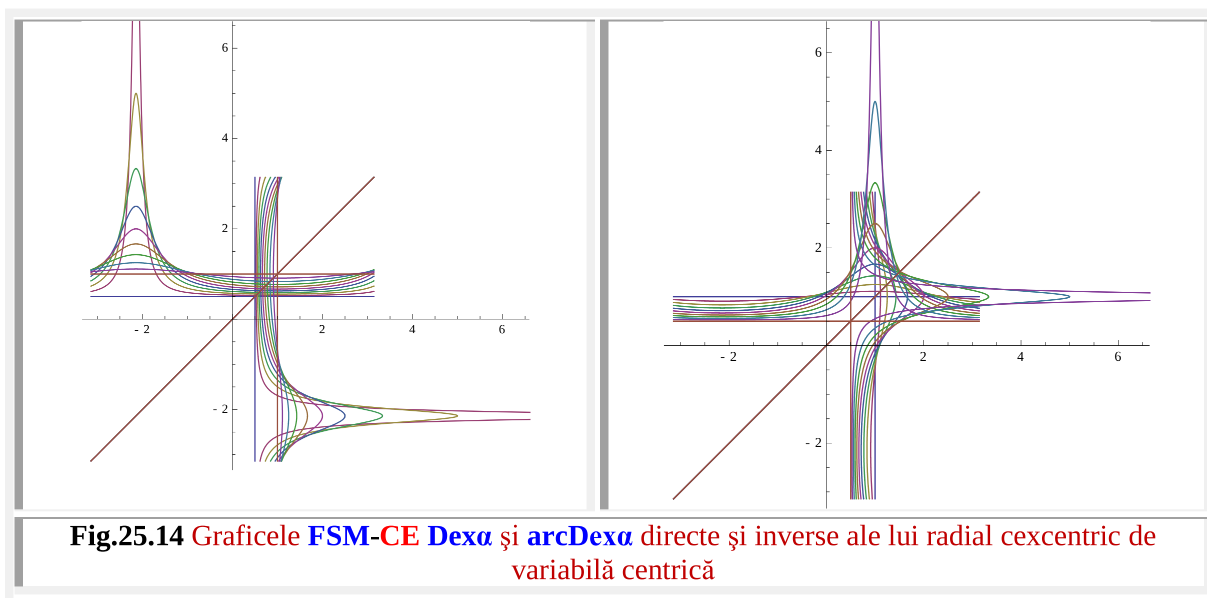


Fig.25.14 Graficele **FSM-CE Dexα** şi **arcDexα** directe şi inverse ale lui radial cexcentric de variabilă centrică

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{{t, Cos[t + ArcSin[s Sin[t]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]]},
{Cos[t + ArcSin[s Sin[t]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]], t}}], {t, −Pi, Pi}]]
```

S(s∈ [-1, 0], ε = 0)

S(s∈ [0, 1], ε = 0)

S(s∈ [-1, 0], ε =1)

S(s∈ [0, 1], ε = 1)

Fig.25.15 Graficele **FSM-CE Cexα** şi **arcCexα** directe şi inverse ale lui cosinus cexcentric de variabilă centrică

Toate FSM-CE directe şi inverse se impart în două clase de funcţii:

1) Cele care depind de poziţia originii O(0, 0) – pentru funcţiie excentrice sau O(s, ε) – pentru cele elevate – a reperului de la care se definesc / măsoară şi care au corespondente în matematica centrică (**MC**), cum sunt cex şi Cex → cos, sex şi Sex → sin, tex şi Tex → tan etc. şi
2) Cele care **nu** depind de poziţia originii **O**, ci de poziţia excentrului **S**(s, ε) de la care sunt definite şi se măsoară mărimea lor şi care nu aveau şi, unele, nu au nici acum funcţii corespondente în **MC,** deşi expresiile lor matematice sunt frecvent întâlnite în matematica şi în tehnică rex şi Rex → rad, dex şi Dex → der, bex şi Bex → ?, aex şi Aex→ ?.

FSM-CE directe, care au corespondente în domeniul matematicii centrice (**MC**), se obţin din acestea, adică din funcţiile centrice **cos**, **sin**, **tan**, etc., ca funcţii induse o singură dată sau monoinduse sau compuse şi mai corect ca funcţii de funcţie, adică prin înlocuirea variabilelor excentrică **θ** şi centrică **α** cu funcţiile α(θ) şi θ(α) denumite **FSM-CE** amplitudine excentrică corespunzătoare, a căror expresii, a primei determinări principale, de indice 1 sau fără indice, sunt [23], [1], [2], [10]

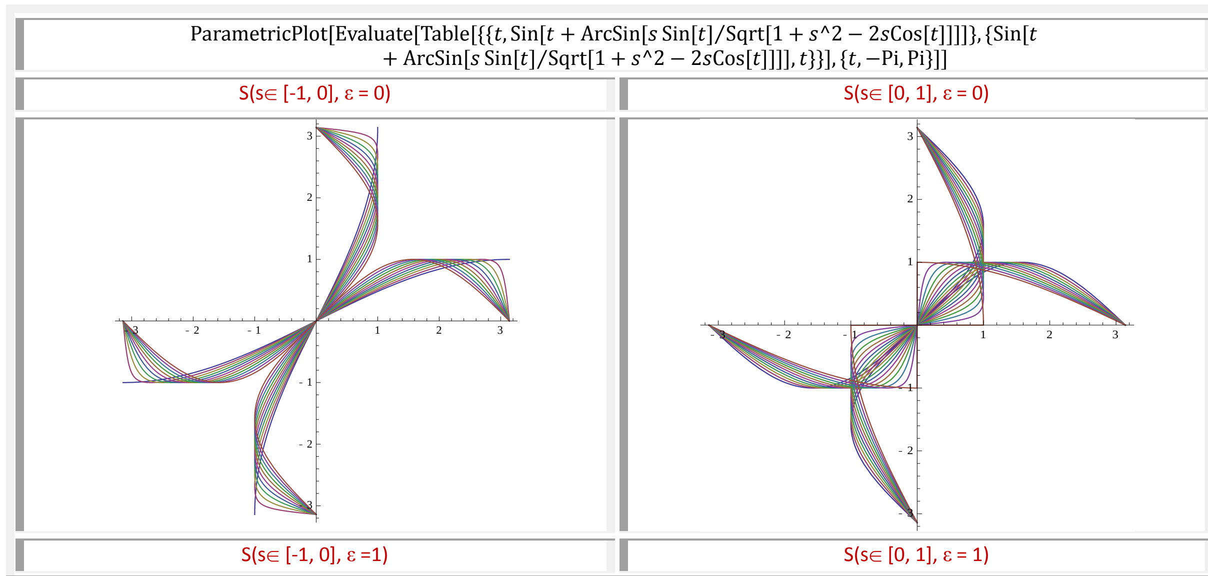
(4) $$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \alpha(\theta) = aex_1\theta = \theta - \beta_1(\theta) = \theta - bex_1\theta = \theta - \arcsin[s.sin(\theta-\varepsilon)] \\ \boldsymbol{\theta} \Rightarrow \theta(\alpha) = Aex\alpha_1 = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \alpha + arcsin\frac{s\sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha} \end{cases}$$

Cea de a doua determinare, secundară, de indice 2, se obţine din prima ştiind că

(5) $\beta_2 = \pi - \beta_1 = \pi - \beta$.

25.4 FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE (FSM-CEI) DE VARIABILĂ CENTRICĂ α

FSM-CE directe şi inverse de variabilă centrică **α**, independente de O(0,0) dar dependente de excentrul **S**(s, ε) sunt **Bexα** şi **arcBexα** din **figura 25.8**, **Aexα** şi **arcAexα** din **figura 25.9**, precum şi Rexα şi **arcRexα** prezentate în **figura 10** ca şi **Dexα** şi **arcDexα** din **figura 25.11**.



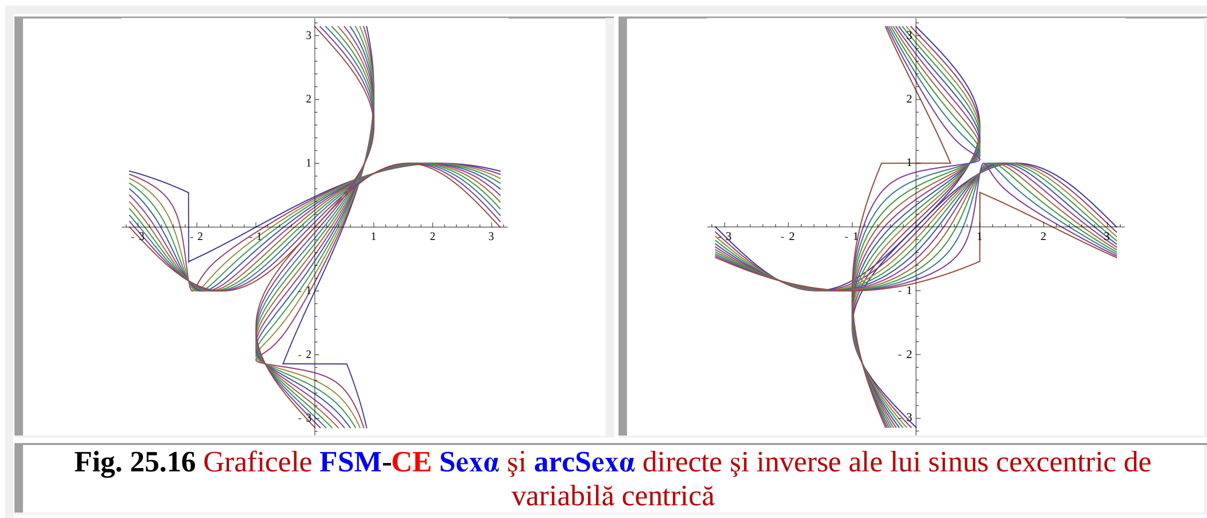


Fig. 25.16 Graficele **FSM-CE Sexα** şi **arcSexα** directe şi inverse ale lui sinus cexcentric de variabilă centrică

Ca urmare

(6) $$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \alpha_2(\theta) = aex_2\alpha = \theta - \beta_2(\theta) = \theta - bex_2\theta = \pi - \theta + \arcsin[s.sin(\alpha - \varepsilon)] \\ \boldsymbol{\theta} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2(\alpha) = \pi - \alpha_2 - arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \pi - \alpha_2 - arcsin\frac{s\sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha} \end{cases}$$

Dacă ecuaţiile parametrice ale unei funcţii directe şi graficele lor se obţin prin expresiile

(7) $$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

atunci funcţia ei inversă va avea ecuaţiile parametrice şi, ca urmare, şi graficele, date de ecuaţiile parametrice obţinute prin inversarea coordonatelor x cu y şi a lui y cu x, adică

(8) $$\begin{cases} x = f(t) \\ y = t \end{cases}$$

ceea ce se poate observa şi din ecuaţiile şi textele prezentate în desenele anterioare, în **figurile 25.1,a** şi **1,b** pentru funcţiile directe şi inverse beta excentrice şi amplitudine excentrică.

Funcţiile monoinduse (induse o singură dată) sunt cex, sex, tex etc. şi Cex, Sex, Tex etc. iar funcţiile inductoare sunt $aex_{1,2}\theta$ şi, respectiv, $Aex\alpha_{1,2}$.

Prin repetarea procedeului de inducţie, se vor obţine **FSM**-CE directe şi inverse de dublă excentricitate (**Fig. 25.6** şi **25.24.7**). Procedeul putând fi repetat la nesfârşit, se pot obţine **FSM-CE** de triplă, cvadruplă ş.a.m.d. de a n-a sau multiplă excentricitate.

FSM-CE directe şi inverse cosinus (cexθ şi **arccexθ**) sunt prezentate în **figura 25.24.4**, iar sinusul (sexθ şi **arcsexθ**) în **figura 25.5**, în partea din stânga ◄ figurilor pentru S(s∈[-1,0], ε = 0) sau S(s∈[1,0], ε = π) şi în partea dreaptă ► pentru S(s∈[0,1, ε = 0)] . În **figurile 25.6** şi **25.7** sunt prezentate aceleaşi funcţii dar de dublă excentricitate cosinus (c2exθ şi **arcc2exθ,** precum şi cosinus s2exθ şi **arcs2exθ**).

Pe lângă **FSM-CE** prezentate, mai sunt şi **arctexα** şi **arcTexα, arcctexα** şi **arcCtexα, ş.m.a.**

25.5 FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE ELEVATE INVERSE (FSM-CELI) DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ

Aşa cum s-a mai menţionat, funcţiile supermatematice circulare elevate (**FSM-CEL**) sunt coordonatele punctelor $W_{1,2}$ de intersectie a dreptei excentrice **d** cu cercul unitate CU[C(0 ,1); 1], când dreapta turnantă se roteşte faţă de excentrul **S**(**s**, ε) în care este plasată, în acest caz, şi originea O(**s**, ε), origine de la care se definesc $X_{1,2}$→ cosinusul elevat $cel_{1,2}\theta$ şi $Cel\alpha_{1,2}$ şi $Y_{1,2}$ → sinusul elevat $sel_{1,2}\theta$ şi $Sel\alpha_{1,2}$.

Este uşor de observat că, pentru ε = 0 şi ε = π, funcţiile elevate $sel_{1,2}\theta$ şi $Sel\alpha_{1,2}$ se confundă cu cele excentrice $y_{1,2}$ → $sex_{1,2}\theta$ şi $Sex\alpha_{1,2}$, deoarece, în acest caz, originea **O,** confundată cu excentrul **S**, se află dispuse pe aceeaşi axă a absciselor ca şi centrul cercului unitate C, astfel că $Y_{1,2} = y_{1,2}$, iar $X_{1,2} = x_{1,2} + s_x = x_{1,2} + s.\cos\varepsilon$.

Rezultă că între **FSM-CEL** şi **FSM-CE** există următoarele dependenţe (**Fig. 25.13**)

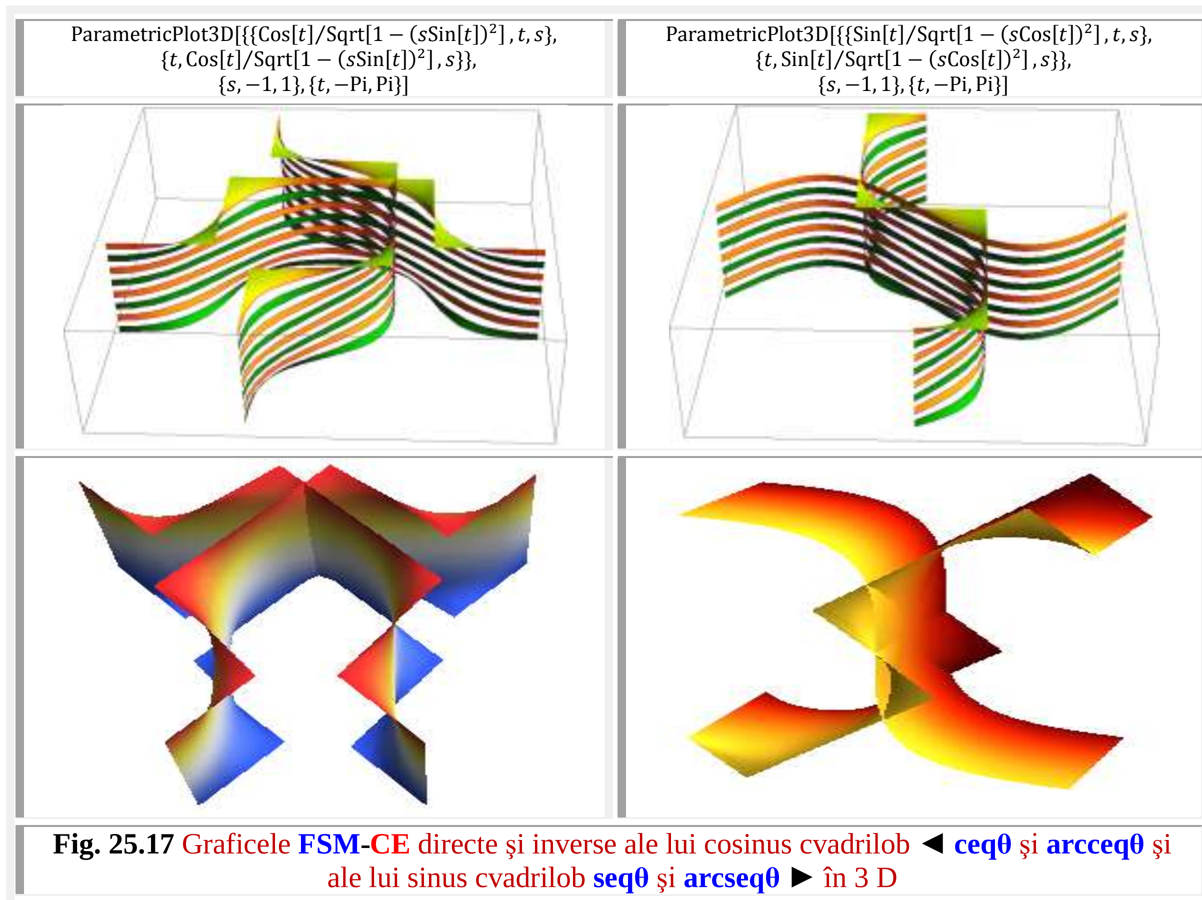


Fig. 25.17 Graficele **FSM**-**CE** directe şi inverse ale lui cosinus cvadrilob ◄ **ceqθ** şi **arcceqθ** şi ale lui sinus cvadrilob **seqθ** şi **arcseqθ** ► în 3 D

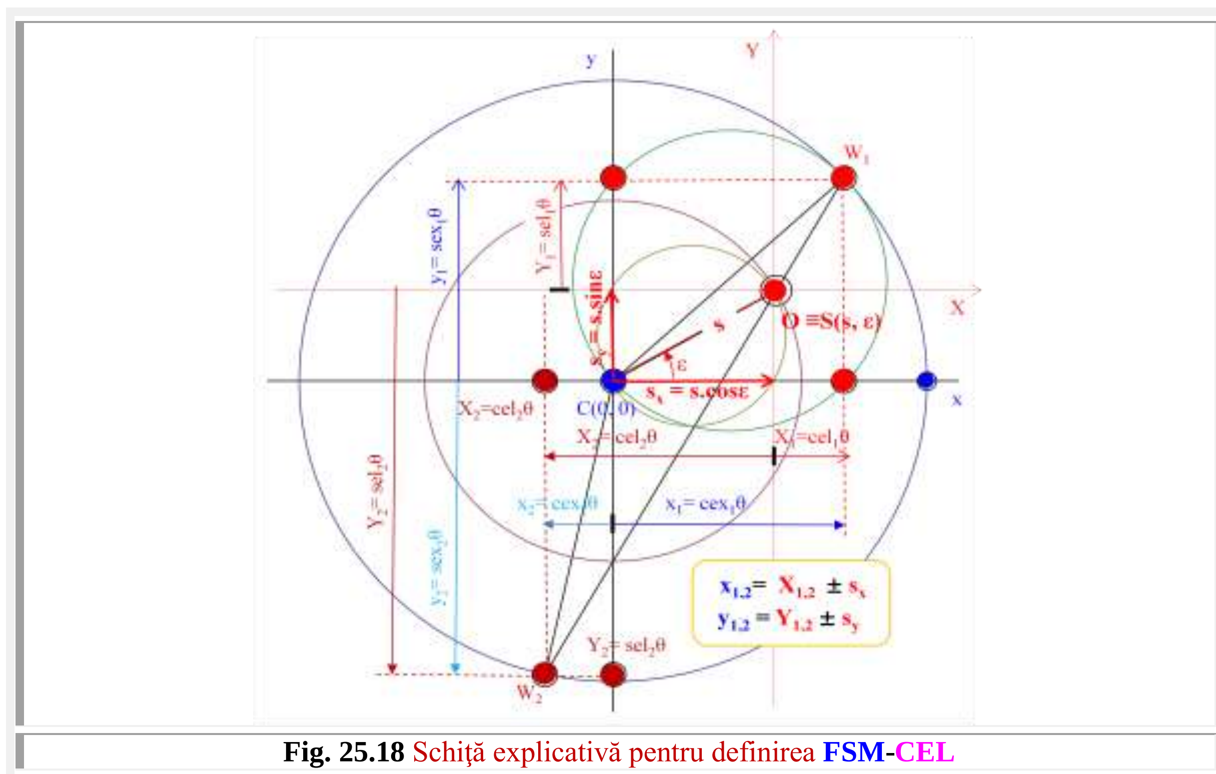


Fig. 25.18 Schiţă explicativă pentru definirea **FSM**-**CEL**

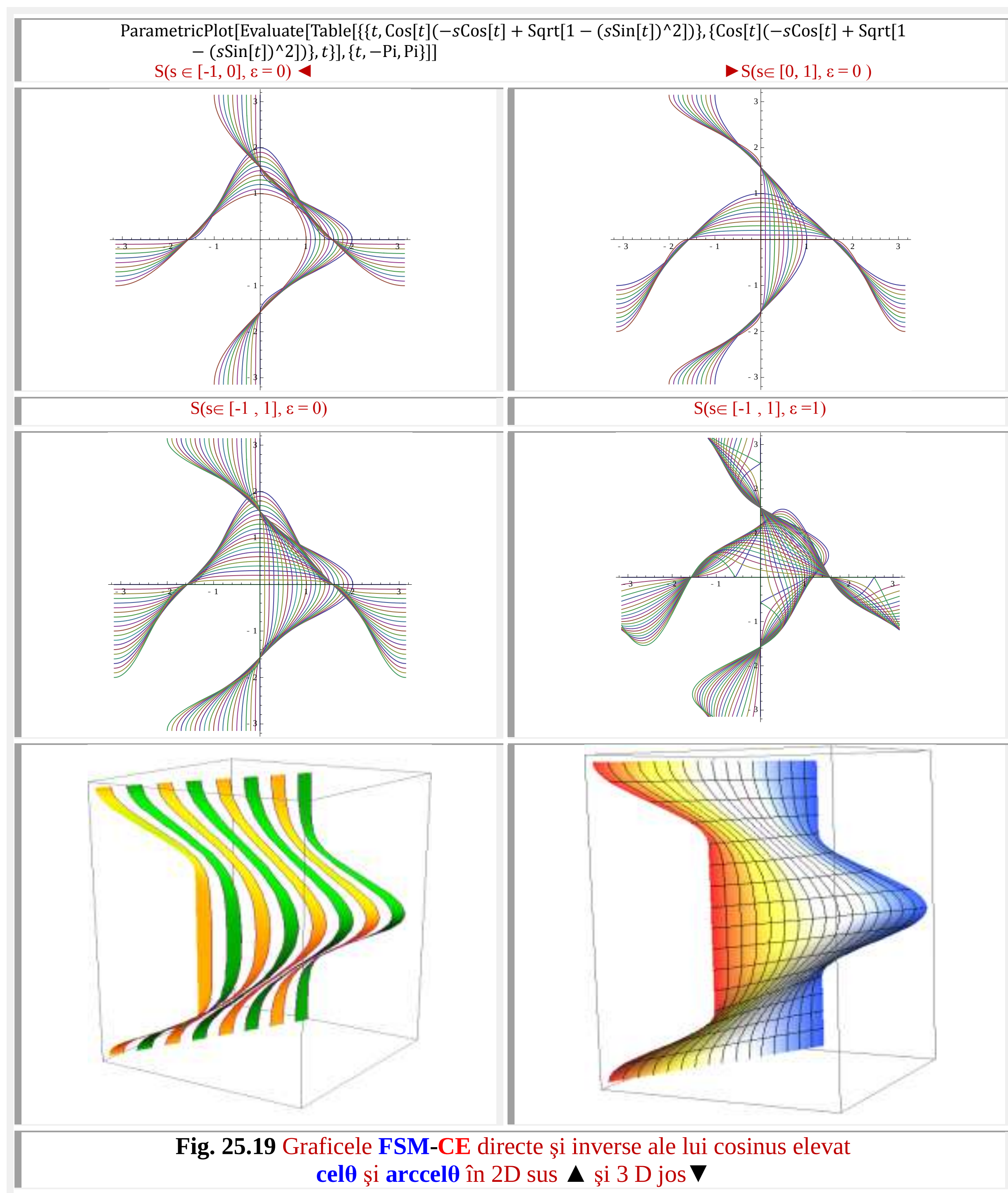


Fig. 25.19 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale lui cosinus elevat **celθ** şi **arccelθ** în 2D sus ▲ şi 3 D jos▼

(9) $$\begin{cases} X_{1,2}(\theta) = cel_{1,2}\theta = x_{1,2}(\theta) \mp s.cos\varepsilon \rightarrow cel_{1,2}(\theta) = cex_{1,2}\theta \mp s.cos\varepsilon \\ Y_{1,2}(\theta) = sel_{1,2}\theta = y_{1,2}(\theta) \mp s.sin\varepsilon \rightarrow sel_{1,2}(\theta) = sex_{1,2}\theta \mp s.sin\varepsilon \end{cases}$$

Totodată, aşa cum rezultă din schiţa explicativă (**Fig. 25.13**), funcţiile ale căror expresii nu depind de poziţia centrului **C**(0,0), ci de poziţia excentrului S(s, ε), ca aexθ şi Aexα, bexθ şi Bexα, rexθ şi Rexα, dexθ şi Dexα sunt aceleaşi atât ca funcţii **excentrice** cât şi ca funcţii **elevate** şi **exotice**.

De aceea, funcţiile elevate inverse se rezumă la funcţiile cos, sin, tan, cot ş.a., adică celθ şi Celα, sexθ şi Sel, texθ şi Tel, ctexθ şi Ctel, ş.a. a căror inverse sunt arccelθ, arcselθ, arctelθ, arcctelθ, ş.a. ca funcţii de variabila excentrică şi arcCelα, arcSelα, arcTelα, arcCtelα, ş.a. ca funcţii de variabilă centrică α.

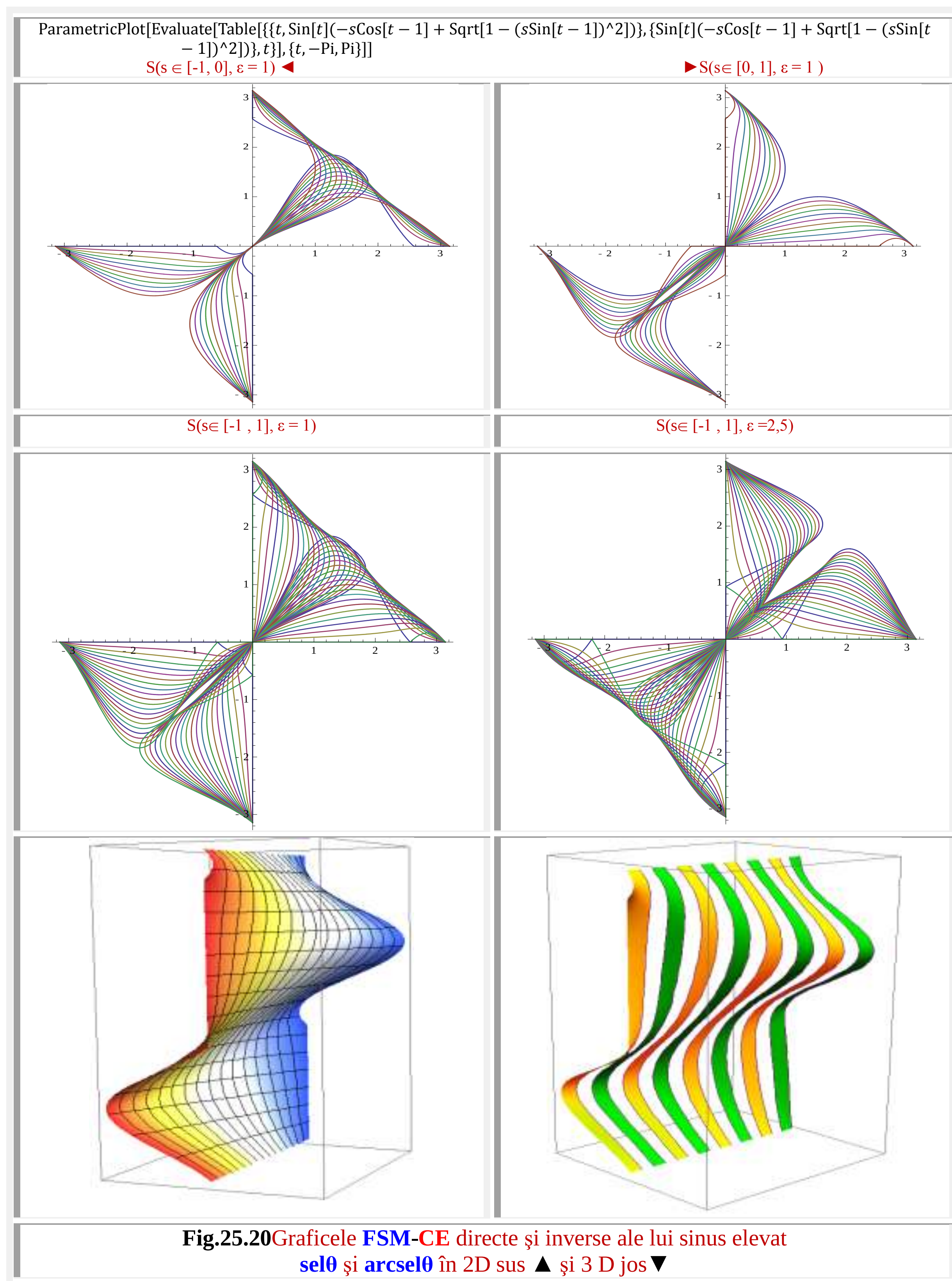


Fig.25.20 Graficele **FSM**-**CE** directe şi inverse ale lui sinus elevat **selθ** şi **arcselθ** în 2D sus ▲ şi 3 D jos▼

Graficele funcţiilor elvate directe şi inverse celθ şi arccelθ sunt prezentate în **figura 25.14** în 2D şi, pentru o înţelegere mai profundă, şi în 3D, iar în **figura 25.15** sunt prezentate, în 2D şi în 3D, graficele funcţiilor selθ şi arcselθ .

25.6 FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE ELEVATE INVERSE DE VARIABILĂ CENTRICĂ α

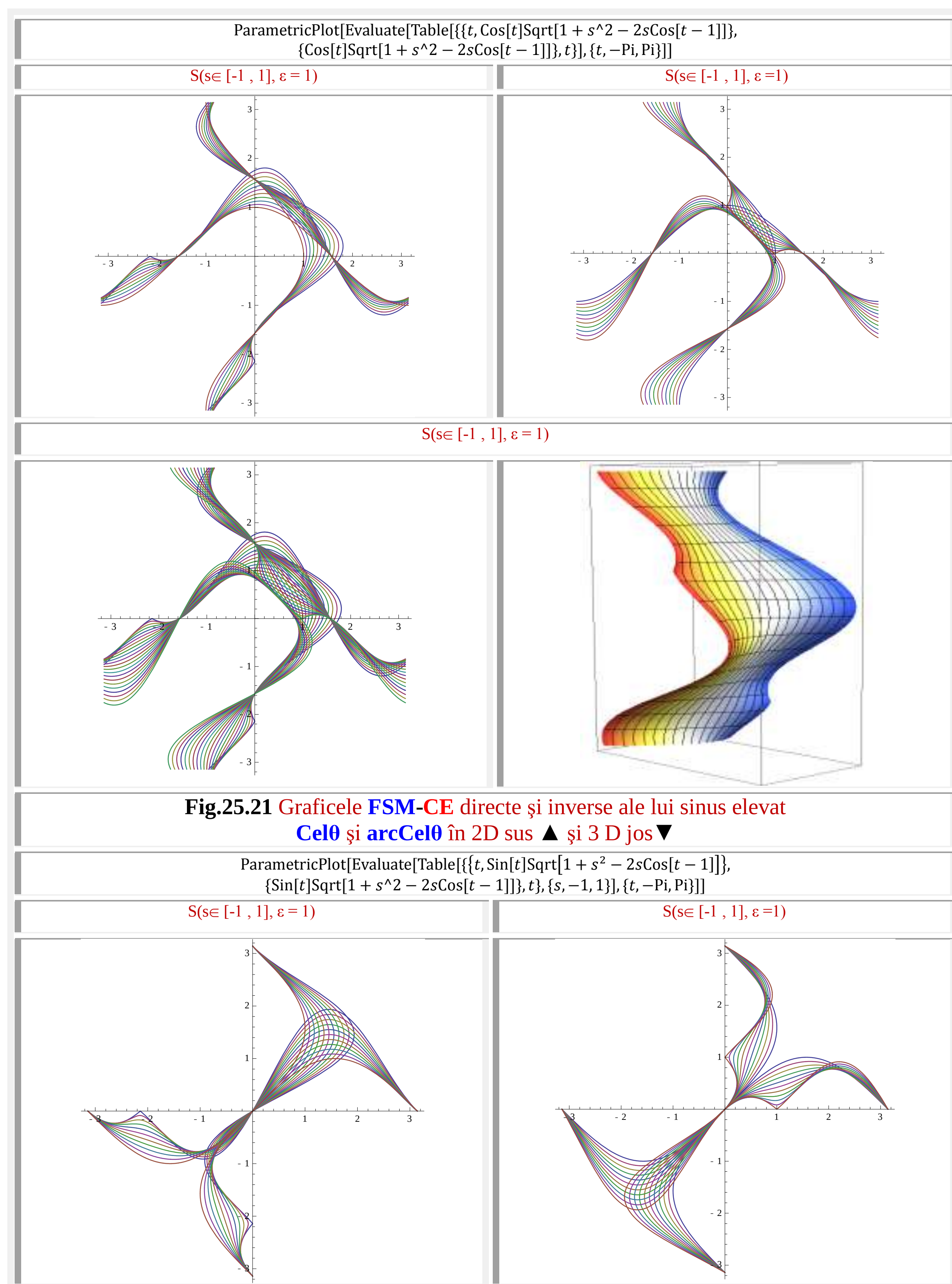


Fig.25.21 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale lui sinus elevat **Celθ** şi **arcCelθ** în 2D sus ▲ şi 3 D jos▼

S(s∈ [-1 , 1], ε = 1)

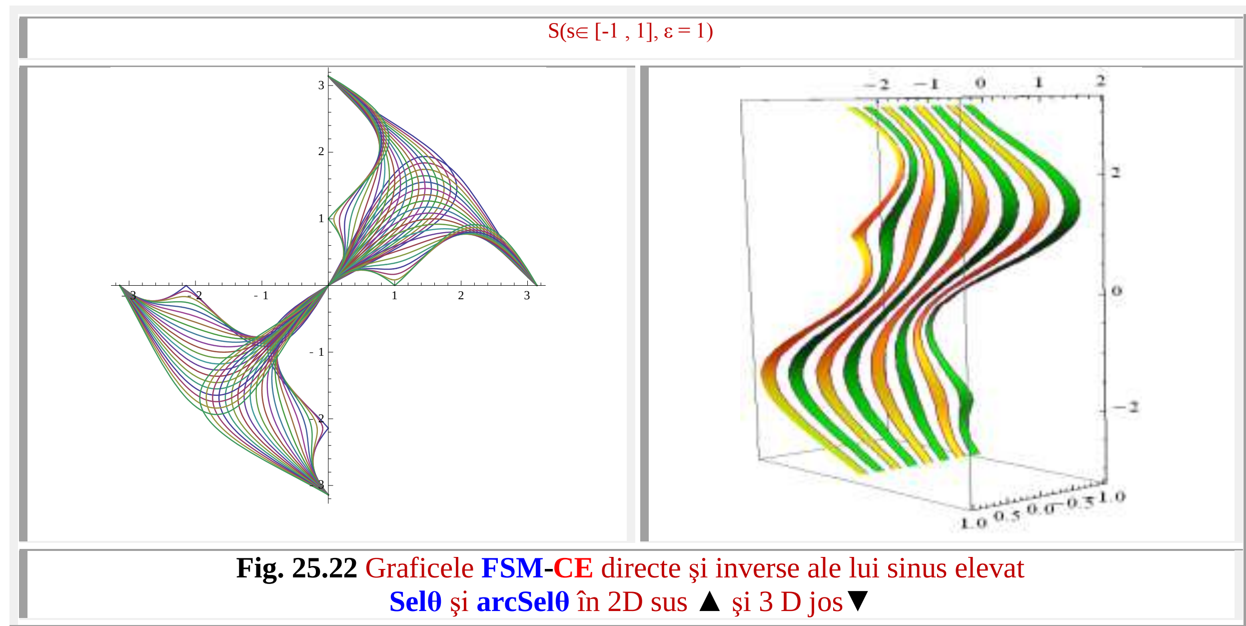


Fig. 25.22 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale lui sinus elevat **Selθ** şi **arcSelθ** în 2D sus ▲ şi 3 D jos▼

Motto: „Oamenii se tem de gândurile originale mai mult decît de orice altceva, mai mult decât de ruină, mai mult decât de moarte.”
Bertrand Russel

Capitolul 25

FUNCŢII SUPERMATEMATICE bex , Bex ŞI aex, Aex CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE (FSM-CEI)

25.1 REMEMBAR : FUNCŢII CIRCULARE CENTRICE INVERSE

O funcţie f : X → Y este ***inversabilă*** sau ***biunivocă*** dacă există o funcţie g : Y → X, astfel încât f ° g = 1Y şi g ° f = 1X, în care 1M : M → M, 1M(x) = x, oricare ar fi x din M, se numeşte aplicaţia identică a mulţimii M. În cazul în care X = Y, are loc egalitatea f ° g = g° f = 1X.

Mulţimea funcţiilor monotone, crescătoare şi descrescătoare, este conţinută în mulţimea funcţiilor inversabile. O funcţie monotonă este inversabilă, pe când o funcţie inversabilă nu este neapărat monotonă.

Dacă există g, ca inversă a funcţiei directe f, atunci are loc echivalenţa

y = f(x) ⇔ x = g(y),

în care x parcurge domeniul de definiţie X al funcţiei f, iar y, imaginea lui x prin funcţia f, parcurge domeniul de definitie Y al funcţiei g sau codomeniul funcţiei f.

Fie funcţia f : X → Y, bijectivă. Inversa unei aplicaţii bijective este din nou bijectivă.

Funcţia g : Y → X, care asociază fiecărui element din y din Y elementul unic x din X, astfel încât f(y) = x, se numeşte funcţie inversă a funcţiei f şi se poate nota cu $g = f^{-1}$.

Funcţia **directă** f care are ca inversă funcţia $f^{-1} = g$, (funcţia **inversă** a lui f) se zice că este inversabilă.

Funcţia directă y = x, care reprezintă ecuaţia primei bisectoare, are drept funcţie inversă funcţia x = y. Ca urmare, prima bisectoare este, în acelaşi timp, şi funcţie directă şi funcţie inversă.

Toate funcţiile inverse au graficele ca simetrice ale funcţiilor directe faţă de prima bisectoare.

Se notează cu **Arcsinx** mulţimea ***tuturor arcelor*** a căror sinus este egal cu x şi cu **arcsinx**, **arccosx**, **arctanx** etc. ***determinarile principale ale inverselelor*** funcţiilor **sinx**, **cosx**, **tanx**, etc.

OBSERVAŢIE :

Notaţiile determinarilor principale ale funcţiilor inverse, cele monogene sau uniovoce, sunt uneori invers notate în alte culturi decât în cea matematică românească.

Astfel, în continuare, se vor nota numai cu **arc** *determinările principale* ale funcţiilor inverse, cele uniforme sau univoce şi cu **Arc** funcţii inverse multiforme sau multivoce din domeniul matematicii centrice (**MC**), atât cele de arc simplu cât şi cele de arc multiplu sau multivoce.

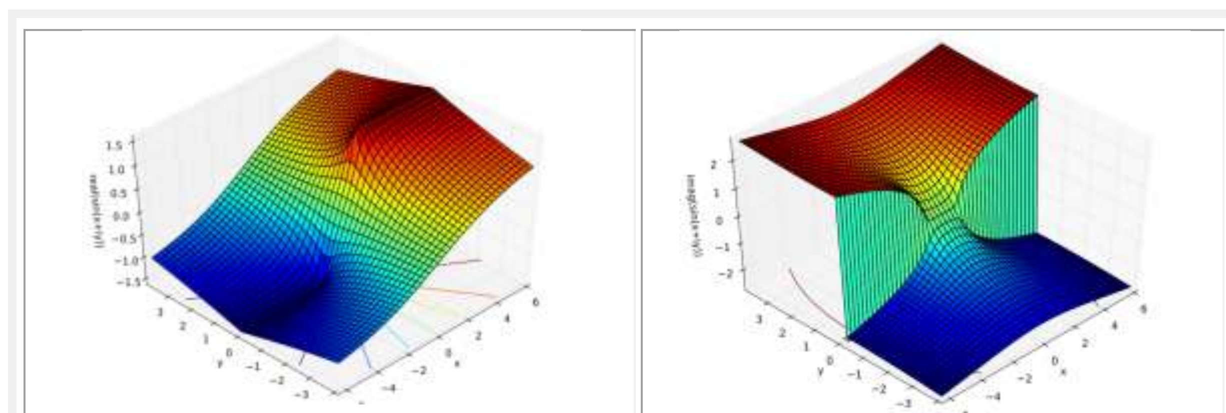
Astfel, Arccosz = 2kπ ± arccosz şi $\text{Arcsinz} = \begin{cases} 2k\pi + arcsinz \\ (2k+1)\pi - arcsinz \end{cases}$,

cu notaţiile recomandate în **Nicolescu, L.J**. şi **Stoka M.I**. “**MATEMATICI PENTRU INGINERI**”, Ed.Tehnică, 1969, pag. 130-131.

Aceste notaţii **convenţionale** sunt ***inverse*** celor din unele scrieri de specialitate din literatura germană, cum este **KLEINE ENZYKLOPÄDIE MATHEMATIK**, VEB Verlag Enzyklopädie, Leipzig, 1968, pag. 279, ca şi a celei din literatura engleză, “**MATHEMATICS AT A GLANCE**” după cari a fost tradusă lucrarea “**MICĂ ENCICLOPEDIE MATEMATICĂ**”, Ed.Tehnică, Buc. 1980, pag. 279. Dacă nu cumva în **figura 10.1.20** explicativă, din această lucrare, s-a strecurat o greşală, deoarece acolo notaţiile sunt inverse decât cele din **figura** noastră **25.1,c** stânga ◄.

Funcţia circulară / trigonometrica directă **centrică** **cosinus**, restricţionată la intervalul X ∈ [0, π], adică f : [0, π] → [-1, +1], f(x) = y = cosx este inversabilă şi admite ca **inversă**, notată **arccos** (arccosinus) , pe g = f^{-1} : [−1, + 1] → [0, π]], g = f^{-1} (y) = **x = arccosy**, cu graficul din **figura 25.1,a** ◄şi inversele **arccosx** şi arcsinx în **figura 25.2** ◄,iar in dreapta ►**coqθ** şi **arccoqθ**, precum şi funcţiile cvadrilobe **siqθ** şi **arcsiqθ.** inversabilă şi admite ca **inversă**, notată Arcsinus, pe g = f^{-1} :[−1, + 1] → [$-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$], g = f^{-1} (y) = **x = Arcsiny**, cu graficul din **figura 25.1,c** dreapta ►.

Plot[{t, Cos[t], **ArcCos[t]**, Pi, 0,1, −1}, {t, −1, Pi}, PlotStyle → Thick, AspectRatio → Automatic]	Plot[{ Sin[t],t,Pi/2, -Pi/2,1,-1,**ArcSin[t]}**,{t,-Pi/2,Pi/2}, PlotStyle→Thick, AspectRatio→Automatic]
arccosx; +1; 0; π; -1; Y ∈ [-1, +1]; X∈ [0, π]	arcsinx; +1; -1; −π/2; π/2; Y ∈ [-1, +1]; X∈ [−π/2, +π/2]
Fig.25.1,a Graficele funcţiei directe **cosinus** şi a determinării principale a inverseiei ei centrice univoce **arccosθ**	**Fig.25.1,b** Graficele funcţiei directe **sinus** şi a determinării principale a inverseir ei centrice univoce **arcsinθ**
π; Arcsinx; π/2; arccosx; arcsinx; 0; O (0, 0); O (0, 0); - π/2; Arccosx; Arcsinx	10; 5; - 10; - 5; 5; 10; 5; 10
Fig. 25.1,c Graficele funcţiilor directe cosinus şi sinus centrice şi a inverselor lor centrice multivoce **Arccosθ** şi **Arcsinθ** în stânga ◄şi, în dreapta ▼, sunt prezentate **FCC** tangentă **Voinoiu tanv(x)** şi $tanv^{-1}(x)$ = **inv.**tanv(x) ca funcţii multivoce **Arctanv(x)**	



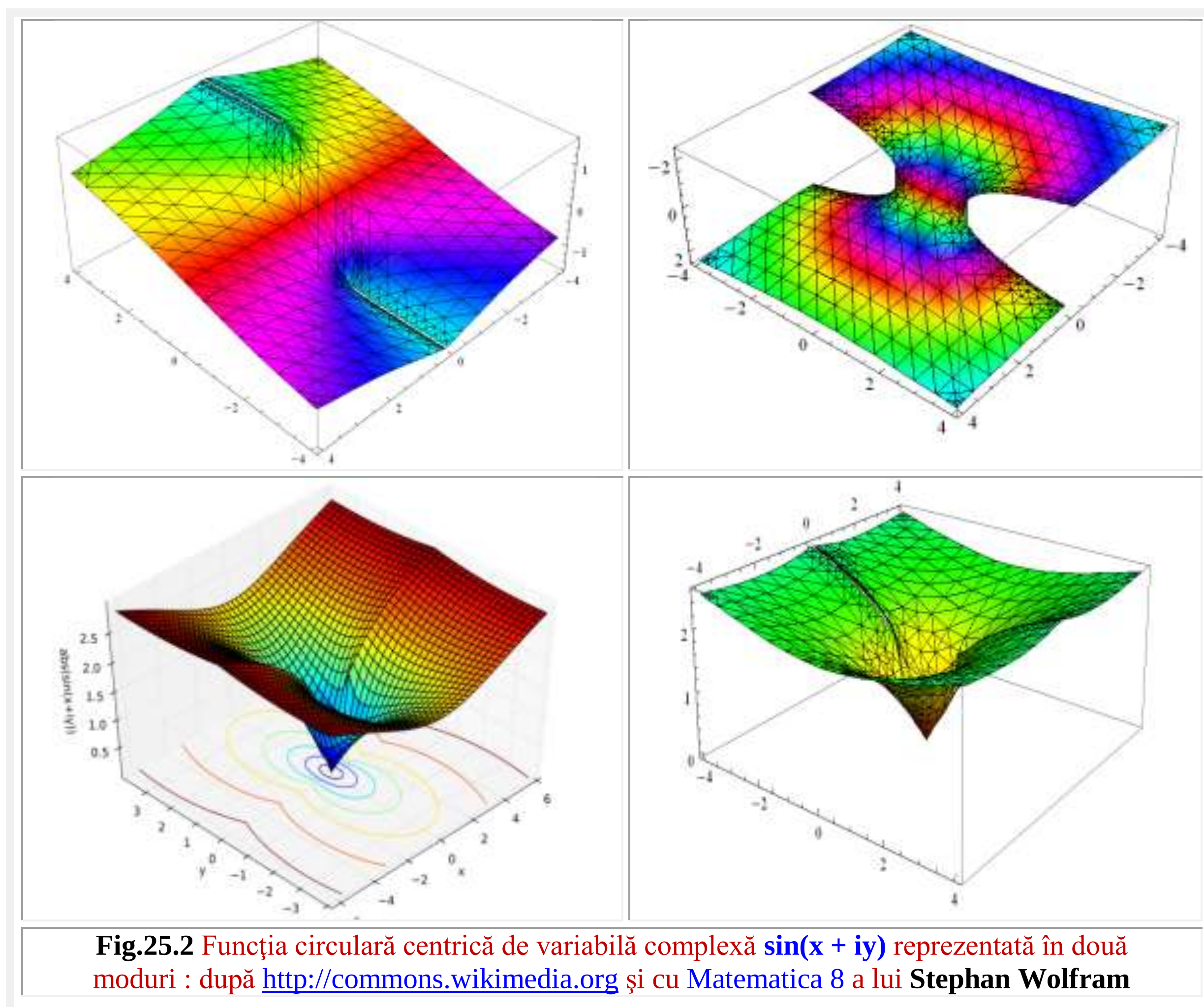


Fig.25.2 Funcţia circulară centrică de variabilă complexă **sin(x + iy)** reprezentată în două moduri : după http://commons.wikimedia.org şi cu Matematica 8 a lui **Stephan Wolfram**

Oricare funcţie poate fi de variabilă reală sau de variabilă complexă z = x + i.y, care au şi ele inversele lor, evident, tot de variabilă complexă.

25.2 INTRODUCERE.

Denumirea de ***arcfuncţie*** (arccosx, **arc**sinx, **Arc**tanx, **Arc**cotx etc.) provine din limba latină. *Arcus cuius sinus x est* înseamnă ***arcul al cărui sinus este egal cu x***.

Deoarece funcţiile trigonometrice / circulare directe sunt funcţii de arc, din însăşi denumirea funcţiei **Arc** / **arc** rezultă că ea este inversa funcţiei directe.

Ca urmare, ecuaţiile parametrice ale funcţiei directe **sinx** sunt

(1) $\begin{cases} x = x \\ y = \sin x \end{cases}$, → **sinx**, sin t = z

iar a inversei ei, **arcsin x**, pentru x ∈ [0, π] şi Arcsinx pe toată axa reala x este

(2) $\begin{cases} x = \sin x \\ y = x \end{cases}$ → **arcsinx = sin^{-1}x,** t = Arcsin z = $(-1)^k$ arcsin z + kπ.

(2’) Arcsin z = - i.Arcsh iz

Pe cât de simplu se pot obţine graficele funcţiilor inverse, în coordonate parametrice, pe atât de complicat se pot obţine expresiile lor analitice, deoarece este necasar să se rezolve unele ecuaţii algebrice neliniare. Pentru a căror soluţionare printr-o metodă exactă, numerică (!), extrem de simplă şi rapidă vă recomandăm “***Metoda determinarii succesive a cifrelor consecutive ale unui număr***” soluţie din “**MATEMATICA ATOMICA**” **www.cartiaz.ro**), dar numai pentru soluţii numerice.

Astfel, dacă expresia funcţiei directe sin x este

(3) $y(x) = sinx = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + \cdots$ şi nu este chiar simplă !

Pentru determinarea expresiei funcţiei inverse, este necesar să se rezolve ecuaţia neliniara

(4) $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + \cdots - y = 0$ → x(y) = ?

Soluţia ei este, după cum se ştie

(5) $\mathrm{x(y)} = \mathrm{arcsiny} = \mathrm{y} + \frac{1}{2.3}\mathrm{y}^3 + \frac{1.3}{2.4.5}\mathrm{y}^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\mathrm{y}^7 + \ldots \quad |y| < \frac{\pi}{2}$

Dar soluţia poate fi dată şi în serii hipergeometrice astfel

(6) $arcsinz = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz = \int_0^x 1F_0\left(\frac{1}{2};;\ z^2\right) dz = z_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) \Big|_0^x = x_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)$

în care **seria $_1F_0$** = $_1F_0$ (a; ; z) = $(1 - z)^{-a}$ = $\frac{1}{(1-z)}$ a cărei ecuaţie diferenţială este $\frac{d}{dz}w = (z\frac{d}{dz})w$ sau $(1 - z)\frac{dw}{dz} = aw$ şi a cărei soluţie este w = k$(1 - z)^{-a}$ este un caz particular al seriilor hipergeomertrice.

Se mai ştie că o legătura între funcţia inversă **Arcsin** şi logaritmul natural **ln** este

(6') Arcsinx = - i ln (ix + $\sqrt{1 - x^2}$).

În privinţa determinării analitice a inversei unei funcţii există şi excepţii, adică funcţii a căror inverse se determină imediat.

O astfel de funcţie este **FSM-CE beta excentrică** sau **β(θ)** = bexθ, de variabilă excentrică θ, una din cele mai importante **funcţii supermatematice**, a cărei expresie este

(7) y (θ) = β(θ) = θ – α(θ) = bexθ = arcsin[s.sin(θ – ε)]

astfel că rezolvarea excuaţiei

(8) y (θ) – arcsin[s.sin(θ – ε)] = 0 , sau y (θ) = arcsin[s.sin(θ – ε)]

este simplă. Scriind

(9) siny(θ) = sin{arcsin[s.sin(θ – ε)]} → siny(θ) = s.sin(θ – ε)

(10) (θ–ε) = arcsin $\frac{siny}{s}$ → θ(y) = arcsin $\frac{siny}{s}$ + ε ,

care este inversa lui bexθ, adică

(11) **inv**bexθ = $\mathrm{bex}^{(-1)}\theta$ = arcsin $\frac{siny}{s}$ + ε = **Arc**bexθ = **arc**bex ≠ arc(bexθ) = = arc[arcsin[s.sin(θ – ε)]], (dacă ***funcţiile clasice de arc*** **Arc**bexθ şi **arc**bex ar fi cunoscute, altele decât (10), dar nu sunt), ceea ce poate fi verificat în **figura 25.3,a** şi **25.3,b**.

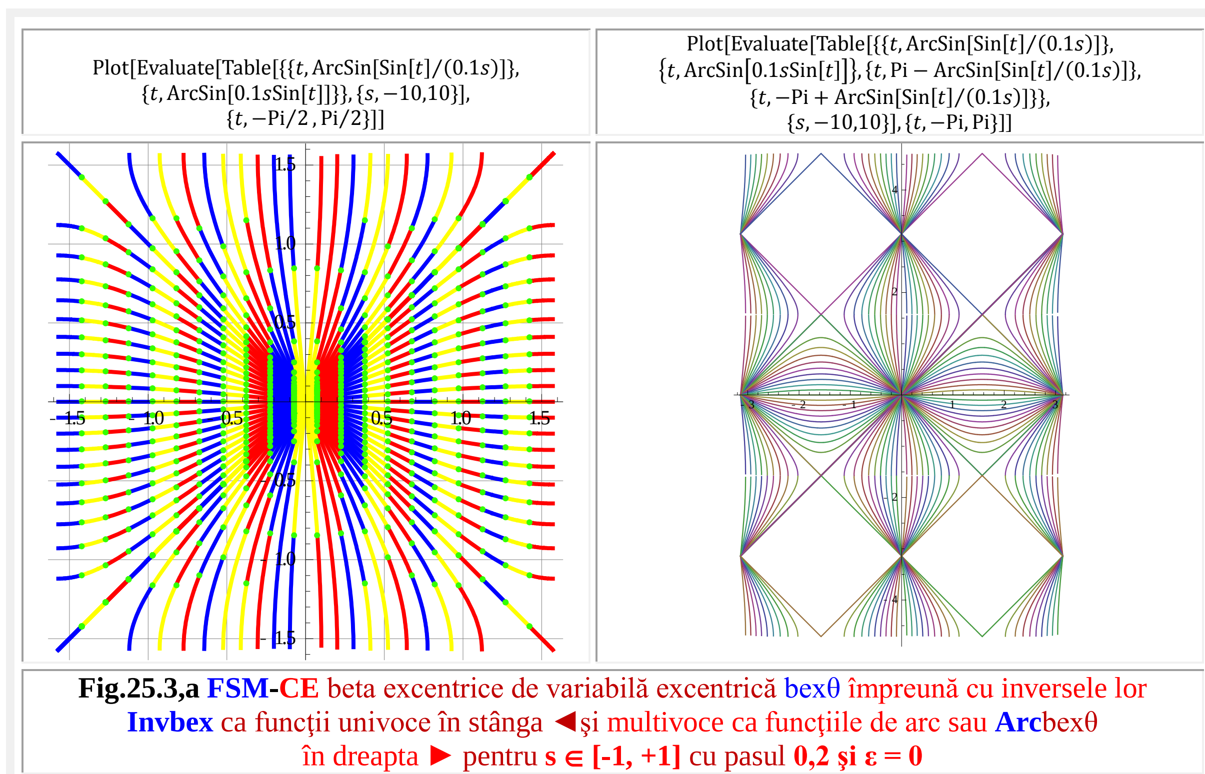


Fig.25.3,a FSM-CE beta excentrice de variabilă excentrică bexθ împreună cu inversele lor **Invbex** ca funcţii univoce în stânga ◄şi multivoce ca funcţiile de arc sau **Arc**bexθ în dreapta ► pentru **s ∈ [-1, +1]** cu pasul **0,2 şi ε = 0**

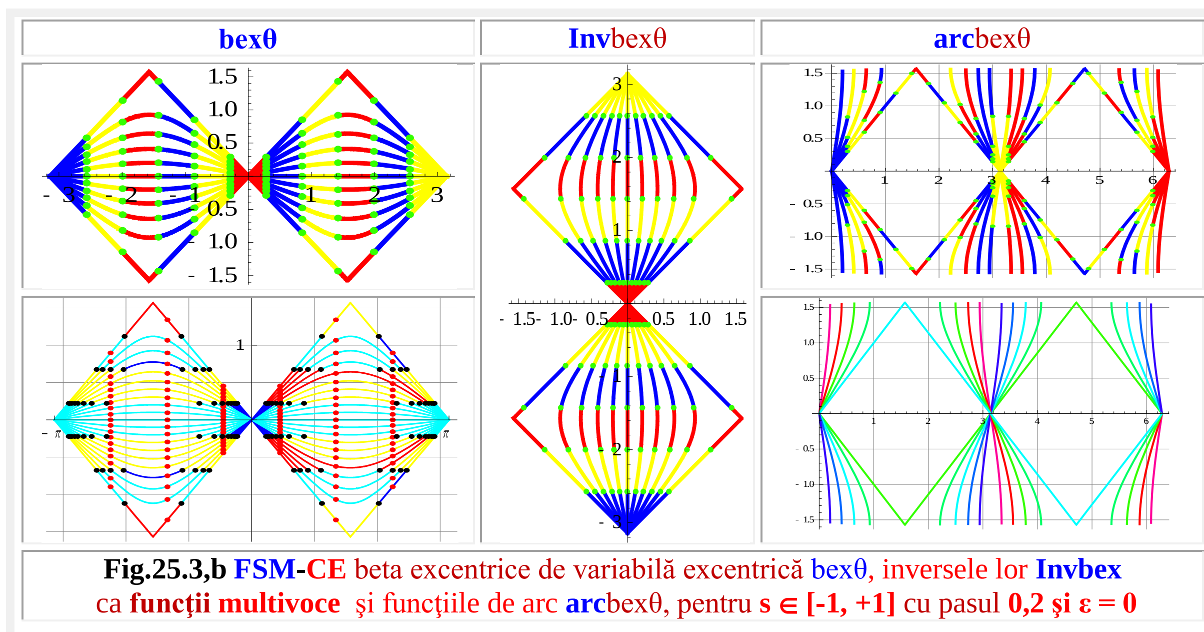
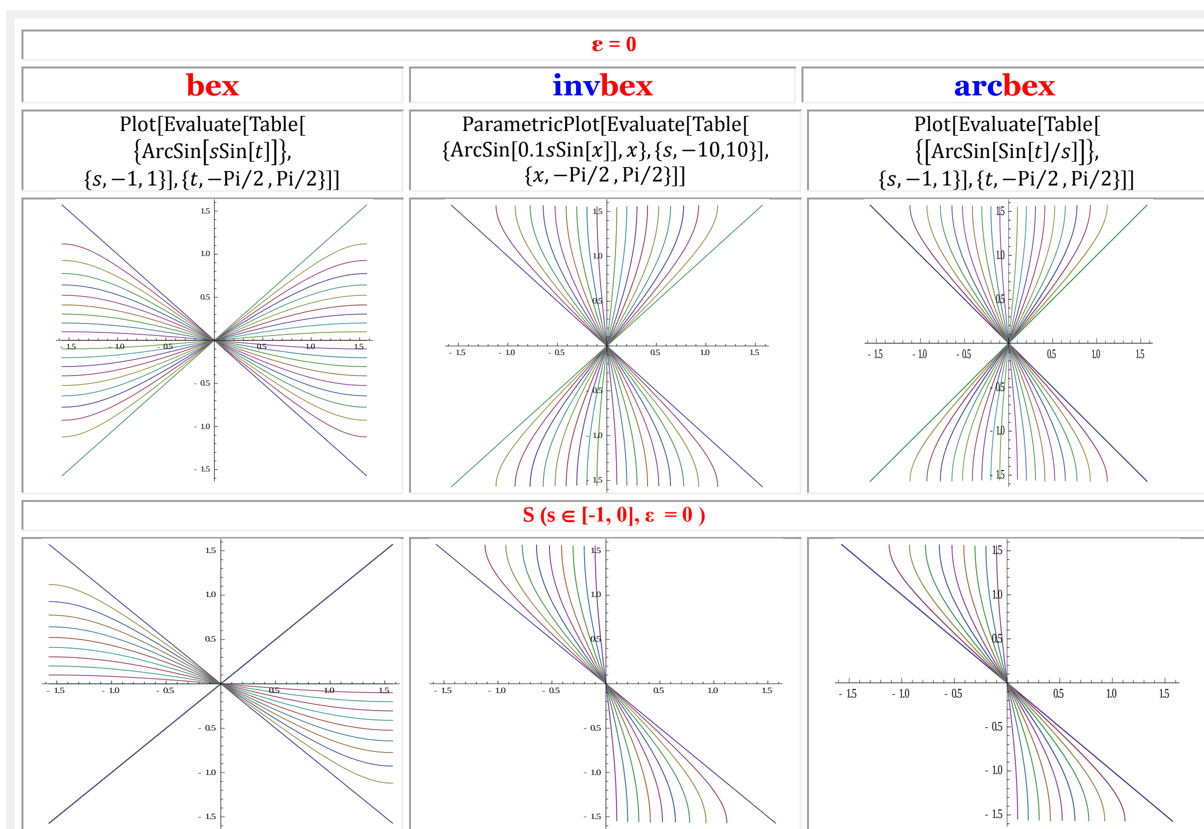


Fig.25.3,b FSM-CE beta excentrice de variabilă excentrică bexθ, inversele lor **Invbex** ca **funcţii multivoce** şi funcţiile de arc **arc**bexθ, pentru **s ∈ [-1, +1]** cu pasul **0,2 şi ε = 0**

De ce trebuie notată inversa lui bexθ cu **inv** sau **Inv** şi nu cu **arc** sau **Arc ?**

Pentru că **arc**bexθ ≠ **inv**bexθ ca şi **Arc**bexθ ≠ **Inv**bexθ aşa cum se poate observa din graficele din **figura 25.3,a**. Notaţiile cu majuscule (**Inv** şi **Arc**) corespund funcţiilor inverse multivoce, ca cele reprezentate în **figura 25.3,a►** şi **25.3,b**, iar cele univoce, notate **inv** şi **arc**, în **figurile 25.3,c** şi **25.3,d.** din **figurile 1,c**. Se observă facil că, inversele sunt simetrice funcţiilor, ceea ce corespunde definiţiei de inversă, iar arcul nu mai respectă această cerinţă, deoarece funcţia **arc** se calculeaza cu o serie în care, pentru cazul lui bexθ se înlocuieşte variabila **x ≡ θ** cu funcţia **β(θ) = arcsin[s.sin(θ − ε)]** în care → **S(s, ε)** este un excentru în planul cercului unitate.



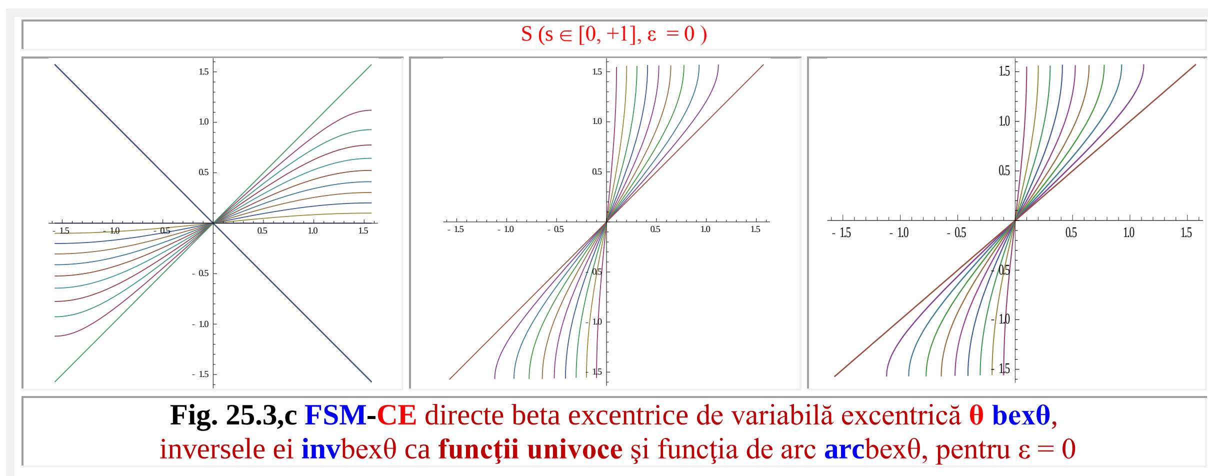


Fig. 25.3,c FSM-CE directe beta excentrice de variabilă excentrică **θ bexθ**, inversele ei **inv**bexθ ca **funcţii univoce** şi funcţia de arc **arc**bexθ, pentru ε = 0

ε = 1		
bexθ	**inv**bexθ	**arc**bexθ
Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[s. Sin[t − 1]], t}, {s, −1, 1}], {t, −π/2, π/2}],	ParametricPlot[Evaluate[Table[{{ArcSin[0.1sSin[x − 1]], x}, {x, x}}, {s, −10,10}], {x, −Pi/2 , Pi/2}	Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[Sin[x]/(0.1s)] + 1}, {s, −10,10}], {x, −Pi/2 , Pi/2}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, ArcSin[s. Sin[x − 1]]}, {ArcSin[s. Sin[x − 1]], x}}, {s, −1,1}], {x, −Pi/2 , Pi/2}	Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[0.1sSin[x − 1]], ArcSin[Sin[x]/(0.1s)] + 1}, {s, −10,10}], {x, −Pi/2 , Pi/2}

Fig. 25.3,d FSM-CE directă **bexθ**, beta excentrică de variabilă excentrică **θ**, inversa ei **inv**bexθ şi funcţia de arc **arc**bexθ, pentru **ε = 1**

În **figura 25.3,c** au fost reprezentate **FSM-CE** beta excentrice **bex** ◄ în stânga, precum şi inversele ei **inv**bexθ ▌în centru, iar funcţiile **arcbex** în extrema dreaptă ► numai ca **funcţii univoce**, în domeniul θ ∈ [$-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$].

În această figură au fost reprezentate funcţiile pentru un excentru **S** plasat pe axa Ox, adică de excentricitate unghiulară nulă (**ε = 0**) şi de excentricitate liniară numerică **s** în domeniul **s ∈ [-1, 1]** sus ▲, **s ∈ [-1, 0]** la mijloc ▬ şi **s ∈ [0, 1]** jos ▼.

FSM-CE beta excentrice **bex** a fost reprezentată pentru a se putea verifica / compara cu inversa ei şi cu cea de arc.

Situaţia este asemănătoare şi în domeniul complex: **FSM-CE** beta excentrice de variabilă complexă

(12) **bex** (x + i.y) = arcsin[s.sin(x + i.y)]

care are funcţia inversă

(13) $\begin{cases}\textbf{bex}\ (x + i.y)\\ \quad (x + i.y)\end{cases}$ → **inv**bex(x + i.y) = bex^{-1} (x + i.y) = arc**bex** (x + i.y) = arcsin($\frac{\sin(x + i.y)}{s}$ + ε)

reprezentate în **figura 25.3,b** şi a căror inverse clasice (***funcţii de arc clasice***) sunt necunoscute

(14) **invbex**(x+ i.y) = arcsin $\frac{\sin(x+i.y)}{s}$

Pentru sinx, de exemplu, din domeniul / intervalul x∈ [$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$], rezultă codomeniul lui y = sinx ∈ [− 1 + 1], iar pentru y = arcsinx, inversa lui sinx, rezultă domeniul de definiţie x ∈ [− 1, + 1] şi codomeniul funcţiei inverse y = arcsinx ∈ [$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$] (**Fig.25.4,b**).

Mai rezultă, totodată, că funcţiile directă şi inversă sunt simetrice faţă de prima bisectoare şi, în consecinţă, sunt inverse una alteia (**Fig.25.3,f**).

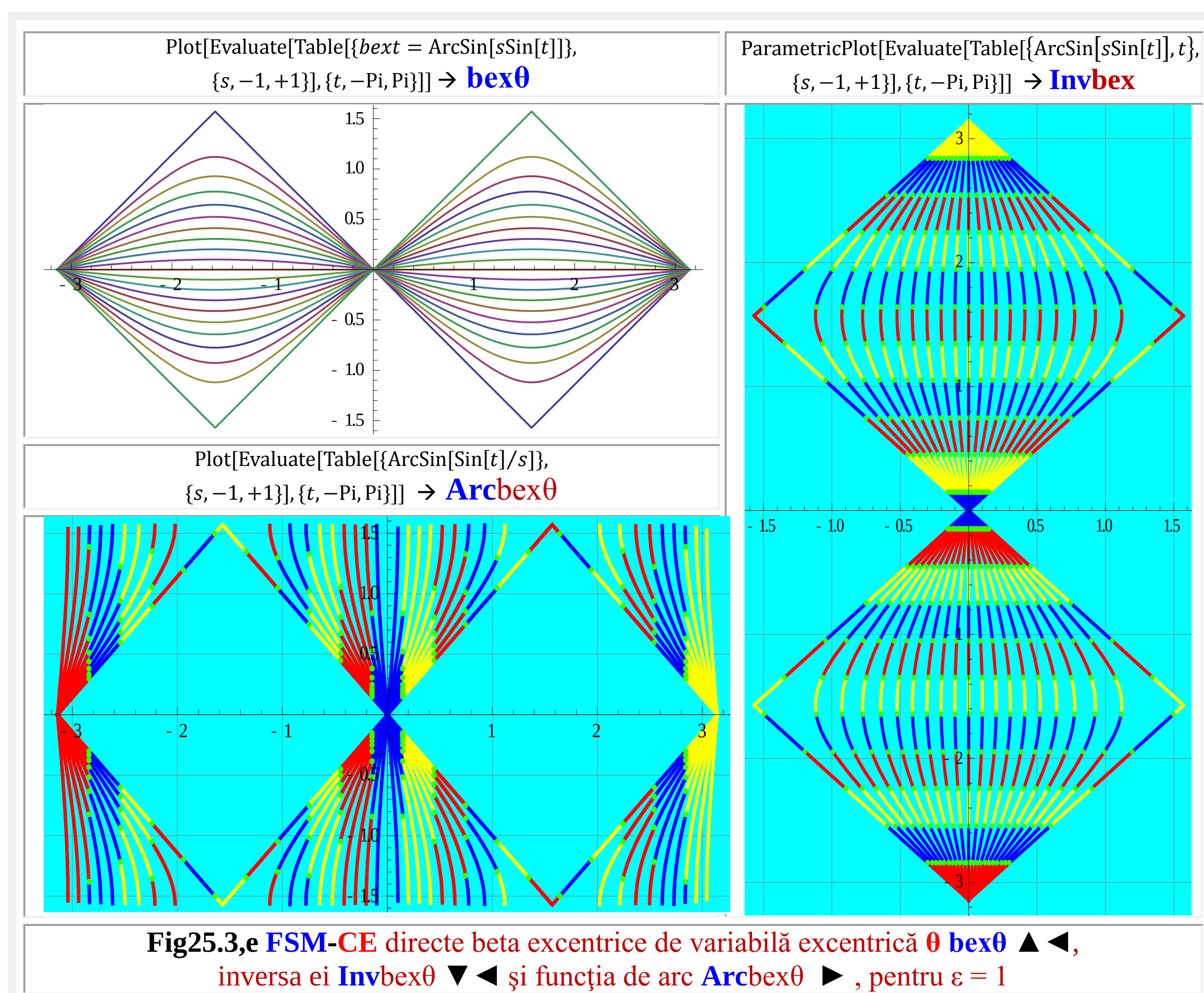


Fig25.3,e FSM-CE directe beta excentrice de variabilă excentrică **θ bexθ** ▲◄, inversa ei **Inv**bexθ ▼◄ şi funcţia de arc **Arc**bexθ ► , pentru ε = 1

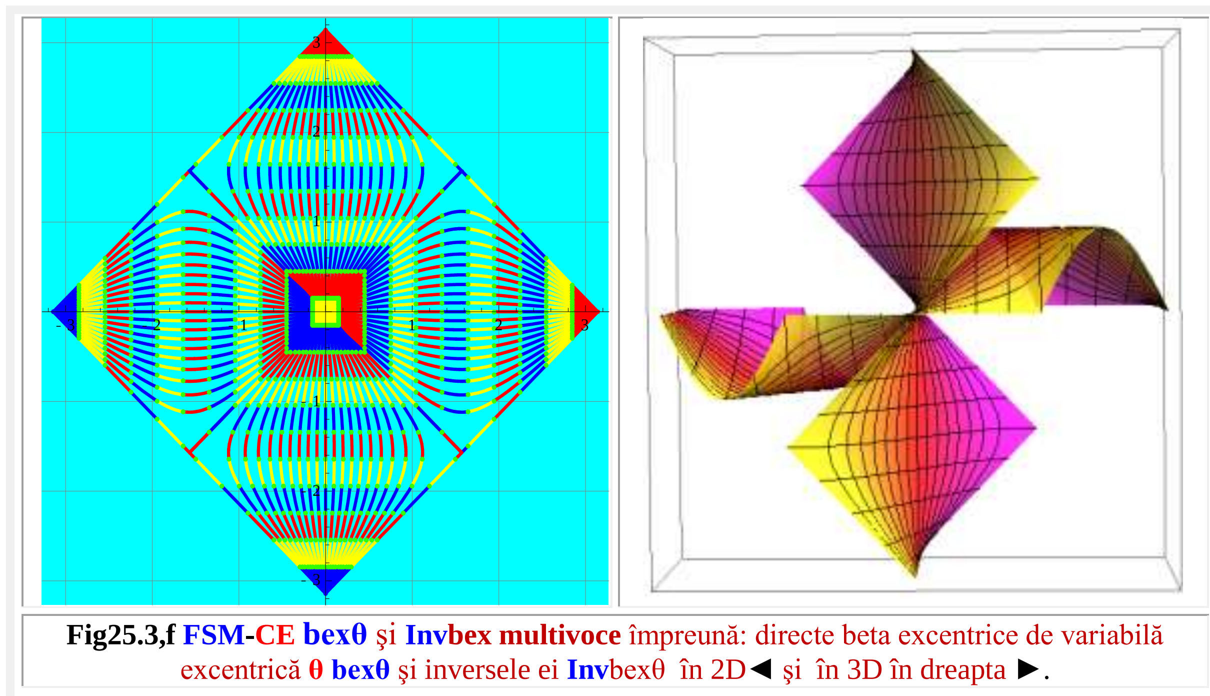


Fig25.3,f FSM-CE bexθ şi **Invbex multivoce** împreună: directe beta excentrice de variabilă excentrică **θ bexθ** şi inversele ei **Inv**bexθ în 2D◄ şi în 3D în dreapta ►.

ParametricPlot3D[{{t, ArcSin[0.1sSin[t]],0.1s}}, {s, −10,10}, {t, −Pi/2 , Pi/2}]

ParametricPlot3D[{{ArcSin[0.1sSin[t]], t, 0.1s}}, {s, −10,10}, {t, −Pi/2 , Pi/2}]

ParametricPlot3D[{{ArcSin[0.1sSin[t]], t, 0.1s}, {t, ArcSin[0.1sSin[t]],0.1s}}, {s, −10,10}, {t, −Pi/2 , Pi/2}]

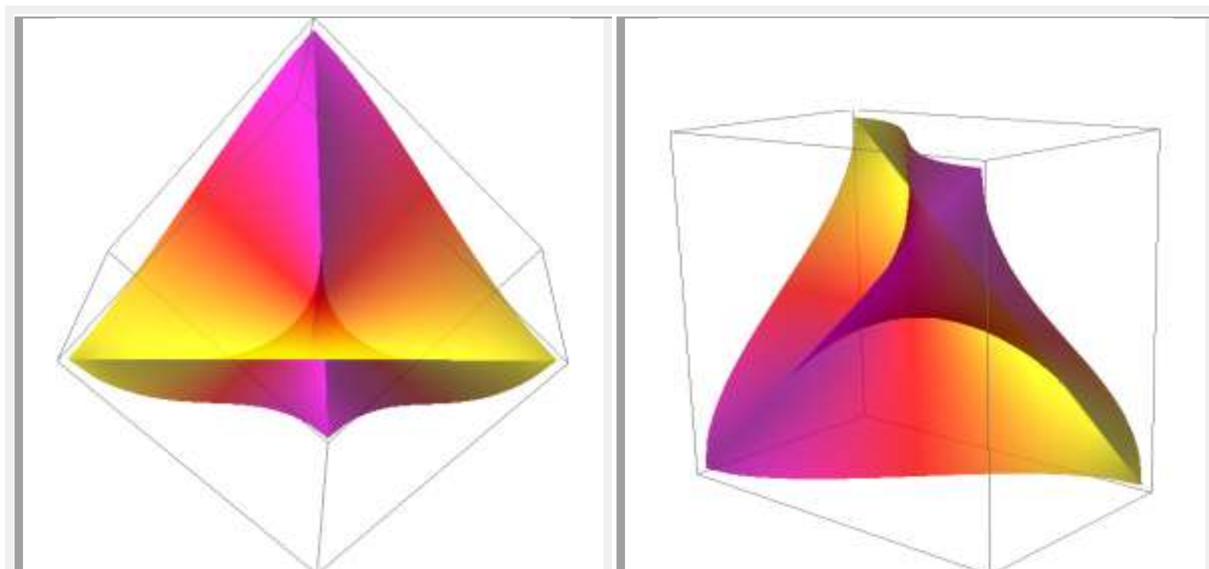


Fig25.3,g FSM-CE bexθ şi **Invbex univoce** împreună: directe beta excentrice de variabilă excentrică **θ bexθ** ▲◄şi inversele ei **Inv**bexθ ▲► în 3D (în 4 vederi)

Plot3D[Re[ArcSin[sSin[x + Is]]], {x, −2Pi, 2Pi}, {s, −1,1}]	Plot3D[Re[ArcSin[Sin[x + Is]/s]], {x, −Pi/2 , Pi/2}, {s, −1,1}
Re[ArcSin[sSin[x + Is]]]]	Re[ArcSin[Sin[x + Is]/s]]
Im[ArcSin[sSin[x + Is]]]]	Im[ArcSin[Sin[x + Is]/s]]
Abs[ArcSin[sSin[x + Is]]]]	Abs[ArcSin[Sin[x + Is]/s]]

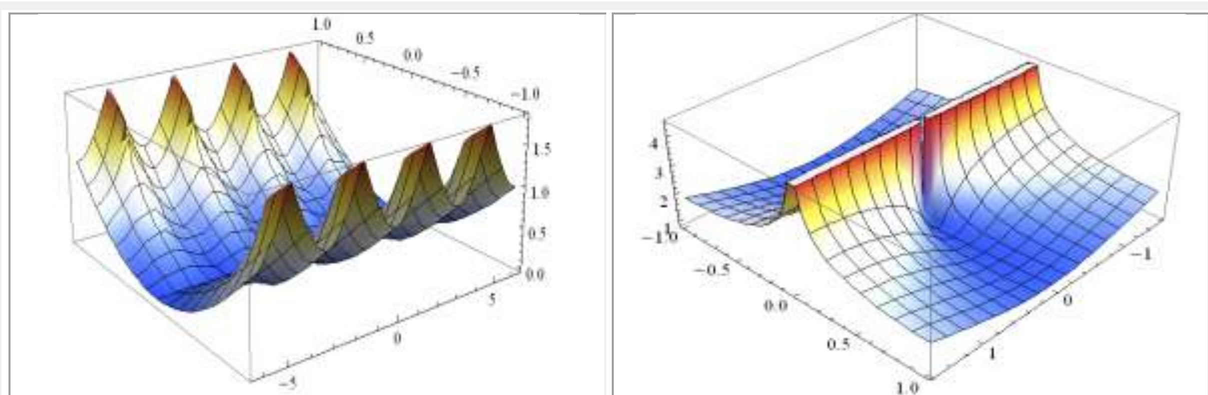


Fig.25.4,a FSM-CE directe **beta excentrice** de variabilă excentrică complexa **bexθ** şi inversele lor **inv**bex (x = i.y) de s = ∈ [-1, 1] şi ε = 0

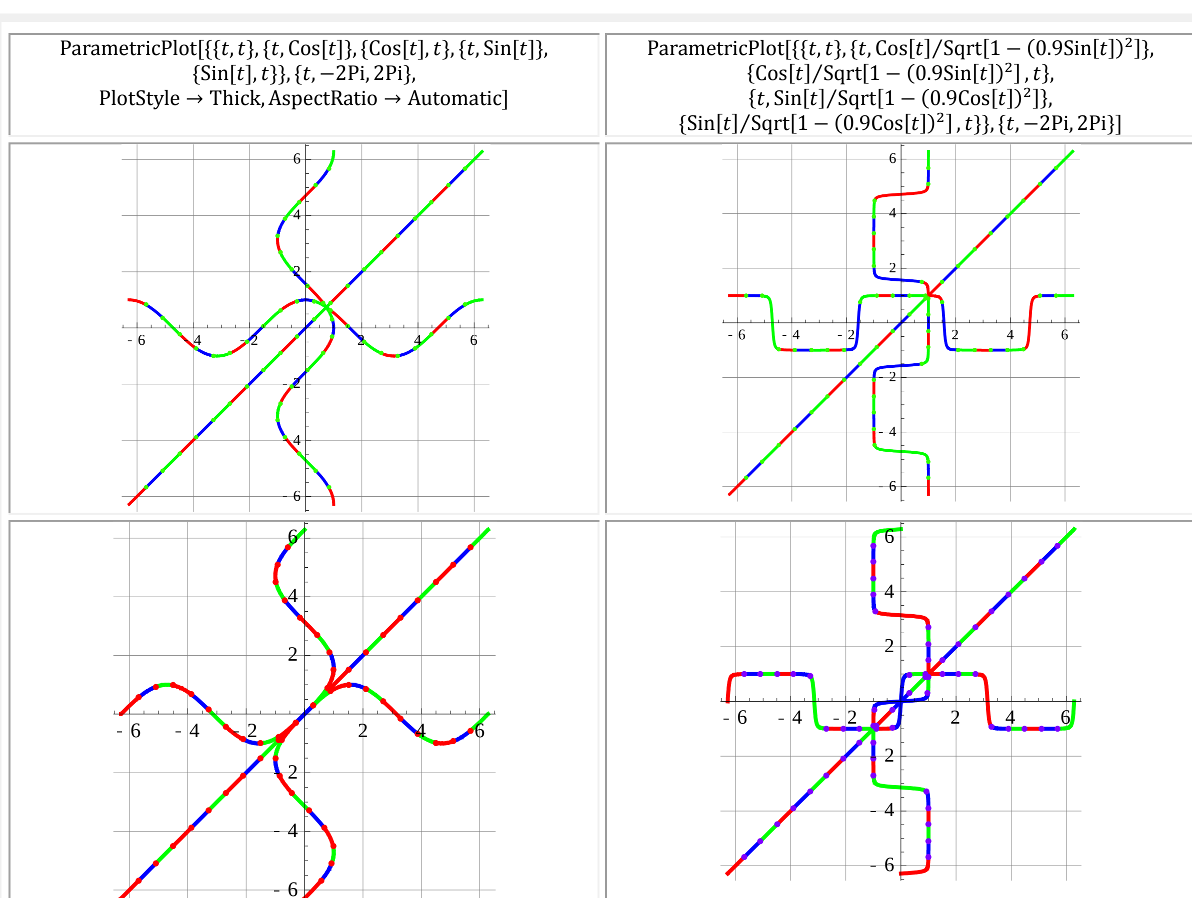


Fig.25.4.b Graficele funcţiilor **cosθ, sinθ** şi **tanθ** şi a funcţiilor **Arccosθ Arcsinθ** şi **Arctanθ** în stânga ◄precum şi funcţiile supermatematice cvadrilobe cosinus **coqθ** sinus **siqθ** şi cvadrilobe ca şi funcţiile lor inverse corespondente **Invcoqθ** şi **Invsiqθ** de excentricitate liniară numerică **s = 0,998 în dreapta►**

FSM-CE directe beta excentrice de variabilă reală şi inversele lor au fost reprezentate împreună în 3D în 4 vederi în **figura 25.3,g** doar pentru a sublinia frumuseţea obiectelor astfel obţinute.

S-a insistat mult asupra **FSM-CE** directe beta excentrice de variabilă reală şi a inverselor lor deoarece ele stau la baza edificiului **supermatematicii** (**SM**).

Aceleaşi funcţii, dar de variabilă complexă, sunt prezentate în **figura 25.4,a,** iar în **figura 25.4,b** sunt prezentate funcţiilor matematice centrice directe **sin(x + i.y)** de variabilă complexă

În figura **4,a** sunt prezentate sus▲ funcţiile directe şi inverse **arccosx** şi **arcsinx** şi în stânga jos◄▼ funcţiile **arccos** şi **Arccos,** precum şi **arcsin** şi **Arcvsin,** iar în dreaptă jos ►▼sunt prezentate FCC tangenta **Voinoiu** directe si inverse.

Pentru comparaţie, în **figura 25.4,b** sunt prezentate inversele **FSM** cvadrilobe cosinus **coqx** şi sinus **siqx** de excentru **S**(0,98; 0), în care excentricitatea liniară numerică este **s = 0,98**, iar cea unghiulară **ε = 0**.

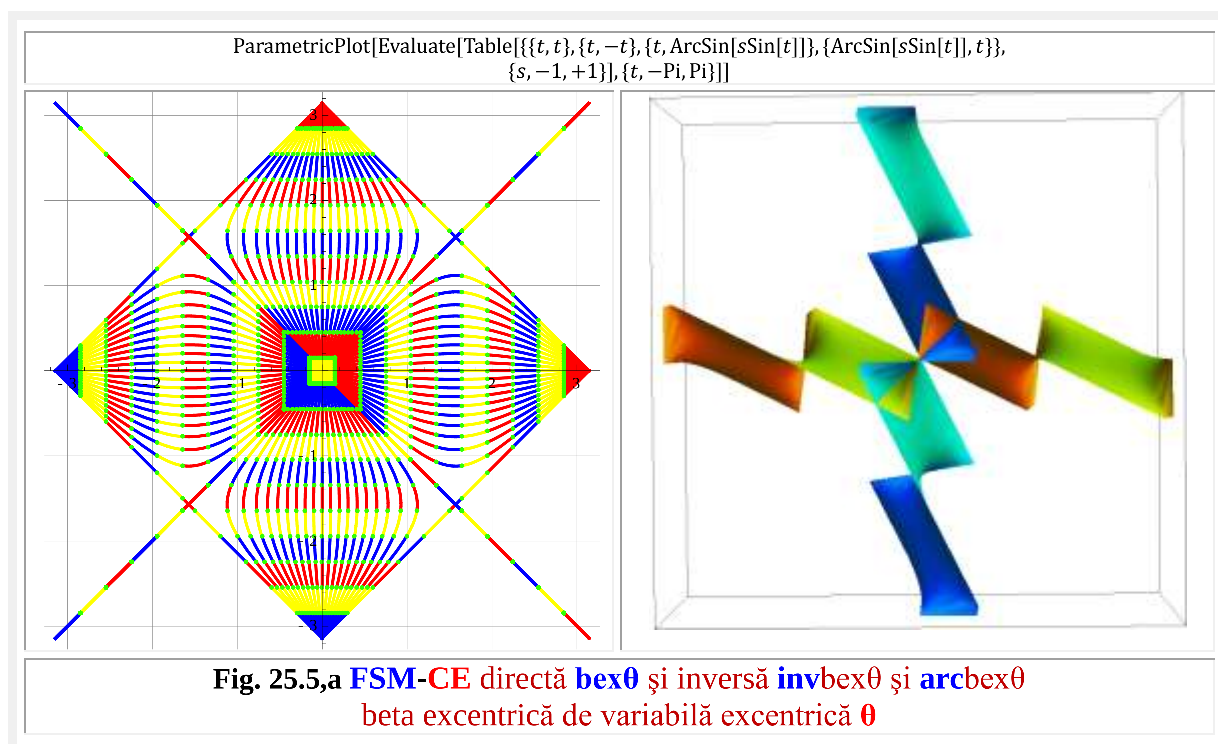
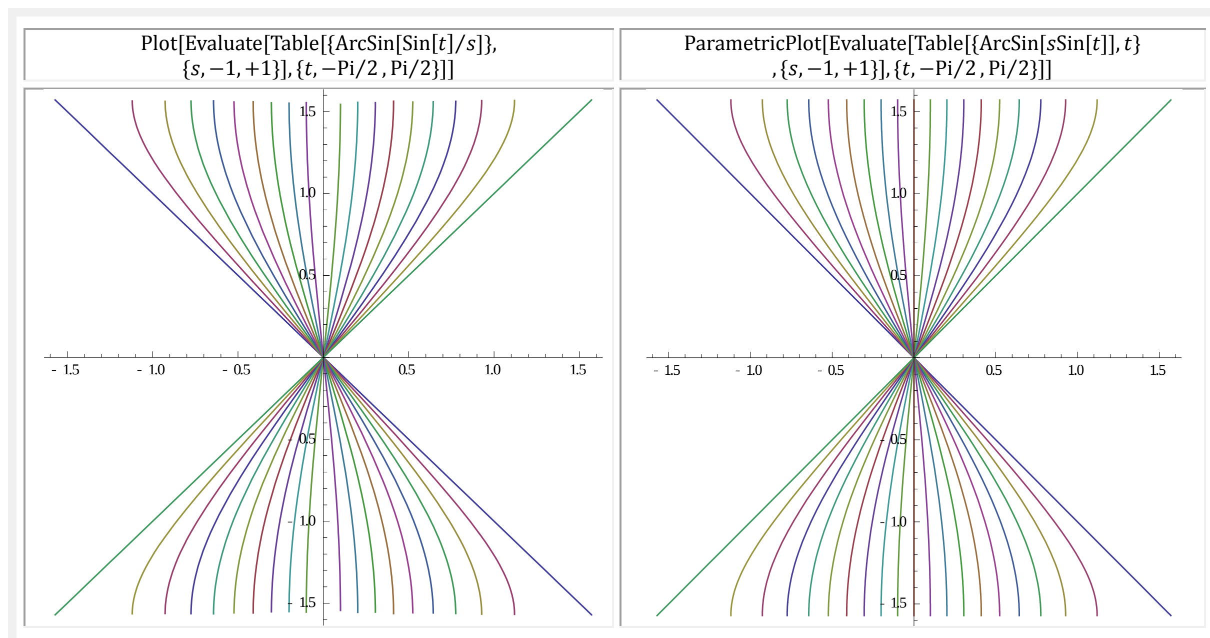


Fig. 25.5,a FSM-CE directă **bexθ** şi inversă **inv**bexθ şi **arc**bexθ
beta excentrică de variabilă excentrică **θ**



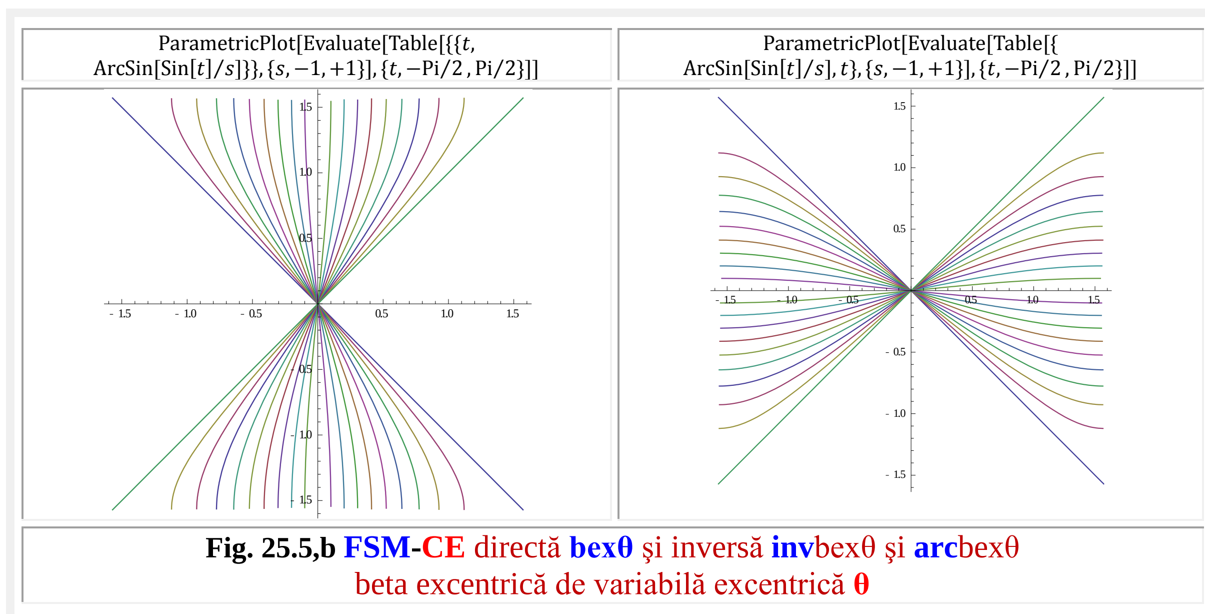


Fig. 25.5,b FSM-CE directă **bexθ** şi inversă **inv**bexθ şi **arc**bexθ
beta excentrică de variabilă excentrică **θ**

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{t, ArcSin[sSin[t]]}, {ArcSin[sSin[t]], t}},], {t, −2Pi, 2Pi}]]

s∈[-1 0]◄ ►s∈ [0,1

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{t, t}, {t, ArcSin[sSin[t]]}, {ArcSin[sSin[t]], t}}, {s, −1,1}], {t, −2Pi, 2Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{t, t}, {t, −ArcSin[sSin[t]]}, {t − ArcSin[sSin[t]], t}}, {s, −1, 1}], {t, −2Pi, 2Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{t, t}, {t, −ArcSin[0.1sSin[t]]}, {t − ArcSin[0.1sSin[t]], t}}, { t, −2Pi, 2Pi}]]

s∈[-1 0]◄ ►s∈ [0,1

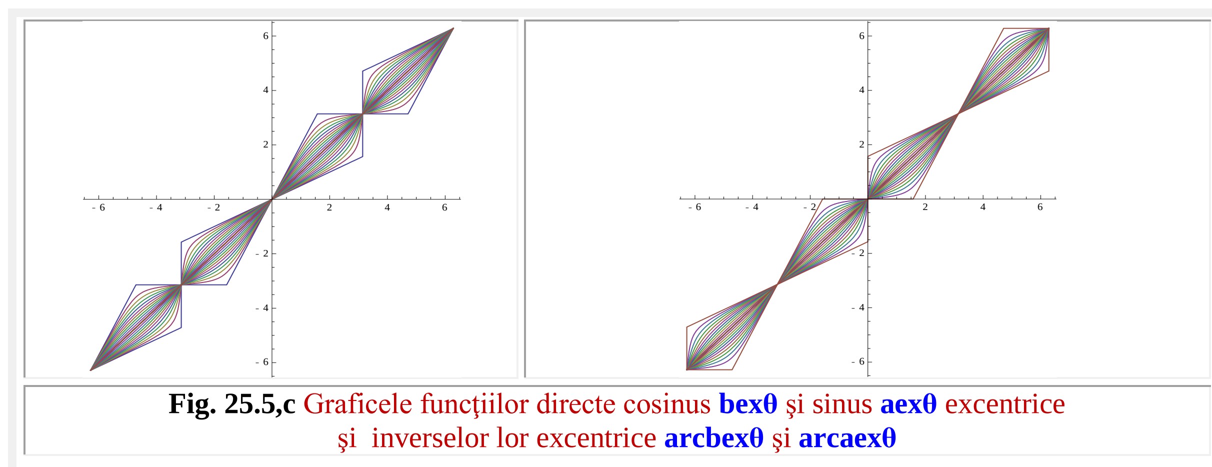


Fig. 25.5,c Graficele funcţiilor directe cosinus **bexθ** şi sinus **aexθ** excentrice şi inverselor lor excentrice **arcbexθ** şi **arcaexθ**

25.3 FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE (FSM-CEI) DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ

Funcţiile circulare centrice directe (**FCC**) au fost introduse în matematică de elveţianul **Leonhard Euler** (1707-1783), care a constatat că funcţiile trigonometrice pot fi reprezentate ca intersecţie a unui cerc de rază R = 1 - trigonometric sau unitate **CU**(O,1) – cu o semidreaptă turnantă în jurul originii O(0, 0) a unui reper cartezian drept.

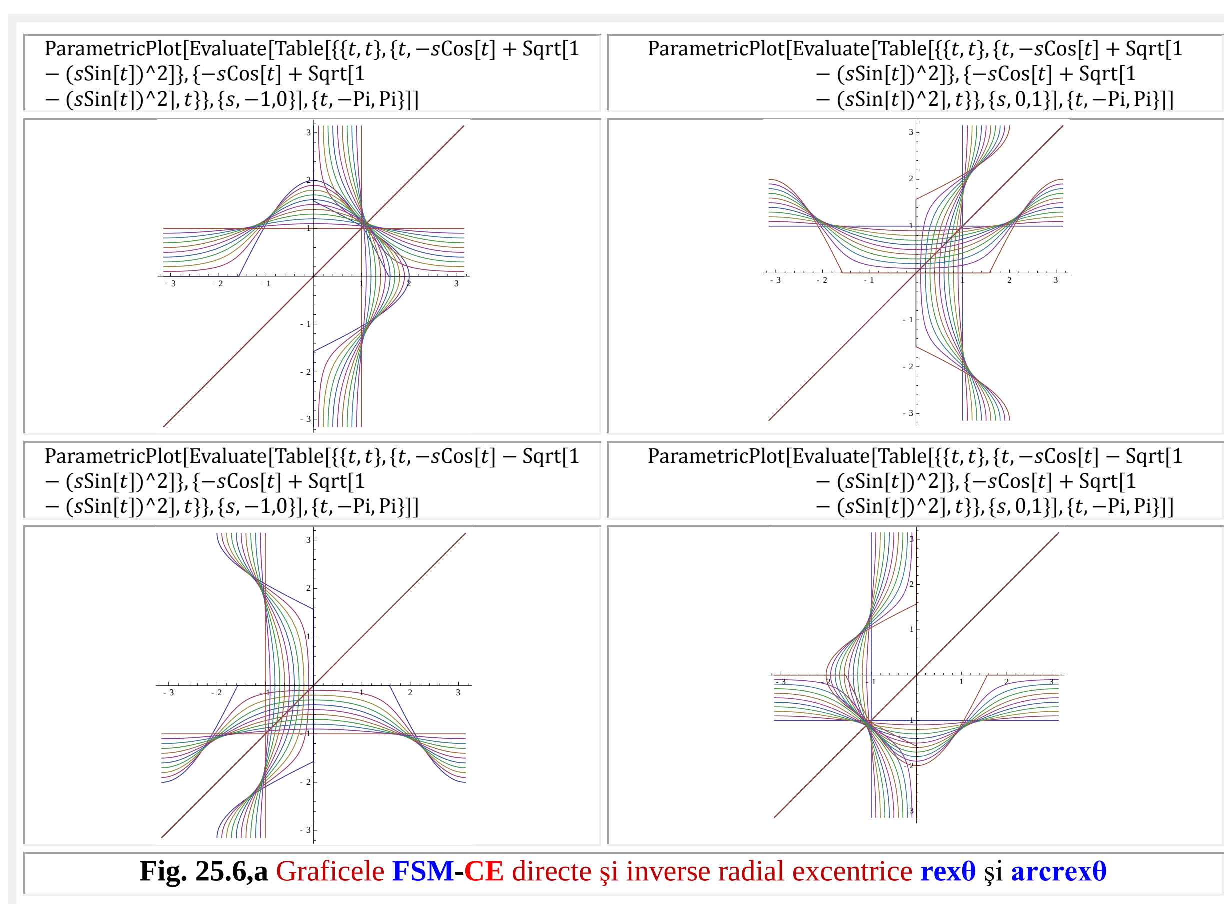


Fig. 25.6,a Graficele **FSM-CE** directe şi inverse radial excentrice **rexθ** şi **arcrexθ**

Tot **Euler** este acela care a definit funcţia exponenţială pentru numere complexe şi a făcut legătura dintre aceasta şi funcţiile trigonometrice prin celebra formulă

(24.1) $e^{i\alpha} = cos\alpha + i.sin\alpha$

funcţie exponenţială care, acum, este funcţia **radial centrică** $\boldsymbol{rad\alpha}$, un fazor de la O(0, 0) la punctul curent **M**(x = cos$\boldsymbol{\alpha}$, y = sin$\boldsymbol{\alpha}$) de pe **CU**(O, 1) [23], fazor turnant în jurul centrului şi al originii O(0,0)

(24.2) $$\begin{cases} \boldsymbol{e^{i\alpha} = rad\alpha} \\ \boldsymbol{\frac{d}{d\alpha}(rad\alpha) = i.e^{i\alpha} = der\alpha} \end{cases}$$

şi a cărui derivată este fazorul **derivată centrică** $\boldsymbol{der\alpha}$**,** fazor tangent în punctul curent **M** la **CU**.

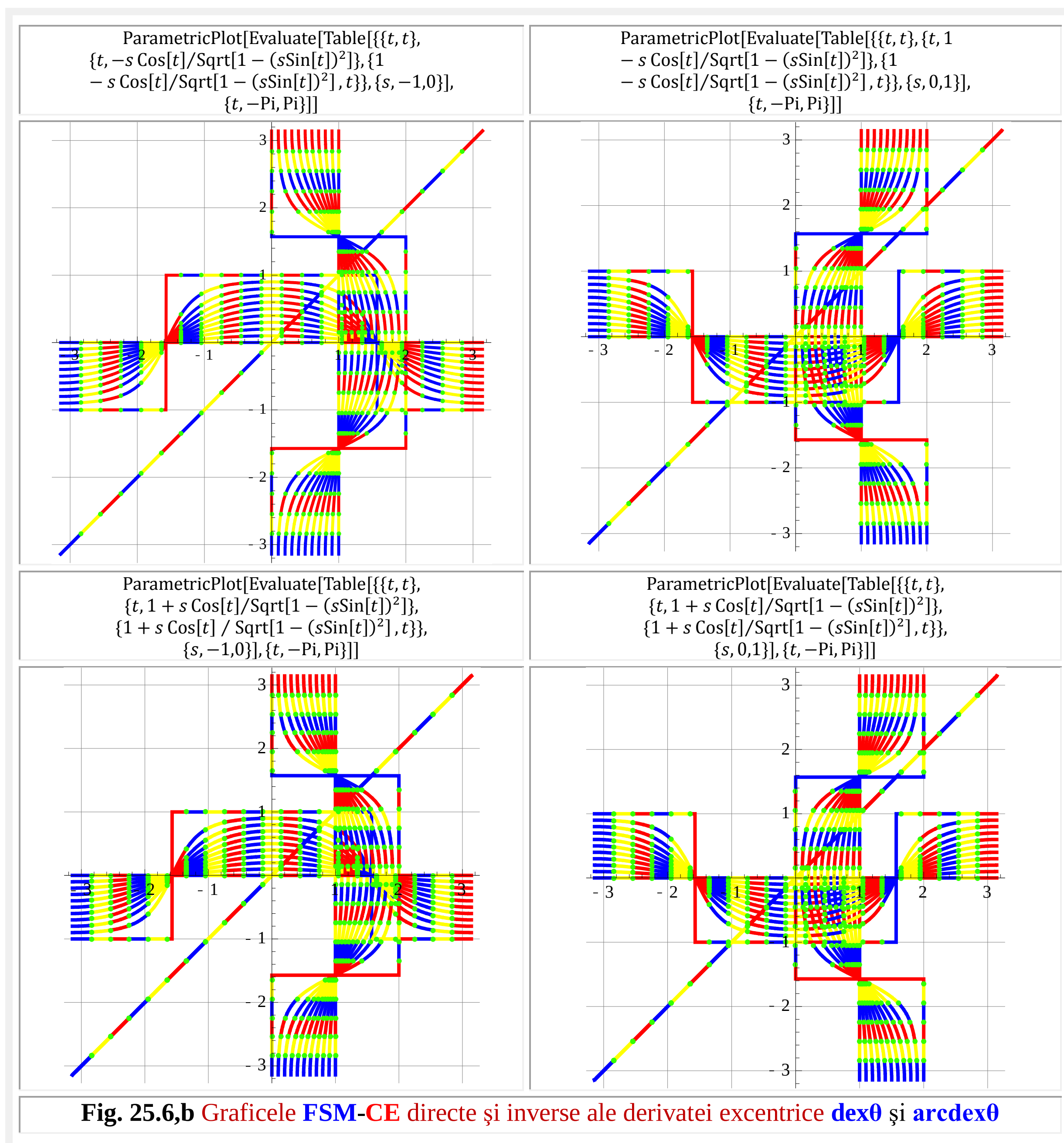


Fig. 25.6,b Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale derivatei excentrice **dexθ** şi **arcdexθ**

Funcţiile sau fazorii $\boldsymbol{rad\alpha}$ şi $\boldsymbol{der\alpha}$ sunt echivalenţii vectorilor **centrici** $\vec{R}(\boldsymbol{\alpha}) = \overrightarrow{OP}(\boldsymbol{\alpha})$ - $|\vec{R}(\boldsymbol{\alpha})| = |\boldsymbol{rad\alpha}| = 1$- şi a derivatei acestuia $\vec{V}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{d}{d\alpha}\vec{R}(\boldsymbol{\alpha})$, tangent la CU în **M**, $|\vec{V}(\boldsymbol{\alpha})| = |\boldsymbol{der\alpha}| = 1$ şi au, evident, modulele lor egale cu unitatea.

Din cele expuse anterior, se poate deduce facil că, la definirea funcţiilor trigonometrice ca funcţii circulare, **Euler** a ales **trei puncte confundate**: centrul cercului **C**(0,0),originea reperului **O**(0,0) şi

polul **P**(0,0) al semidreptei centrice **D**$^+$ ale cărei intersecţie cu **CU,** punctul M**(x, y),** dau funcţiile circulare considerate elementare dar şi **unice** **x = cosα** şi **y = sinα**.

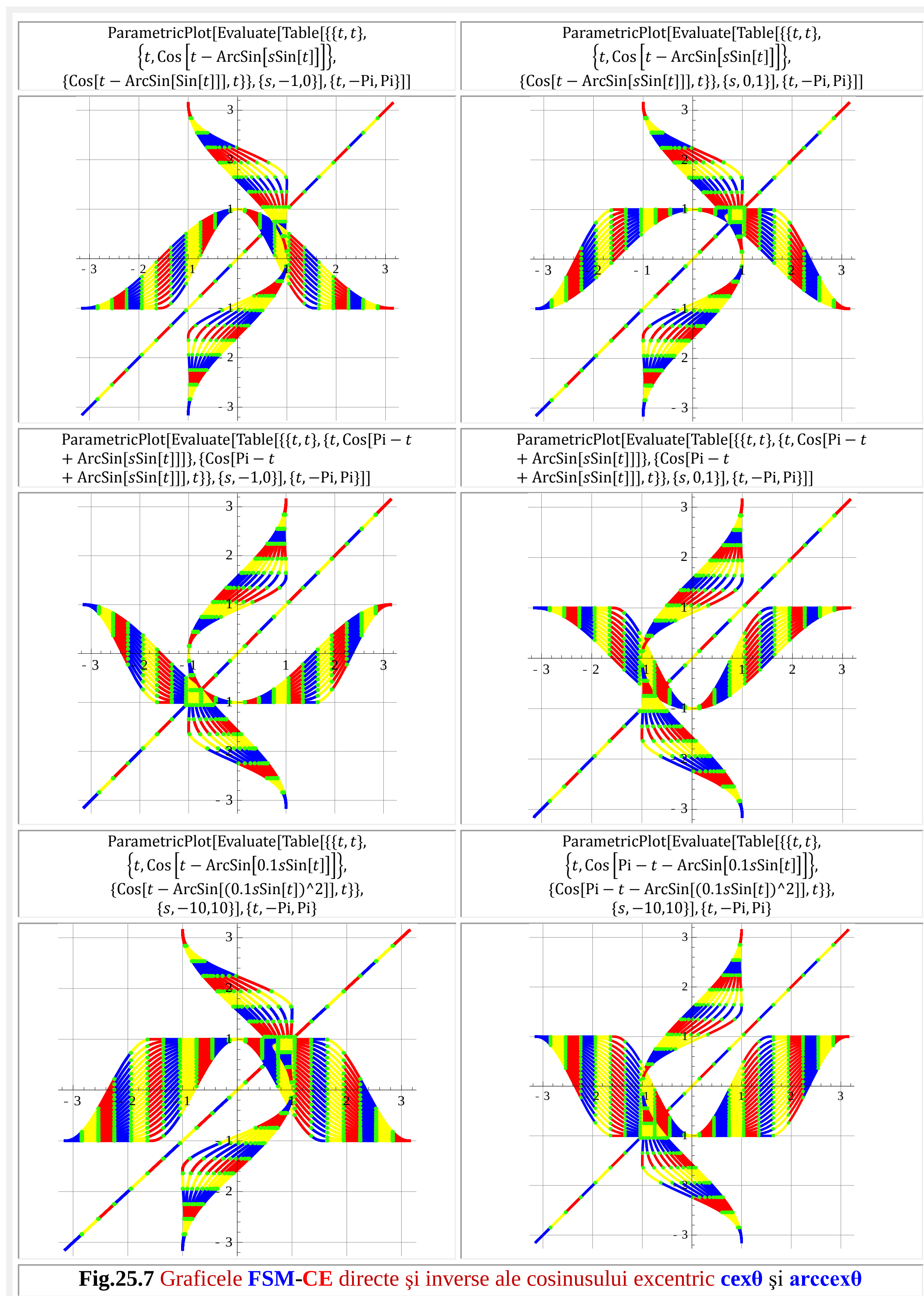


Fig.25.7 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale cosinusului excentric **cexθ** şi **arccexθ**

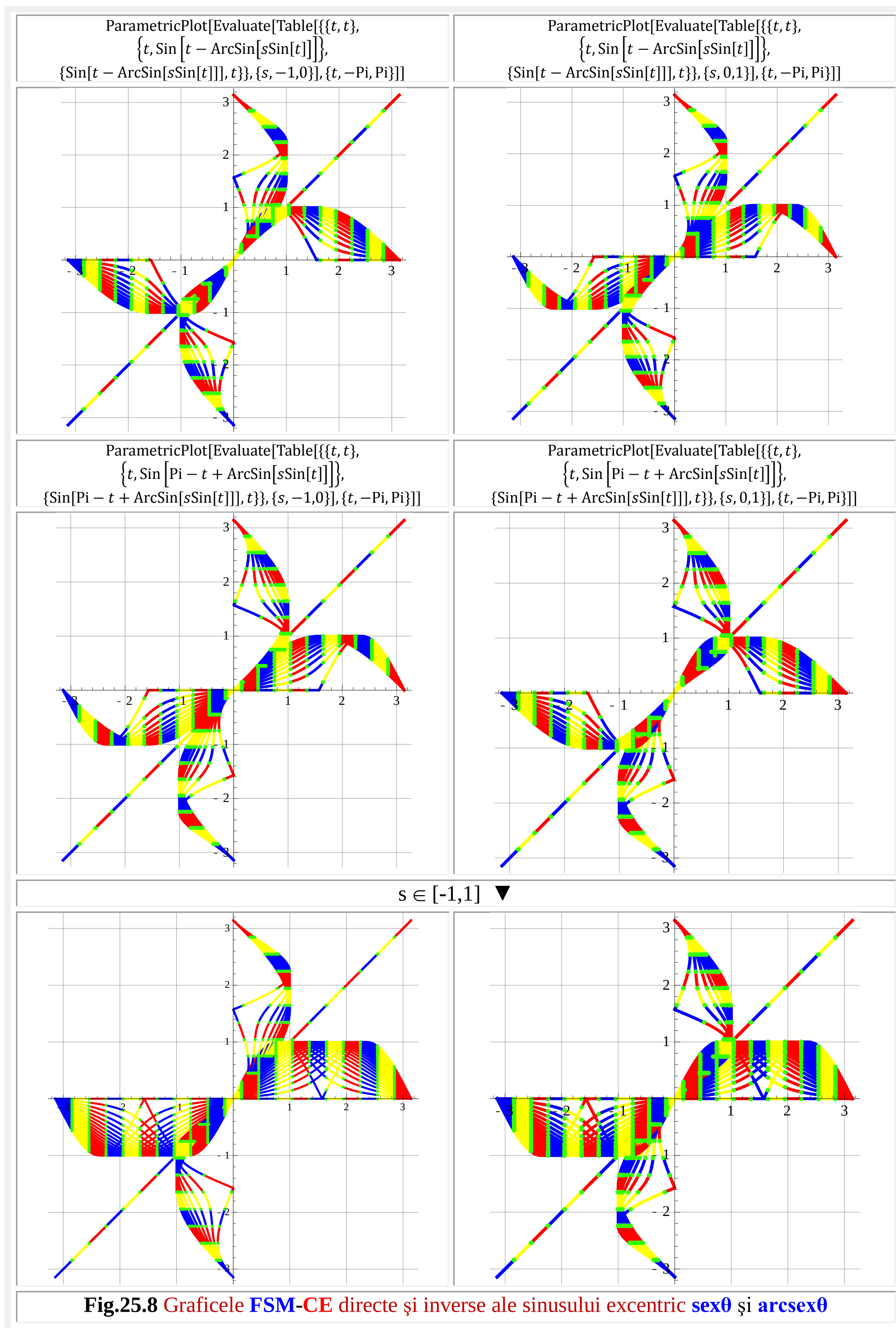


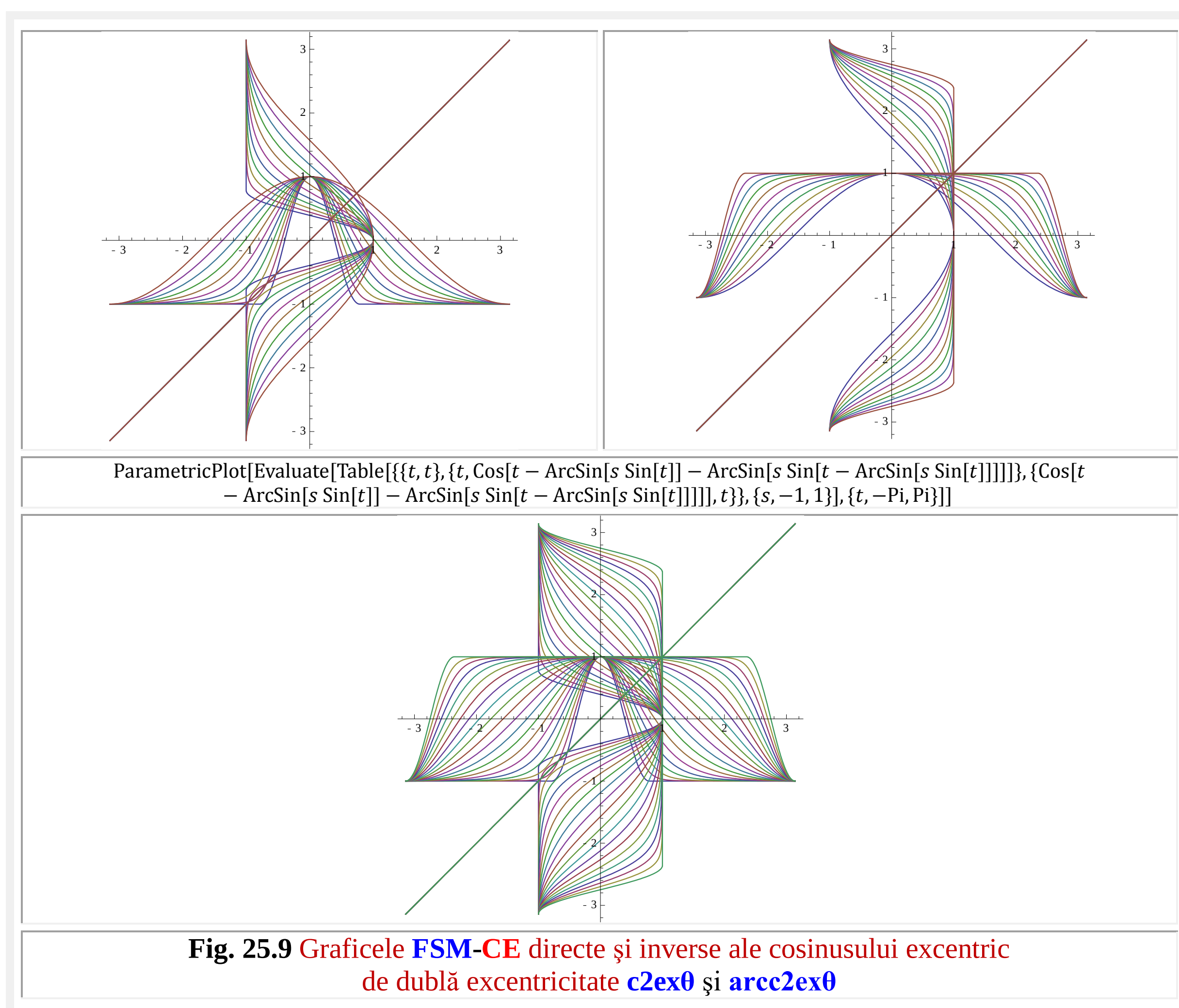
Fig.25.8 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale sinusului excentric **sexθ** şi **arcsexθ**

Din această cauză, apariţia unei infinităţi de funcţii circulare / trigonometrice cosinus şi sinus, precum şi a multor altora, a fost amânată din anul 1778 până în anul 1978 cu exact 200 de ani ! 200 de ani în care nimeni n-a observat că această suprapunere de puncte a sărăcit enorm matematica şi nimeni, dar nimeni, n-a mişcat din centru nici măcar un punct suprapus.

Matematica excentrică (**ME**) este cea care s-a născut prin expulzarea polul **P** din O(0, 0) şi la denumit excentru **E**(e, **ε**) pentru un cerc oarecare de rază R şi **S**(**s**, ε) pentru CU, denumind excentricitate liniară reală pe **e** şi excentricitate liniară numerică pe **s**, iar pe **ε** excentricitate unghiulară. Câte puncte există în planul cercului unitate, atâtea perechi de funcţii excentrice cosinus **cexθ** şi sinus **sexθ** au apărut şi există acum, adică o infinitate !

De abea acum s-a putut observa că nu sinusul şi cosinusul sunt funcţiile elementare, ci unele noi apărute: funcţia radial excentrică **rexθ** şi derivată excentrică **dexθ**, care sunt modulele vectorilor de poziţie $\vec{r}_{1,2} = \overrightarrow{SW}_{1,2} = rex_{1,2}\theta.rad\theta$, faţa de S şi, respectiv derivata acestuia $\vec{v}_{1,2} = \vec{r}_{1,2}{}' = dex_{1,2}\theta.der\theta$ şi au echivalentele lor din domeniul centric fazorii **radα** şi **derα.**

Unghiul **α** la centrul **O(0,0)** a fost denumit **variabilă centrică**, iar unghiul **θ** la excentrul **S**(**s**, **ε**) a fost denumit **variabilă excentrică**.



ParametricPlot[Evaluate[Table[{{t, t}, {t, Cos[t − ArcSin[s Sin[t]] − ArcSin[s Sin[t − ArcSin[s Sin[t]]]]]}, {Cos[t − ArcSin[s Sin[t]] − ArcSin[s Sin[t − ArcSin[s Sin[t]]]]], t}}, {s, −1, 1}], {t, −Pi, Pi}]]

Fig. 25.9 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale cosinusului excentric de dublă excentricitate **c2exθ** şi **arcc2exθ**

Deoarece, funcţiile excentrice de variabilă excentrică (cexθ, sexθ, texθ etc.) sunt continue numai pentru $s^2 < 1$, adică s ∈[-1, 1] ce corespunde unui excentru **S** plasat în interiorul discul cercului unitate, au fost introduse şi funcţiile excentrice de **variabilă centrică α,** care sunt continue pentru toate valorile lui **s**, adică pentru **s** ∈ [−∞, +∞] sau pentru un excentru **S** plasat în oricare punct din

planului cercului unitate. Ele sunt notate, prin convenţie, cu majuscule (Cexα, Sexα,Texα, Rexα, Dexα, etc) pentru a se distinge de cele de variabilă excentrică θ.

La îndemnul şi sugestia unui mare matematician, l-am numit pe Prof.dr. math. **Horst Klepp,** de a pune de acord trigonometria, care opera cu **semidrepte**, cu geometria analitică care operază cu **drepte**, au fost redefinite funcţiile excentrice ca intersecţie a **dreptei excentrice**, pentru că este turnantă în jurul excentrului **S**, **d** = $\mathbf{d^+ \cup d^-}$, cu cercul unitate **CU(O, 1**), rezultând, astfel, două determinări: una principală, de indice 1, sau fãra indice când confuziile sunt excluse, din intersecţia cu semidreapta $\mathbf{d^+}$ şi una secundară, de indice 2, ca intersecţie cu semidreapta $\mathbf{d^-}$**.**

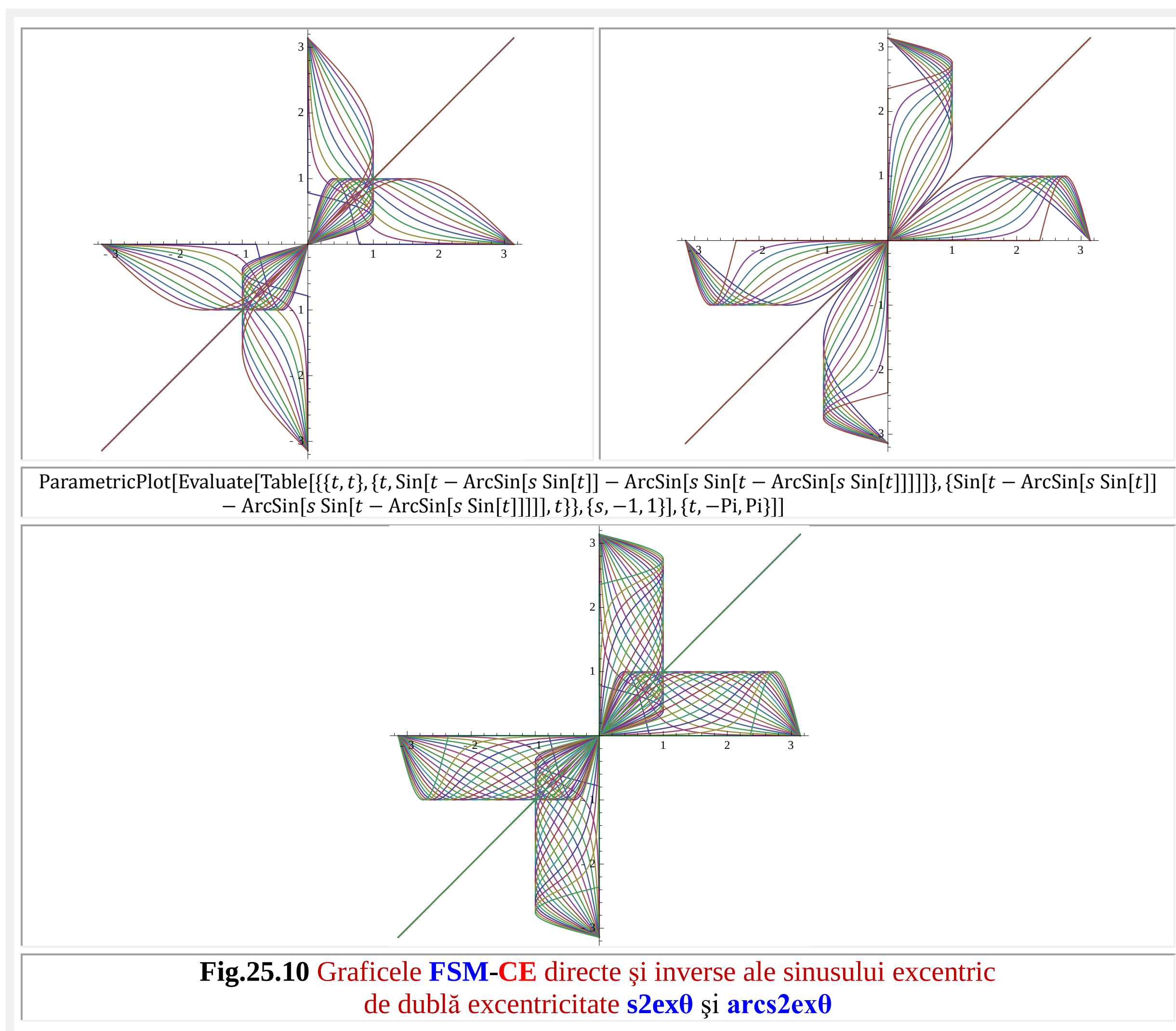


Fig.25.10 Graficele **FSM**-**CE** directe şi inverse ale sinusului excentric de dublă excentricitate **s2exθ** şi **arcs2exθ**

Matematica elevată (**MEL**) este cea în care s-a mai considerat deplasat un punct, şi anume, originea O din C(0, 0) în excentrul **S**(**s**, **ε**) ≡ O(**s**, **ε**) şi astfel au apărut funcţiile super-matematice circulare **elevate** (**FSM**-**CEL**), precum cosinus elevat **celθ** şi **Celα**, sinus elevat **selθ** şi **Selα**, tangentă elevată **telθ** şi **Telα** etc.

Au fost denumite **elevate**, pentru că **celθ** şi **selθ**, de exemplu, îşi elevează poziţia codomeniului în funcţie de poziţia excentrului S, în timp ce, codomeniul funcţiilor excentrice cexθ şi sexθ rămâne acelaşi I ∈ [-1, 1], indiferent de poziţia lui S în plan.

După 240 de ani s-a renunţat la coinciderea vreunui punct, astfel că cele 3 puncte au devenit toate distincte în cadrul **matematicii exotice** (**MEX**), care a dat naştere funcţiilor supermatematice **circulare exotice** (**FSM**-**CEX**) cosinus exotic **cexoθ** şi **Cexoα**, sinus exotic **sexoθ** şi **Sexoα**, tangentă exotică **texoθ** şi **Texoα** etc.

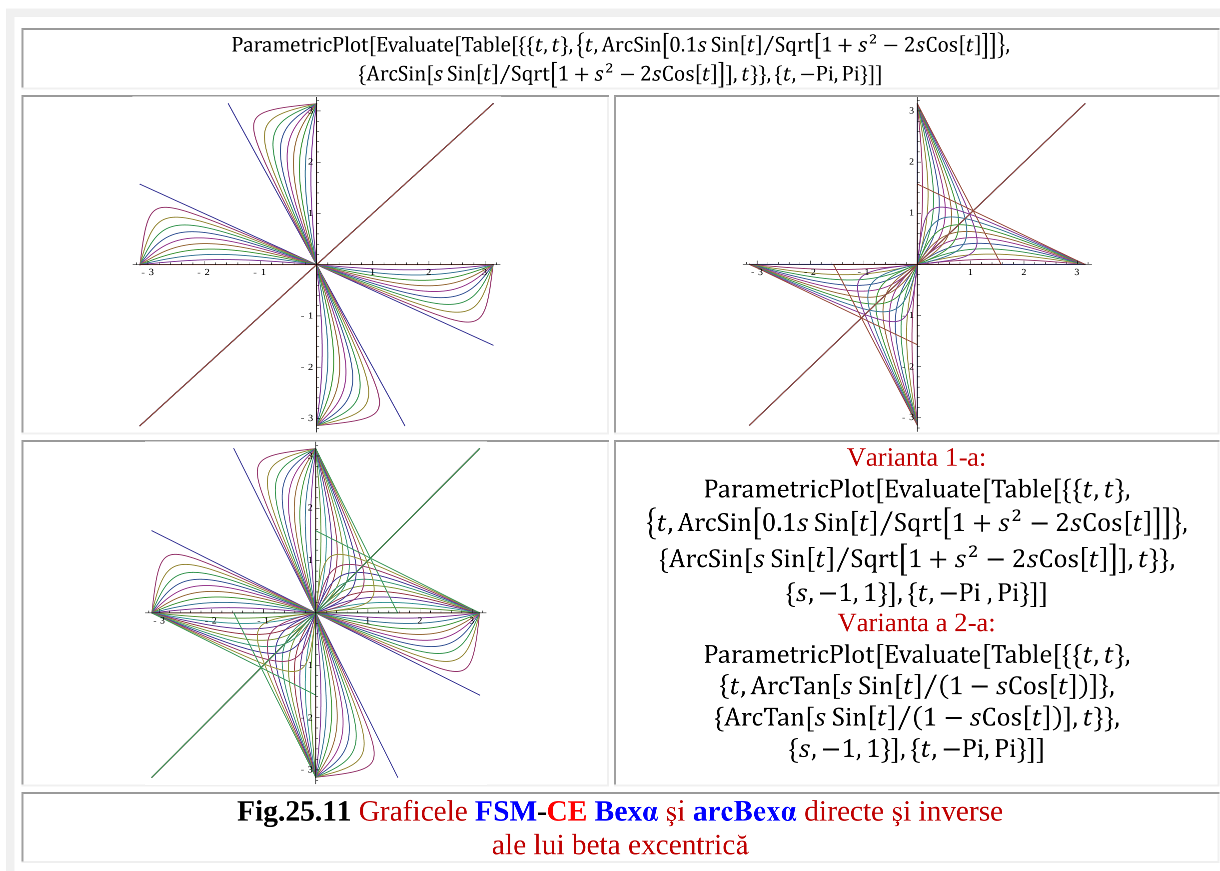


Fig.25.11 Graficele **FSM-CE Bexα** şi **arcBexα** directe şi inverse ale lui beta excentrică

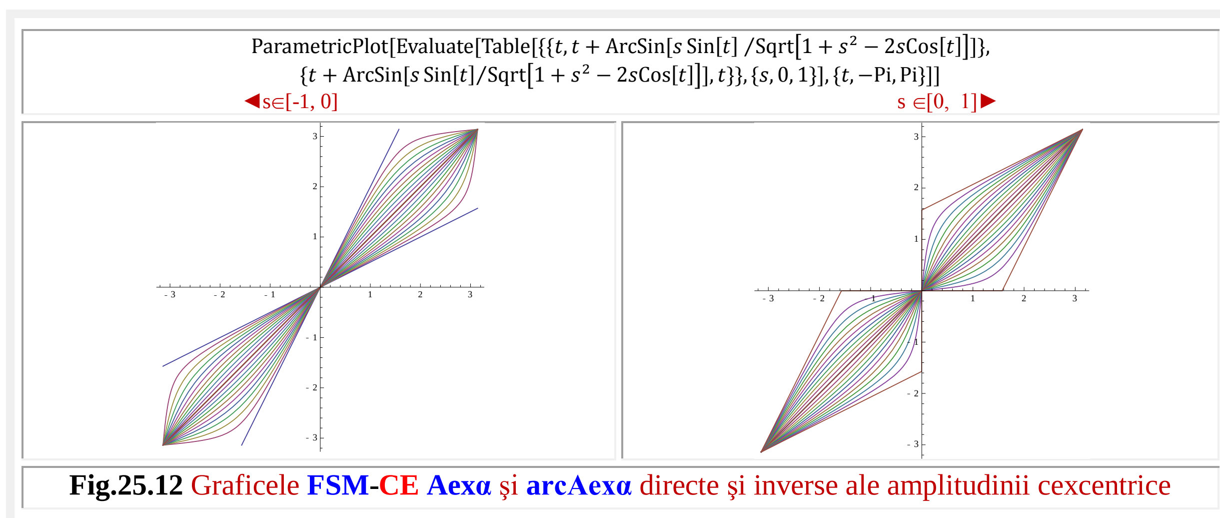


Fig.25.12 Graficele **FSM-CE Aexα** şi **arcAexα** directe şi inverse ale amplitudinii cexcentrice

Deoarece, în toate cele trei tipuri de matematici excentricitatea este prezentă şi diferită de zero, ele aparţin toate domeniului **matematicii excentrice** (**ME**). Pentru **s** = **e** = 0, **ME** →**MC.**
În toate aceste matematici, excentricităţile liniară **s** şi unghiulară **ε** sunt prezente ca a 3-a şi a 4-a dimensiune a spaţiul 2 D dacă **s** şi **ε** sunt **constante** şi diferite de zero, astfel că **S**(**s**, **ε**) este un punct fix în plan, a 5-a şi a 6-a dimensiune a spaţiului bi-dimensional, dacă **S** este un punct mobil în plan, care se deplasează după anumite legi, guvernate de o funcţie centrică sau tot excentrică de acelaşi excentru **S** (denumite funcţii de dublă excentricitate) sau o altă excentricitate s_1 – s(θ, s_1) – ş.a.m.d. până la a n-a dimensiune a spaţiului 2D.

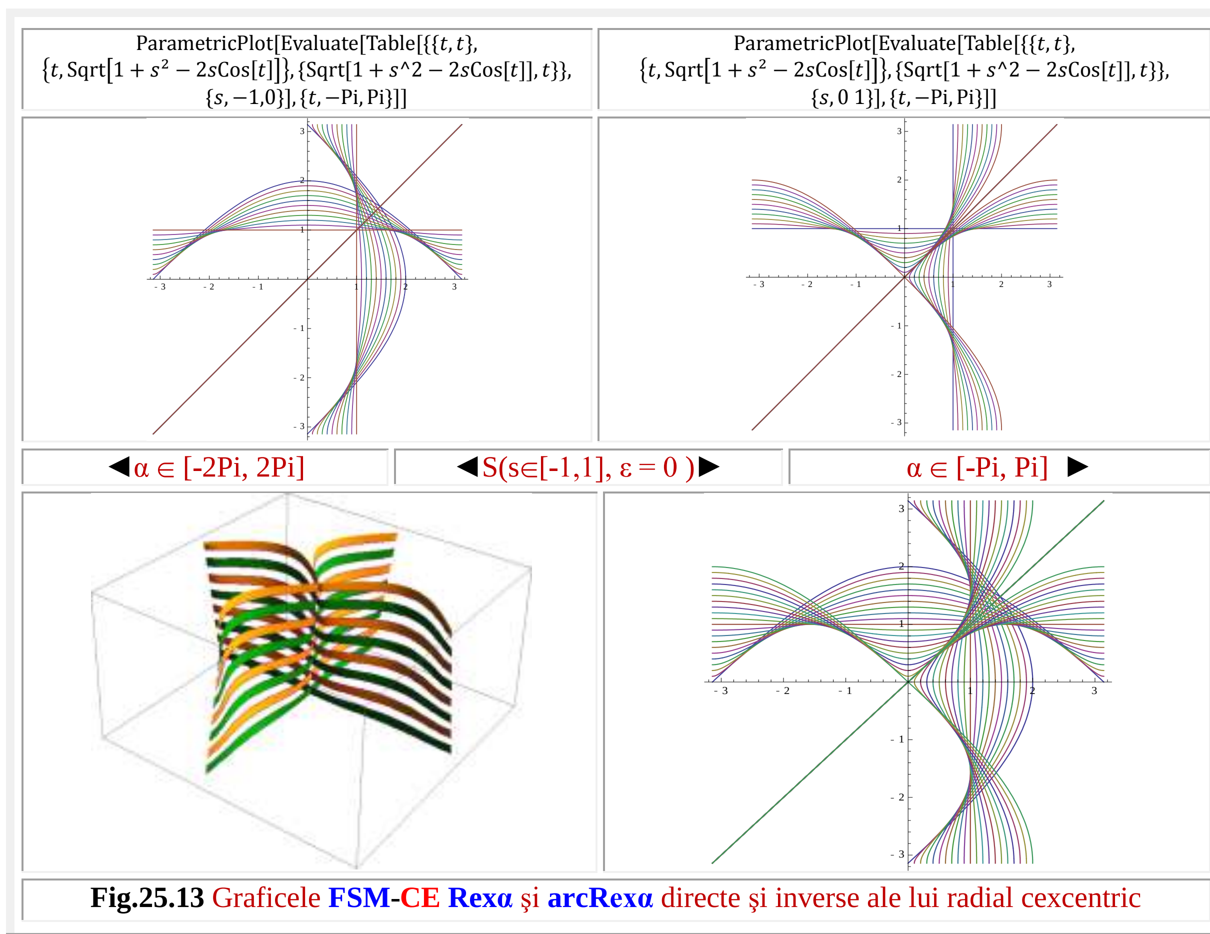
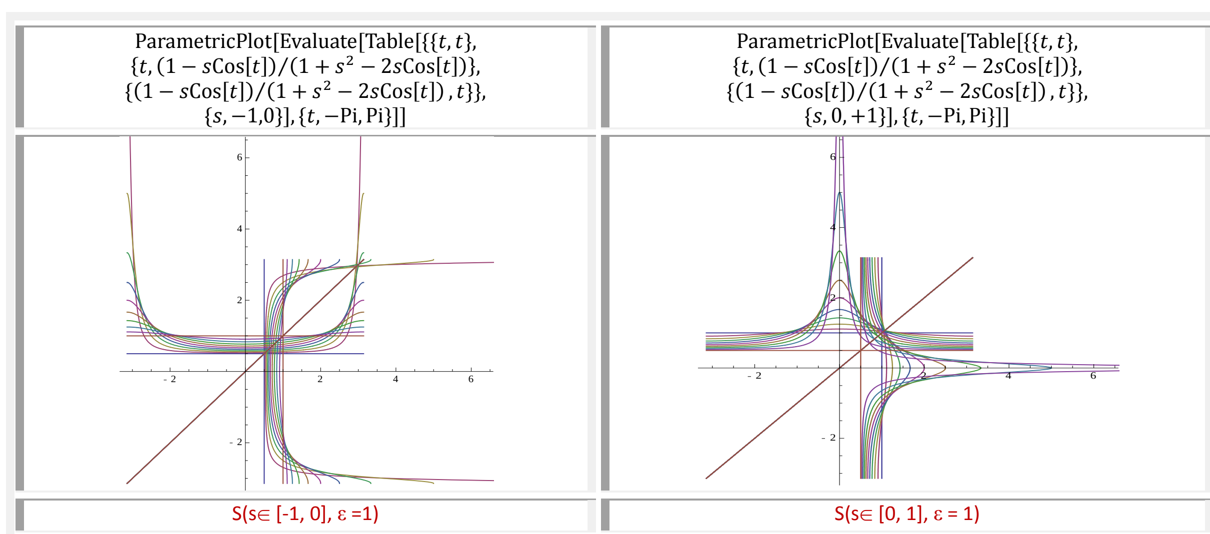


Fig.25.13 Graficele **FSM-CE Rexα** şi **arcRexα** directe şi inverse ale lui radial cexcentric

Totodată, excentricitatea poate fi a 4-a şi a 5-a dimensiune a spatiului 3D, dacă **s** şi **ε** sunt constante şi **S** un punct fix în spaţiul 3D, a 6-a sau/şi a 7-a dimensiune dacă **s** sau/şi **ε** sunt variabile, a 8-a şi a 9-a dimensiune a spaţiului 3D dacă **s** sau/şi **ε** sunt variabile ş.a.m.d., aidoma cazului 2D, până la a n-a dimensiune a spaţiului 3D.



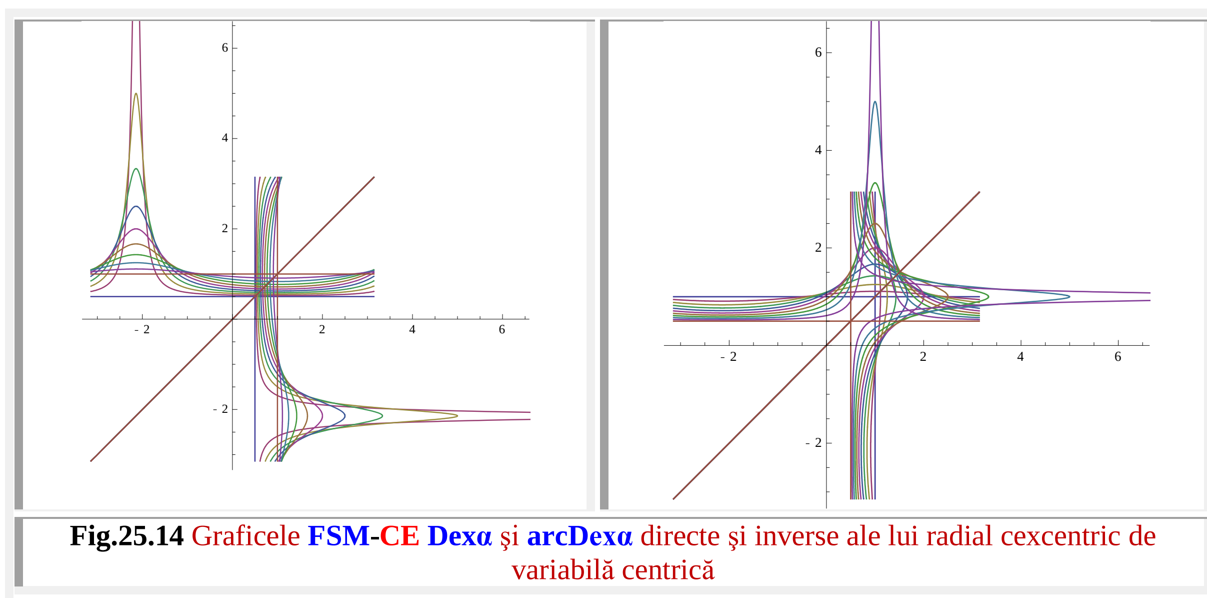


Fig.25.14 Graficele **FSM-CE Dexα** şi **arcDexα** directe şi inverse ale lui radial cexcentric de variabilă centrică

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{{t, Cos[t + ArcSin[s Sin[t]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]]},
{Cos[t + ArcSin[s Sin[t]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[t]]]], t}}], {t, −Pi, Pi}]]
```

S(s∈ [-1, 0], ε = 0)	S(s∈ [0, 1], ε = 0)
S(s∈ [-1, 0], ε =1)	S(s∈ [0, 1], ε = 1)

Fig.25.15 Graficele **FSM-CE Cexα** şi **arcCexα** directe şi inverse ale lui cosinus cexcentric de variabilă centrică

Toate **FSM**-**CE** directe şi inverse se impart în două clase de funcţii:

1) Cele care depind de poziţia originii O(0, 0) – pentru funcţiie excentrice sau O(s, ε) – pentru cele elevate – a reperului de la care se definesc / măsoară şi care au corespondente în matematica centrică (**MC**), cum sunt cex şi Cex → cos, sex şi Sex → sin, tex şi Tex → tan etc. şi
2) Cele care **nu** depind de poziţia originii **O**, ci de poziţia excentrului **S**(s, ε) de la care sunt definite şi se măsoară mărimea lor şi care nu aveau şi, unele, nu au nici acum funcţii corespondente în **MC,** deşi expresiile lor matematice sunt frecvent întâlnite în matematica şi în tehnică rex şi Rex → rad, dex şi Dex → der, bex şi Bex → ?, aex şi Aex→ ?.

FSM-**CE** directe, care au corespondente în domeniul matematicii centrice (**MC**), se obţin din acestea, adică din funcţiile centrice **cos**, **sin**, **tan**, etc., ca funcţii induse o singură dată sau monoinduse sau compuse şi mai corect ca funcţii de funcţie, adică prin înlocuirea variabilelor excentrică **θ** şi centrică **α** cu funcţiile α(θ) şi θ(α) denumite **FSM**-**CE** amplitudine excentrică corespunzătoare, a căror expresii, a primei determinări principale, de indice 1 sau fără indice, sunt [23], [1], [2], [10]

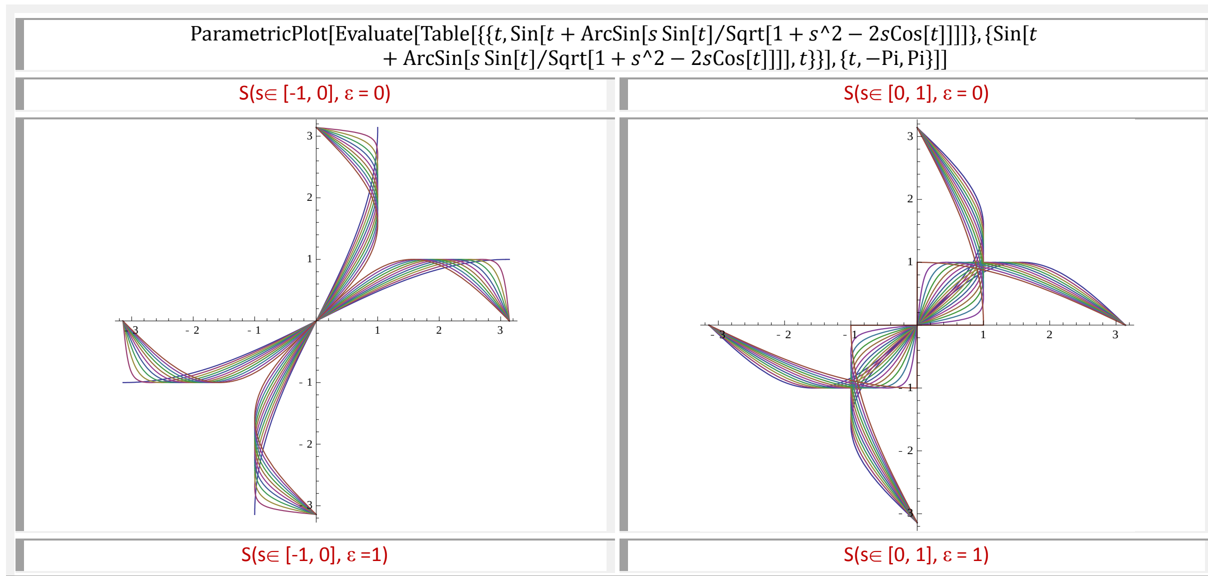
(4) $$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \alpha(\theta) = aex_1\theta = \theta - \beta_1(\theta) = \theta - bex_1\theta = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] \\ \boldsymbol{\theta} \Rightarrow \theta(\alpha) = Aex\alpha_1 = \alpha + \beta(\alpha) = \alpha + arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \alpha + arcsin\frac{s\sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha} \end{cases}$$

Cea de a doua determinare, secundară, de indice 2, se obţine din prima ştiind că

(5) $\beta_2 = \pi - \beta_1 = \pi - \beta$.

25.4 FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE INVERSE (FSM-CEI) DE VARIABILĂ CENTRICĂ α

FSM-**CE** directe şi inverse de variabilă centrică **α**, independente de O(0,0) dar dependente de excentrul **S**(s, ε) sunt **Bexα** şi **arcBexα** din **figura 25.8**, **Aexα** şi **arcAexα** din **figura 25.9**, precum şi Rexα şi **arcRexα** prezentate în **figura 10** ca şi **Dexα** şi **arcDexα** din **figura 25.11**.



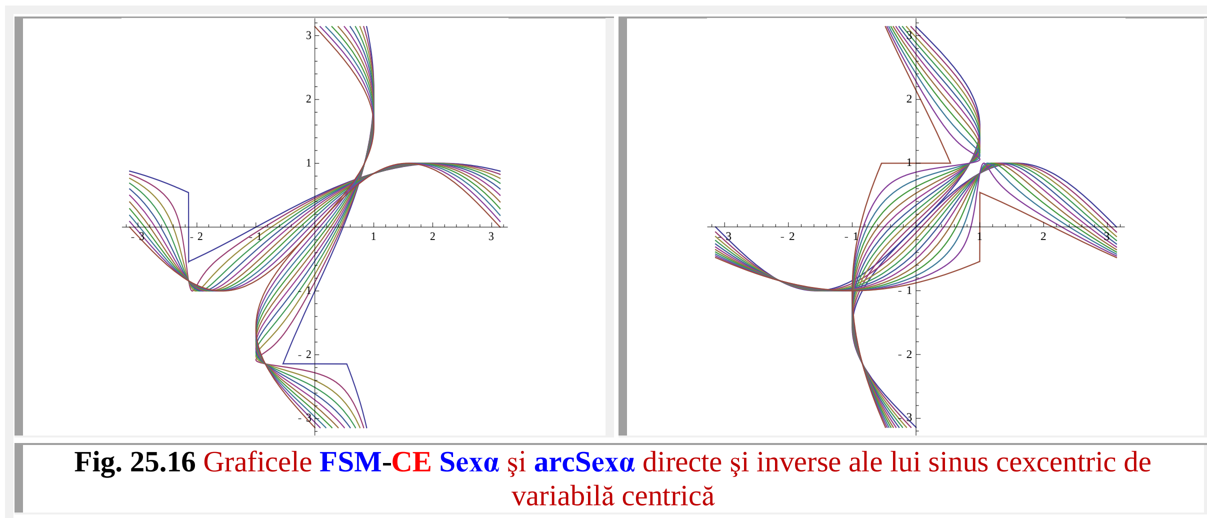


Fig. 25.16 Graficele **FSM**-**CE** **Sexα** şi **arcSexα** directe şi inverse ale lui sinus cexcentric de variabilă centrică

Ca urmare

(6) $$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \alpha_2(\theta) = aex_2\alpha = \theta - \beta_2(\theta) = \theta - bex_2\theta = \pi - \theta + \arcsin\,[s.sin(\alpha - \varepsilon)] \\ \boldsymbol{\theta} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2(\alpha) = \pi - \alpha_2 - arcsin\frac{s.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = \pi - \alpha_2 - arcsin\frac{s\sin(\alpha-\varepsilon)}{Rex\alpha} \end{cases}$$

Dacă ecuaţiile parametrice ale unei funcţii directe şi graficele lor se obţin prin expresiile

(7) $$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

atunci funcţia ei inversă va avea ecuaţiile parametrice şi, ca urmare, şi graficele, date de ecuaţiile parametrice obţinute prin inversarea coordonatelor x cu y şi a lui y cu x, adică

(8) $$\begin{cases} x = f(t) \\ y = t \end{cases}$$

ceea ce se poate observa şi din ecuaţiile şi textele prezentate în desenele anterioare, în **figurile 25.1,a** şi **1,b** pentru funcţiile directe şi inverse beta excentrice şi amplitudine excentrică.

Funcţiile monoinduse (induse o singură dată) sunt cex, sex, tex etc. şi Cex, Sex, Tex etc. iar funcţiile inductoare sunt $aex_{1,2}\theta$ şi, respectiv, $Aex\alpha_{1,2}$.

Prin repetarea procedeului de inducţie, se vor obţine **FSM**-**CE** directe şi inverse de dublă excentricitate (**Fig. 25.6** şi **25.24.7**). Procedeul putând fi repetat la nesfârşit, se pot obţine **FSM**-**CE** de triplă, cvadruplă ş.a.m.d. de a n-a sau multiplă excentricitate.

FSM-**CE** directe şi inverse cosinus (cexθ şi **arccexθ**) sunt prezentate în **figura 25.24.4**, iar sinusul (sexθ şi **arcsexθ**) în **figura 25.5**, în partea din stânga ◄ figurilor pentru S(s∈[-1,0], ε = 0) sau S(s∈[1,0], ε = π) şi în partea dreaptă ► pentru S(s∈[0,1, ε = 0)] . În **figurile 25.6** şi **25.7** sunt prezentate aceleaşi funcţii dar de dublă excentricitate cosinus (c2exθ şi **arcc2exθ,** precum şi cosinus s2exθ şi **arcs2exθ**).

Pe lângă **FSM**-**CE** prezentate, mai sunt şi **arctexα** şi **arcTexα, arcctexα** şi **arcCtexα, ş.m.a.**

25.5 FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE ELEVATE INVERSE (FSM-CELI) DE VARIABILĂ EXCENTRICĂ θ

Aşa cum s-a mai menţionat, funcţiile supermatematice circulare elevate (**FSM**-**CEL**) sunt coordonatele punctelor $W_{1,2}$ de intersectie a dreptei excentrice **d** cu cercul unitate CU[C(0 ,1); 1], când dreapta turnantă se roteşte faţă de excentrul **S**(**s**, ε) în care este plasată, în acest caz, şi originea O(**s**, ε), origine de la care se definesc $X_{1,2}$→ cosinusul elevat $cel_{1,2}\theta$ şi $Cel\alpha_{1,2}$ şi $Y_{1,2}$ → sinusul elevat $sel_{1,2}\theta$ şi $Sel\alpha_{1,2}$.

Este uşor de observat că, pentru ε = 0 şi ε = π, funcţiile elevate $sel_{1,2}\theta$ şi $Sel\alpha_{1,2}$ se confundă cu cele excentrice $y_{1,2}$ → $sex_{1,2}\theta$ şi $Sex\alpha_{1,2}$, deoarece, în acest caz, originea **O,** confundată cu excentrul **S**, se află dispuse pe aceeaşi axă a absciselor ca şi centrul cercului unitate C, astfel că $Y_{1,2} = y_{1,2}$, iar $X_{1,2} = x_{1,2} + s_x = x_{1,2} + s.\cos\varepsilon$.

Rezultă că între **FSM**-**CEL** şi **FSM**-**CE** există următoarele dependenţe (**Fig. 25.13**)

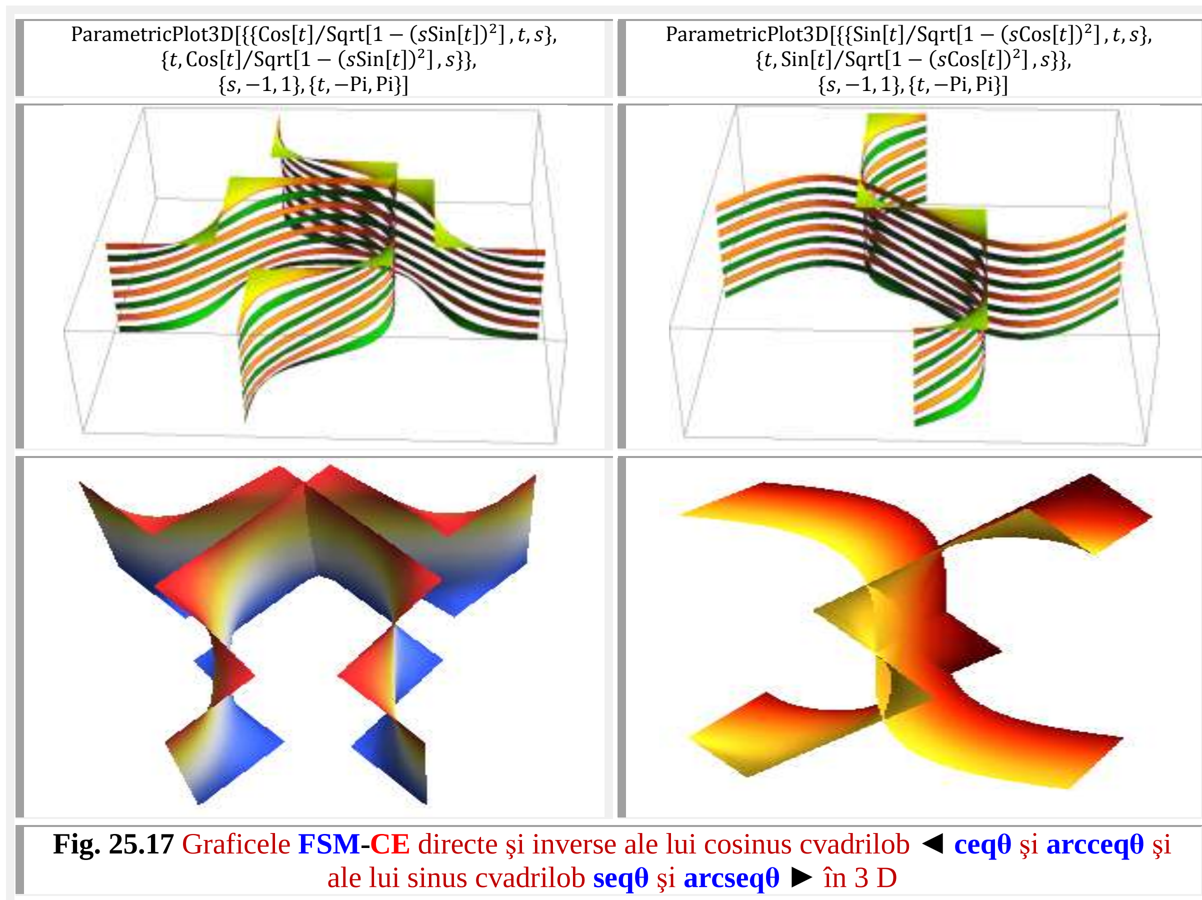


Fig. 25.17 Graficele **FSM**-**CE** directe şi inverse ale lui cosinus cvadrilob ◄ **ceqθ** şi **arcceqθ** şi ale lui sinus cvadrilob **seqθ** şi **arcseqθ** ► în 3 D

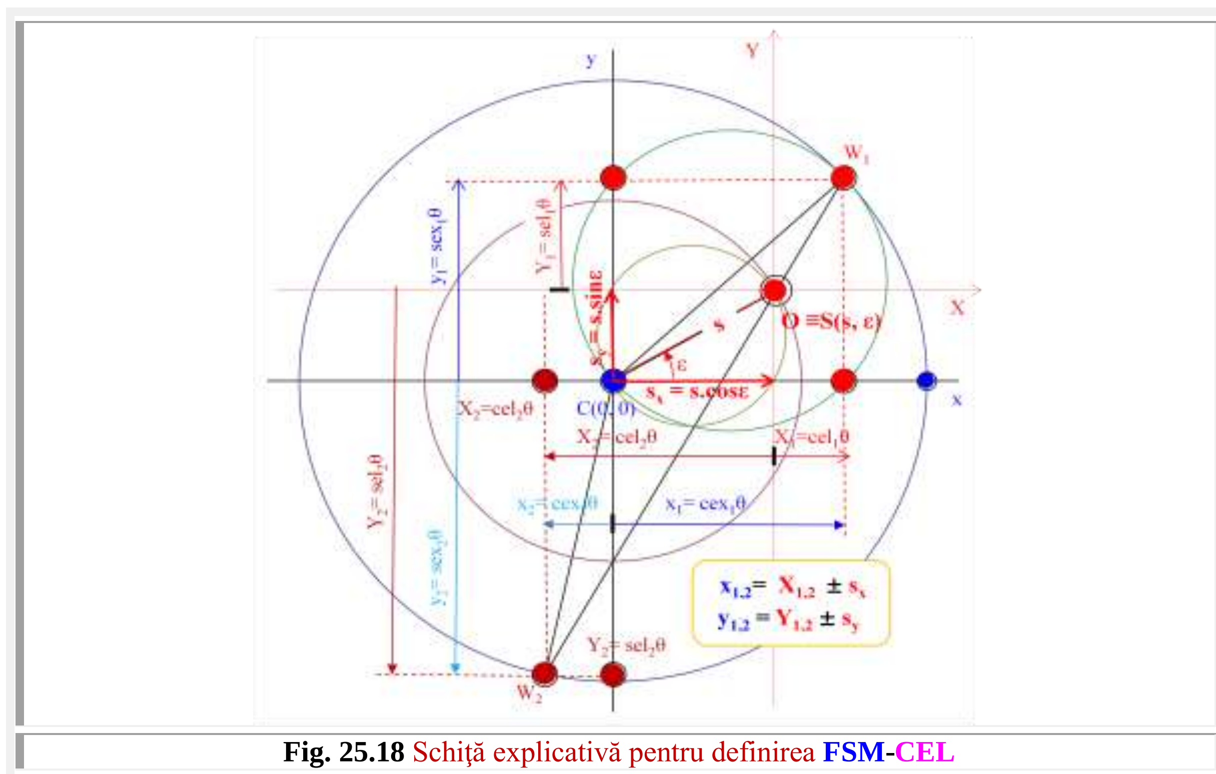


Fig. 25.18 Schiţă explicativă pentru definirea **FSM**-**CEL**

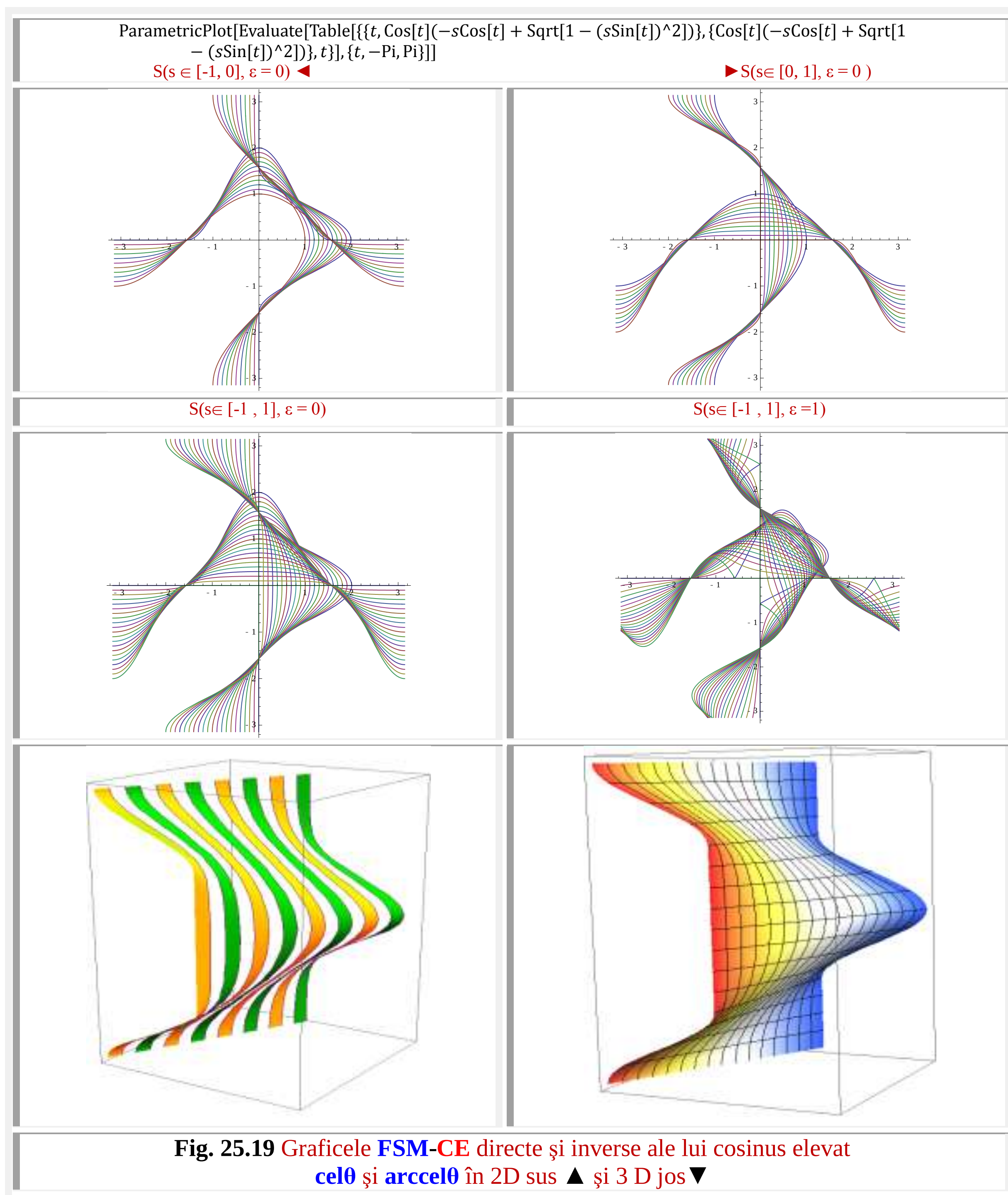


Fig. 25.19 Graficele **FSM**-**CE** directe şi inverse ale lui cosinus elevat **celθ** şi **arccelθ** în 2D sus ▲ şi 3 D jos▼

(9) $$\begin{cases} X_{1,2}(\theta) = cel_{1,2}\theta = x_{1,2}(\theta) \mp s.cos\varepsilon \rightarrow cel_{1,2}(\theta) = cex_{1,2}\theta \mp s.cos\varepsilon \\ Y_{1,2}(\theta) = sel_{1,2}\theta = y_{1,2}(\theta) \mp s.sin\varepsilon \rightarrow sel_{1,2}(\theta) = sex_{1,2}\theta \mp s.sin\varepsilon \end{cases}$$

Totodată, aşa cum rezultă din schiţa explicativă (**Fig. 25.13**), funcţiile ale căror expresii nu depind de poziţia centrului **C**(0,0), ci de poziţia excentrului S(s, ε), ca aexθ şi Aexα, bexθ şi Bexα, rexθ şi Rexα, dexθ şi Dexα sunt aceleaşi atât ca funcţii **excentrice** cât şi ca funcţii **elevate** şi **exotice**.

De aceea, funcţiile elevate inverse se rezumă la funcţiile cos, sin, tan, cot ş.a., adică celθ şi Celα, sexθ şi Sel, texθ şi Tel, ctexθ şi Ctel, ş.a. a căror inverse sunt arccelθ, arcselθ, arctelθ, arcctelθ, ş.a. ca funcţii de variabila excentrică şi arcCelα, arcSelα, arcTelα, arcCtelα, ş.a. ca funcţii de variabilă centrică α.

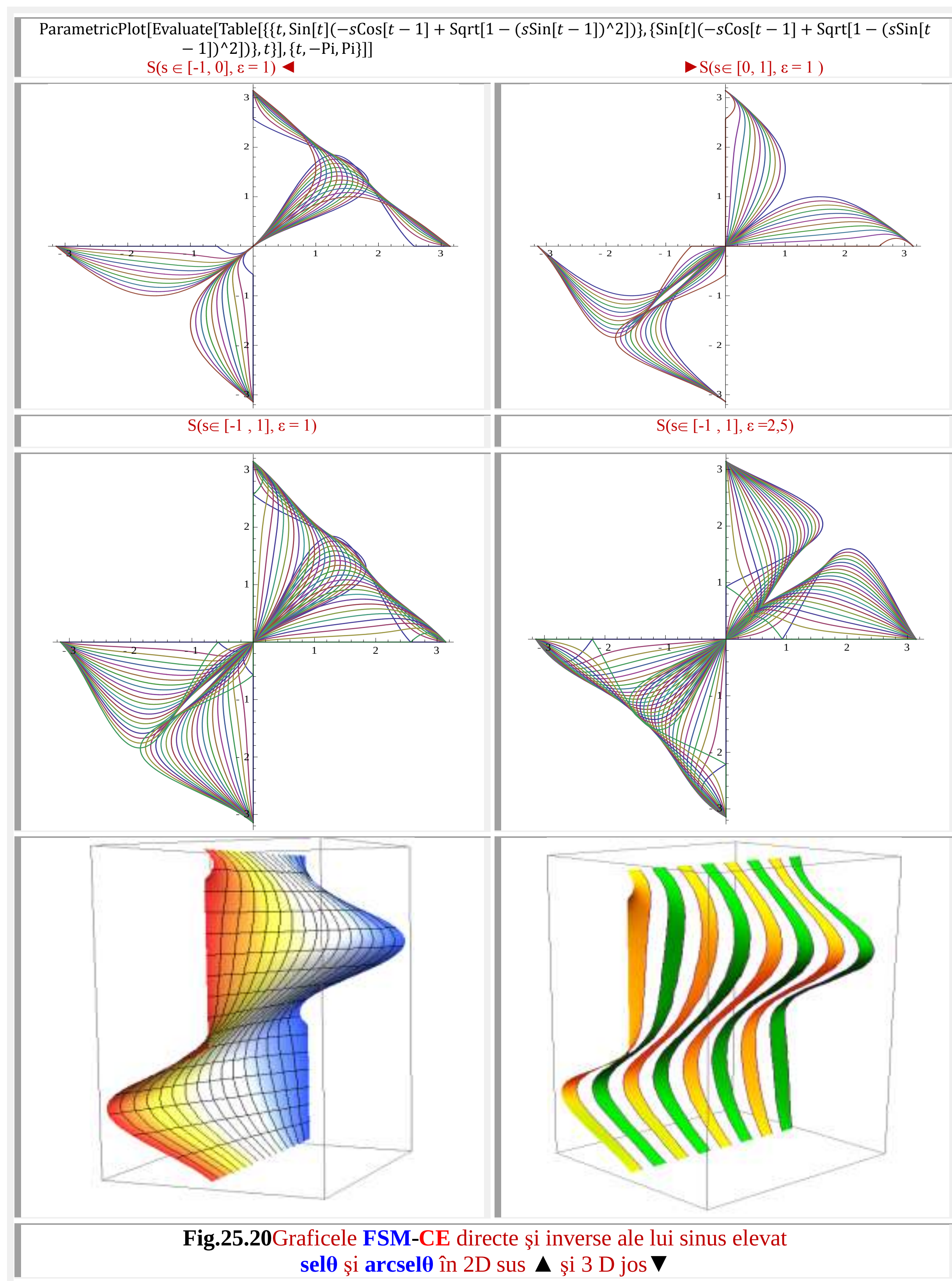


Fig.25.20 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale lui sinus elevat **selθ** şi **arcselθ** în 2D sus ▲ şi 3 D jos▼

Graficele funcţiilor elvate directe şi inverse celθ şi arccelθ sunt prezentate în **figura 25.14** în 2D şi, pentru o înţelegere mai profundă, şi în 3D, iar în **figura 25.15** sunt prezentate, în 2D şi în 3D, graficele funcţiilor selθ şi arcselθ .

25.6 FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE ELEVATE INVERSE DE VARIABILĂ CENTRICĂ α

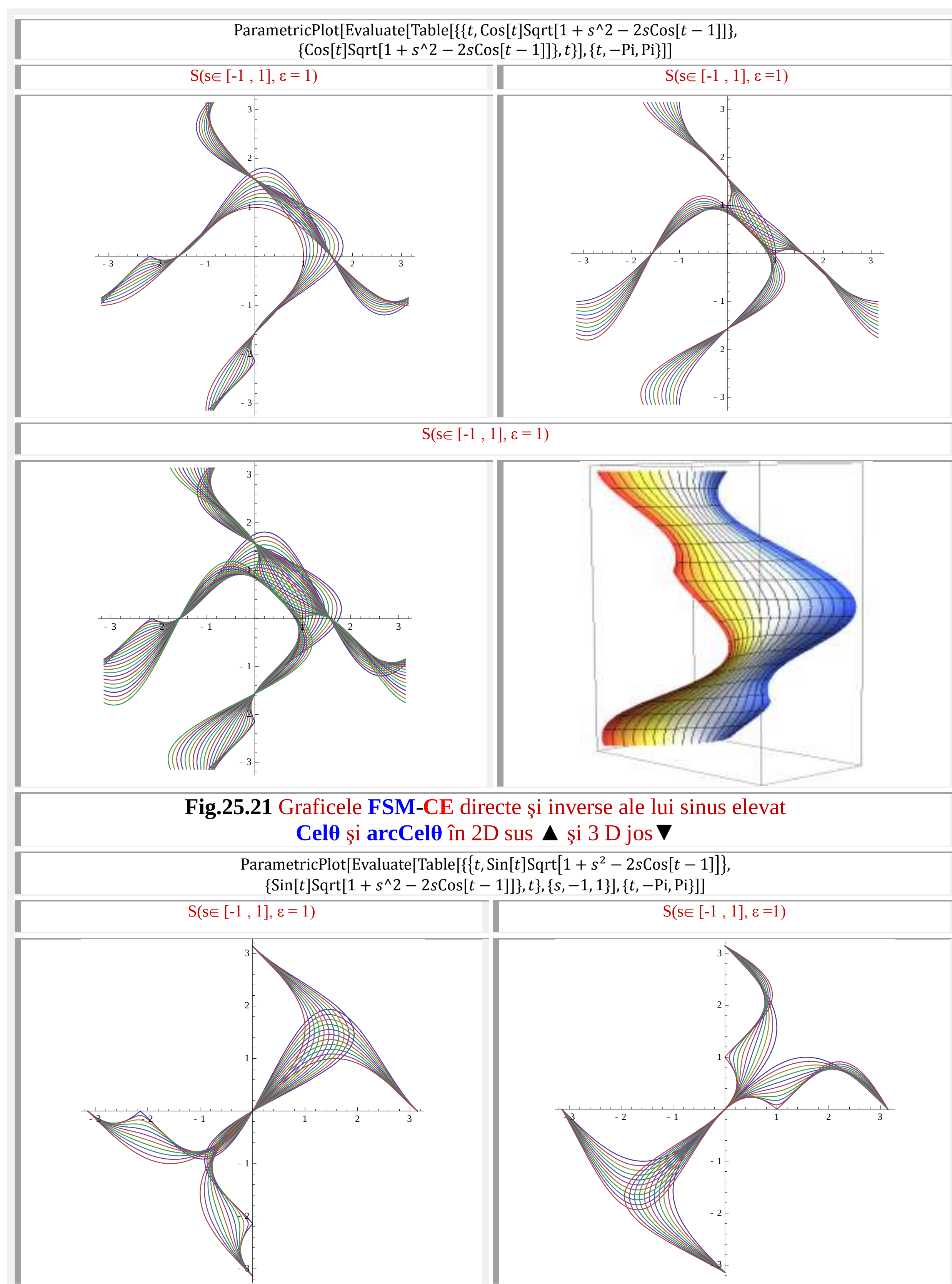


Fig.25.21 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale lui sinus elevat **Celθ** şi **arcCelθ** în 2D sus ▲ şi 3 D jos▼

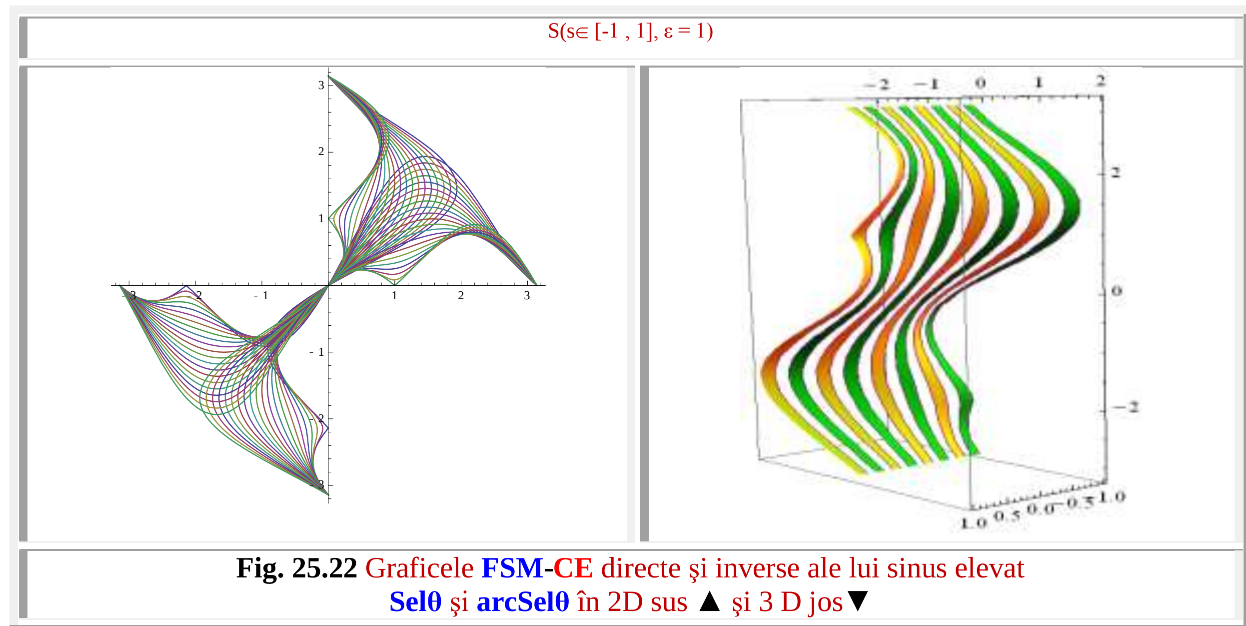


Fig. 25.22 Graficele **FSM-CE** directe şi inverse ale lui sinus elevat
Selθ şi **arcSelθ** în 2D sus ▲ şi 3 D jos▼

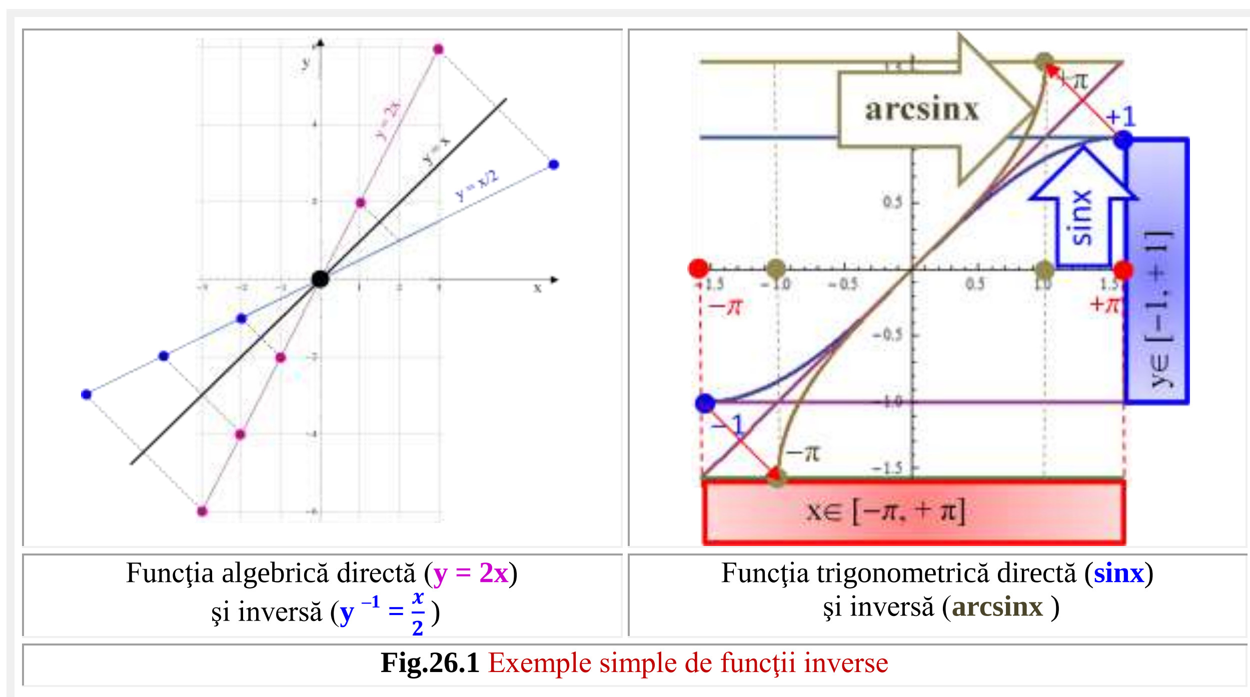
Motto: ”Inversarea polilor magnetici ai **Terrei** este la fel de importantă ca şi descoperirea noilor funcţii **supermatematice** excentrice **inverse** ”
Şi aici este vorba de o inversiune. De valori.
Autorul

Capitolul 26

FUNCŢII SUPERMATEMATICE (FSM) CIRCULARE EXCENTRICE (CE) INVERSE (FSM-CEI) cex, Cex şi sex, Sex

26.1 I N T R O D U C E R E

În **partea I-a**, a capitolului cu acelaşi titlu , au fost prezentate **FSM-CEI** inverse ale funcţiilor supermatematice circulare excentrice (**FSM**-CE), ca **simetricele,** faţă de prima bisectoare, a celor **directe**, ceea ce este corect, deoarece graficele funcţiilor inverse univoce sau multivoce se obţin ca simetricele funcţiilor directe faţă de prima bisectoare [**Mica Enciclopedie Matematică**, pag. 131, fig.5.1.10], aşa cum este ilustrat în **figura 26.1,** pentru o funcţie algebrică (y = **2x** → $y^{-1} = \frac{x}{2}$) şi pentru una trigonometrică / circulară centrică (y = **sinx** → y^{-1} = arcsinx).



Funcţia algebrică directă (**y = 2x**) şi inversă ($y^{-1} = \frac{x}{2}$)	Funcţia trigonometrică directă (**sinx**) şi inversă (**arcsinx**)

Fig.26.1 Exemple simple de funcţii inverse

Pe de altă parte, calcularea valorilor şi reprezentarea graficelor funcţiile trigonometrice inverse cu ajutorul calculatoarelor elecronice numerice se face prin dezvoltarea în serie a acestor funcţii.

Astfel, funcţia arcsinx are dezvoltarea în serie

(1) $\arcsin x = x + x^3/6 + (3\,x^5)/40 + (5\,x^7)/112 + (35\,x^9)/1152 + O[x]^{11}$

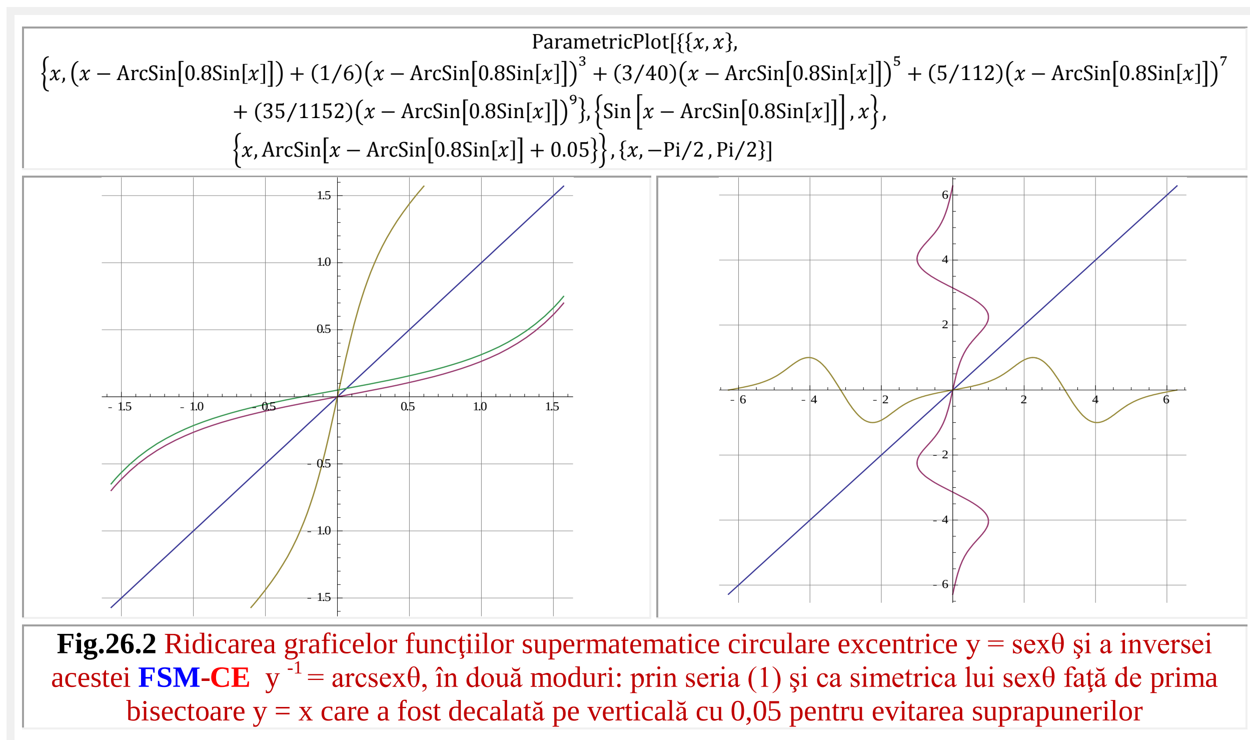


Fig.26.2 Ridicarea graficelor funcţiilor supermatematice circulare excentrice y = sexθ şi a inversei acestei **FSM-CE** y^{-1} = arcsexθ, în două moduri: prin seria (1) şi ca simetrica lui sexθ faţă de prima bisectoare y = x care a fost decalată pe verticală cu 0,05 pentru evitarea suprapunerilor

Introducând expresia unei **FSM-CE**, ca de exemplu sinus excentric, de variabilă excentrică θ, sexθ, a cărei expresie **<u>invariantă</u>** este

(2) $y = \text{sex}\theta = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]$, x → **θ,**

pentru un excentru **S**(**s** = 0,8 ; **ε** = 0) şi θ ∈ [-π/2, π/2] se obţin graficele din **figura 2** stânga ◄, iar pentru θ ∈ [-2π, 2π] **FSM-CE** sexθ şi simetrica ei faţă de prima bisectoare, care este şi inversa ei **multiformă** se obţin graficele din **figura 26.2** dreapta ►.

Aici, inversa funcţiei y = sex θ este considerată, şi chiar este, funcţia

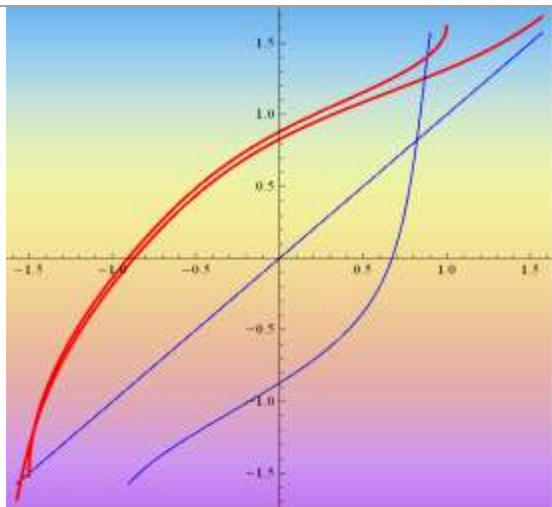
(3) $y^{-1} = \arcsin(\text{sex}\theta) = \arcsin\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]\}$

În acest caz, adică pentru **ε = 0**, se observă din grafice, că cele două posibilităţi de-a obţine inversele acestei funcţii sunt identice, ceea ce nu se mai întâmplă şi pentru o excentricitate unghiulară diferită de zero (**ε ≠ 0**), adică pentru un excentrul **S**(**s** = 0,8 ; **ε** = 1), a cărui excentricitate unghiulara **ε = 1** este diferită de zero (**Fig.26.3**).

În **figura 26.4** sunt reprezentate **FSM-CE** sexθ de aceeaşi excentricitate liniară (s ∈ [-1; 1]) şi de excetricităţi unghiulare diferite; **ε = 0** ◄ în stânga şi **ε =** 1 în dreapta ►figurii.

Dacă, pentru **ε = 0** în **θ_R** = 0 ± 2kπ sunt situate **punctele repulsive** şi în **θ_A** = π ± 2kπ sunt situate punctele atractor / atractive, pentru **ε =** 1 ele nu mai apar pe axa absciselor, ci punctele repulsive apar în punctele de coordonate **P_R**{θ_R = ε ± 2kπ; sex(θ = ε ± 2kπ) }, iar cele atractor / atractive în punctele **P_A**{ θ_R = ε + π ± 2kπ, sex(θ_R = ε + π ± 2kπ)}, aşa cum se poate observa facil în **figura 26.4.**

ParametricPlot[{{x, x}, {x, (x − ArcSin[0.8Sin[x − 1]]) + (1/6)(x − ArcSin[0.8Sin[x − 1]])^3 + (3/40)(x − ArcSin[0.8Sin[x − 1]])^5 + (5/112)(x − ArcSin[0.8Sin[x − 1]])^7 + (35/1152)(x − ArcSin[0.8Sin[x − 1]])^9}, {Sin[x − ArcSin[0.8Sin[x − 1]]], x}, {x, ArcSin[x − ArcSin[0.8Sin[x − 1]]] + 0.05}}, {x, −Pi/2 , Pi/2}]



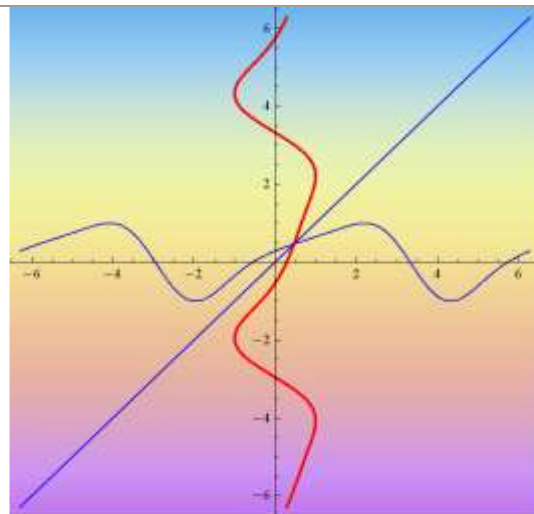
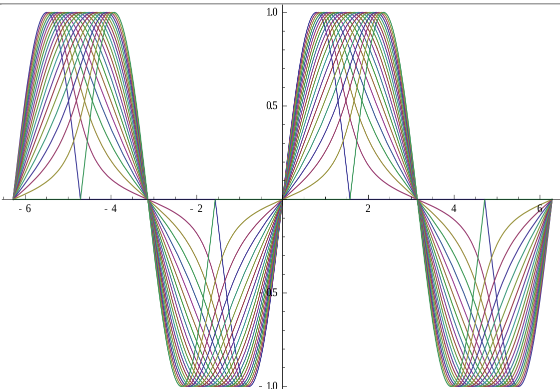
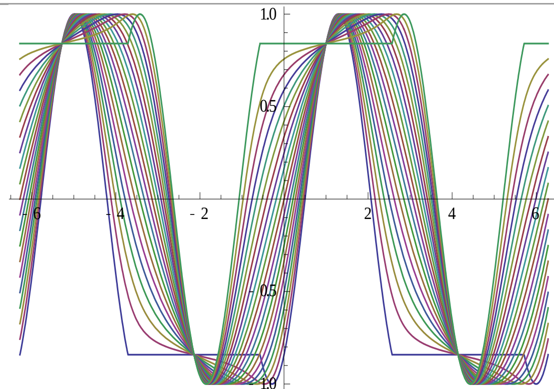


Fig.26.3 FSM-CE inversă ◄ **y = arc(sexθ)** şi simetrica ei faţă de prima bisectoare►

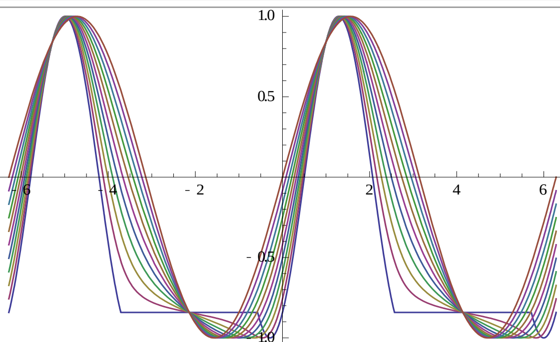
Plot[Evaluate[Table[{Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x]]]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]



Plot[Evaluate[Table[{Sin[x − ArcSin[0.1sSin[x − 1]]]}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}]]



s ∈ [-10, 0]



s ∈ [0, +10]

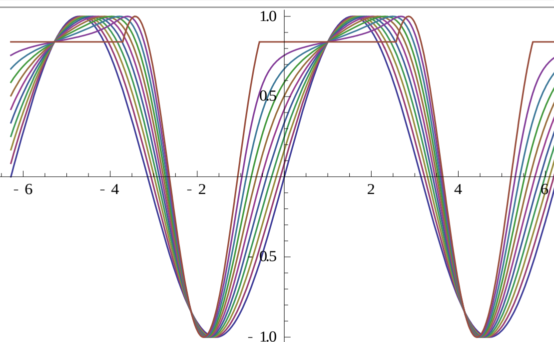


Fig.26.4 FSM-CE sexθ de excentricitate unghiulară nulă (**ε = 0**) ▲◄
şi diferite de zero (ε = 1) ▲► şi ▼◄►.

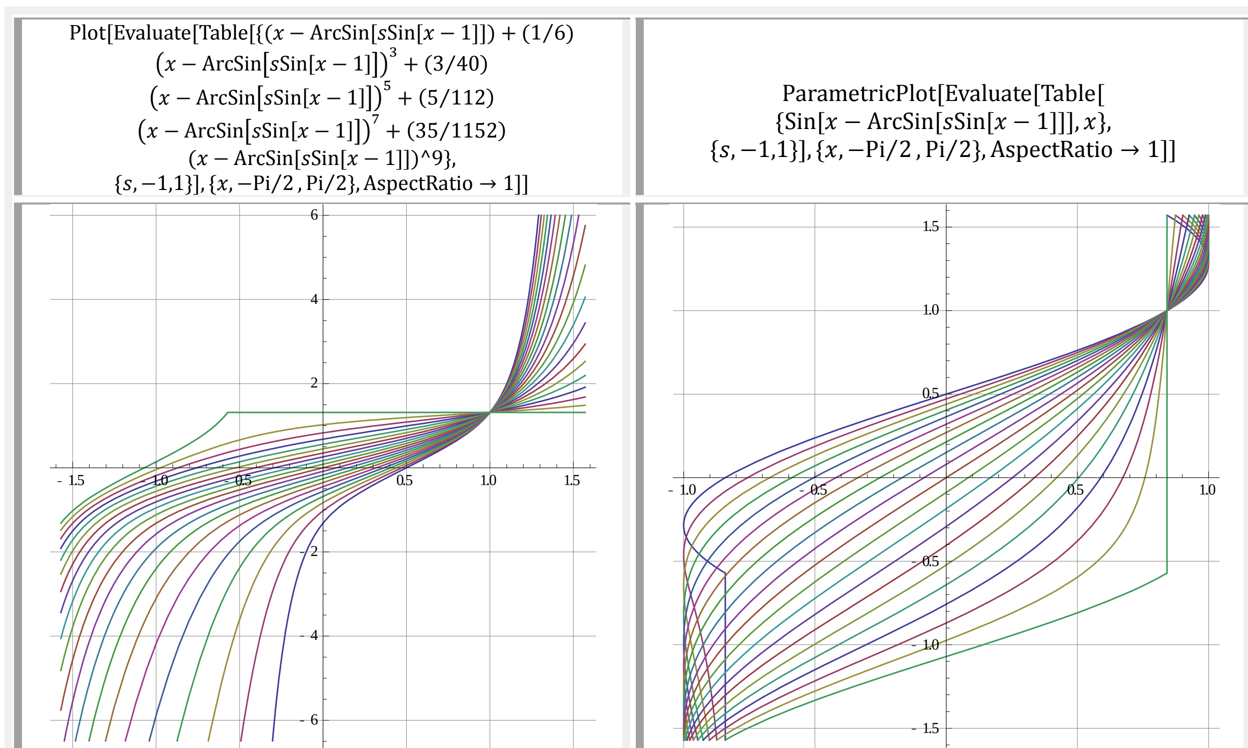


Fig.26.5 Două "inverse" posibile pentru cazul **ε ≠ 0**

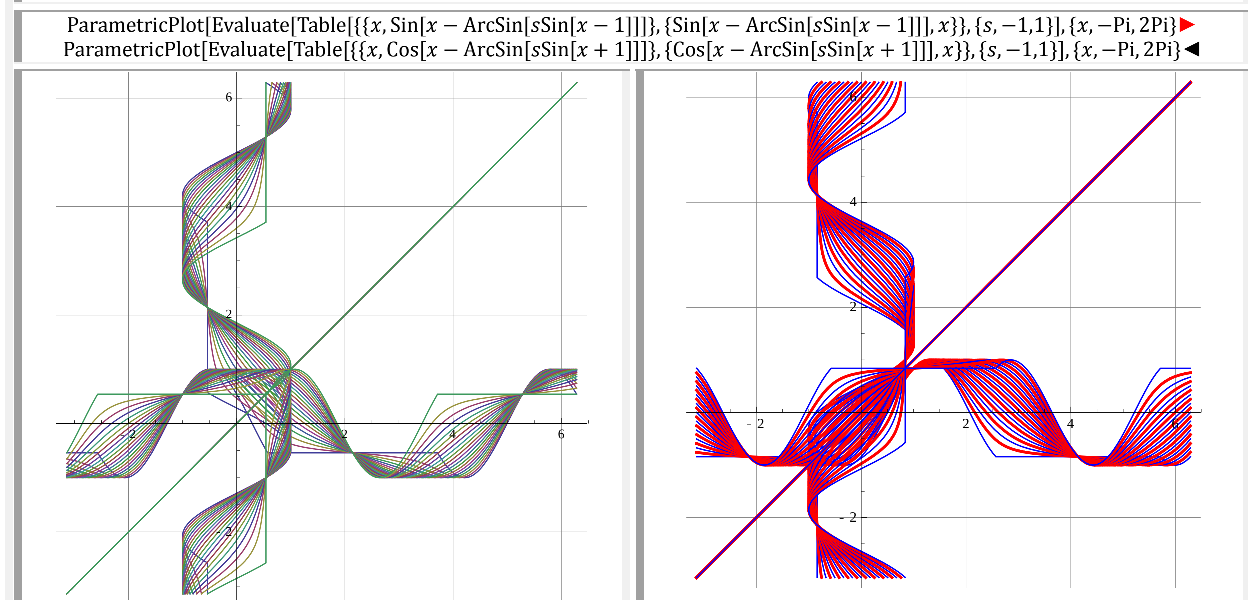


Fig.26.6 Inverse multivoce posibile pentru cazul **ε ≠ 0** ale **FSM-CE sexθ şi cexθ** care sunt şi simetricele funcţiilor directe faţă de prima bisectoare

Se mai poate observa şi rezultă că singura **FSM-CE** sexθ din familie de **ε = 1** este cea de S(s = 0, ε), pentru care θ → α şi sexθ → sinα, care, fiind o funcţie centrică, evident, are inversa simetrică faţă de prima bisectoare.

Cele două tipuri de "inverse" posibile, pentru cazul **ε ╪ 0**, realizate prin utilizarea dezvoltarii în serie (1) ◄ şi prin simetrizarea funcţiei sexθ► faţă de prima bisectoare, sunt prezentate în **figura 26.5.**

În primul caz, punctele repulsive $\mathbf{P_R}$ păstrează abscisele în $\theta_R = \varepsilon \pm 2k\pi$ (vezi θ = ε =1) (**Fig.26.5** ◄), aceleaşi ca şi pentru funcţia directă, iar, în al doilea caz, nu se mai păstrează abscisele acestor puncte, în schimb, punctele repulsive $\mathbf{P_R}$ apar la ordonatele de valoare y = ε ± 2kπ → y = ε = 1 (**Fig.26.5**) ►.

Se pune firesc întrebarea: *"Care este de fapt inversa funcţiei* ***sexθ*** *şi, în general, a* **FSM-CE** *? "*

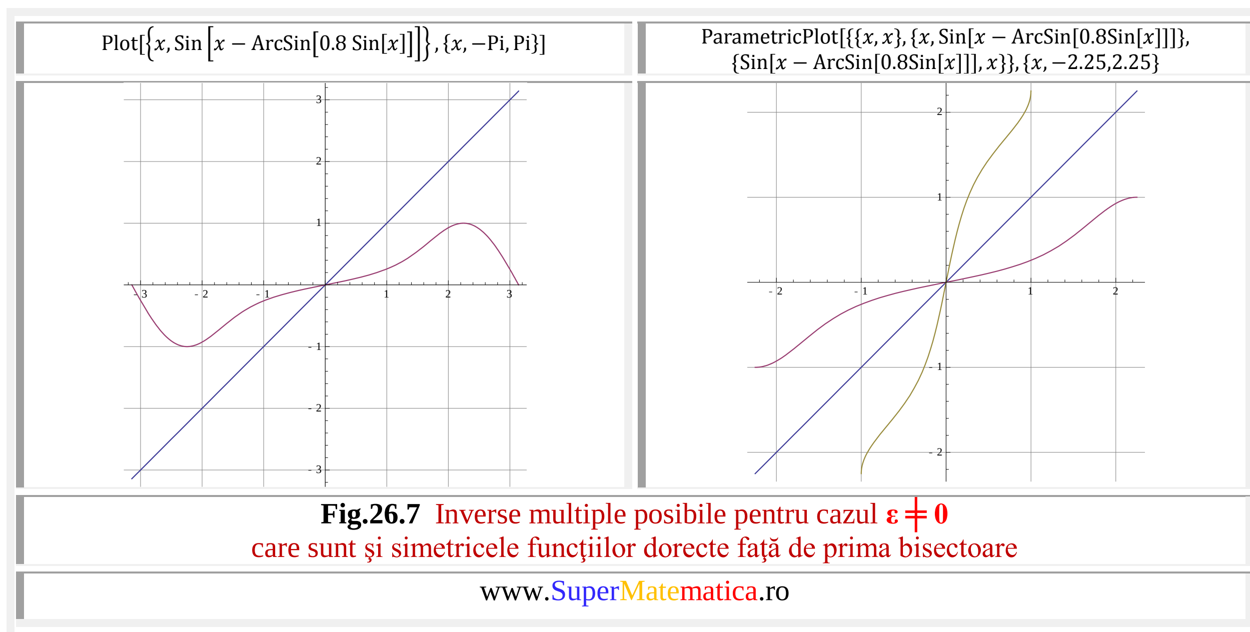


Fig.26.7 Inverse multiple posibile pentru cazul **ε ╪ 0**
care sunt şi simetricele funcţiilor dorecte faţă de prima bisectoare

www.SuperMatematica.ro

26.2. DETERMINAREA DOMENIULUI DE EXISTENŢĂ A FUNCŢIEI INVERSE UNIVOCE

Definiţie : Fie funcţia f :A → B, bijectivă (injectivă şi surjectivă).

Funcţia g : B → A, care asociază fiecărui element y din B elementul unic x din A, astfel încât, f(x) = y, se numeşte **functia inversă** a funcţiei f.

Notaţii : Se utilizează notaţia f^{-1} (şi se citeşte f la minus unu) pentru funcţia g ($g = f^{-1}$).

O funcţie f, numită **funcţie directă**, dacă are inversă, aceasta poartă denumirea de **funcţie inversabilă** sau **biunivocă** şi ea este aceea care se notează cu f^{-1}.

În cazul în care aceasta există, funcţia g (inversa funcţiei f) este unică sau univocă. În aceste condiţii are loc echivalenţa y = f(x) ↔ x = g(y) în care x parcurge domeniul de definiţie A al funtiei f, iar y, imaginea lui x prin funcţia f parcurge domeniul de definiţie B al funcţiei g sau codomeniul funţiei f.

Toate acestea sunt ilustrate, pentru funcţia directă **y = sinx** şi inversă y^{-1} = arcsinx a acestei funcţii în dreapta ► **figurii 1**.Astfel, pentru funcţia directă **y = sinx,** domeniul de definiţie este toată axa reală, adică x ∈ ℝ = [–∞, +∞], iar codomeniul este y ∈ [-1,1]. Ca urmare, domeniul funcţiei inverse y^{-1} = arcsinx este x ∈ {–1, +1] şi codomeniul este y^{-1} ∈ [–π, +π].

Domeniul de definiţie al funcţiei y = sexθ, este tot axa reală, adică θ ∈ ℝ iar codomeniu ei este tot y ∈ [-1, +1]. Pentru determinarea domeniului funcţiei inverse e necesar sa se stabileasca valorile argumentului / abscisei **θ** pentru care y = sex**θ** ia valorile limită y = ± 1.

În acest scop e necesar să se rezolve ecuaţia neliniară

(4) sex**θ** = ±1

Tabelul 26.1 Determinare abscisei punctului de tangenţă cu axa Ox.

Plot[{x, Sin[x − ArcSin[0.8Sin[x]]]}, {x, 0, Pi}]	**Ecuaţia**	**Eroarea / diferenţa ə**
	Sin[**2**.0-ArcSin[0.8 Sin[2.0]]]-1	-0.0733432
	Sin[**2**.1-ArcSin[0.8 Sin[2.1]]]-1	-0.027038
	Sin[**2**.2-ArcSin[0.8 Sin[2.2]]]-1	-0.0027496→ **ə** minimă
	Sin[**2**.3-ArcSin[0.8Sin[2.3]]]-1	-0.00404641
	Sin[**2**.4-ArcSin[0.8 Sin[2.4]]]-1	-0.0331811
	Sin[**2**.5-ArcSin[0.8 Sin[2.5]]]-1	-0.09101
	Sin[**2**.6-ArcSin[0.8Sin[2.6]]]-1	-0.176995
	Sin[**2**.7-ArcSin[0.8Sin[2.7]]]-1	-0.28927
	Sin[**2**.8-ArcSin[0.8 Sin[2.8]]]-1	-0.424759
	Sin[**2**.9-ArcSin[0.8Sin[2.9]]]-1	-0.579333
	CONCLUZIA: Soluţia pentru prima cifră electronică este e_1 = 2	

Graficele funcţiilor Observaţii:

Din graficul functiei **sexθ** se observă că primul maxuim al funcţiei este cuprins intre valorile **θ = 2** şi **θ = 2,5.**

De aceea, singura cifră protonică este $\mathbf{p_1 = 2}$

Sin[2.20-ArcSin[0.8 Sin[2.20]]]-1	-0.0027496	Sin[2.250-ArcSin[0.8 Sin[2.250]]]-1	-0.0000268172
Sin[2.21-ArcSin[0.8 Sin[2.21]]]-1	-0.00168005	Sin[2.251-ArcSin[0.8 Sin[2.251]]]-1	-0.0000401934
Sin[2.22-ArcSin[0.8 Sin[2.22]]]-1	-0.00087032	Sin[2.252-ArcSin[0.8 Sin[2.252]]]-1	-0.0000562717
Sin[2.23-ArcSin[0.8Sin[2.23]]]-1	-0.000323158	Sin[2.253-ArcSin[0.8Sin[2.253]]]-1	-0.0000750543
Sin[2.24-ArcSin[0.8 Sin[2.24]]]-1	-0.0000411671	Sin[2.254-ArcSin[0.8 Sin[2.254]]]-1	-0.0000965434
Sin[2.25-ArcSin[0.8 Sin[2.25]]]-1	-0.0000268172	Sin[2.255-ArcSin[0.8 Sin[2.255]]]-1	-0.000120741
Sin[2.26-ArcSin[0.8Sin[2.26]]]-1	-0.000282439	Sin[2.256-ArcSin[0.8Sin[2.256]]]-1	-0.00014765
Sin[2.27-ArcSin[0.8Sin[2.27]]]-1	-0.000810225	Sin[2.257-ArcSin[0.8Sin[2.257]]]-1	-0.000177272
Sin[2.28-ArcSin[0.8 Sin[2.28]]]-1	-0.00161223	Sin[2.258-ArcSin[0.8 Sin[2.258]]]-1	-0.00020961
Sin[2.29-ArcSin[0.8Sin[2.29]]]-1	-0.00269037	Sin[2.259-ArcSin[0.8Sin[2.259]]]-1	-0.000244665
CONCLUZIA: **Soluţia pentru a doua cifră electronică este e_2 = 5**		**CONCLUZIA:** **Soluţia pentru a treia cifră electronică este e_3 = 0**	

	Sin[2.2500-ArcSin[0.8 Sin[2.2500]]]-1	-0.0000268172→ **ə** minimă
	Sin[2.2501-ArcSin[0.8 Sin[2.2501]]]-1	-0.0000280333
	Sin[2.2502-ArcSin[0.8 Sin[2.2502]]]-1	-0.0000292764
	Sin[2.2503-ArcSin[0.8Sin[2.2503]]]-1	-0.0000305465
	Sin[2.2504-ArcSin[0.8 Sin[2.2504]]]-1	-0.0000318436
	Sin[2.2505-ArcSin[0.8 Sin[2.2505]]]-1	-0.0000331677
	Sin[2.2506-ArcSin[0.8Sin[2.2506]]]-1	-0.0000345188
	Sin[2.2507-ArcSin[0.8Sin[2.2507]]]-1	-0.0000358969
	Sin[2.2508-ArcSin[0.8 Sin[2.2508]]]-1	-0.000037302
	Sin[2.2509-ArcSin[0.8Sin[2.2509]]]-1	-0.0000387342
Grafic ne valorificat în actuala aplicare a metodei atomice MŞ	**CONCLUZIA: Soluţia pentru a 4-a cifră electronică este e_4 = 0**	

sau

(4') sex **θ** ∓ 1 = 0,

adică

(5) sin{ **θ** – arcsin[s.sin(**θ** – **ε**)]} ∓ 1 = 0.

Deoarece, programul evoluat **MATHEMATICA 8** a lui **Stephan Wolfram**, nu a putut soluţiona această problemă neliniară, s-a apelat la metoda descrisă în lucrările lui **Mircea Eugen Şelariu**

1)"**MATEMATICA ATOMICĂ, METODA DETERMINĂRII SUCCESIVE A CIFRELOR CONSECUTIVE ALE UNUI NUMĂR → SOLUŢIE**";

2)**"CIFRELE, PARTICULELE ELEMENTERE ALE MATEMATICII"** şi

3)" **I N T E R S E C Ţ I I Î N P L A N** " lucrări publicate pe / în web site-ul www.cartiaz.ro.

În aceste lucrări, funcţiile neliniare intersectau axa absciselor, astfel că se căuta la inceput grob, sau cifrele protonice (întregi), urmate de cifrele electronice (zecimale), apoi din ce în ce mai fin, pe măsură ce cifrele consecutive ale numărului soluţie erau depistate, abscisa în care funţia intersecta axa absciselor.

În cazul de faţă, **FSM-CE** sex**θ**, fiind tangentă la dreptele orizontale y = ± 1, în punctele de abscisă extreme căutate / soluţie, funcţia din ecuaţia neliniară (5), nu traversează axa absciselor, ci va fi tangentă ei, în punctele căutate ca soluţie ale ecuaţiei (5). De aceea nu se va căuta valoarea cifrei, dintre cele 10 cifre posibile (**0,1, 2, … 8, 9**) pentru care funcţia schimbă de semn (traversează axa x, sau θ în cazul de faţă), ca în cazurile descrise în lucrarile anterior enunţate, ci cifra pentru care se obţine o diferenţa negativă de valoare minimă, care indică apropierea funcţie / curbei, în zona respectivă de maxim / extrem, de punctul de tangenţa cu axa absciselor **θ.**

Procedeul este ilustrat în **tabelul 1** în următoarele faze:

1) **Antamarea procedeului**.

În această fază, din graficul funcţiei, se deduc vizual numărul maxim posibil de cifre lizibile şi sigure ale soluţiei căutate.

Din graficul funcţiei în intervalul **θ** ∈ [0 ,π], prezentat în **tabelul 1**, se observă că unul dintre maximele funcţiei sex**θ** (primul) apare în intervalul **θ** ∈ [2; 2,5]. De aceea, prima şi singura cifră protonică (întreagă) va fi $\mathbf{p_1 = 2}$. Procedeul putea fi imbunătăţit prin ridicarea graficului funcţiei sex**θ** doar în intervalul **θ** ∈ [2; 2,5] , grafic prezentat in **tabelul 1**, dar ne utilizat în continuare. Din el rezultă mai precis, că punctul de tangenţă căutat se află în mijlocul intervalului **θ** ∈ [2,2; 2,3]. Apoi se ia in considerare doar acest interval pentru un grafic următor, ş.a.m.d, cât programul de calculator permite determinarea lizibilă a intervalului ;

2) **Determinarea cifrelor electronice**.

Pentru determinarea succesiva a cifrelor electonice (zecimale), care sunt soluţii ale acestei probleme, în 10 ecuaţii (5) se introduce de 10 ori cifra **2,** urmată, în ordine, de cele zece cifre existente posibile, de la **0** la 9, **candidate** la a fi o posibilă cifră succesiva soluţie a problemei. Deoarece eroarea minimă de **∂** = - 0.0027496 → minimă, apare pentru cifra **2**, rezultă că prima cifră electronică exactă este $\mathbf{e_1 = 2}$**.** Ea se adaugă acum cifrei protonice **2** şi se obţin primele 2 cifre exacte ale soluţiei **2, 2…..**

În continuare, se interpune între cifra protonică, aflata în prima fază, şi cele 10 cifre existente, cifra **2** în cele 10 ecuaţii şi se cere din nou calcularea / rezultatul erorilor.

În acest pas, eroarea minimă este de **∂** = - 0.0000268172 şi apare în dreptul cifrei **5**, astfel că a doua cifră electronică exactă este $\mathbf{e_2 = 5}$**.** Ea se adaugă la cifrele deja obţinute şi rezultă primele 3 cifre exacte ale soluţiei : **2, 25…..**

Procedând la fel, în continuare, rezultă a 3-a cifră electronică $\mathbf{e_3 = 0}$, apoi a 4-a cifră electronică $\mathbf{e_4 = 0}$ ş.,a.m.d. pentru câte cifre exacte sunt necesare sau până când eroarea devine nulă.

Ştiinţele Matematice stipulează că **g**raficele funcţiei directe şi a celei inverse, când ea există, **sunt simetrice faţă de prima bisectoare**, ceea ce ne faciliteaza raspunsul la intebarea anterioară.

Ca urmare, sau în concluzie, inversa corectă a funcţie sexθ este atât simetrica ei faţă de prima bisectoare, cât şi exprimarea ei prin utilizarea dezvoltării în serie a funţiei sinα sau sinx din relaţia (1), în care se înlocuieşte abscisa α, sau x, cu funcţia

(6) $\begin{cases} \alpha = \theta - \arcsin\,[\boldsymbol{s}.\sin\,(\theta - \boldsymbol{\varepsilon})] \\ x = y - \arcsin\,[\boldsymbol{s}.\sin\,(y - \boldsymbol{\varepsilon})] \end{cases}$

aşa cum se procedează la obţinerea şi a altor **FSM-CE**, numai dacă excentricitatea unghiulară **ε** este nulă, adică **ε = 0,** aşa cum s-a mai specificat /arătat anterior.

În caz contrar, pentru **ε ╪ 0,** pot fi definite două tipuri de **"inverse":**

a) **Inversa clasică sau adevărată** care este **simetrica** funcţiei directe faţă de prima bisectoare şi care permite exprimarea ecuaţiilor şi a graficelor lor, atât pentru funcţiile inverse **univoce** cat şi pentru cele **multivoce**;

b) **Inversa pseudoexcentrică** care se obţine prin utilizarea **dezvoltărilor în serii** de puteri şi care permite numai obţinerea funcţiilor "inverse" **univoce**.

26.3 FUNCŢII SUPERMATEMATICE (FSM) CIRCULARE EXCENTRICE (CE) INVERSE UNIVOCE ŞI MULTIVOCE.

NOI FUNCŢII INVERSE ÎN (SUPER)MATEMATICĂ

În ideea că obţinerea unor funcţii matematice noi a fost, este şi va fi o preocupare permanentă a Matematicii, aşa cum se poate constata / rezultă din istoria acestei ştiinţe, se vor prezenta, în continuare, o pleiadă de noi funcţii supermatematice circulare excentrice inverse, multivoce din care pot fi deduse fără dificultate şi cele univoce.

Mai mult chiar, rezultă în continuare, fără dificultate, că **FSM-**CE de variabilă **excentrică α** sau **y** sunt inversele **FSM-**CE de variabilă excentrică **θ** sau x, concluzie deosebit de importantă, deoarece oferă soluţiile unor ecuaţii trigonometrice neliniare, posibil de rezolvat "exact" numeric şi mai greu, uneori deloc, de rezolvat simplu şi exact simbolic !!..

De aceea, sunt prezentate, în paralel, şi graficele funcţiilor directe.

Astfel, în **figura 26.8** sunt prezentate, în partea superioară ▲, **FSM-**CE **amplitudine excentrică** directe şi inverse, de **variabilă excentrică aexθ**, iar în partea inferioară ▼, cele de **variabilă centrică Aexα.**

Prin compararea graficelor, dar nu numai în acest mod, ci şi din teoria generală a funcţiilor **supermatematice** circulare excentrice (**FSM-**CE) şi nu numai, rezultă că

(t) $\mathbf{aex\theta}^{-1} = \mathbf{Aex\alpha} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\alpha})$.

şi, în consecinţă, deoarece inversa inversei este insăşi funcţia directă, rezultă că

(8) $\mathbf{Aex\alpha}^{-1} = \mathbf{aex\theta} = \boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\theta})$,

aşa cum se poate verifica în **figura 26.8**.

Se ştie că, dacă funcţia directă este

(9) $y(x) = \mathbf{aexx} = x - \arcsin[s.\sin(x - z)]$,

sau

(9') $\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{aex\theta} = \boldsymbol{\theta} - \mathbf{arcsin(s.sin(\theta - \varepsilon))}$,

atunci inversa ei va fi

(10) $x(y) = \mathbf{Aexy} = y + \arcsin\frac{s.sin(y-z)}{\sqrt{1+s^2-2s.cos(y-z)}} = y + \arcsin\frac{s.sin(y-z))}{Rexy}$,

sau

(10') $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Aex\alpha} = \alpha + \arcsin\frac{s.sin(\alpha-\varepsilon))}{\sqrt{1+s^2-2s.cos(\alpha-\varepsilon)}} = \alpha + \arcsin\frac{s.sin(\alpha-\varepsilon))}{Rex\alpha}$.

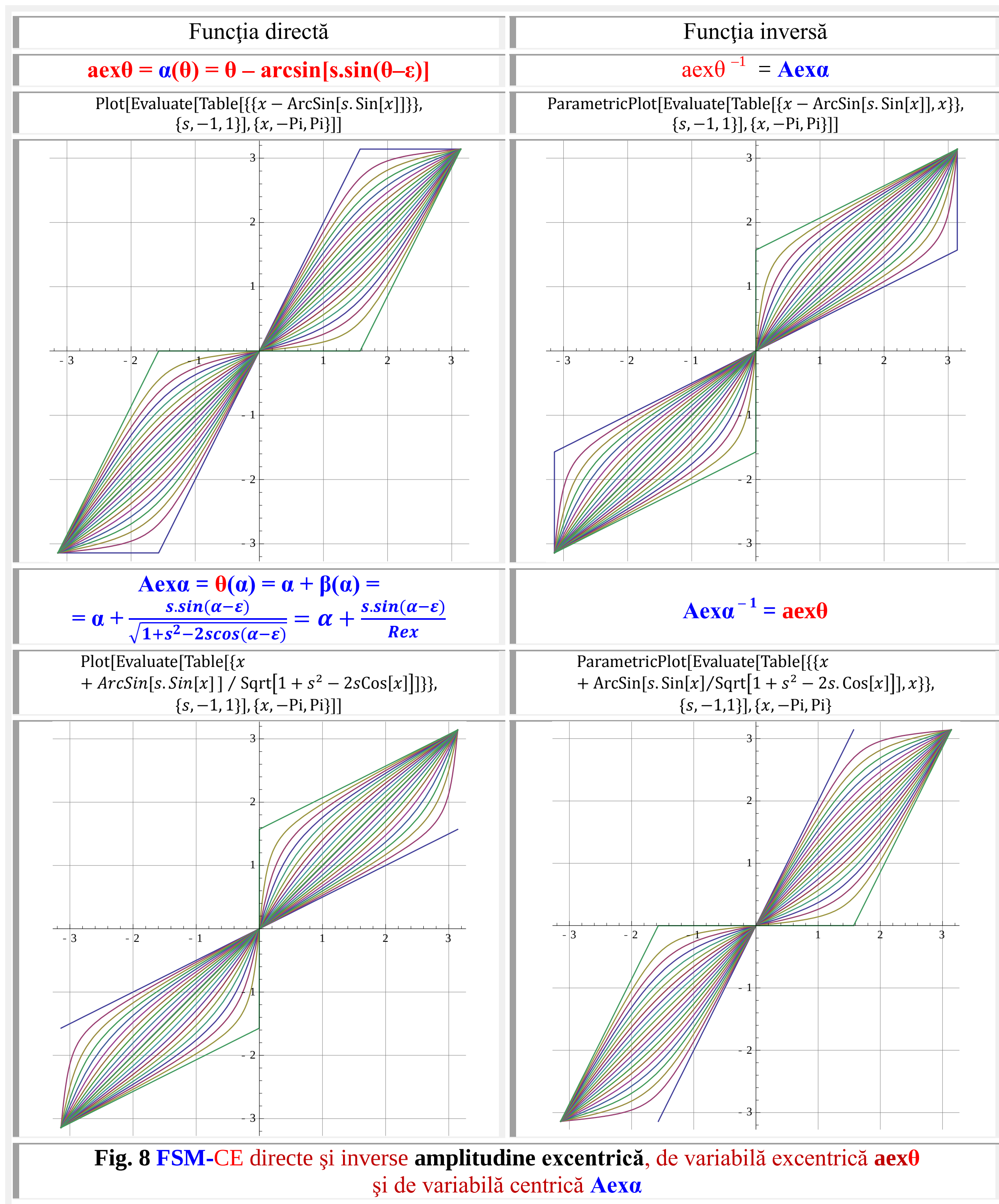


Fig. 8 FSM-CE directe şi inverse **amplitudine excentrică**, de variabilă excentrică **aexθ** şi de variabilă centrică **Aexα**

Ceea ce arată, un lucru **extrem de important**, că soluţia ecuaţiei trigonometrice neliniare, derivată din (11), pentru determinarea inversei funcţiei aex**x**, adică

(13) x – arcsin[s.sinx] – y = 0
în funcţie de x este funcţia

(11) $x = y + \arcsin\frac{s.sin(y-z)}{\sqrt{1+s^2-2s.cos(y-z)}}$.

Pentru verificare, este necesar să se rezolve ecuaţia
(12) x – arcsin[s.sinx] – y = 0,
în funcţie de x, respectiv, **α** în funcţie de **θ**, adică **α(θ)** .

Tabelul 26.2 Verificarea soluţiilor cu programul de calcul **Matematica 8**		
x = 3, s = 0,8	N[3-ArcSin[0.8 Sin[3]]+ArcSin[(0.8 Sin[3-ArcSin[0.8 Sin[3]]])/ $\sqrt{1.64 \cdot 1.6\, Cos[3 \cdot ArcSin[0.8\, Sin[3]]]}$]] = 3.	y = x = 3
x = 1, s = 0,8	N[1-ArcSin[0.8 Sin[1]]+ArcSin[(0.8 Sin[1-ArcSin[0.8 Sin[1]]])/ $\sqrt{1.64 \cdot 1.6\, Cos[1 \cdot ArcSin[0.8\, Sin[1]]]}$]] = 1.	y = x = 1
$x = \frac{\pi}{2}$, s = 0,8	N[Pi/2-ArcSin[0.8 Sin[Pi/2]]+ArcSin[(0.8 Sin[Pi/2-ArcSin[0.8 Sin[Pi/2]]])/ $\sqrt{1.64 \cdot 1.6\, Cos[Pi/2 \cdot ArcSin[0.8\, Sin[Pi/2]]]}$]] $= 1.570796326794897..... = \frac{\pi}{2}$	$y = x = \frac{\pi}{2}$
x = 3, s = 0,6	N[3-ArcSin[0.6 Sin[3]]+ArcSin[(0.6 Sin[3-ArcSin[0.6 Sin[3]]])/ $\sqrt{1.36 \cdot 1.2\, Cos[3 \cdot ArcSin[0.6\, Sin[3]]]}$]] = 3.	y = x = 3

Încercarea de-a oferi programului evoluat **Matematica 8** posibilitatea de-a se evidenţia prin rezolvarea simbolică a acestei ecuaţii a fost un insucces.

La comanda

(13) Solve[x − ArcSin[s Sin[x]] − y == 0, x],
răspunsul programului a fost
(14) "This system cannot be solved with the methods available to Solve",
adică "Acest sistem nu poate fi rezolvata cu metodele disponibile de rezolvare".

Pentru a verifica valabilitatea soluţiei, s-a încercat calcularea valorii funcţiei x(y) din relaţia (12) în care s-a înlocuit x cu expresia din relaţia (11), rezultatul trebuind să fie nul, dacă x, dat de relaţia (11), verifică ecuaţia
(15) y(x) = 0 → y(x(y)) = 0

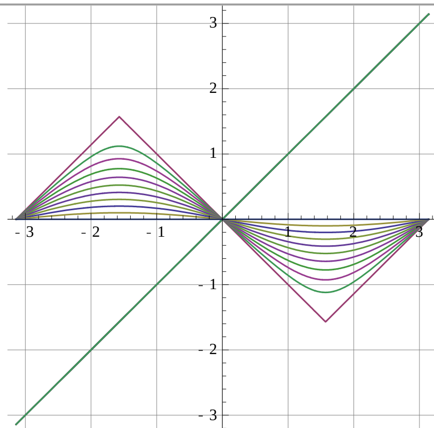
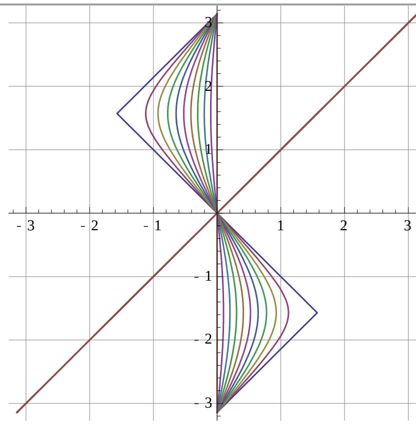
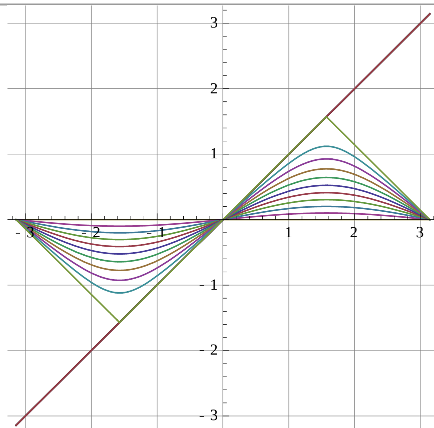
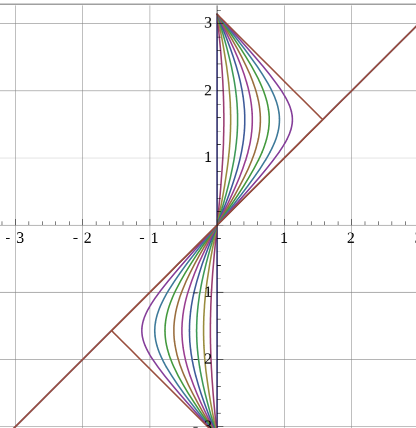
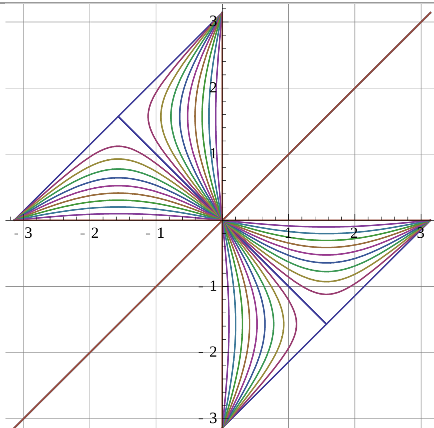
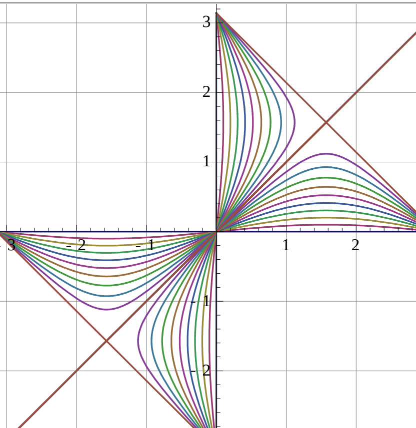
Deoarece programele n-au reuşit să calculeze simbolic acest lucru, s-a trecut la calculul numeric, în care scop, s-a ales s = 0,8 şi θ ≡ x = 3 **care a dat** rezultate. Astfel, la comanda de calcul numeric

(16) $$\begin{cases} N\left[y + \arcsin\frac{s.sin(y-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.cos(y-\varepsilon)}}\right], \quad pt.\ \ y = x - ArcSin[s.Sin[x]] \\ cu\ s = 0{,}8\ şi\ x = 3 \\ N[3 - ArcSin[0.8\, Sin[3]] + \frac{ArcSin[0.8\, Sin[3 - ArcSin[0.8\, Sin[3]]]}{\sqrt{1+0.8^2-2\, 0.8 Cos[3-ArcSin[3]]}}] = 3 \end{cases}$$

s-a obţinut şi y = 3 = x, astfel că ecuaţia este verificată numeric identic.

Au fost efectuate verificări şi pentru alte valori, ca cele din **tabloul 26.2**, prezentat anterior.

Este evident ca pentru x = y → y – x = 0 şi y = x arată că toate aceste puncte sunt simetrice faţă de prima bisectoare.

Plot[Evaluate[Table[{{x}, {ArcSin[sSin[x]]}}, {s, −1,0}], {x, −Pi, Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, x}, {ArcSin[sSin[x]], x}}, {s, −1, 0}], {x, −Pi, Pi}]]
	
Plot[Evaluate[Table[{{x, x}, {ArcSin[sSin[x]]}}, {s, 0, 1}], {x, −Pi, Pi}	ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, x}, {ArcSin[sSin[x]], x}}, {s ,0, 1}], {x, −Pi, Pi}
	
ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, x}, {ArcSin[sSin[x]], x}, {x, ArcSin[sSin[x]]}}, {s, −1,0}], {x, −Pi, Pi}	ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, x}, {ArcSin[sSin[x]], x}, {x, ArcSin[sSin[x]]}}, {s, 0,1}], {x, −Pi, Pi}
	

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, x}, {ArcSin[0.1sSin[x]], x},{x, ArcSin[0.1sSin[x]]}},

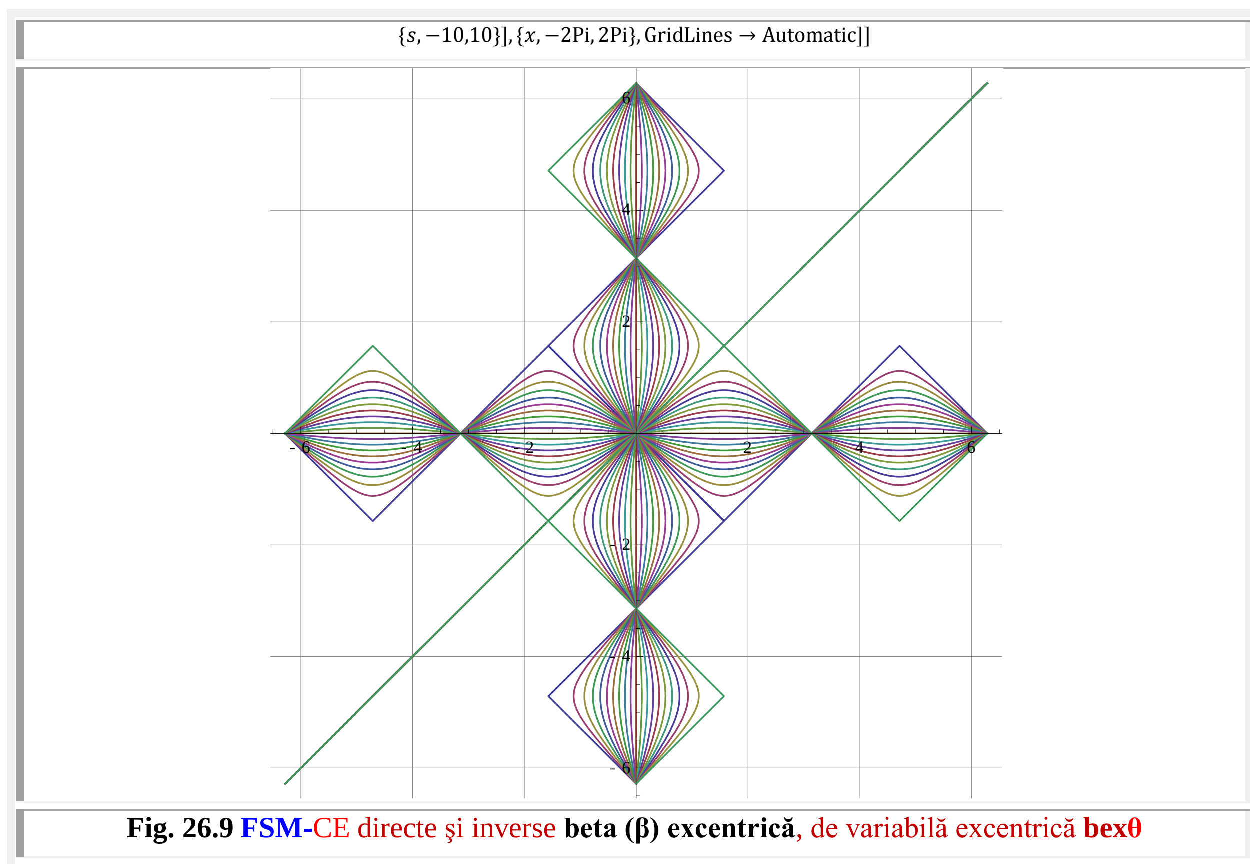


Fig. 26.9 FSM-CE directe şi inverse **beta (β) excentrică**, de variabilă excentrică **bexθ**

Nu toate **FSM-**CE de variabilă excentrică şi centrică sunt inverse una alteia. Este suficient să comparăm graficele funcţiilor din **figura 26.9** cu cele din **figura 26.10**, pentru a constata acest fapt.

Aşa de exemplu, funcţiile **beta excentrice** de variabilă excentrică θ, sau x, **bexθ**, directe şi inverse, reprezentate în **figura 26.9** şi cele de variabilă centrică **α**, sau y, reprezentate în **figura 26.10**, nu sunt inverse una alteia, ca în cazul funcţiilor **amplitudine excentrică**, anterior prezentate.

În partea superioară ▲a figurii sunt prezentate, separat, funcţiile directe în stânga figurii ◄ şi inversele lor în dreapta ►, iar în partea inferioară ▼ sunt prezentate suprapuse.

FSM-CE aexθ şi bexθ, cât şi cele de variabilă centrică Aexα şi Bexα nu au corespondente în matematica centrică (**MC**), în schimb, se poate observa că pentru excentricitate numerică liniară unitară (**s = 1**) ele pot modela funcţiile speciale în dinţi de f(i)erestrău simetrici, cu ajutorul relaţiilor lor simple, invariante, alcătuite din numai doi termeni, fără dezvoltări în serii şi fără să aproximeze segmentele de linii drepte ale dinţilor, cum este cazul în exemplul comparat.

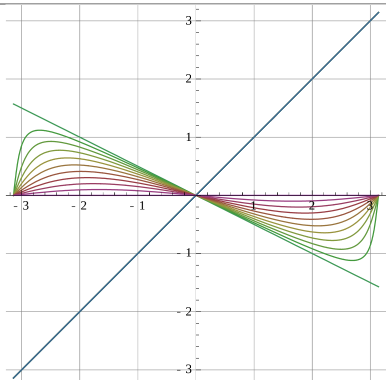
Existenţa unei excentricităţi unghiulare ε nu face alt ceva decât să deplaseze graficele **FSM-**CE **bexθ** directe cu – ε, paralel cu axa absciselor, iar a funcţiei aexθ directă cu + ε, atât pe direcţia absciselor, cât şi pe cea a ordonatelor, deci, să deplaseze punctul nodal N(0,0), al familiei de curbe, din originea O(0,0), pentru ε = 0, în punctul N(ε, ε), pentru $\varepsilon \neq 0$.

Pentru a determina ecuaţia inversei **FSM-**CE **bexθ** este necesar să se rezolve, ca / în funcţie de y, ecuaţia

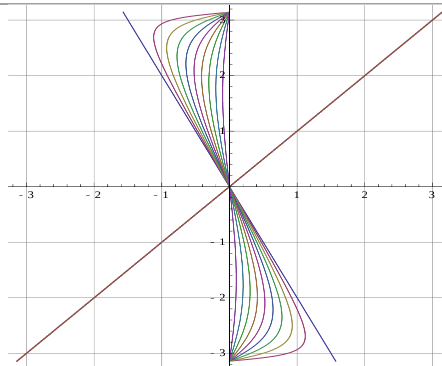
(17) y = bexθ sau, explicit,

(17') y – arcsin[s.sin(θ – ε)] = 0

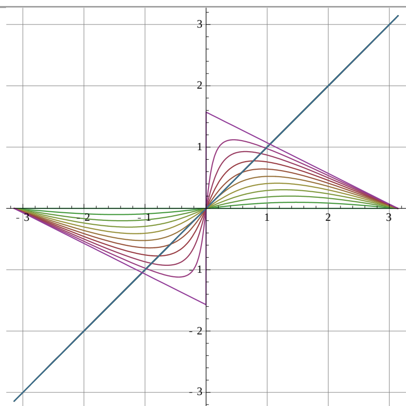
Plot[Evaluate[Table[{{x, x},
{x, ArcSin[0.1s Sin[x]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[x]]]}},
{s, −1,0}], {x, −Pi, Pi}]



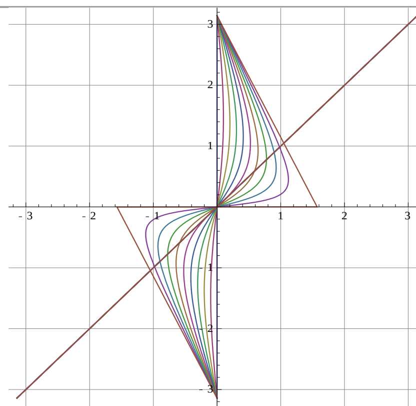
ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, x},
{ArcSin[0.1s Sin[x]/Sqrt[1 + 1s^2 − 2sCos[x]]], x}},
{s, −1,0}], {x, −Pi, Pi},



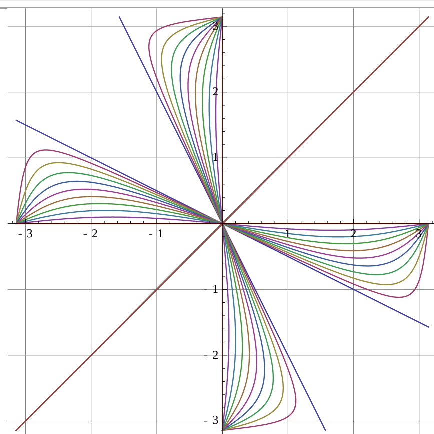
Plot[Evaluate[Table[{{x, x},
{x, ArcSin[s Sin[x]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[x]]]}},
{s, 0,1}], {x, −Pi, Pi}]



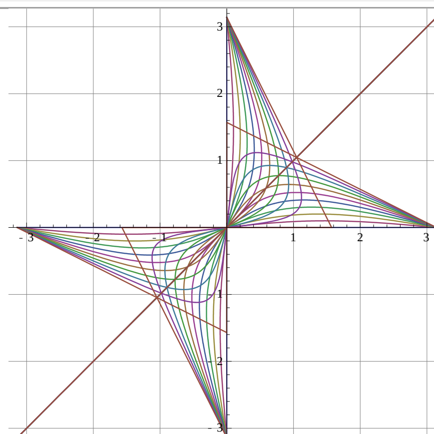
ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, x},
{ArcSin[0.1s Sin[x]/Sqrt[1 + 1s^2 − 2sCos[x]]], x}},
{s, 0,1}], {x, −Pi, Pi},



ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, x},
{x, ArcSin[s Sin[x]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[x]]]},
{ArcSin[s Sin[x]/Sqrt[1 + 1s^2. 2sCos[x]]], x}},
{s, −1,0}], {x, −Pi, Pi}]



ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, x},
{x, ArcSin[s Sin[x]/Sqrt[1 + s^2 − 2sCos[x]]]},
{ArcSin[s Sin[x]/Sqrt[1 + 1s^2. 2sCos[x]]], x}},
{s, 0 ,1}], {x, −Pi, Pi}]



ParametricPlot[Evaluate[Table[{{x, x}, {x, ArcSin[0.1s Sin[x]/Sqrt[1 + 0.01s^2 − 0.2sCos[x]]]},

{ArcSin[0.1s Sin[x]/Sqrt[1 + 0.01s^2 − 0.2sCos[x]]], x}}, {s, −10,10}], {x, −2Pi, 2Pi}, GridLines → Automatic]]

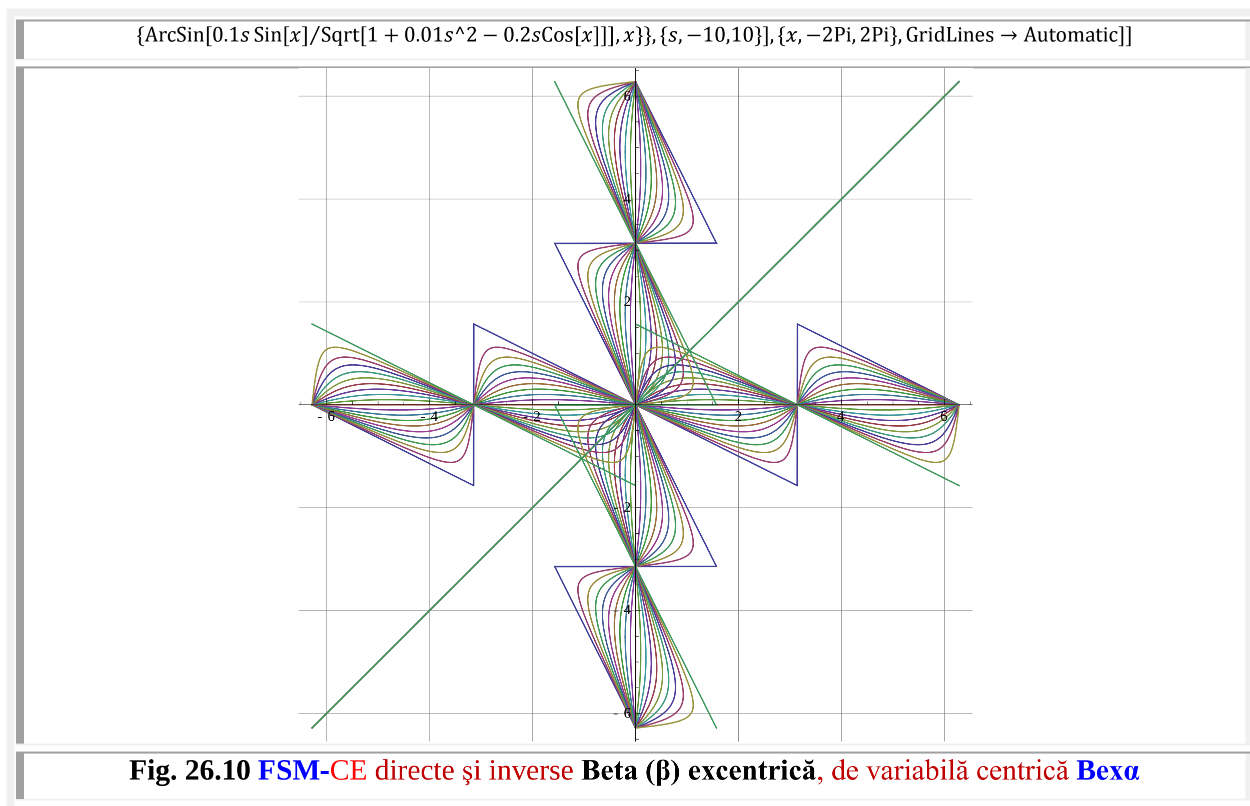


Fig. 26.10 FSM-CE directe şi inverse **Beta (β) excentrică**, de variabilă centrică **Bexα**

A cărei soluţie, facil de determinat, scriind

(18) y = arcsin[s.sin(θ – ε)] , astfel că

(19) siny = s.sin(θ – ε)

din care rezultă

(20) θ – ε = arcsin$\frac{siny}{s}$

astfel că, în final, soluţia ecuaţiei este

(21) x ≡ θ = ε + arcsin$\frac{siny}{s}$

cu graficele din **figura 26.11**.

Aceeaşi soluţie o oferă şi programul Mathematica 8, cu observaţia / indicaţia următoare **"Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not \ be found; use Reduce for complete solution information"** adică, conform unei traduceri automate " Funcțiile inverse sunt utilizate de către Rezolva, astfel încât unele soluții nu pot fi găsite, utilizați Reducerea pentru informații cu privire la soluția completă"

Utilizând "Reducerea"

(22) Reduce[ArcSin[a Sin[x]]-y==0,{x}]

Rezultă : (C[1]∈Integers&&a≠0&&((Re[y]==-(π/2)&&Im[y]≥0&&(x==π-ArcSin[Sin[y]/a]+2 π C[1]||x==ArcSin[Sin[y]/a]+2 π C[1]))||(-(π/2)<Re[y]<π/2&&(x==π-ArcSin[Sin[y]/a]+2 π C[1]||x==ArcSin[Sin[y]/a]+2 π C[1]))||(Re[y]==π/2&&Im[y]≤0&&(x==π-ArcSin[Sin[y]/a]+2 π C[1]||x==ArcSin[Sin[y]/a]+2 π C[1]))))||(a==0&&y==0). Se poate observa în / pe **figura 26.11** că în intervalul t ∈ [$-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$] **inversa,** ca funcţie **univocă,** este simetrică faţă de prima bisectoare a familiei de curbe directe bexθ, aşa cum se prezintă situaţia şi în **figura 26.12 ▲◄**.

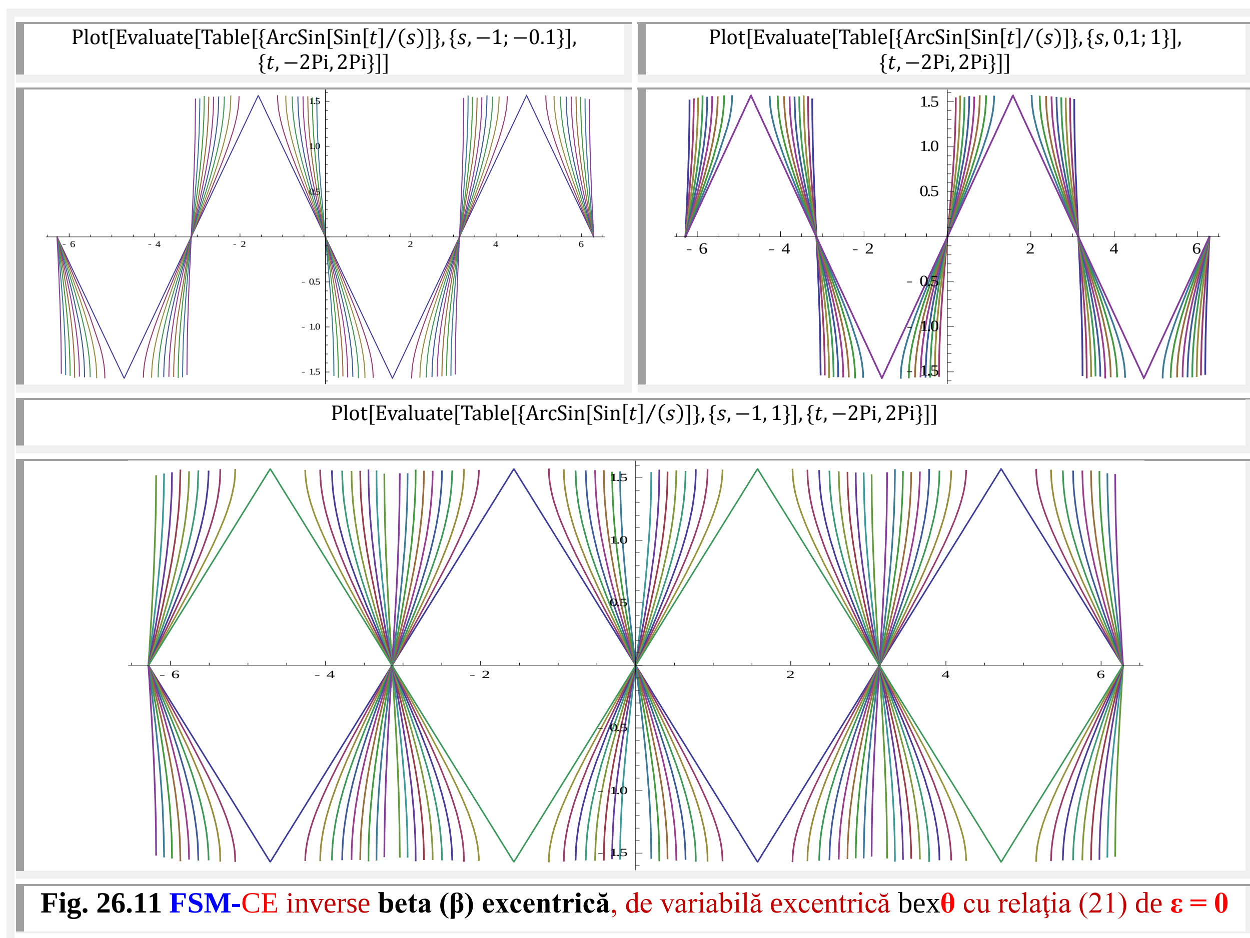
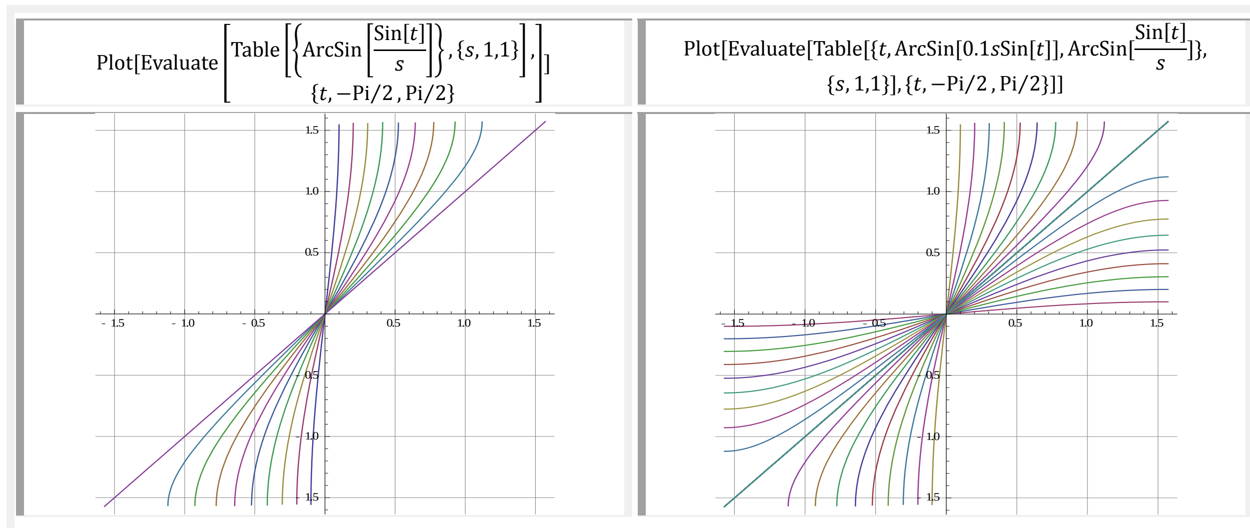


Fig. 26.11 FSM-CE inverse **beta (β) excentrică**, de variabilă excentrică bex**θ** cu relaţia (21) de **ε = 0**



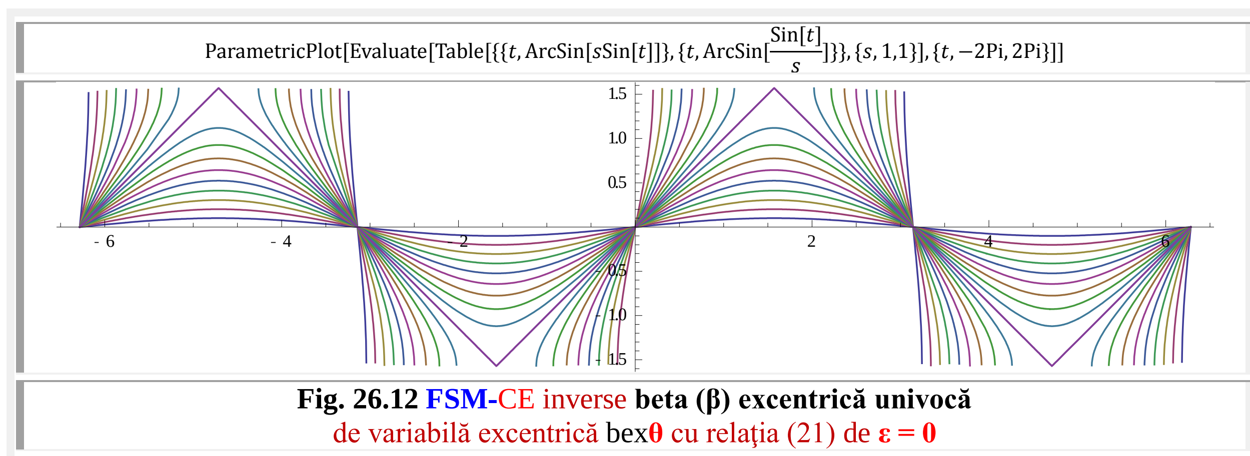


Fig. 26.12 FSM-CE inverse **beta (β) excentrică univocă**
de variabilă excentrică bex**θ** cu relaţia (21) de **ε = 0**

În **figura 26.12 ▲►** sunt prezentate atât familia de funcţii directe cât şi cea de funcţii inverse univoce, în aceleaşi grafic, pentru comparţie şi pentru constatarea simetriei lor faţă de prima bisectoare, iar jos ▼ sunt prezentate familia de funcţii directe şi "inversele" în domeniul θ∈ [-2π, 2π], care, aşa cum se poate observa, inversa din domeniul s ∈ [-1, 1].

În **figura 26.13** se poate observa că inversele **FSM-**CE bexθ ◄ din afara intervalului t ∈ $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, adică din intervalele / domeniile t ∈ $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ şi t ∈ $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, sunt **asemănătoare** (nu identice !) cu funcţia directă pentru excentricităţi liniare supraunitare (**s > 1**) ►. Dacă funcţia directă şi cea inversă multivocă, ca simetrica funcţiei directe faţă de prima bisectoare, se reprezintă împreună, se obţin graficele din **figura 26.14►**, iar funcţia inversă multivocă poate fi obţinută aşa cum se indică în **figura 26.14** ◄.

Funcţii interesante se obţin atât în 2D cât şi, mai ales, în 3D reprezentând impreună funcţia directa şi cea inversă într-un interval impropiu celei inverse, aşa cum sunt reprezentate în **figura 26.15**.

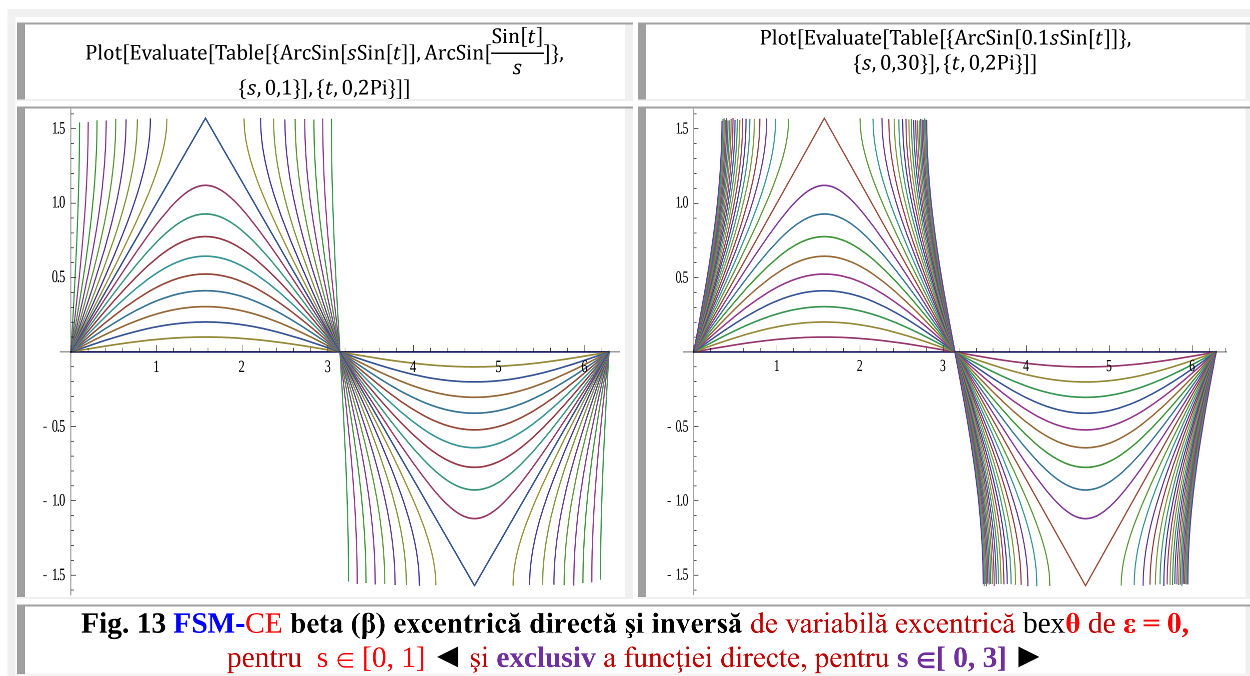


Fig. 13 FSM-CE **beta (β) excentrică directă şi inversă** de variabilă excentrică bex**θ** de **ε = 0,**
pentru s ∈ [0, 1] ◄ şi **exclusiv** a funcţiei directe, pentru **s ∈[0, 3]** ►

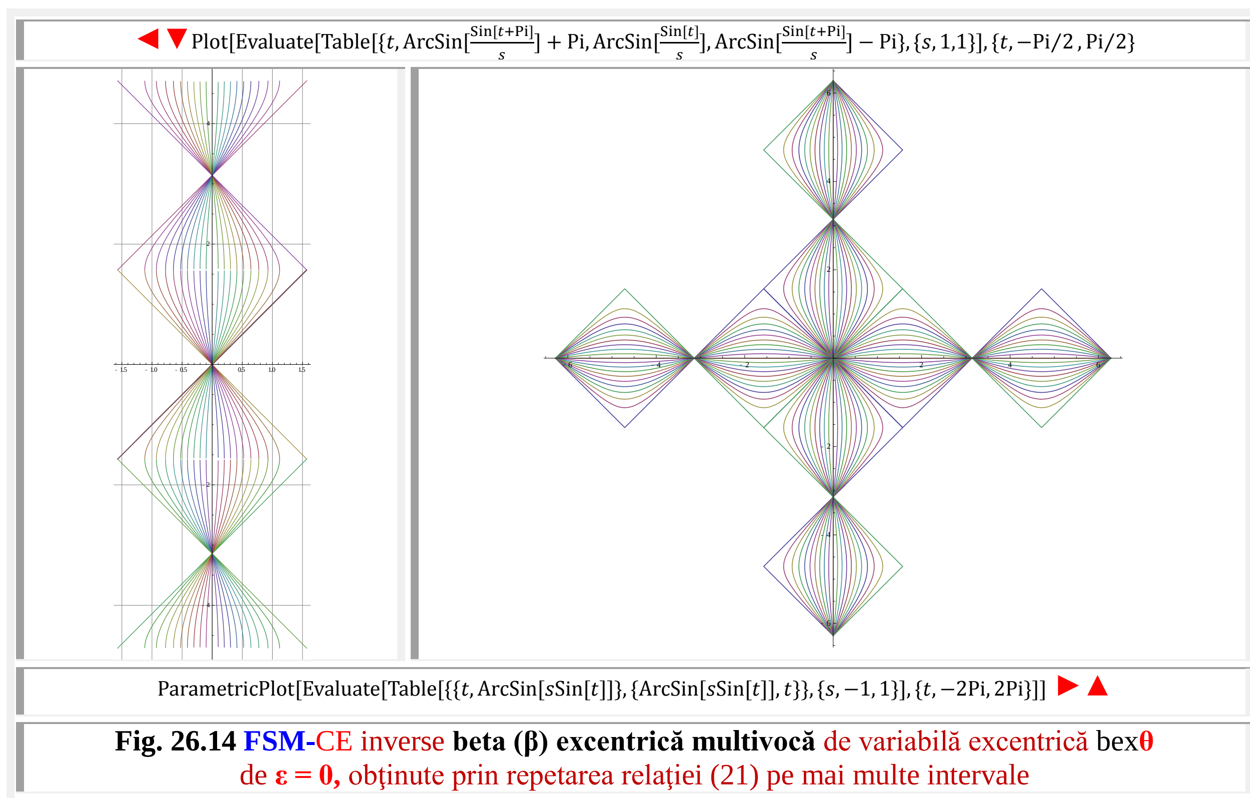
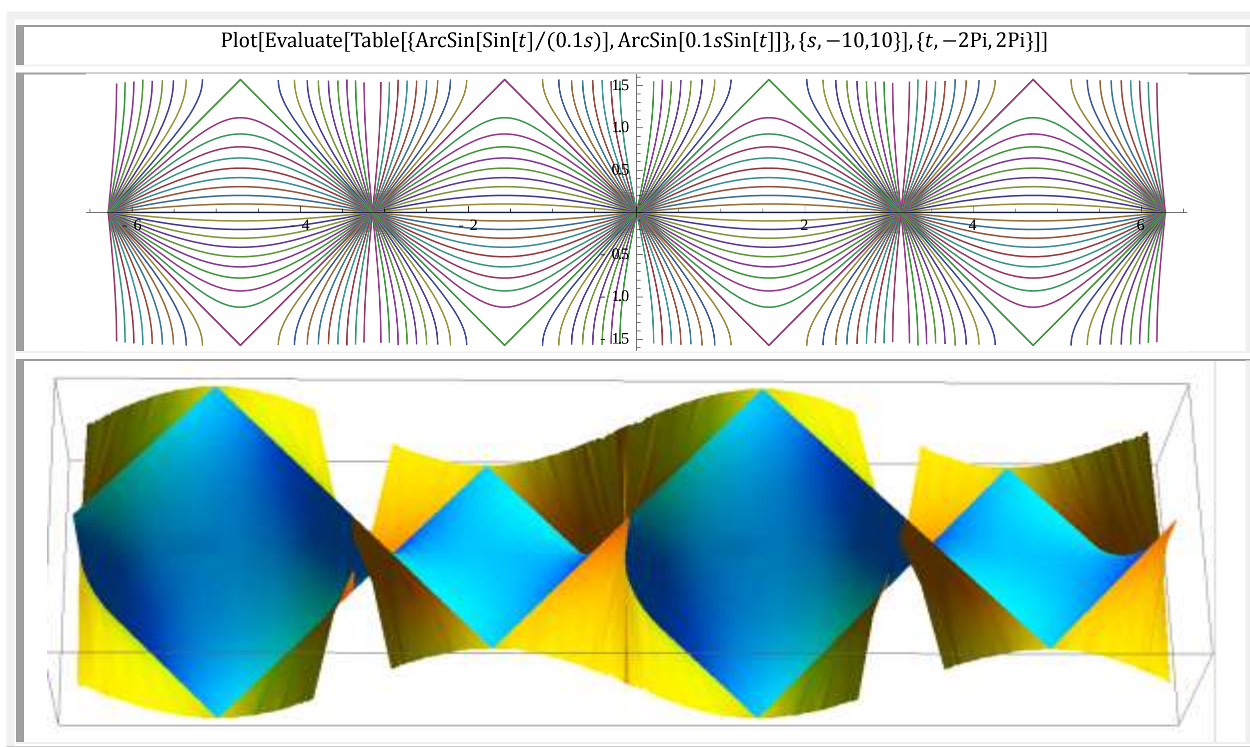


Fig. 26.14 FSM-CE inverse beta (β) excentrică multivocă de variabilă excentrică bex**θ** de **ε = 0,** obţinute prin repetarea relaţiei (21) pe mai multe intervale



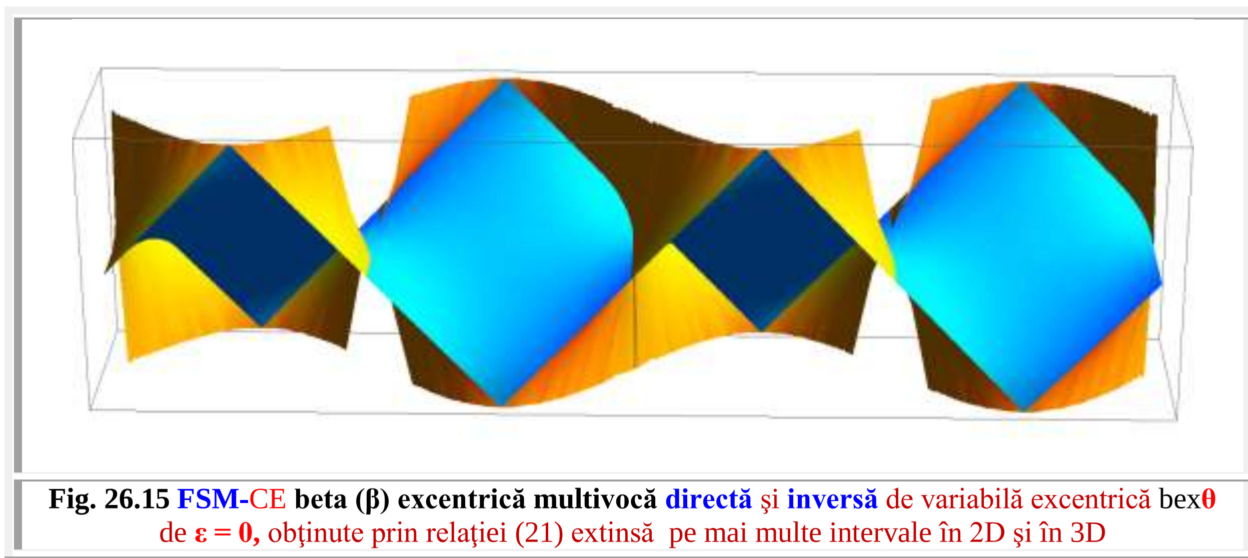


Fig. 26.15 FSM-CE **beta (β) excentrică multivocă directă** şi **inversă** de variabilă excentrică bex**θ** de **ε = 0,** obţinute prin relaţiei (21) extinsă pe mai multe intervale în 2D şi în 3D

Plot[Evaluate[Table[{sArcSin[Sin[t]]}, {s, −1, 1}], {t, 0, 2Pi}]]	Plot[Evaluate[Table[{s/ArcSin[Sin[t]]}, {s, −1, 1}], {t, 0, 2Pi}]]

Fig. 26.16 FSM-CE **beta (β) excentrică multivocă directă** şi **inversă** de variabilă excentrică bex**θ** de **ε = 0,** obţinute prin relaţiei (21) extinsă pe mai multe intervale în 2D şi în 3D

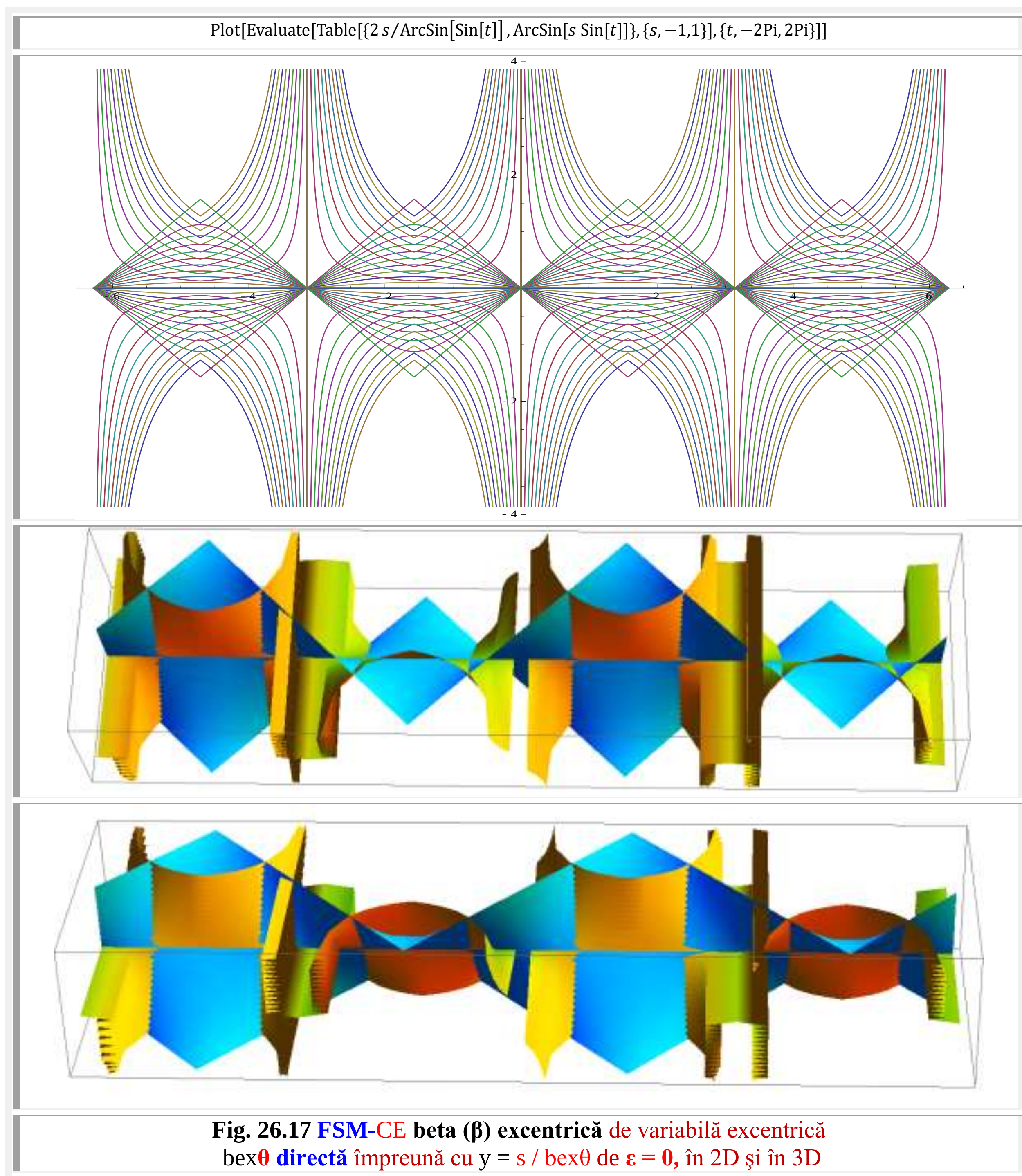


Fig. 26.17 FSM-CE beta (β) excentrică de variabilă excentrică bex**θ directă** împreună cu y = s / bexθ de **ε = 0,** în 2D şi în 3D

Produsul funcţie bexθ de excentricitate s = 1 cu excentricitatea liniară **s** din domeniul **s** ∈ [-1, 1], are graficele din **figura 26.16** ◄ stânga, iar **FSM-CE** y = s / bexθ în dreapta ►, în 2D şi în 3D.

Deoarece **FSM-CE** y = s / bexθ seamănă cu funcţia **gamma (Fig 26.18 ▲◄)**, cu deosebirea că y este periodiocă şi simetrică (**Fig. 25.16** ► şi **Fig.26.17**), a fost reprezentata în 2D şi în 3D în **figura 26.17,**

împreună cu funcţia directă bexθ. Funcţii **gamma excentrice** sunt prezentate în 2D în **figura 26.18**, iar cele complexe în **figura 26.19**.

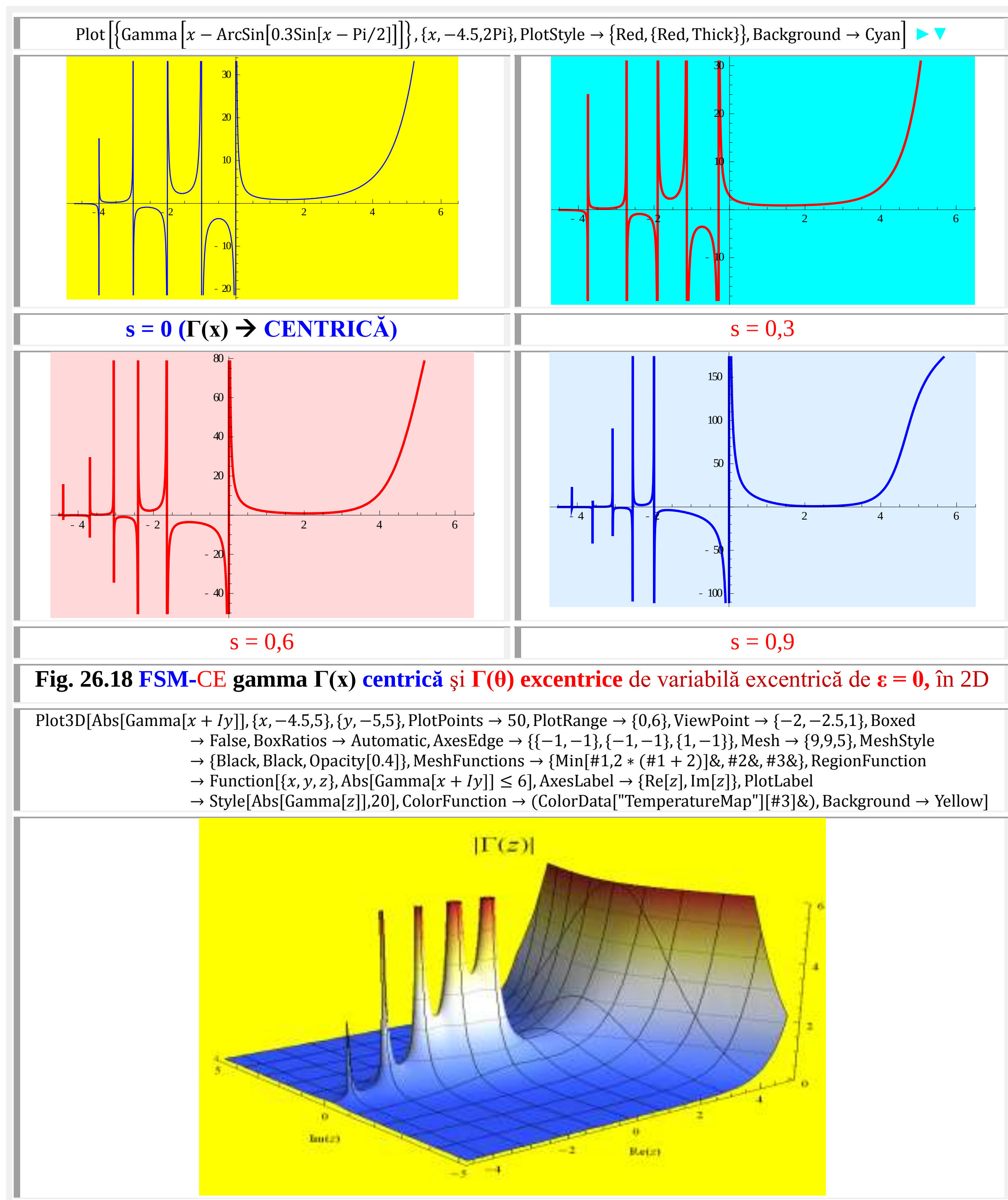


Fig. 26.18 FSM-CE **gamma Γ(x) centrică** şi **Γ(θ) excentrice** de variabilă excentrică de **ε = 0,** în 2D

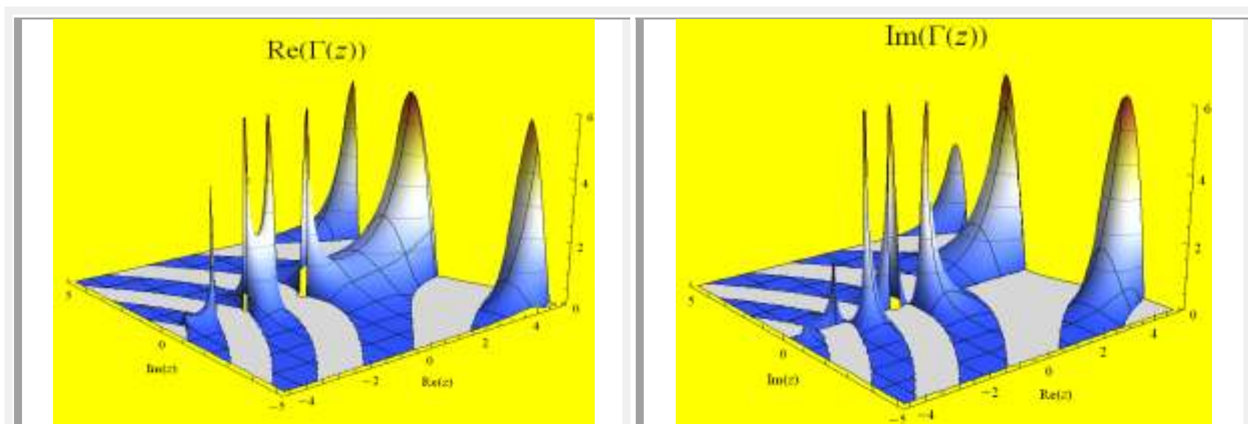
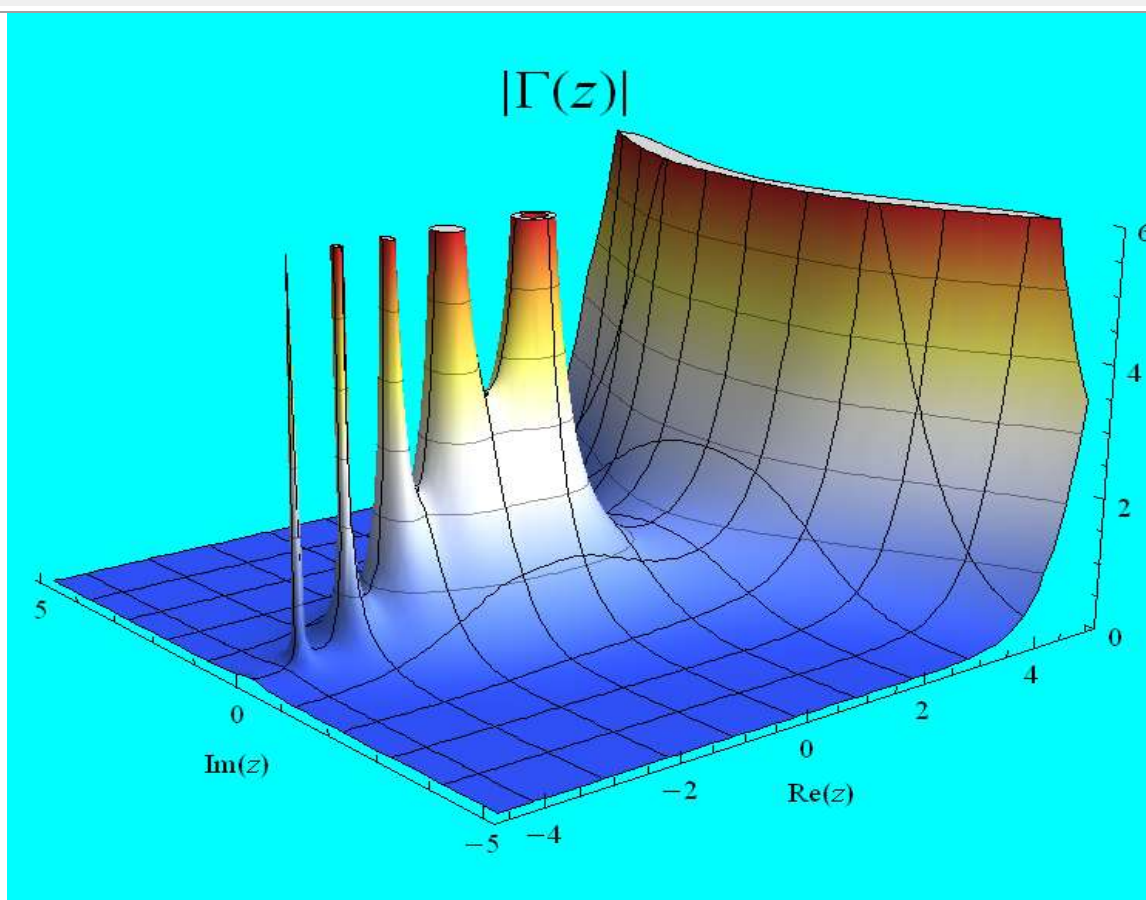


Fig. 26.19 FCC gamma Γ(z) centrică

```
Plot3D[Abs[Gamma[x − ArcSin[0.4Sin[x]] + I(y − ArcSin[0.4Sin[y]])]], {x, −4.5,5}, {y, −5,5}, PlotPoints → 40, PlotRange
        → {0,6}, ViewPoint → {−2, −2.5,1}, Boxed → False, BoxRatios → Automatic, AxesEdge
        → {{−1, −1}, {−1, −1}, {1, −1}}, Mesh → {9,9,5}, MeshStyle → {Black, Black, Opacity[0.4]}, MeshFunctions
        → {Min[#1,2 ∗ (#1 + 2)]&, #2&, #3&}, RegionFunction → Function[{x, y, z}, Abs[Gamma[x + Iy]]
        ≤ 6], AxesLabel → {Re[z], Im[z]}, PlotLabel → Style[Abs[Gamma[z]],20], ColorFunction
        → (ColorData["TemperatureMap"][#3]&), Background → Cyan]
```



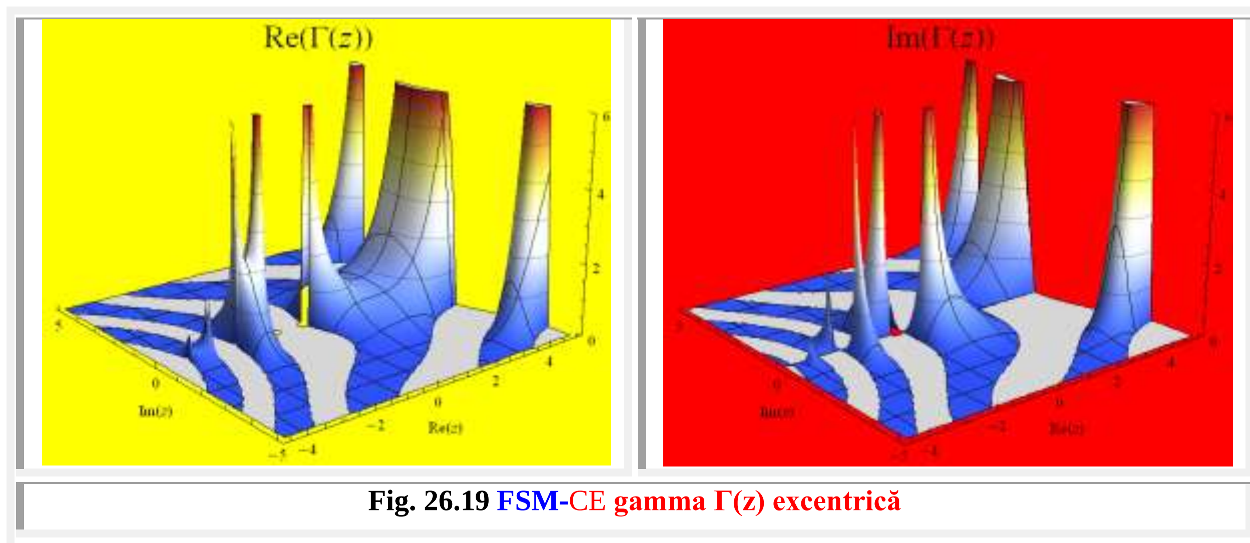


Fig. 26.19 FSM-CE **gamma Γ(z) excentrică**

În concluzie, a rezultat, pe de o parte, că inversele unor **FSM-CE** prezintă interes în sine, iar, în al doilea rând, şi mult mai important, că a permis obţinerea unor **noi familii de funcţii inverse** ale căror ecuaţii de definiţie sunt, totodată, **soluţiile exacte simbolice** ale unor ecuaţii trigonometrice neliniare, altfel nerezolvabile, decât numeric. Alte **FSM-CE** vor fi prezentate in viitor în **Vol. III.**

Motto:" *M-au urmărit multe gânduri profunde, dar numai în tinereţe am fost mai iute decât ele.*"

Capitolul 27

FUNCŢII SUPERMATEMATICE BESSEL CENTRICE

27.1 INTRODUCERE

După http://ro.wikipedia.org/wiki/Func "Prin **funcții Bessel** se înțeleg soluțiile canonice ***Z(z)*** ale ecuației diferențiale a lui **Bessel** (cu ***z*** real sau complex):

(27.1) $\frac{z^2.d^2\mathbf{Z}}{dz^2} + \frac{z.d\mathbf{Z}}{dz} + (z^2 - \alpha^2)\,\mathbf{Z} = 0$

pentru o valoare arbitrară $\boldsymbol{\alpha}$, reală sau complexă, numită *ordinul* funcției **Bessel**. Cele mai comune și mai importante cazuri fiind acelea în care $\boldsymbol{\alpha}$ are o valoare întreagă ***n***.

De altfel, $\boldsymbol{\alpha}$ și $-\boldsymbol{\alpha}$ produc aceeași ecuație diferențială, convențional definindu-se funcții **Bessel** diferite pentru cele două ordine, dar, cel mai adesea, sunt alese ca funcții netede de $\boldsymbol{\alpha}$. De asemenea funcțiile **Bessel** sunt cunoscute ca **funcții cilindrice** sau **cilindrice armonice** deoarece ele se regăsesc în soluția ecuației Laplace în coordonate cilindrice.

Ele au fost definite prima dată de Daniel Bernoulli și generalizate de Friderich Bessel, de unde și denumirea lor. Prin aplicarea metodei separării variabilelor, pentru soluționarea ecuației Laplace și a ecuației Helmholz, în coordonate cilindrice sau coordonate sferice, se obține ecuația lui **Bessel**, din care se obțin funcțiile **Bessel**.

Rezolvând ecuația în sistemul de ***coordonate cilindrice***, se obțin **funcții Bessel** de ***ordin întreg (α = n)***; rezolvând ecuația în sistemul de ***coordonate sferice***, se obțin **funcții Bessel** de ***ordin fracționar (α = n +1/2)***.

Importanța funcțiilor **Bessel** rezultă din faptul că soluționează multe probleme de potențial static și de propagare a undelor, de exemplu:

- unde electromagnetice în ghiduri de undă cilindrice,
- transferul de căldură în obiecte cilindrice,
- modurile de vibrații ale unei membrane circulare subțiri,
- probleme de difuzie,
- soluția ecuației Schrödinger radială pentru o particulă liberă, în coordinate sferice,
- soluționarea unor probleme de divergentă aeroelastică și flutter în Aeroelasticitate,
- semnale de proces în electronică precum sinteza FM sau filtre Bessel.

Deoarece ecuația lui **Bessel** este o ecuație diferențială ordinară, de ordinul doi, aceasta va avea două soluții liniar independente, iar datorită diverselor formulări ale funcției **Bessel**, în serie sau integrală, se alege forma cea mai convenabilă pentru problema care se soluționează."

În lucrarea **Mireca Eugen Şelariu** "**FUNCŢIILE cexθ ŞI sexθ CA SOLUŢII ALE UNOR ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE DE ORDINUL DOI CU COEFICIENŢI VARIABILI**" Cap **11** din [12] şi [13] soluţiile sunt ale următoarei ecuaţii diferenţiale

(27.2) $$\ddot{z}_{1,2} - \frac{\epsilon_{1,2}}{\omega_{1,2}}\dot{z}_{1,2} + \omega_{1,2}^2 = 0$$

care poate fi scrisă şi sub o formă asemănătoare ecuaţiei (1), dar având cu totul alte semnificaţii

(27.2') $\frac{\omega.d^2\mathbf{Z}}{dt^2} - \frac{\varepsilon.d\mathbf{Z}}{dt} + \omega\,\mathbf{Z} = 0$ sau $\dot{\theta}.\ddot{Z} - \ddot{\theta}.\dot{Z} + \dot{\theta}.Z = 0$

în care: $Z_{1,2} = C_1\text{cex}_{1,2}\theta + C_2\text{sex}_{1,2}\theta$; $\omega_{1,2} = A\ \Omega\ \text{dex}_{1,2}\theta$; $\varepsilon_{1,2} = \frac{d\omega 1{,}2}{dt}$; $\text{cex}_{1,2}\theta$ şi $\text{sex}_{1,2}\theta$ fiind cele două determinări (principală **1** şi secundară **2**) ale **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**), de variabilă **excentrică θ**, **cosinus** şi **sinus excentrice**, iar $\omega_{1,2}$ şi $\varepsilon_{1,2}$ sunt exprimabile prin **FSM-CE** derivată excentrică

dex$_{1,2}$θ, care reprezintă viteza unghiulară variabilă $\omega_{1,2}$ pe cercul unitate (R = 1), cu **θ = Ω.t,** când un punct se roteşte pe cerc cu viteza unghiulară constantă Ω = 1, faţă de un punct excentric **S(s, ε)** din planul cercului unitate – denumit **excentru** - şi, respectiv, derivata acesteia ca funcţie de **timpul t**, deci acceleraţia unghiulară variabilă pe cercul unitate.

Şi alte **funcţii supermatematice (FSM)** precum cele **circulare elevate** (**FSM-CEL**), ca şi **FSM circulare exotice**, sunt soluţii ale unor sisteme de **caracteristici elastice statice neliniare** (**CES -NL**).

Prin apariţia **funcţiilor supermatematice** **Bessel** **excentrice** (**FSM-CE**), **Bessel** **elevate** (**FSM-BEL**), ca şi a celor **Bessel** **exotice** (**FSM-BEx**), funcţiile **Bessel** ***ordinare*** suntem nevoiţi să le denumim şi "***centrice***" (**FBC**), justificând, astfel, denumirile în cele ce urmează.

27.2 FUNCȚII Bessel CENTRICE (FBC) DE SPEȚA I-a : $J_\alpha(z)$

Funcțiile Bessel centrice de speța I-a, notate $J_\alpha(z)$, sunt soluții ale ecuației diferențiale a lui **Bessel**, care au valoare finită în origine $z = 0$ pentru valori α întregi nenegative și valoare infinită în origine pentru valori α negative diferite de întregi.

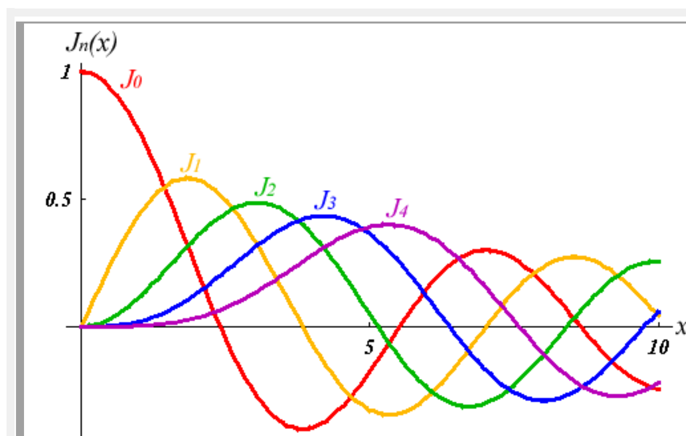


Fig.27.1,a Graficele funcţiilor **Bessel** de speţa I-a, $J_\alpha(z)$ şi ordin întreg α = 0, 1, 2, 3 şi 4

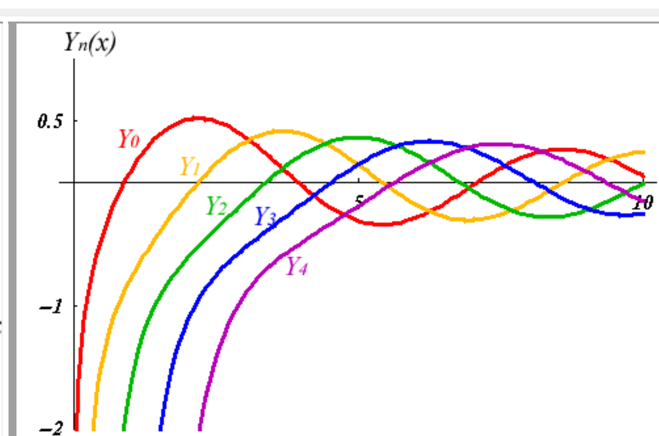


Fig.27.2,a Graficele funcţiilor **Bessel** de speţa II-a, $Y_\alpha(z)$ şi ordin întreg α = 0, 1, 2, 3 şi 4

Plot[Evaluate[Table[{1 − ArcSin[sSin[t]]/t}, {s, −1,0}], {t, 0,4Pi}]]

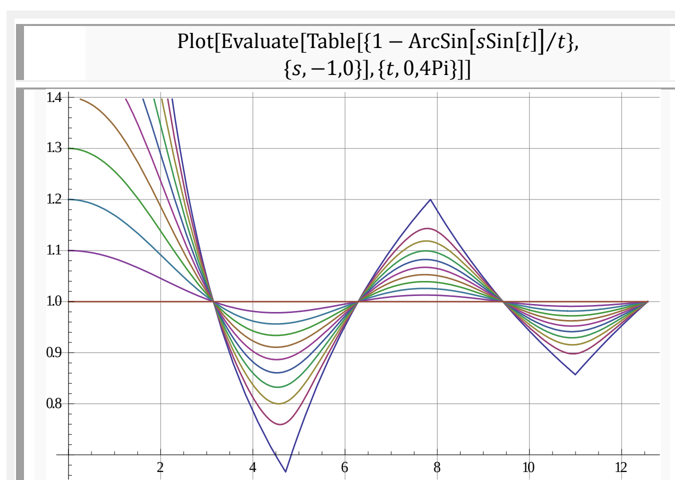


Fig.27.3,a FSM-CE $\frac{aex\theta}{\theta}$ = **uexθ**, de **s ∈ [-1,0]**

Plot[Evaluate[Table[{1 − ArcSin[sSin[t]]/t}, {s, 0,1}], {t, 0,4Pi}]]

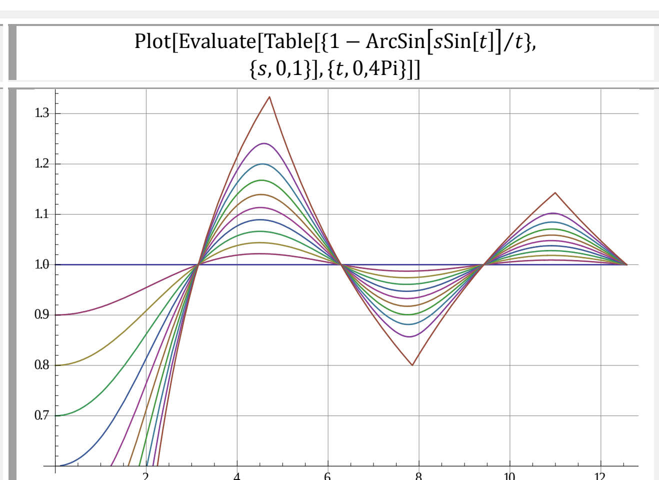


Fig.27.4,a FSM-CE $\frac{aex\theta}{\theta}$ = **uexθ**, de **s ∈ [0, +1]**

Plot[Evaluate[Table[{1 − ArcSin [sSin[tSqrt[t]]]/t}, {s, −1,0}], {t, 0,2Pi} cu pasul 0,2

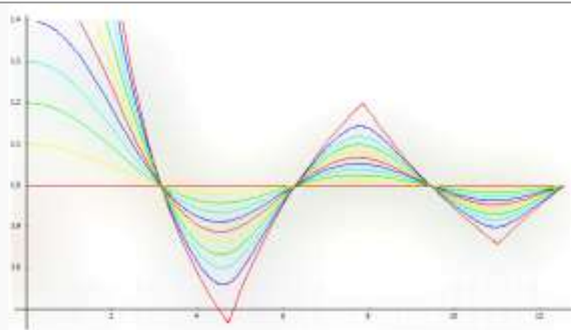


Fig.27.3,a **FSM-CE** $1-\frac{bex(\theta\sqrt{\theta})}{\theta}$, pentru **s ∈ [-1,0]**

Plot[Evaluate[Table[{1 − ArcSin [sSin[tSqrt[t]]]/t}, {s, 0,1}], {t, 0,2Pi}, pasul 0,2

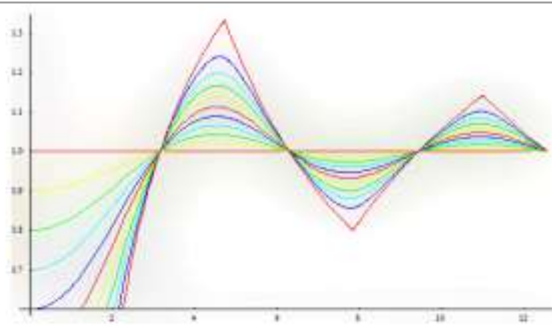


Fig.27.4,b **FSM-CE** $1-\frac{bex(\theta\sqrt{\theta})}{\theta}$, pentru **s ∈ [0, +1]**

Plot[Evaluate[Table[{1 − ArcSin [sSin[tSqrt[t]]]/tSqrt[t]}, {s, −1,0}], {t, 0,2Pi}

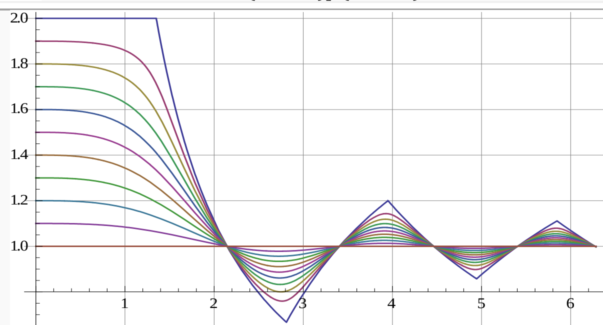


Fig.27.3,c **FSM-CE** $1-\frac{bex(\theta\sqrt{\theta})}{\theta\sqrt{\theta}}$, pentru **s ∈ [-1,0]**

Plot[Evaluate[Table[{1 − ArcSin [sSin[tSqrt[t]]]/(tSqrt[t])}, {s, 0,10}], {t, 0,2Pi}

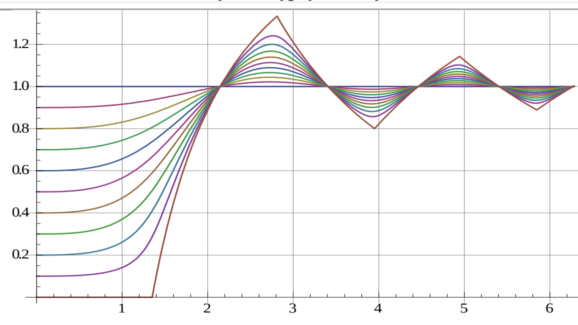


Fig.27.4,c **FSM-CE** $1-\frac{bex(\theta\sqrt{\theta})}{\theta\sqrt{\theta}}$, Pentru **s ∈ [0, +1]**

Funcția **Bessel** de speța I-a este definită de următoarea serie Taylor în jurul originii ***z = 0***:

(27.3) $$J_\alpha(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

în care ***Γ(z)*** este funcția Gamma a lui Euler, care reprezinta generalizarea funcției factorial pentru valori ***z*** diferite de întregi.

Graficul funcției **Bessel** (**Fig.27.1,a** și **Fig.27.2,a**) oscilează precum cel al funcției sinus sau cosinus, diferența fiind aceea că funcția **Bessel** descrește proporțional cu $\frac{1}{\sqrt{z}}$ spre infinit, precum și faptul că rădăcinile nu sunt în general periodice, cu excepția celor asimptotice pentru valori mari ale lui ***z***.

Funcţii asemănătoare, dar strict periodice, de perioadă 2π, sunt **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) amplitudine excentrică **aexθ** raportate la variabila lor excentrică **θ**, notate cu **uexθ**, cu graficele prezentate în **figurile 27.3,a și 27.4,a**, de ecuații

(27.4) F[**θ**, S(s,ε)] = $\frac{aex\theta}{\theta} = \frac{\theta-\arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]}{\theta} = 1-\frac{\arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)]}{\theta} = 1-\frac{\boldsymbol{bex\theta}}{\theta}$ = **uexθ**

sau de variabilă centrică Aexα, raportate la variabila lor centrică **α**, notate cu **Uexα**, cu graficele prezentate în **figurile 27.5,a și 27.6,a**, de ecuații

(27.5) F[**α**, S(s,ε)] = $\frac{Aex\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha+\arcsin[s.\sin(\alpha-\varepsilon)]}{\alpha\sqrt{1+s^2-2s\cos(\alpha-\varepsilon)}} = 1+\frac{\arcsin[s.\sin(\alpha-\varepsilon)]}{\alpha.Rex\alpha} = 1+\frac{\boldsymbol{Bex\alpha}}{\alpha}$ = **Uexα**

Plot[Evaluate[Table[{1 + ArcSin[1sSin[t]]/(tSqrt[1 + (s)^2 − 2sCos[t]])},{s,−1,0}],{t,0,4Pi}]

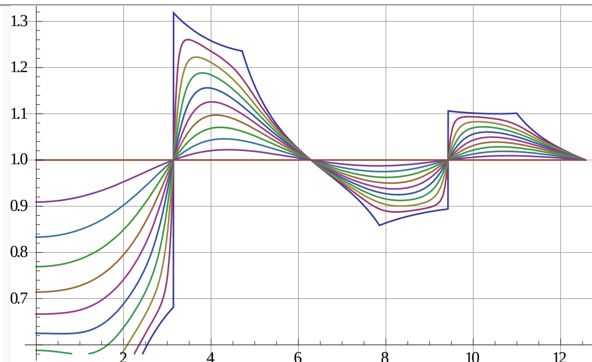


Fig.27.5,a **FSM-CE** $\frac{\boldsymbol{Aex\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}}$ = **Uexα**, de **s ∈ [-1,0]**

Plot[Evaluate[Table[{1 + ArcSin[1sSin[t]]/(tSqrt[1 + (s)^2 − 2sCos[t]])},{s,0,+1}],{t,0,4Pi}]

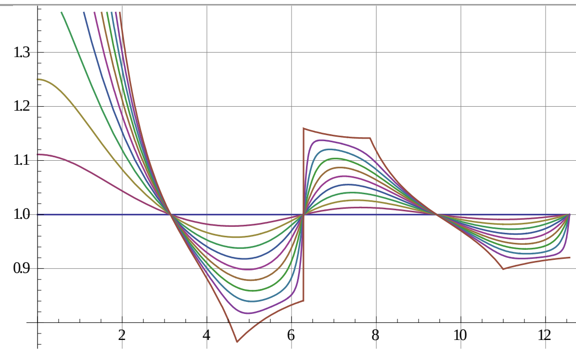


Fig.27.6,a **FSM-CE** $\frac{\boldsymbol{Aex\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}}$ = **Uexα**, de **s ∈ [0, +1]**

Plot[Evaluate[Table[{1 + ArcSin[sSin[tSqrt[t]]/(t.Sqrt[1 + (s)^2 − 2sCos[tSqrt[t]]])},{s,−1,0}],{t,0,2Pi}]]

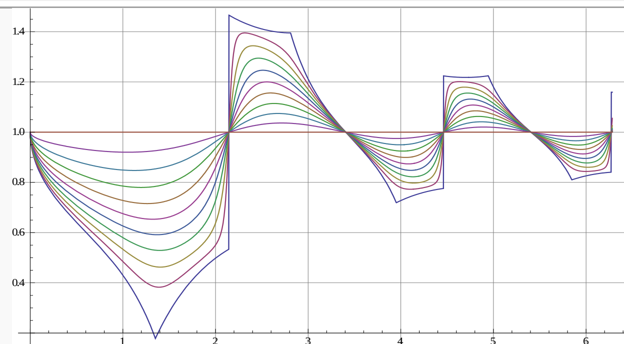


Fig.27.5,b **FSM-CE** 1 − $\frac{\boldsymbol{Bex(\alpha\sqrt{\alpha})}}{\boldsymbol{\alpha}}$, pentru **s ∈ [-1,0]**

Plot[Evaluate[Table[{1 + ArcSin[sSin[tSqrt[t]]/(t.Sqrt[1 + (s)^2 − 2sCos[tSqrt[t]]])},{s,0,+1}],{t,0,2Pi}]]

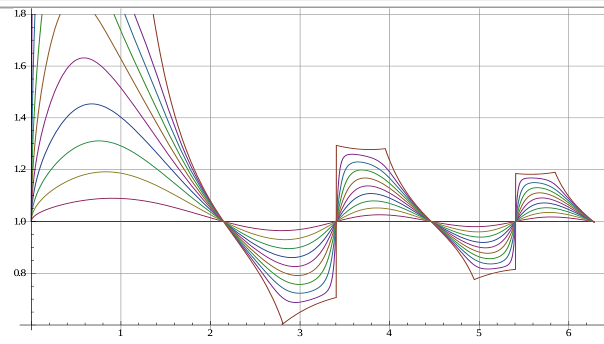


Fig.27.6,b **FSM-CE** 1 − $\frac{\boldsymbol{Bex(\alpha\sqrt{\alpha})}}{\boldsymbol{\alpha}}$, pentru **s ∈ [0, +1]**

Plot[Evaluate[Table[{+ArcSin[sSin[tSqrt[t]]]/(tSqrt[t] Sqrt[1 + (s)^ − 2sCos[tSqrt[t]]])},{s,−1,0}],{t,0,2Pi}]]

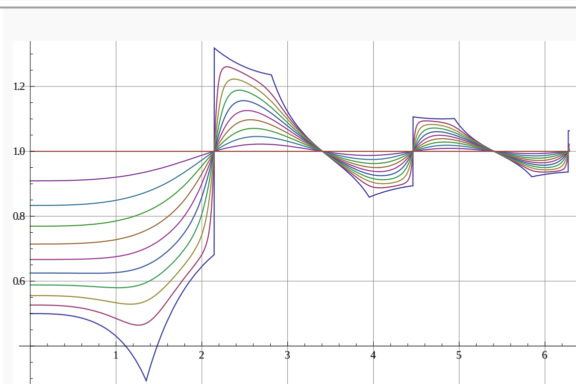


Fig.27.5,c **FSM-CE** **1** − $\frac{\boldsymbol{Bex(\alpha\sqrt{\alpha})}}{\boldsymbol{\alpha\sqrt{\alpha}}}$, pentru **s ∈ [-1,0]**

Plot[Evaluate[Table[{+ArcSin[sSin[tSqrt[t]]]/(tSqrt[t] Sqrt[1 + (s)^ − 2sCos[tSqrt[t]]])},{s,0,+1}],{t,0,2Pi}]]

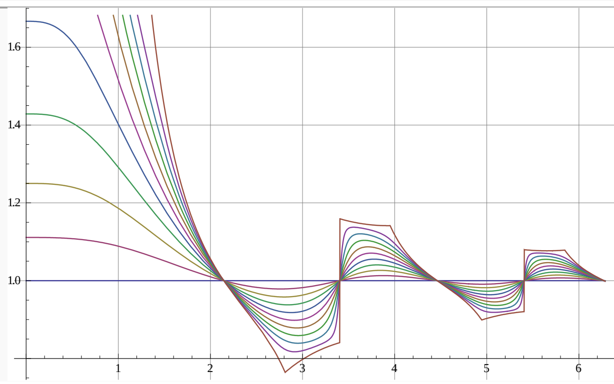


Fig.27.6,c **FSM-CE** **1** − $\frac{\boldsymbol{bex(\alpha\sqrt{\alpha})}}{\boldsymbol{\alpha\sqrt{\alpha}}}$, pentru **s ∈ [0, +1]**

Dacă, în ecuaţiile (4) şi (5), variabilele **θ** şi **α** se înmulţesc cu $\sqrt{\theta}$ şi, respectiv, cu $\sqrt{\alpha}$, ***numai*** cele din **funcţiile supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) beta excentrice **bexθ** şi **Bexα,** se obţin funcţii de perioadă variabilă, aşa cum se prezită graficele din **figura 27.3,b** şi **27.4,b** şi, respectiv, **figura 27.5,b** şi **27.6,b.**

Dacă, aceste înlocuiri se fac în funcţiile **bexθ** şi **Bexα** cât şi în impărţitor, din ecuaţiile (4) şi (5), atunci se obţin funcţiile de perioadă variabilă, prezentate în **figurile 27.3,c** şi **27.4,c** şi, respectiv, **27.5c** şi **27.6,c**.

S-au prezentat aceste **FSM-CE** denumite **"funcţii unitate excentrică (FUE)",** deoarece conţin cifra **1** şi sunt notate cu **uexθ** şi, respectiv, **Uexα** în eventualitatea că cineva, cândva, va avea nevoie de ele. Dacă de acestea nu, atunci, cu siguranţă, de cele prezentate în **figura 27.7,a** şi **27.8,a** care sunt **FSM-CE beta excentrică bexθ** şi **derivata excentrică dexθ**, de variabile excentrice θ, vor avea nevoie de ele la reprezentarea vibraţiilor libere neamortizate şi amortizate de caracteristică elastică statică (**CES**) liniara şi/sau neliniară (**Fig. 27.7,b** şi **Fig.27.8,b**).

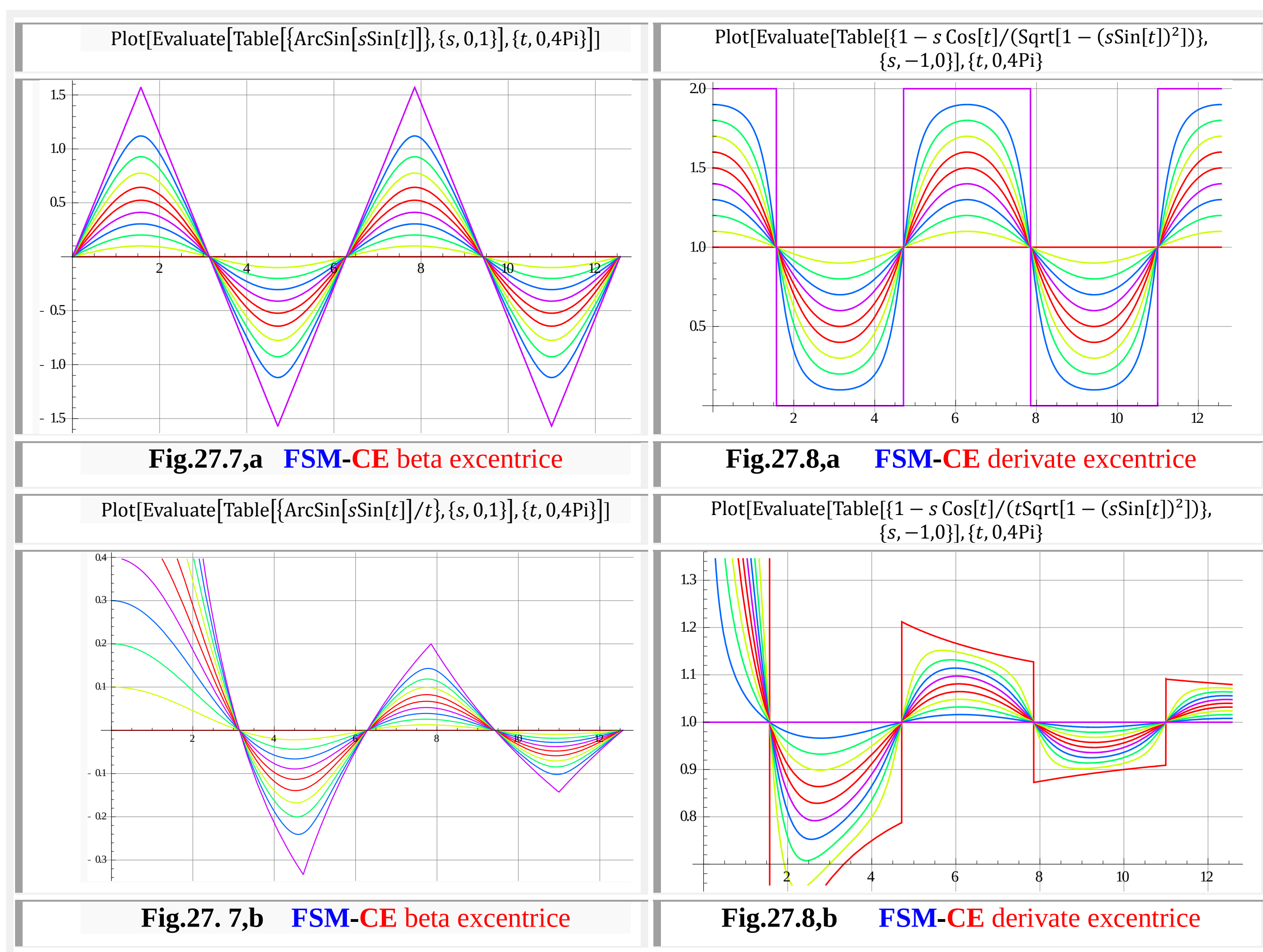


Fig.27.7,a **FSM-CE** beta excentrice

Fig.27.8,a **FSM-CE** derivate excentrice

Fig.27. 7,b **FSM-CE** beta excentrice

Fig.27.8,b **FSM-CE** derivate excentrice

Pentru **s = 1**, funcţia **bexθ** exprimă, în cel mai simplu mod, o funcţie **triunghiulară** (**Fig.27.7,a**), iar funcţia **dexθ** o funcţie **dreptunghiulară** (**Fig.27.8,a**). Pentru alte valori ale excentricităţii numerice **s**, se pot obţine funcţii care să exprime vibraţii libere amortizate, de **caracteristică elastică statică** (**CES**) liniară sau neliniară (**Fig.27.7,b** şi **Fig. 27.8,b)**, **semnale de bază**, deosebit de importante în mecanică cât şi în electrotehnică, ele putând fi reproduse şi fizic, aşa cum rezultă în continuare.

Spicuim din http://www.scritub.com/tehnica-mecanica/SEMNALE-ELECTRICE93336.php :

„În general, un generator de funcţii este un aparat ce poate să furnizeze cel puţin trei forme de undă de bază: ***sinusoidală****,* ***dreptunghiulară*** *şi* ***triunghiulară****.*

Plecând de la aceste funcţii de bază, generatoarele mai perfecţionate sunt capabile să furnizeze şi alte funcţii (semnale): ***rampe liniare****,* ***rampe în trepte****,* ***trapez****,* ***semnale dreptunghiulare*** *cu factor de umplere variabil sau chiar şi semnale de zgomot (***Fig.27.9,a***).”*

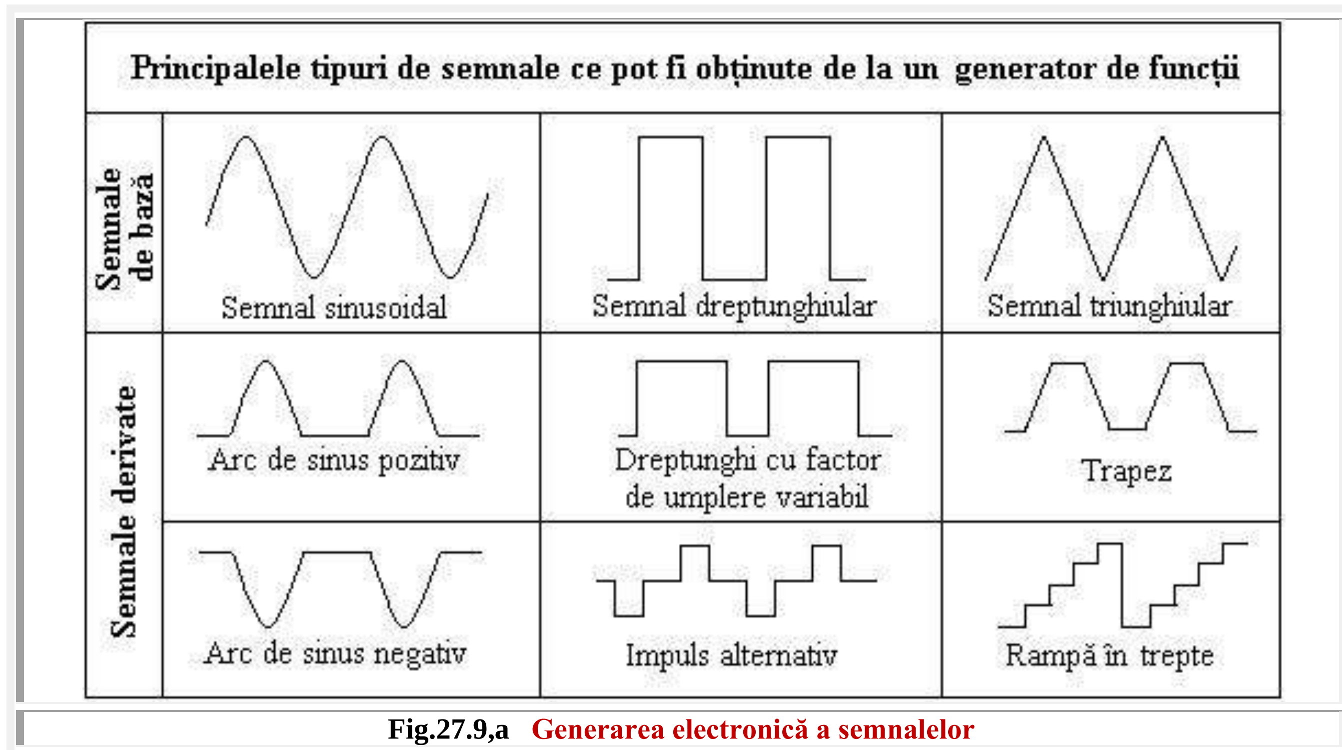


Fig.27.9,a Generarea electronică a semnalelor

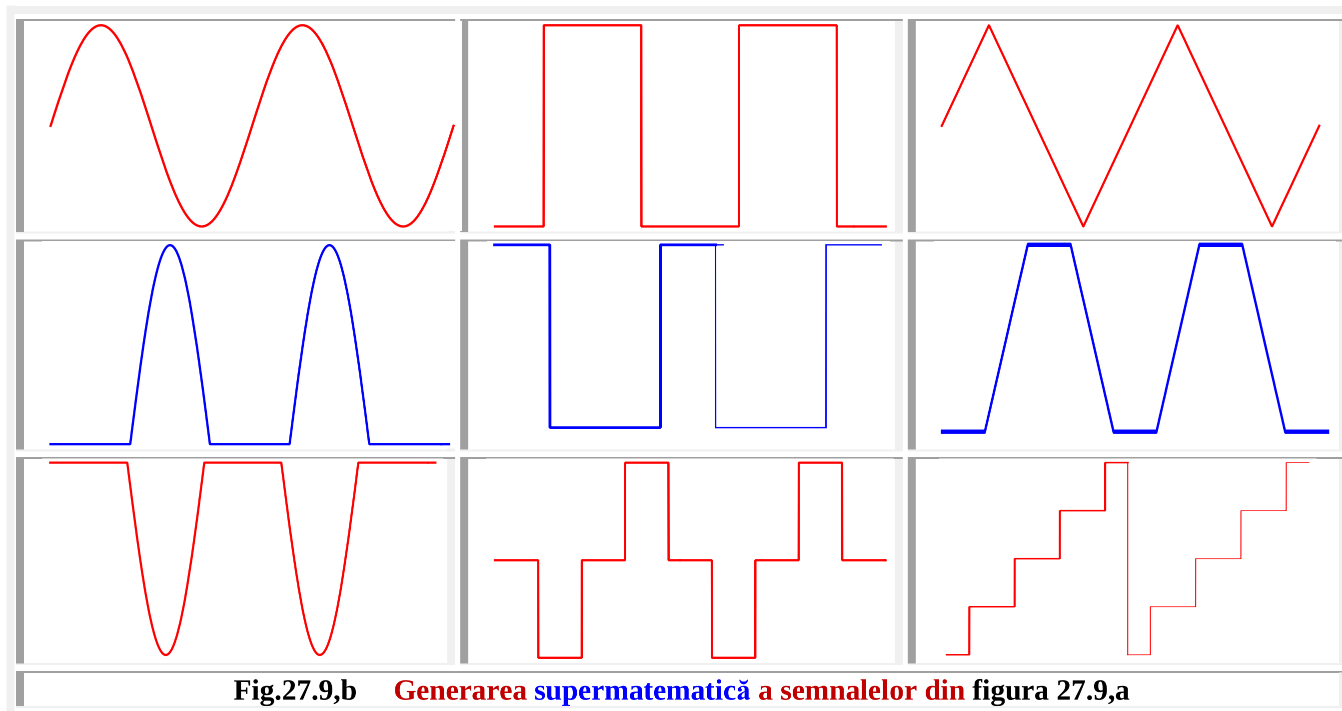


Fig.27.9,b Generarea supermatematică a semnalelor din figura 27.9,a

Figura 27.9,b demonstrează, dacă mai era necesar, că **FSM-CE** pot, cel mai bine şi mai simplu, să genereze diverse semnale utile, precum cele generate electronic, din **figura 27.9,a** şi cu mult mai multe şi mult mai complexe, precum cele prezentate în **figura 27.9,c**.

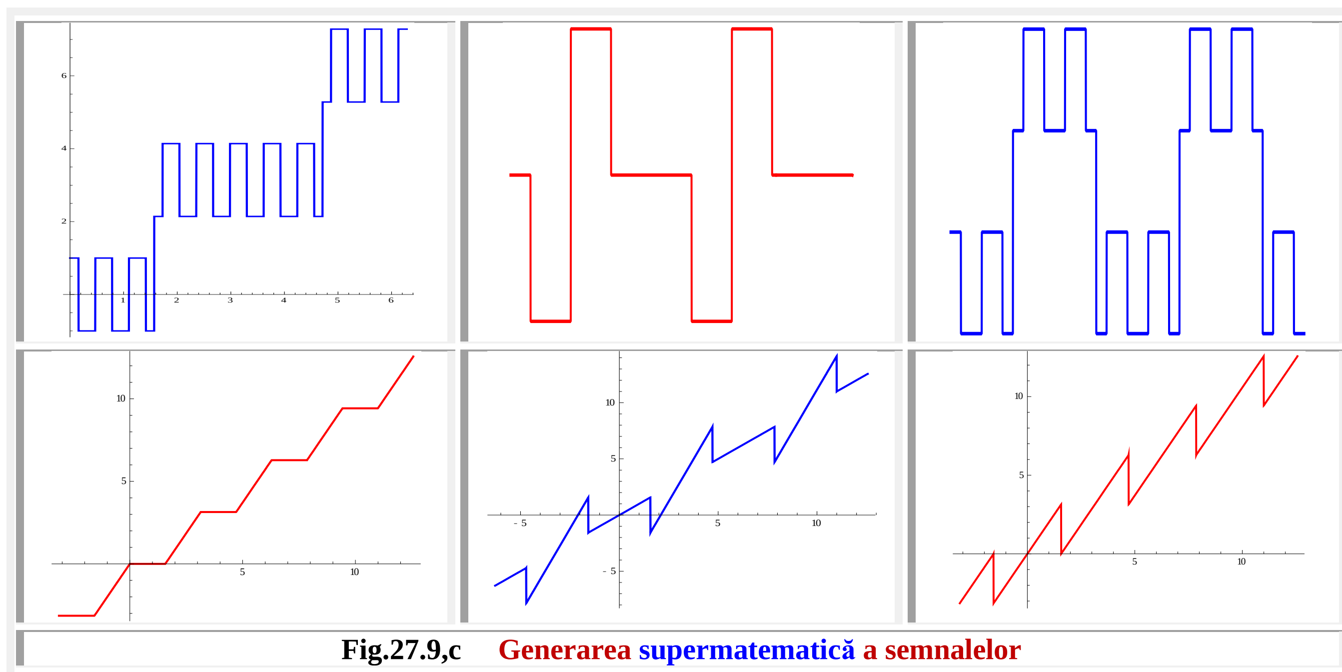


Fig.27.9,c **Generarea supermatematică a semnalelor**

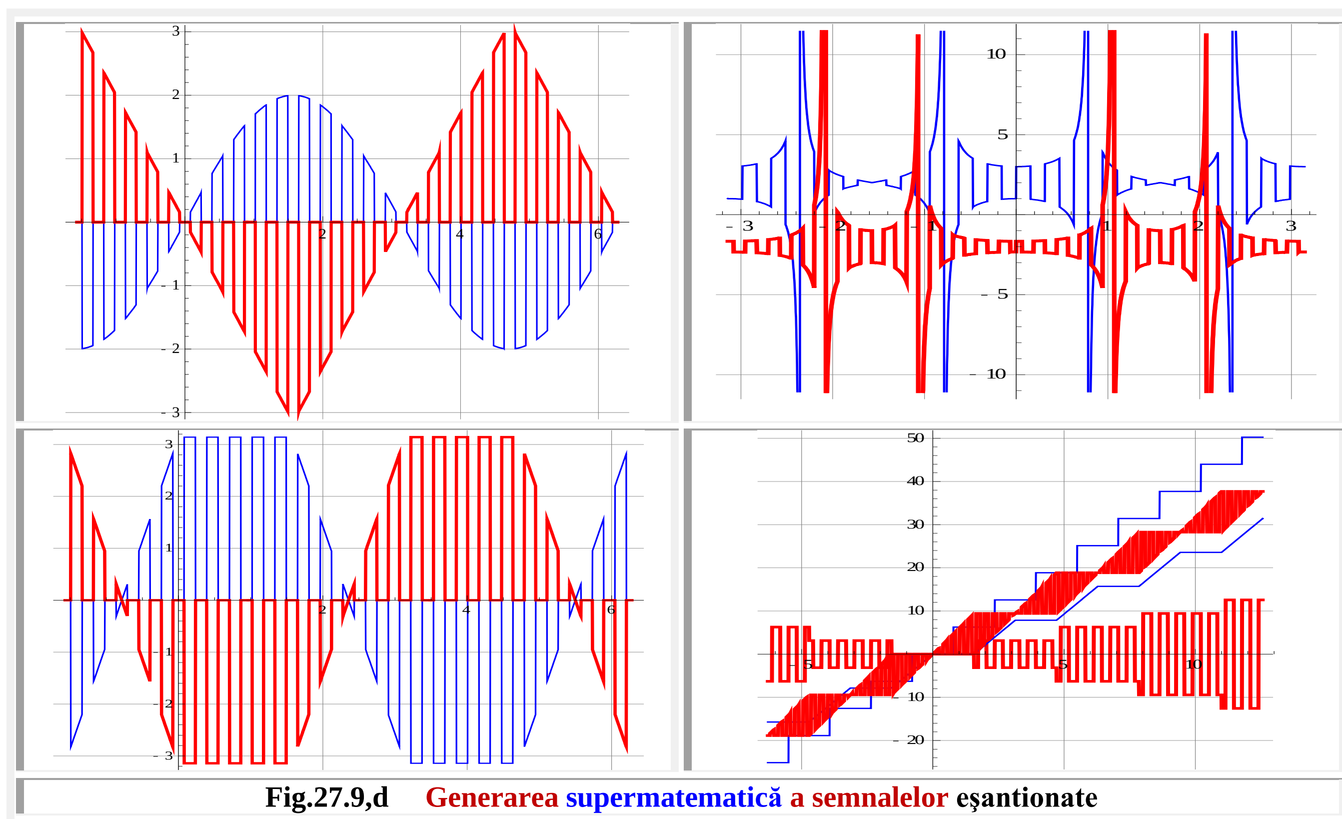


Fig.27.9,d **Generarea supermatematică a semnalelor eşantionate**

În **figura 27.9,d** se prezintă modul de **eşantionare**, sau procesarea de semnal, a semnalelor **sinusoidale**, **dreptunghiulare**, **triunghiulare** ş.a. prin utilizarea **FSM-CE dex**(10.**θ**) de excentricitate numerică **s = 1**.

Graficele **funcţiilor Bessel** de prima speţă şi de ordin întreg α = 0, 1, 2, 3 şi 4 sunt prezentate în **figura 27.1.** Pentru valori ***α*** diferite de întregi, funcțiile $J_\alpha(z)$ și $J_{-\alpha}(z)$ sunt liniar independente, reprezentând cele două soluții ale ecuației diferențiale. Pe de altă parte, pentru ***α*** de ordin întreg, este valabilă următoarea relație (de notat că **funcția Gamma** devine infinită pentru argumente întregi negative):

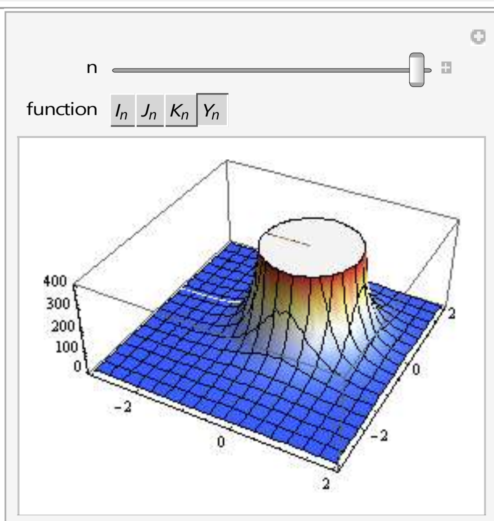
(27.6) $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$

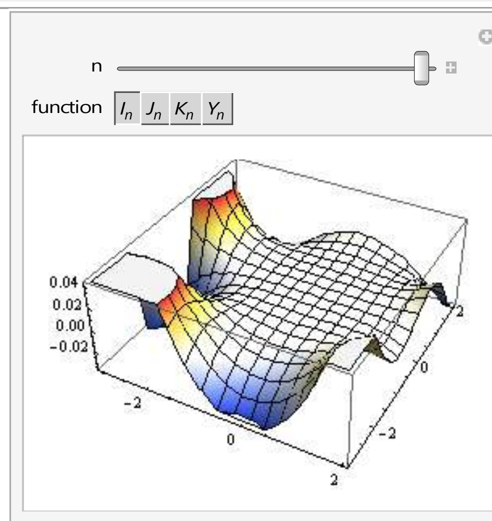
acest lucru arătând că cele două soluții nu sunt liniar independente. În acest caz, a doua soluție liniar independentă este dată de funcția Bessel de speța a II-a.

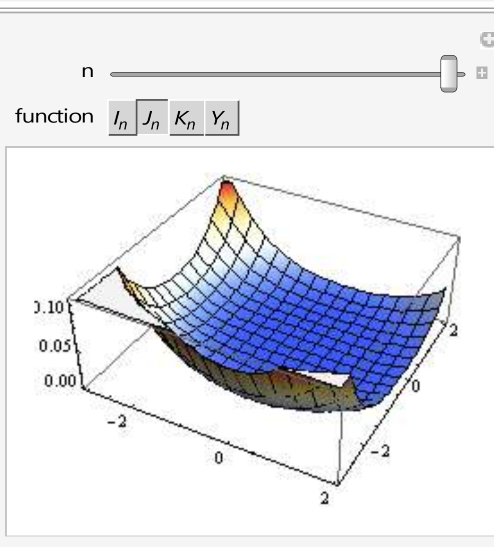
Graficele **funcţiilor Bessel** în planul complex sunt redate în **figura 27.10**, prin programul realizat de **Jeff Bryant** şi **Michael Trott** prezentat mai jos

http://demonstrations. wolfram. com / Bessel Functions In The Complex Plane/

```
Manipulate[Plot3D[Re[fn[n, x + Iy]], {x, −3,2}, {y, −3,2}, ImageSize → {500,400}, ColorFunction → (ColorData["TemperatureMap"]),
MaxRecursion → 2], {{n, 0, "n"}, −5,5,1}, {{fn, BesselI, "function"}, {BesselI → TraditionalForm[In], BesselJ → TraditionalForm[Jn], BesselK
→ TraditionalForm[Kn], BesselY → TraditionalForm[Yn]}}]
```







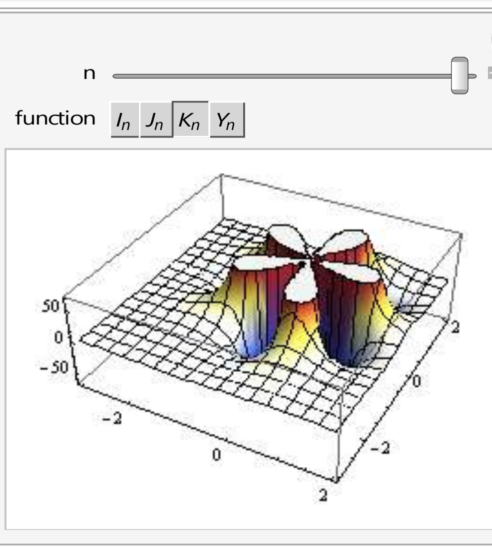
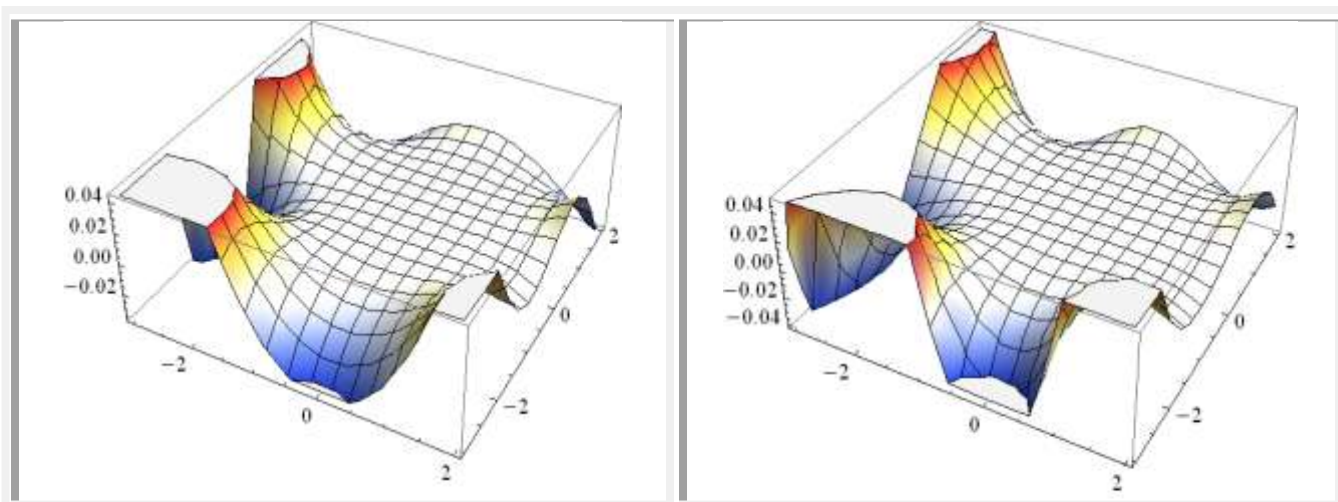


Fig.27.10,a Prezentarea programului: partea reală Yn ◤ şi Kn ◢, **imaginară** In ◥ şi **absolută** Jn ◣ a funcţiilor **Bessel** centrice în planul complex (n ≡ α)

Fig.27.10,b Partea reală a funcţiilor **Bessel** centrice în planul complex. În ordine: **In, Jn, Kn, Yn** (n ≡ α)



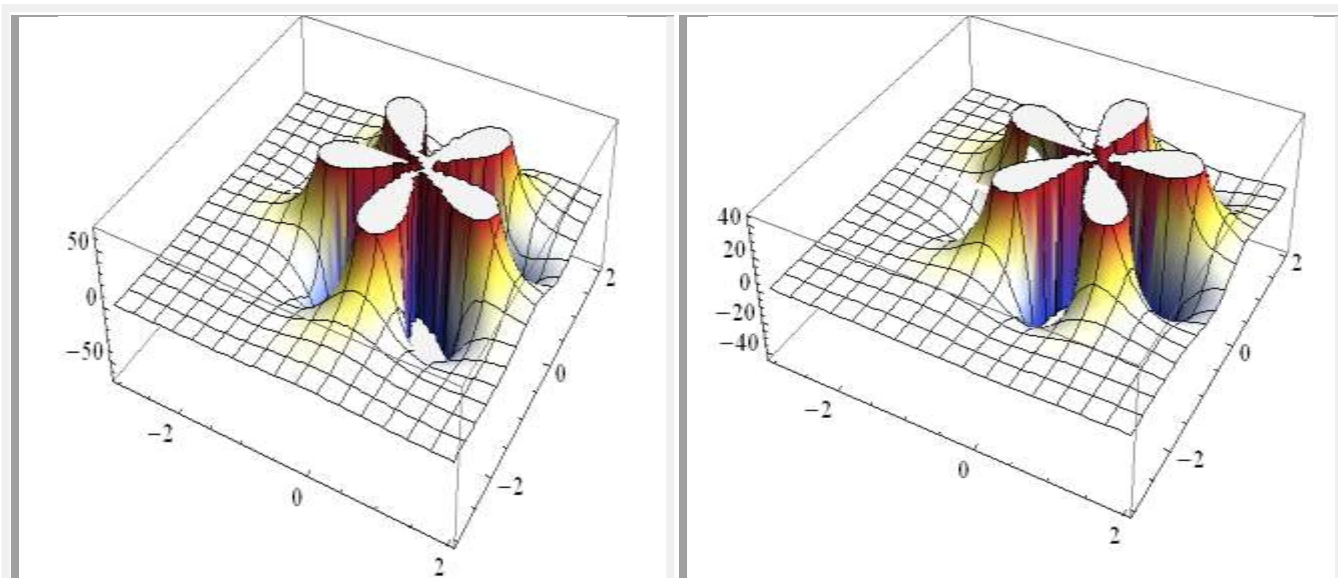


Fig.27.10,c Partea imaginară a funcţiilor **Bessel** centrice în planul complex.
În ordine: **In, Jn, Kn, Yn** (n ≡ α)

Fig.27.10,d Partea absolută a funcţiilor **Bessel** centrice în planul complex. În ordine: **In, Jn, Kn, Yn** (n ≡ α)

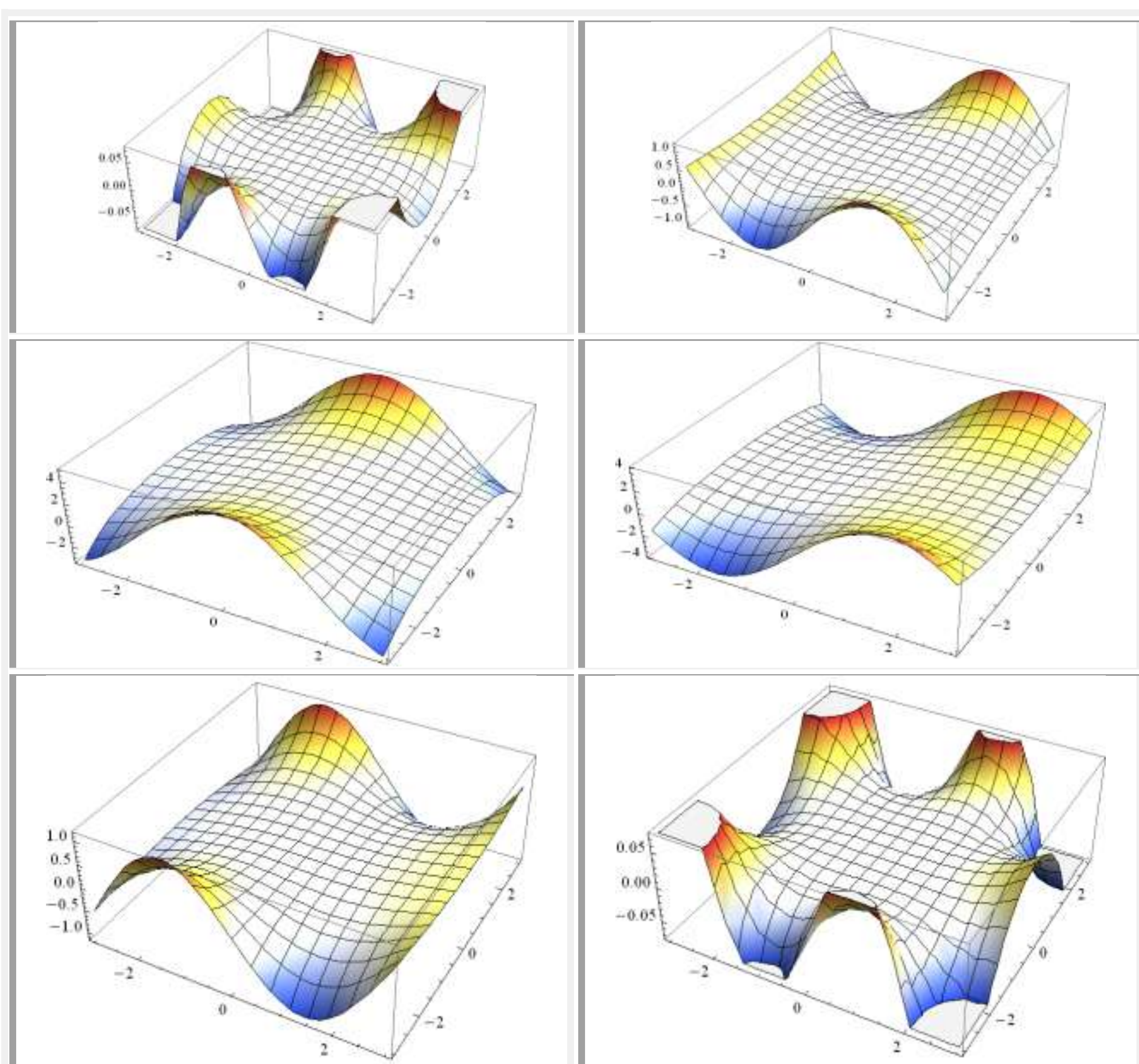


Fig.27.11,a Funcţii **Bessel centrice** de prima speţă **Jn** în planul complex de ordin întreg
α = -5, -3, 0, +1, +3, +5 partea reală

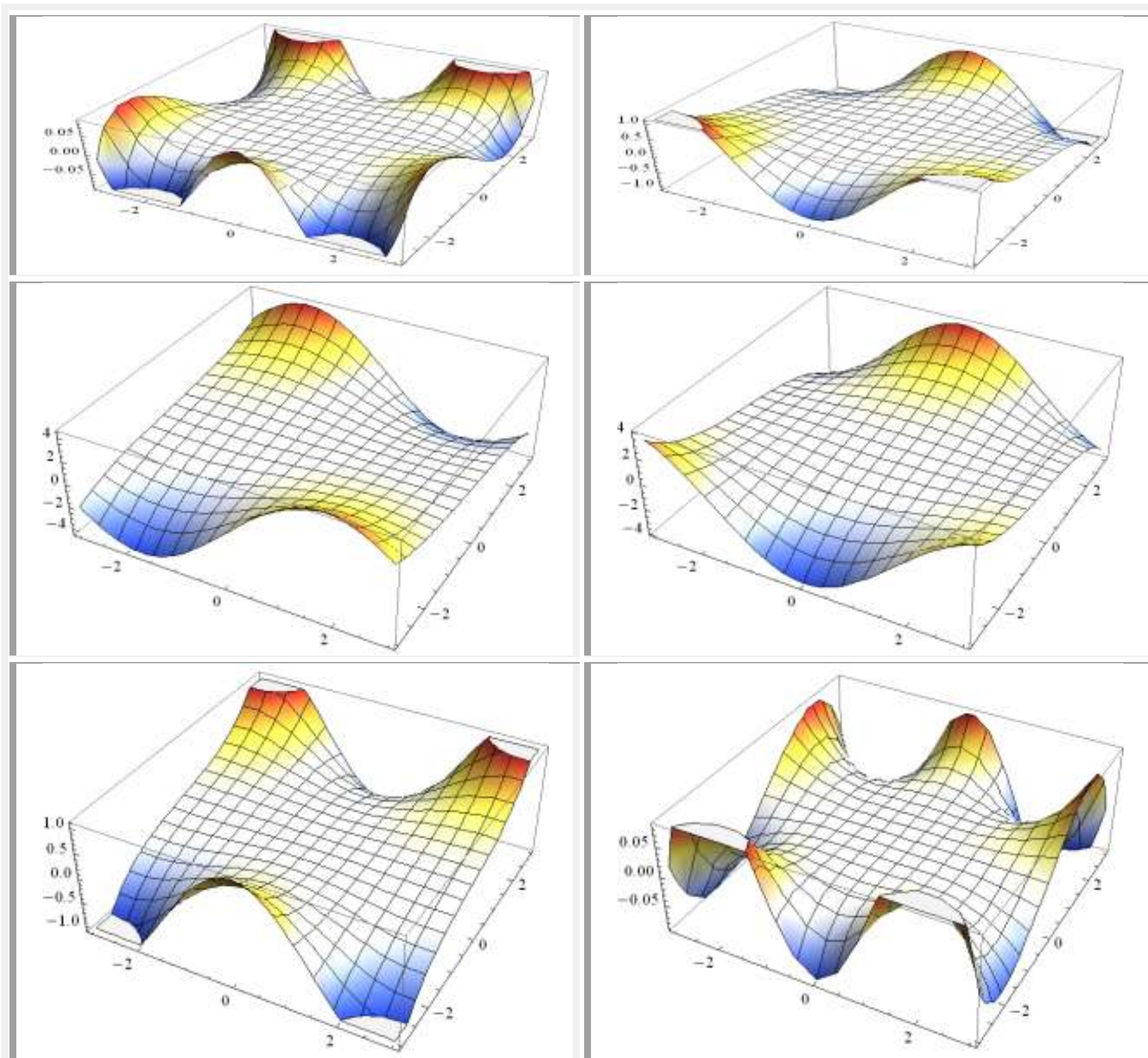


Fig.27.11,b Funcţii **Bessel** **centrice** de prima speţă **Jn** în planul complex de ordin întreg
α = -5, -3, 0, +1, +3, +5 , partea imaginară

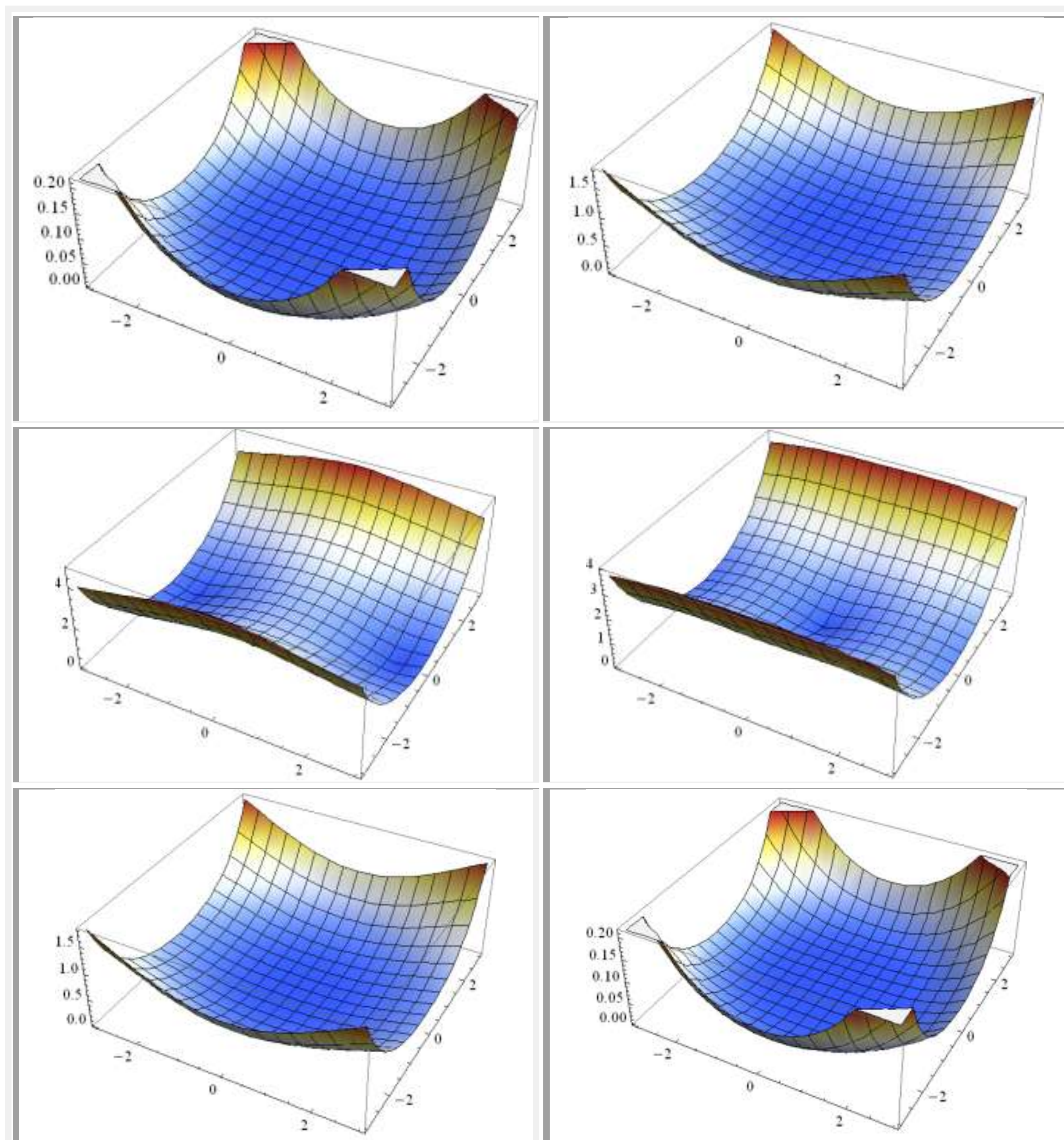


Fig.27.11,c Funcţii **Bessel centrice** de prima speţă **Jn** în planul complex de ordin întreg
α = -5, -3, 0, +1, +3, +5 , partea absolută

27.2 FUNCȚII Bessel CENTRICE (FBC) DE SPEȚA A II-a: Y_α

Funcțiile **Bessel centrice** de spața a II-a, notate prin $Y_\alpha(z)$ sau $Y_n(z)$, sunt de asemenea soluții ale ecuației diferențiale a lui **Bessel centrice**. Ele au o singularitate infinită în origine ***(z = 0)***.

Graficul funcţiilor **Bessel centrice** de speţa a II-a, $Y_\alpha(z)$ şi ordin întreg sunt prezentate în **figura 27.2**, iar în **figura 27.12** sunt prezentate şi pentru ordine întregi negative, adică pentru α = - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 şi 5. Funcția $Y_\alpha(z)$ **centrică** este denumită și **funcția Neumann**, ocazional fiind notată și cu $N_\alpha(z)$.

Pentru valori α diferite de întregi, funcția **Bessel centrică** de speța a II-a se scrie în funcție de $J_\alpha(z)$ sub forma:

(27.6) $Y_\alpha(z) = \frac{J_\alpha(z).\cos(\alpha.\pi) - J_{-\alpha}(z)}{\sin(\alpha.\pi)}$

În cazul în care α are o valoare întreagă n, funcția se defineşte ca limită de $\alpha \to n$:

(27.7) $Y_n(z) = \lim_{\alpha\to n} Y_\alpha(z)$

scriindu-se sub formă integrală:

(27.8) $Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\{ \int_0^\pi \sin(z.\sin\theta - n\theta)\, d\theta - \int_0^\infty [e^{nt} + (-1)e^{-nt}] e^{-z\sinh t} dt \}$

iar sub formă de serie este:

(27,9) $Y_n(z) = \frac{2}{\pi} \ln\frac{z}{2} J_n(z) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \{\psi(n+k+1)\} \frac{\left(\frac{-z}{2}\right)}{k!(n+k)!}$

în care ψ este funcția digamma.

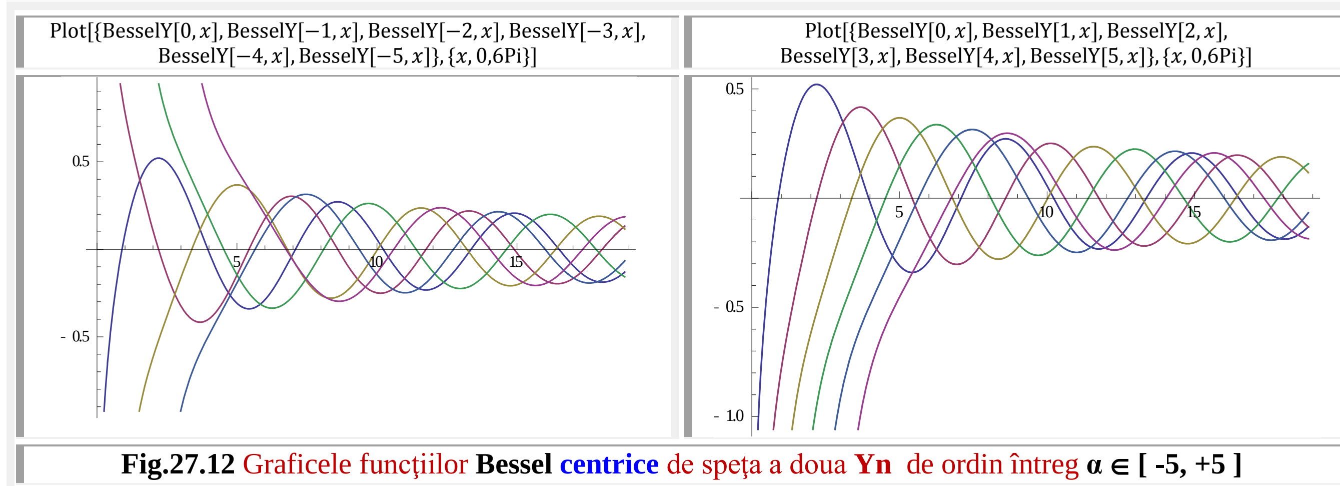


Fig.27.12 Graficele funcţiilor **Bessel centrice** de speţa a doua **Yn** de ordin întreg **α ∈ [-5, +5]**

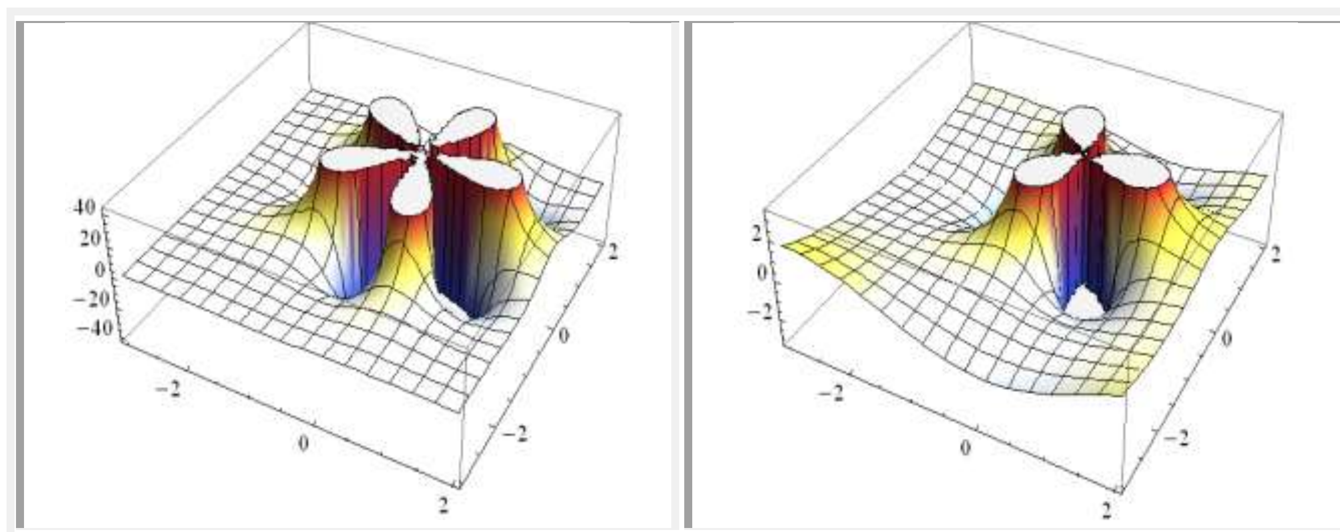
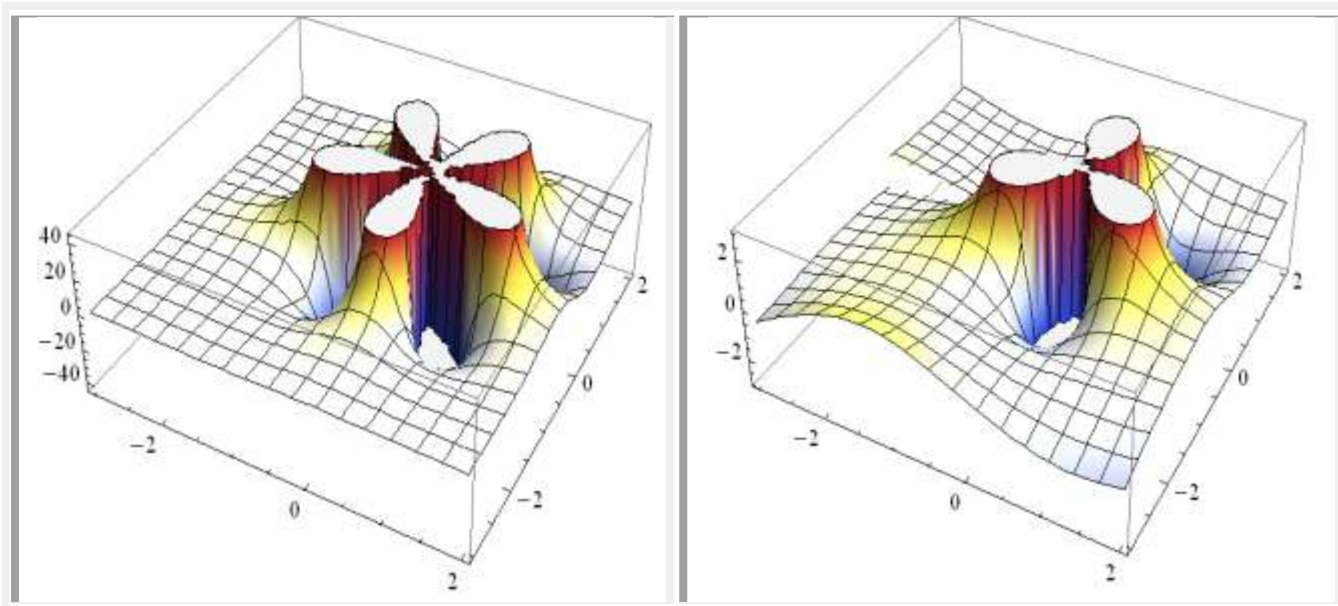


Fig.27.12,a Funcţii **Bessel centrice** de speţa a douaYn în planul complex de ordin întreg
α = -5, -3, 0, +1, +3, +5 partea reală



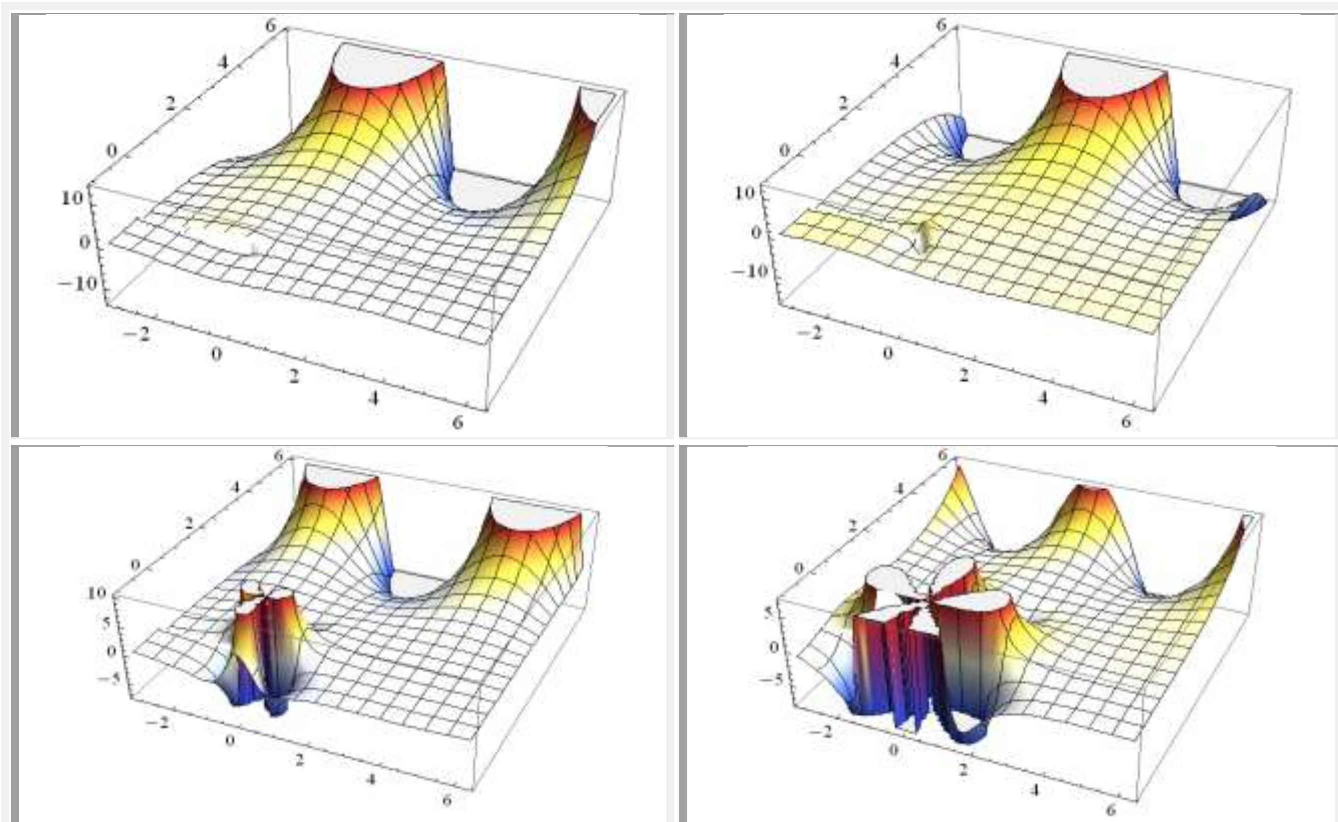
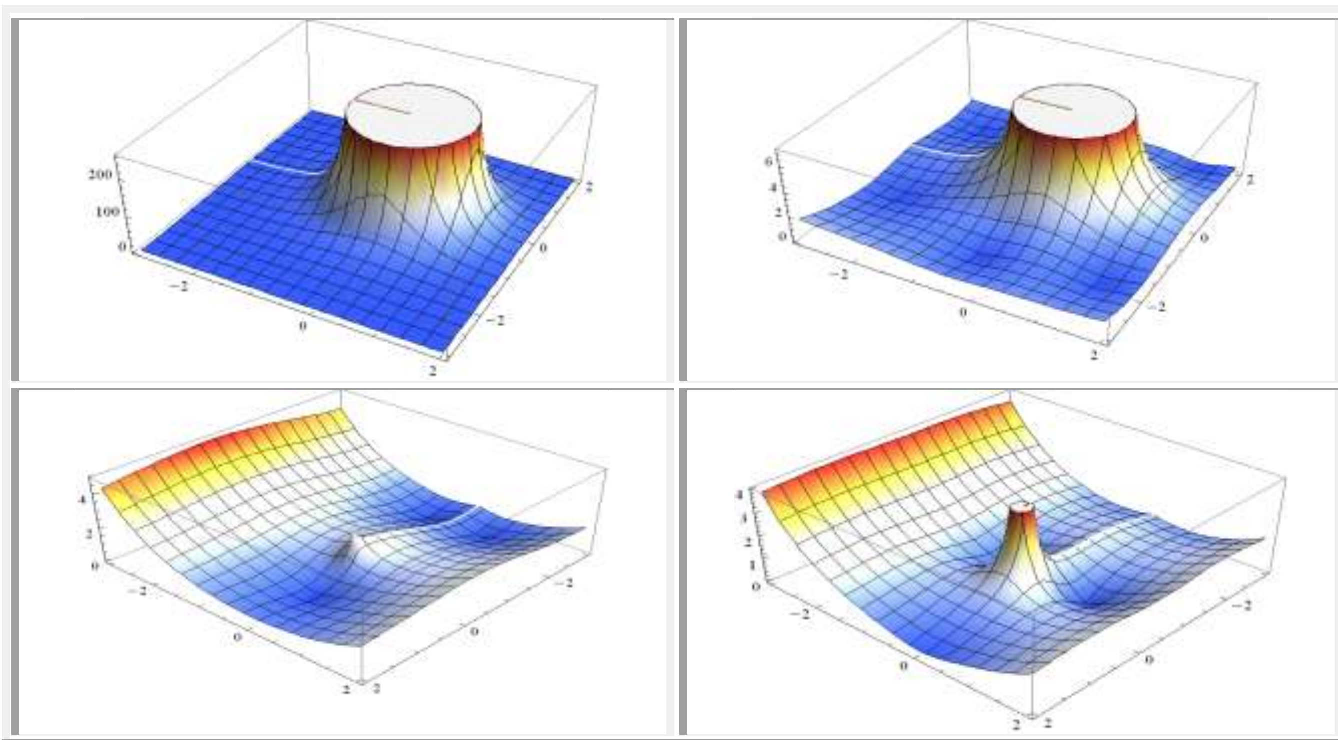


Fig.27.12,b Funcţii **Bessel centrice** de speţa a doua Yn în planul complex de ordin întreg
α = -5, -3, 0, +1, +3, +5 partea imaginară



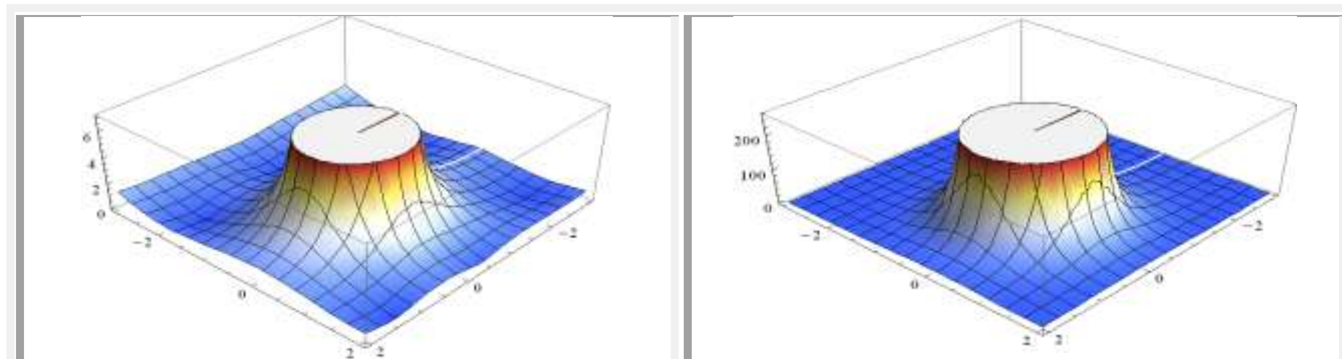


Fig.12,c Funcţii **Bessel centrice** de speţa a doua **Yn** în planul complex de ordin întreg
α = -5, -3, 0, +1, +3, +5 partea absolută

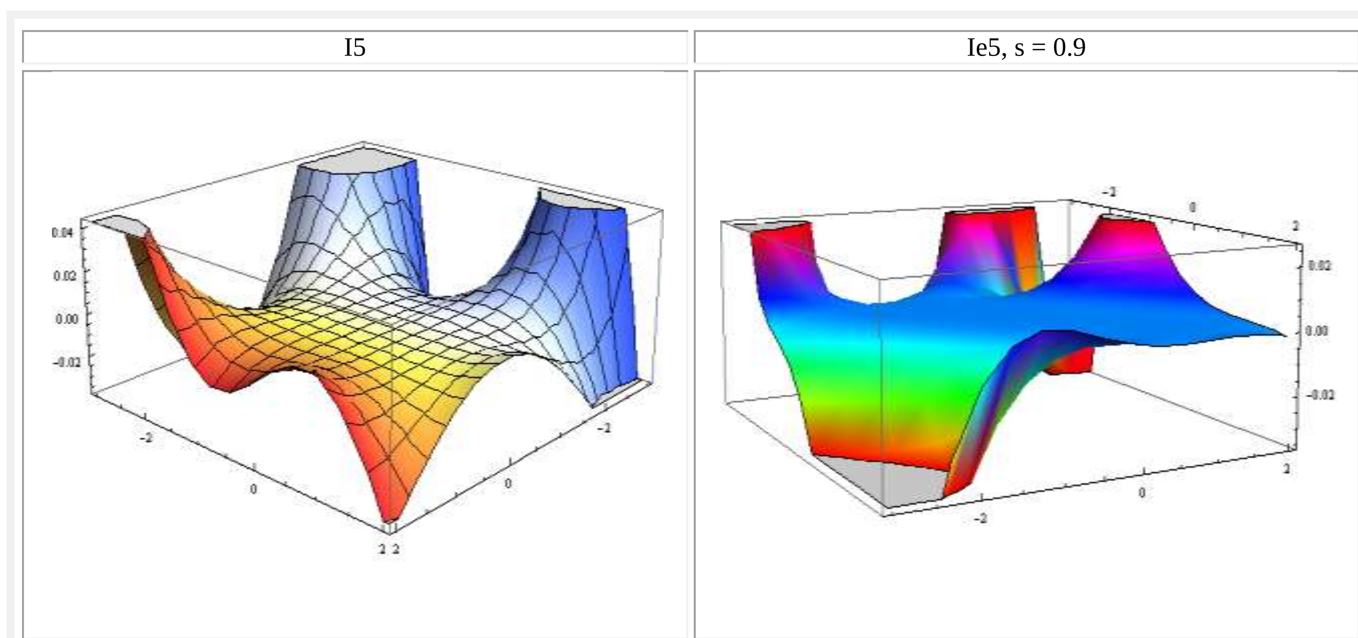
În cazul în care α are o valoare diferită de întreg, funcția $Y_\alpha(z)$ este inutilă (putând fi înlocuită oricând cu $J_{-\alpha}(z)$). Pe de altă parte, când α este un întreg n, $Y_n(z)$ este a doua soluție liniar independentă a ecuației lui **Bessel**. Mai mult, este valabilă o relație similară cu cea pentru funcția de speța I-a, adică:

(27.10) $Y_{-n}(z) = (-1)^n \, Y_n(z)$

Ambele funcții, $J_\alpha(z)$ și $Y_\alpha(z)$, sunt funcții olomorfe de z în planul complex cu tăietură de-a lungul axei reale negative. Când α este un întreg, funcțiile **Bessel** J sunt funcții întregi de z. Dacă z este fixat, atunci funcțiile **Bessel** sunt funcții întregi de α.

27.3 FUNCŢII BESSEL CENTRICE (I, J, K, Y) ŞI EXCENTRICE (IE, JE, KE, YE) (COMPARAŢIE)

In figurile următoare sunt prezentate partea reală în **figura 27.13**, partea imaginara în **figura 27.14** şi partea absoluta în **figura 27.15**. În partea stângă pentru **funcţiile centrice** si în partea din dreapta pentru **cele excentrice**.



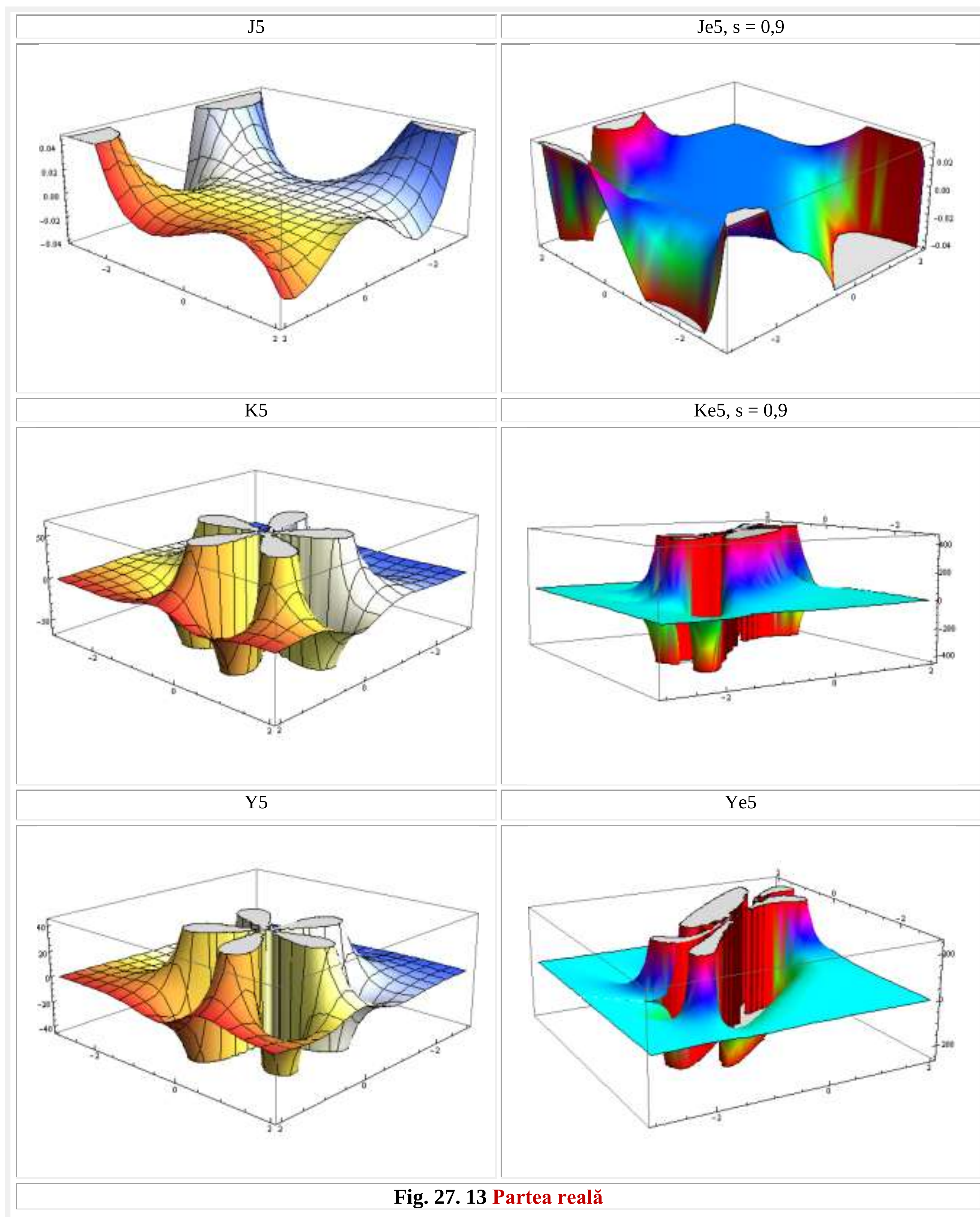
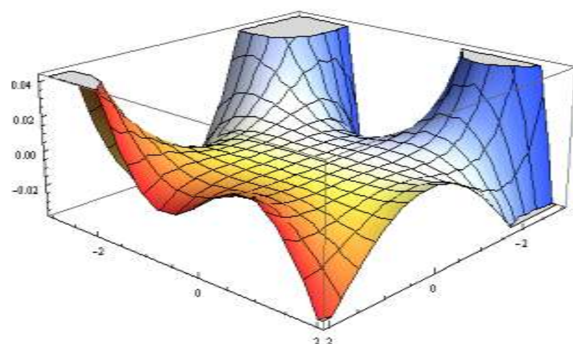
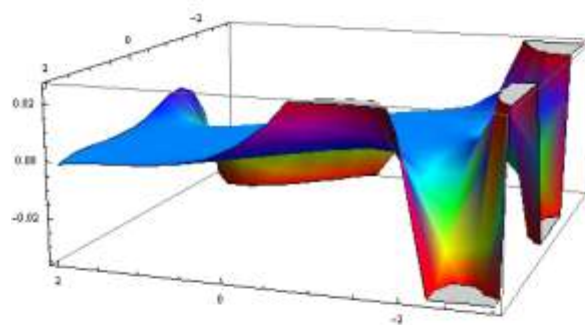
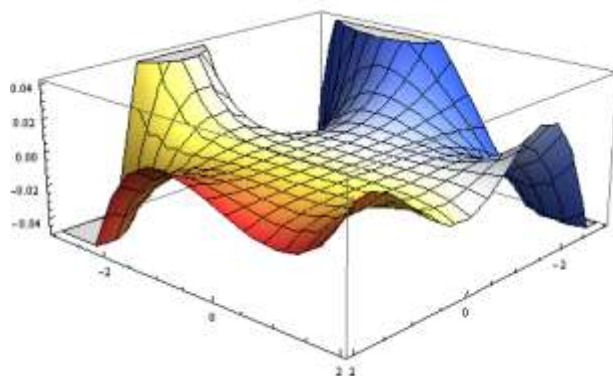
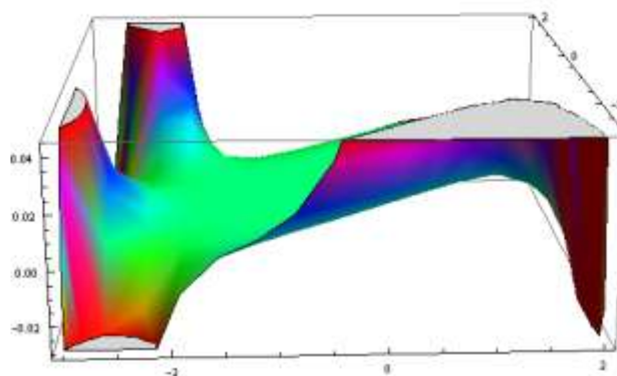
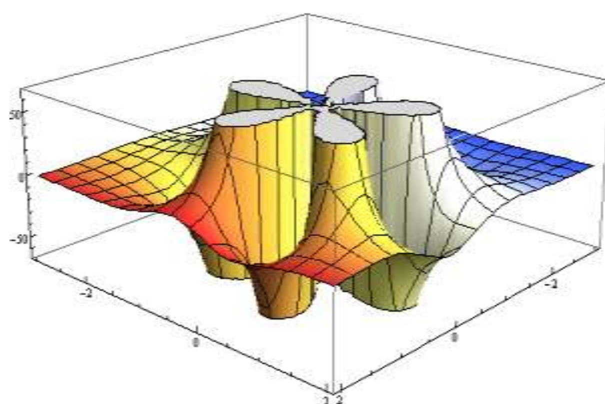
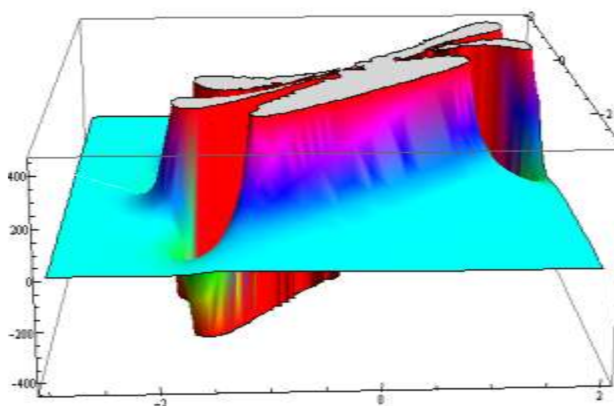


Fig. 27. 13 Partea reală

I-5	Ie-5
	
J-5	Je-5
	
K-5	Ke-5
	

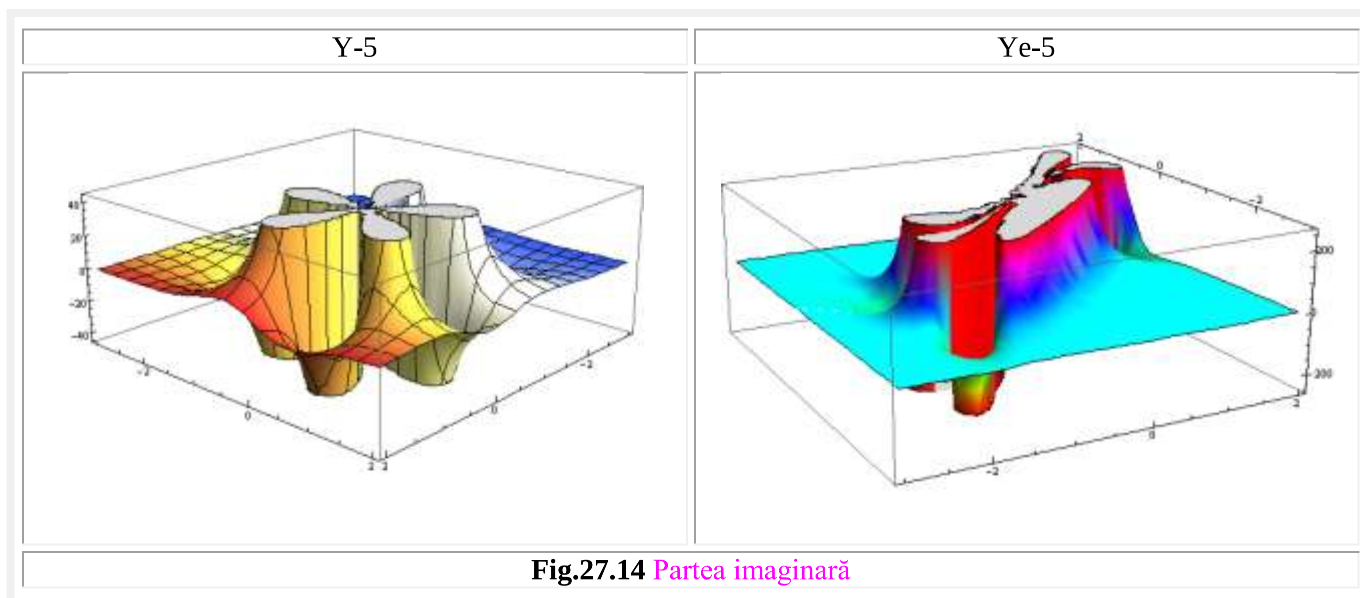


Fig.27.14 Partea imaginară

Fig. 27.15 Partea absolută

Alte **funcţii supermatematice circulare excentrice** în planul **complex** (**FSM-CEC**) sunt prezentate în 2D şi în 3D cu ecuaţiile lor de definiţie, în continuare.

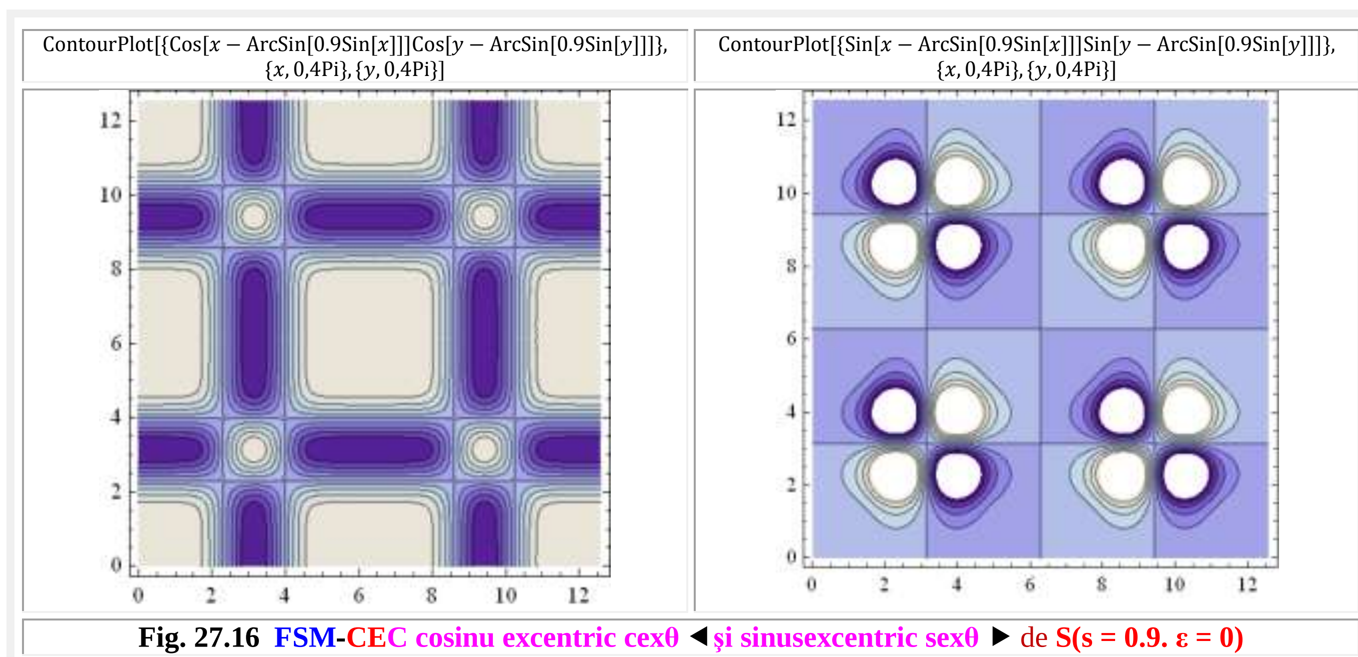


Fig. 27.16 FSM-CEC cosinu excentric cexθ ◄şi sinusexcentric sexθ ► de S(s = 0.9. ε = 0)

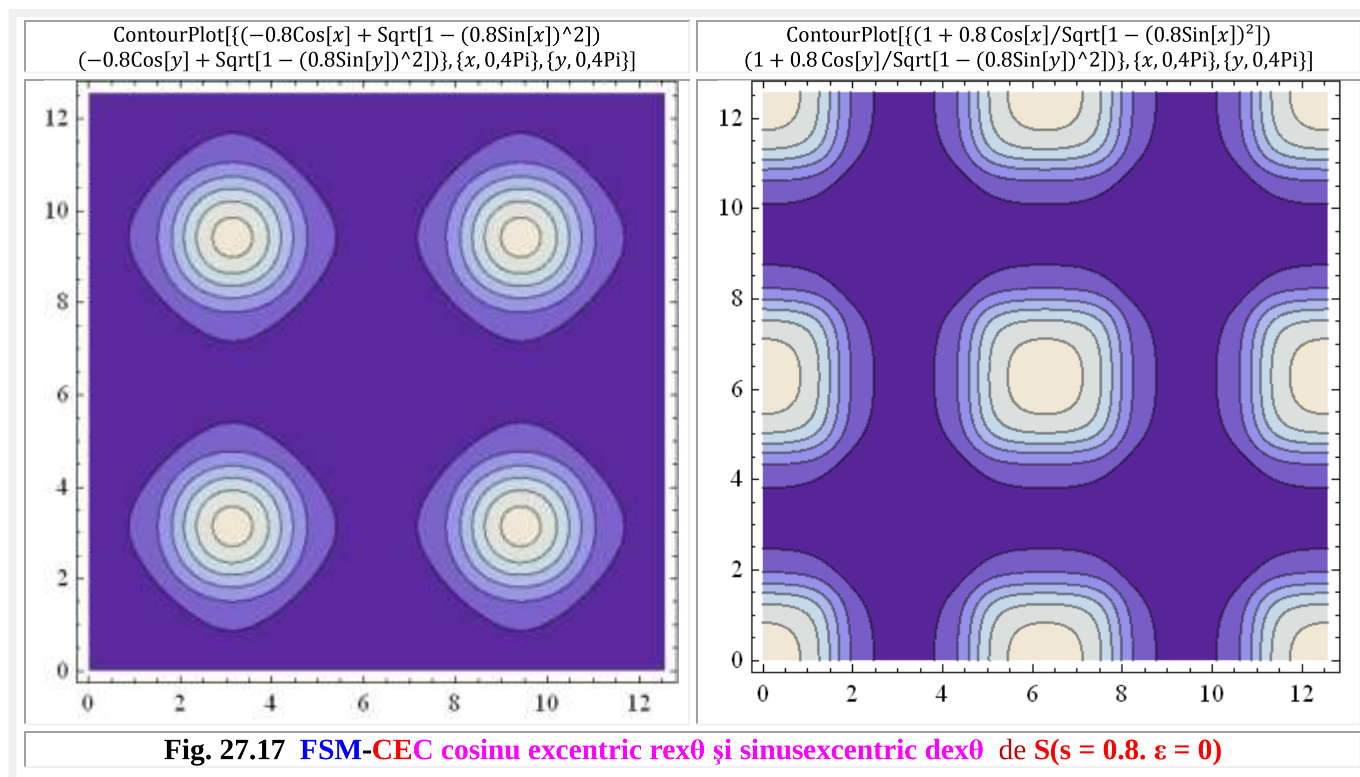


Fig. 27.17 FSM-CEC cosinu excentric rexθ şi sinusexcentric dexθ de S(s = 0.8. ε = 0)

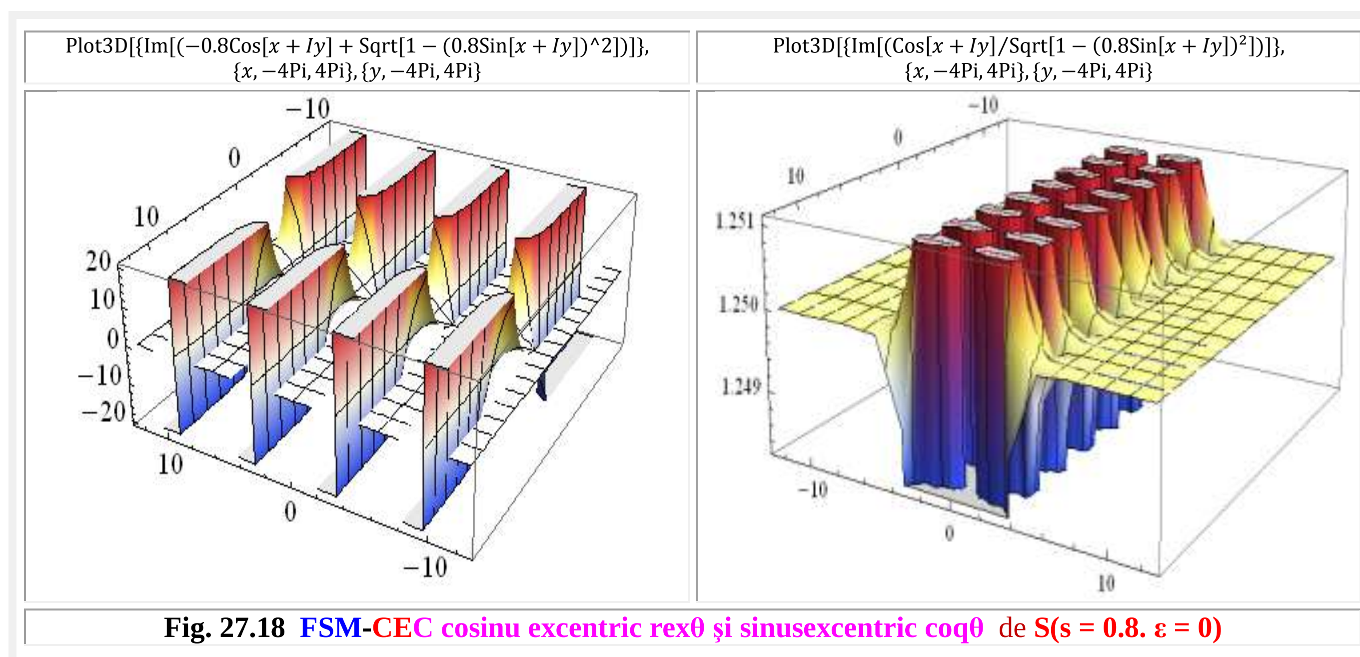


Fig. 27.18 FSM-CEC cosinu excentric rexθ şi sinusexcentric coqθ de S(s = 0.8. ε = 0)

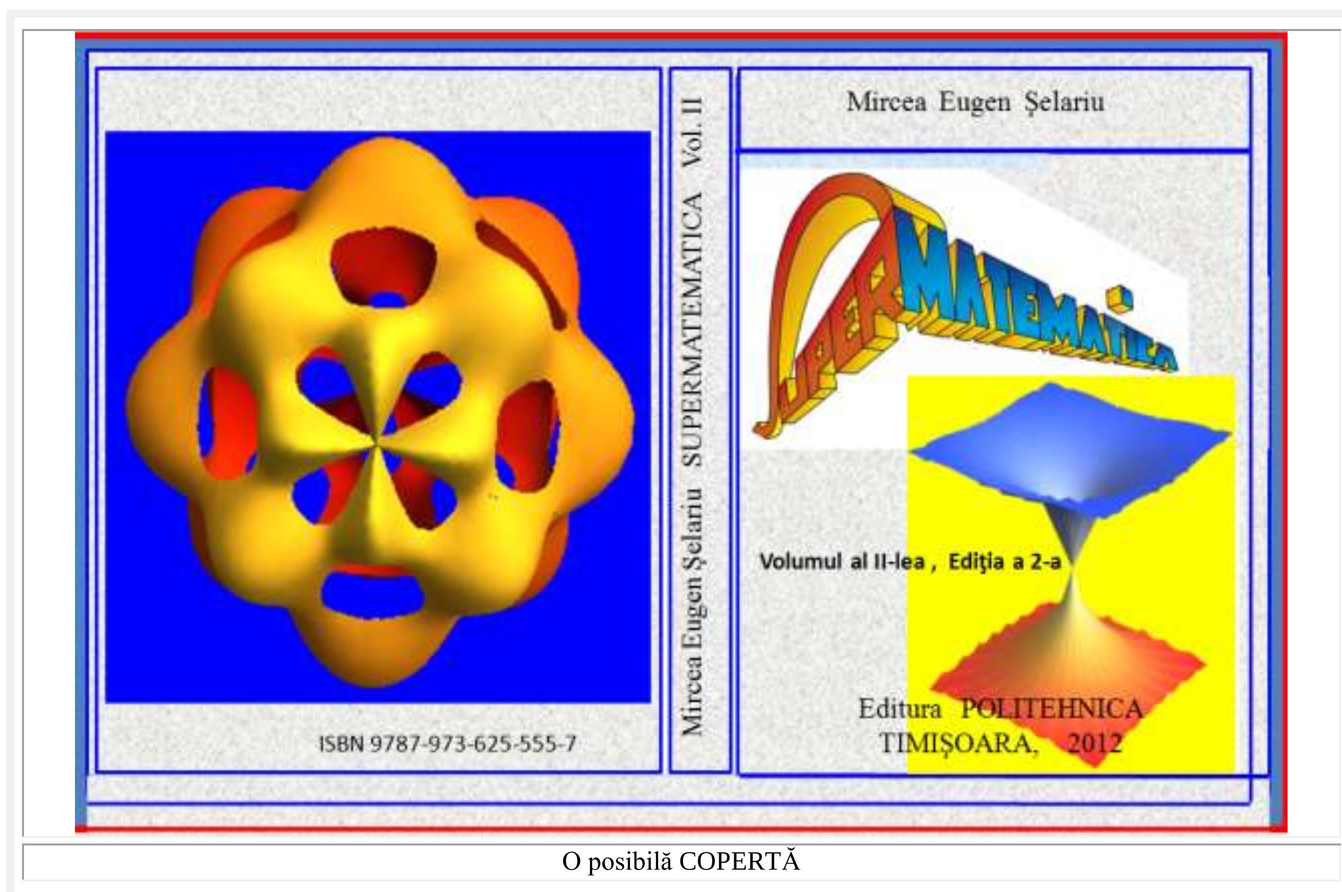
Motto:" După ce a descoperit celebra sa teoremă, **Pythagoras** a sacrificat o sută de boi.
De atunci, de fiecare dată, când se descoperă vreun **adevăr nou**,
vitele cornute mari au puternice palpitaţii."
Ludwig Björne

Capitolul 28

NOI FUNCŢII SUPERMATEMATICE (FSMN)

28.1 LAUDATIO în loc de ÎNTRODUCERE

Cu ocazia decernării **DIPLOMEI AGIR** din domeniul **"TEHNOLOGIEI INFORMAŢIEI",** pe anul 2012, lucrării **"SUPERMATEMATICA FUNDAMENTE".** Vol.I şi Vol. II, Editura "POLITEHNICA" din Timişoara, 2012, Asociaţia Generlă a Inginerilor din Romania (**AGIR**) a prezentat şi următorul laudatio, cu mici corectări şi completări ale autorului şi cu prezentarea copertei.



O posibilă COPERTĂ

Supermatematica (SM) este considerată, fără exagerare, de susţinătorii şi admiratorii ei, şi nu sunt puţini, unii fiind matematicieni şi profesori universitari americani, ca **noua matematică a meleniului III**, aşa cum se poate uşor constata.

Cele **914** pagini ale lucrării (nn. Ediţia a 2-a) - 486 pagini în vol.I şi 428 pagini în vol.II – exprimă vastitatea lucrării, dar atributele ei esenţiale cosistă în simplitatea şi surprinzătoarea ei apariţie, ca urmare a deplasarii din centrul O(0,0) a unui singur punct, denumit, din aceasta cauză **excentru E(e,ε),** în originalitatea şi în unicitatea ei în literatura mondială.

Supermatematica (**SM**) este o reuniune a matematicii cunoscute, ordinare, care în lucrare a fost denumită **matematică centrică (MC)** – obţinută din **SM** pentru unicul caz particular $e = 0$ **-** pentru a se deosebi de noua matematică, denumită **matematică excentrică** (**ME**).

Adică **SM = MC ∪ ME.**

Pentru fiecare punct din plan, în care poate fi plasat un excentru **E**(**e, ε**), se poate spune că există o nouă **ME**. Astfel, la o singură **MC** îi corespund o infinitate de **ME.** Pe de altă parte, **MC = SM(e = 0).**

În consecinţă, **SM** multiplică la infinit **toate entităţile** şi funcţiile circulare / trigonometrice cunoscute şi introduce o pleiadă de funcţii circulare noi (**aex, bex, dex, rex**, ş.a), mult mai importante şi mai elementare decât cele vechi şi, prin acestea, în final, multiplică la infinit toate entităţile matematice cunoscute (cos→**cex**, sin→**sex**, tan/tg→**tex**, ş.m.a.) şi introduce multe alte entităţi noi.

S-a constatat că **MC** este proprie sistemelor **liniare, perfecte, ideale**, iar **ME** este proprie sitemelor **neliniare, reale, imperfecte**. Ca urmare, odată cu apariţia **SM** a dispărut graniţa dintre liniar şi neliniar, dintre ideal şi real, dintre perfecţiune şi imperfecţiune, ceea ce constituie visul de veacuri al inginerilor şi o unică performanţă matematică de seamă.

SM evidenţiază excentricitatea liniară **e** şi pe cea unghiulară **ε**, coordonatele polare ale excentrului **E**(**e,ε**), ca noi dimensiuni ale spaţiului: dimensiuni de **formare** şi de **deformare** ale acestuia; numite şi dimensiunile ascunse ale spaţiului.

SM putea să apară cu peste 300 de ani în urmă, dacă **Euler**, la definirea funcţiilor trigonometrice ca funcţii circulare directe, n-ar fi ales **trei puncte confundate, suprapunere care a sărăcit matematica**:

- **Originea O**(0, 0) a unui reper / sistem de coordonate
- **Polul P≡ E** sau **S** al unei semidrepte,
- **Centrul C** al cercului trigonometric (unitate) .

SM a apărut atunci când polul **E** si **S** au fost expulzate din centrul cecului şi din originea reperului şi au fost denumite **excentre.**

Din combinarea celor trei puncte(O,M, E sau S) apar următoarele familii/ domenii de funcţii **SM**:

1) **FCC - circulare centrice-** (**FSM-CC**)→ dacă **C**≡ **O** ≡ **E;**
2) **FSM circulare excentrice** (**FSM-CE**) → dacă **C** ≡ **O** ≠**E;**
3) **FSM circulare elevate** (**FSM-CEL**) → dacă **C** ≠ **O** ≡ **E** şi
4) **FSM circulare exotice** (**FSM-CEX**) → dacă **C** ≠ **O** ≠ **E.**

Pentru a aduce de acord trigonometria cu geometria, intersecţia cercului unitate nu s-a mai făcut cu o semidreaptă (**Euler → MC**) ci cu o dreaptă, astfel că există două determinări: una principală, de indice **1** şi una secundară de indice 2. De asemenea, existând două unghiuri, la centrul **O(0,0) α** şi la excentru **S(s, ε) θ,** vor exista două tipuri de funcţii **SM :** de variabilă excentrică **θ** , notate **cex, sex, rex, dex,** şi de **variabilă centrică α**, notate cu majuscule Cex, Sex, Rex, Dex, ş.a.m.d. dintre care **dex** = $\frac{d\alpha}{d\theta}$, iar Dex = $\frac{d\theta}{d\alpha}$, astfel că **dexθ** = $\frac{1}{Dex\alpha}$.

Dintre **entităţile noi apărute** sunt şi o pleiadă de noi curbe închise, care apar la **transformarea continuă** a cercului în pătrat (denumite **quadrilobe** / **cvadrilobe**), a cercului în triunghi (**trilobe**) ş.a.

În **3D**, aceste transformari continue sunt a **sferei în cub**, a **sferei în prismă**, a conului în piramidă ş.m.a.

Aceste transformări continue au făcut posibilă apariţia unor noi corpuri **3D hibride** ca: sfera-cub; cono-piramida, piramida-con ş.m.a, precum şi a unor noi transformari matematice, cum este **hibridarea matematică**, care, dintr-un cerc şi un pătrat rezultă o quadrilobă (cvadrilobă), din cerc şi triunghi o trilobă, ş.a.m.d.

Prin înlocuirea cercului cu o quadrilobă au fost definite funcţiile quadrilobe, iar prin înlocuirea cu o trilobă au fost definite în lucrare şi **funcţiile trilobe**.

In domeniul **hiperbolic** au apărut funcţiile hiperbolice excentrice.

În **eliptic**, integralele şi funcţiile eliptice **Jacobi** centrice sau multiplicat la infinit prin funcţiile eliptice excentrice şi prin alte funcţi pe conice.

În lucrare sunt evidenţiate şi noi metode matematice, dintre care se amintesc

1) **Determinarea unui relaţiei de calcul**, oricât de exacte, a integralei eliptice complete de prima speţă **K(k)** şi transformarea, totodată, a metodei **numerice**, a mediei aritmetico-geometrice **Landen,** într-o metodă **analitică,** care a permis determinarea, cu minimum 15 zecimale exacte (!), a **relaţiei** de calcul **K(k)** după numai 5 paşi.

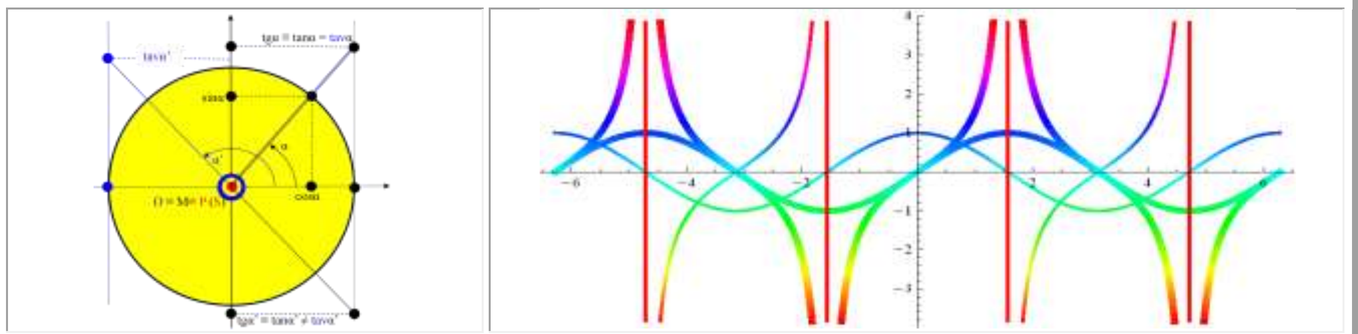


Fig. 28.1,a Schiţă explicativă ◄ şi graficele funcţiilor circulare centrice (**FSM-CC**) **cos**, **sin**, **tan** şi **tav** ►

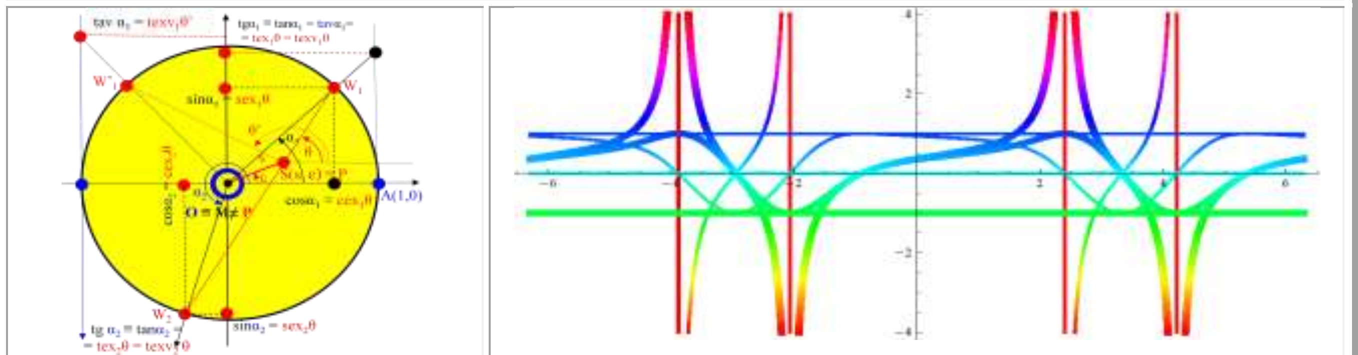


Fig. 28.1,b Schiţă explicativă ◄ şi graficele **funcţiilor circulare excentrice** (**FSM-CE**) cex, sex, tex şi **texv** ►
de S(**s = 0,8; ε = π/7**) interior discului unitate (R = 1)

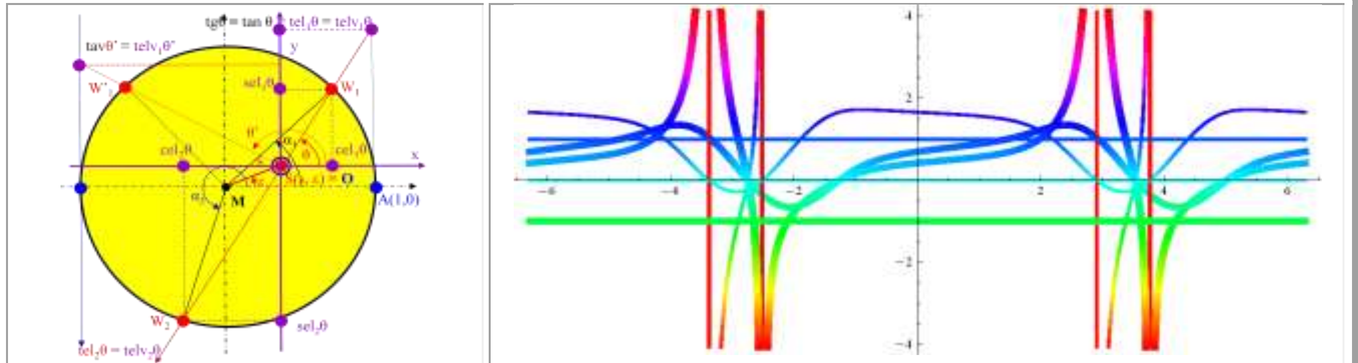


Fig. 28.1,c Schiţă explicativă ◄ şi graficele **funcţiilor circulare elevate** (**FSM-CEL**) **cel, sel, tel şi telv** ►
de S(**s = 0,8; ε = π/7**) interior discului unitate (R = 1)

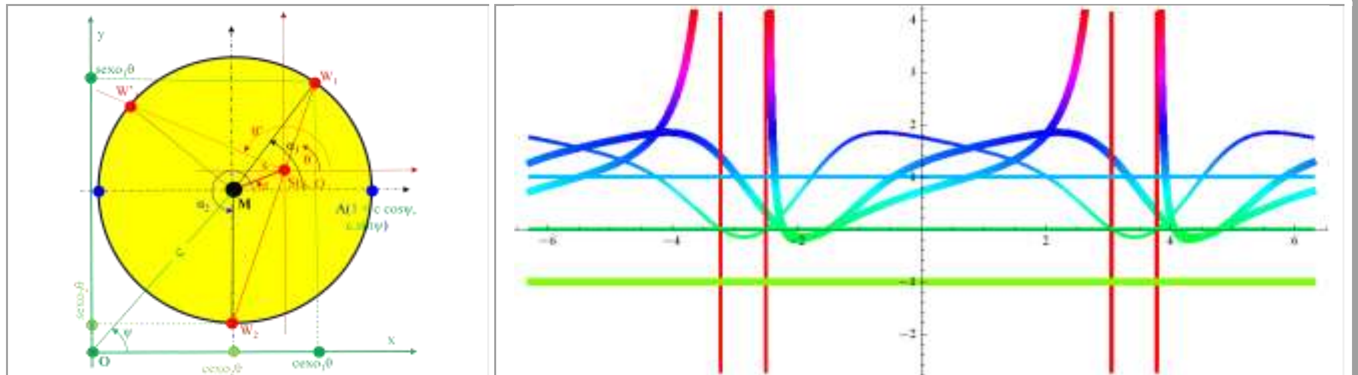


Fig. 28.1,d Schiţă explicativă ◄ şi graficele **funcţiilor circulare exotice** (**FSM-CEX**) **cexo, sexo, texo şi texov** ►
de S(**s = 0,6; ε = π/7**), interior discului unitate (R = 1), OM = 1,2 şi ψ = π/4

2) **Metoda divizării diferenţialei**- o nouă metodă de integrare, care evită integrarea în spaţiul complex.
3) **SM-CAD-CAM** pentru descrierea obiectelor tehnice ş.m.a.

Nu putem încheia fără să subliniem bogăţia de desene explicative şi de grafice, care întregesc înţelegerea lucrării şi calitatea acestora, asigurată de Editura "POLITEHNICA" din Timişoara, chiar dacă sunt tipărite doar în alb-negru, pentru reducerea cheltuielilor şi nu color, cum s-a intenţionat iniţial şi cum a fost elaborat manuscrisul.

Principalele FSM directe, de bază şi derivate, centrice şi excentrice, primele arhicunoscute si celelalte studiate mai în detaliu până în prezent, sunt trecute în revistă în **tabelul 1** şi prezentate / exprimate grafic în **figura 1**. În **tabelul 1** au foast marcate şi noile funcţii tangenta şi cotangenta, secanta şi cosecanta **Voinoiu,** pentru ca subiectul să fie complet / intergit, iar în **figura 2** este reprezentată grafic şi funcţia tangentă **Voinoiu**.

24.2 TIPURI / FAMILII DE FUNCŢII SUPERMATEMATICE.

Cele 4 tipurile sau familiile **FSM** prezentate anterior (**centrice, excentrice, elevate** şi **exotice**) şi în **figura 1,a … 1,d** sunt incomplete, deoarece, cele trei puncte pot fi combinate astfel:

1) Combinări de 3 obiecte (puncte) luate câte 3 → $C_3^3 = 1$→ **FSM**-CC ;
2) Combinări de 3 obiecte (puncte) luate câte 2 → $C_3^2 = 3$ →FSM-**CE**, FSM-**CEl**; (**FSM-CEx**);
3) Combinări de 3 obiecte (puncte) luate câte 1 → $C_3^1 = 1$ → FSM-CCT; (**FSM-CEx**);

Familia lipsă este cea a **FSM** circulare centrice translatate (**FSM**-CCT).

Dintre aceste familii, **funcţiile circulare centrice** (**FCC**) sunt pe larg dezbătute şi arhicunoscute, iar cele excentrice sunt doar puţin cunoscute, în raport cu **FCC**, dar mult mai cunoscute decât celelalte funcţii supermatematuice elevate şi exotice.

Pentru compararea noilor **FSM-CE** cu cele circulare centrice (**FCC**) s-a alcătuit **tabelul 1,** iar pentru definirea **FSM-CE,** de variabilă excentrică **θ** şi centrice $\boldsymbol{\alpha_1}$, s-a alcătuit schiţa din **figura 2**.

Tabel 28.1 Funcţii circulare **centrice** şi **excentrice,** directe, de **bază** şi **derivate**

FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE (**FSM-CE**) DIRECTE DE BAZĂ				
FUNCŢII MATEMNATICE CENTRICE (FMC)		**FUNCŢII SUPERMATEMNATICE EXCENTRICE (FME)**		
Cosinus	cosα	Cosinus excentric	$cex_{1,2}\theta$	$Cex\alpha_{1,2}$
Sinus	sinα	Sinus excentric	**sex**$_{1,2}\theta$	$Sex\alpha_{1,2}$
Tangenta	tanα	Tangenta excentrică	**tex**$_{1,2}\theta$	$Tex\alpha_{1,2}$
Tangenta Voinoiu	tavα	Tangenta Voinoiu excentrică	**texv**$_{1,2}\theta$	$Texv\alpha_{1,2}$
Cotangenta	cotα	Cotangenta excentrică	**ctex**$_{1,2}\theta$	$Ctex\alpha_{1,2}$
Cotangenta Voinoiu	covα	Cotangenta Voinoiu excentrică	**ctgv**$_{1,2}$ θ	$Ctex\alpha_{1,2}$
Secanta	secα	Secanta excentrică	$scex_{1,2}\alpha$	$Scex\alpha_{1,2}$
Secanta Voinoiu	sevα	Secanta excentrică Voinoiu	$scexv_{1,2}\alpha$	$Stexv\alpha_{1,2}$
ŞI FCC precum şi FSM-CE DIRECTE DERIVATE				
Versinus	versinα	Versinus excentrică	versexα	
Coversinus	coversinα	Coversinus excentrică	coversexα	
Exsecantă	exsecα	Exsecantă excentrică	exscexα	
Excosecanta	excscα	Excosecanta excentrică	excsexα	



Fig.28.2 Schemă explicativă pentru **FSM-CE** directe, de bază şi **derivate**

Pentru ca subiectul **SM** să fie epuizat şi funcţiile **FSM** să fie în formaţie completă, s-au considerat şi **FSM circulare centrice translatate** (**FSM –CCT**) a căror definire este prezentată schematic în **figura 28.3**. Au fost denumite şi **FSM NOI (FSMN),** deoarece sunt descoperite doar de câteva zile, în timp ce, celelalte 4 familii sunt descoperite de peste 30 de ani !

Aşa cum le spune şi numele, ele sunt **FCC** care sufera o translaţie de t_x = **m**.cosψ pe direcţia x, cum este de exemplu cosinusul şi de t_y = **m**.sinψ pe direcţia y, ca de exemplu sinusul **Fig.24.4,a** şi au două determinări atât cele centrice cât şi cele excentrice, de indice 1 şi, respectiv, de indice 2 (**Fig. 28.3**).



Fig.24.3 Funcţii supermatematice circulare centrice translatate. **(FSM-CCT)**

Şi **funcţiile supermatematice circulare exotice** (**FSM-CEX**) pot fi considerate ca **funcţii supermatematice excentrice** translatate (**FSM-CET**) pentru că şi ele suferă aceleaşi valori de translaţie t_x =

c.cosψ şi t_y = c.sinψ, faţă de **FSM-CE**. De aceea, ele vor fi prezentate în paralel pentru **c = m = 1,4** şi ψ = $\frac{\pi}{6}$: cele centrice în partea stângă, uşor de recunoscut pentru că sunt unice şi cele excentrice, în familie de curbe, pentru **s** ∈ [-1, +1] cu pasul 0,1 şi **ε = 0**, în partea dreaptă a **figurii 28.4.**

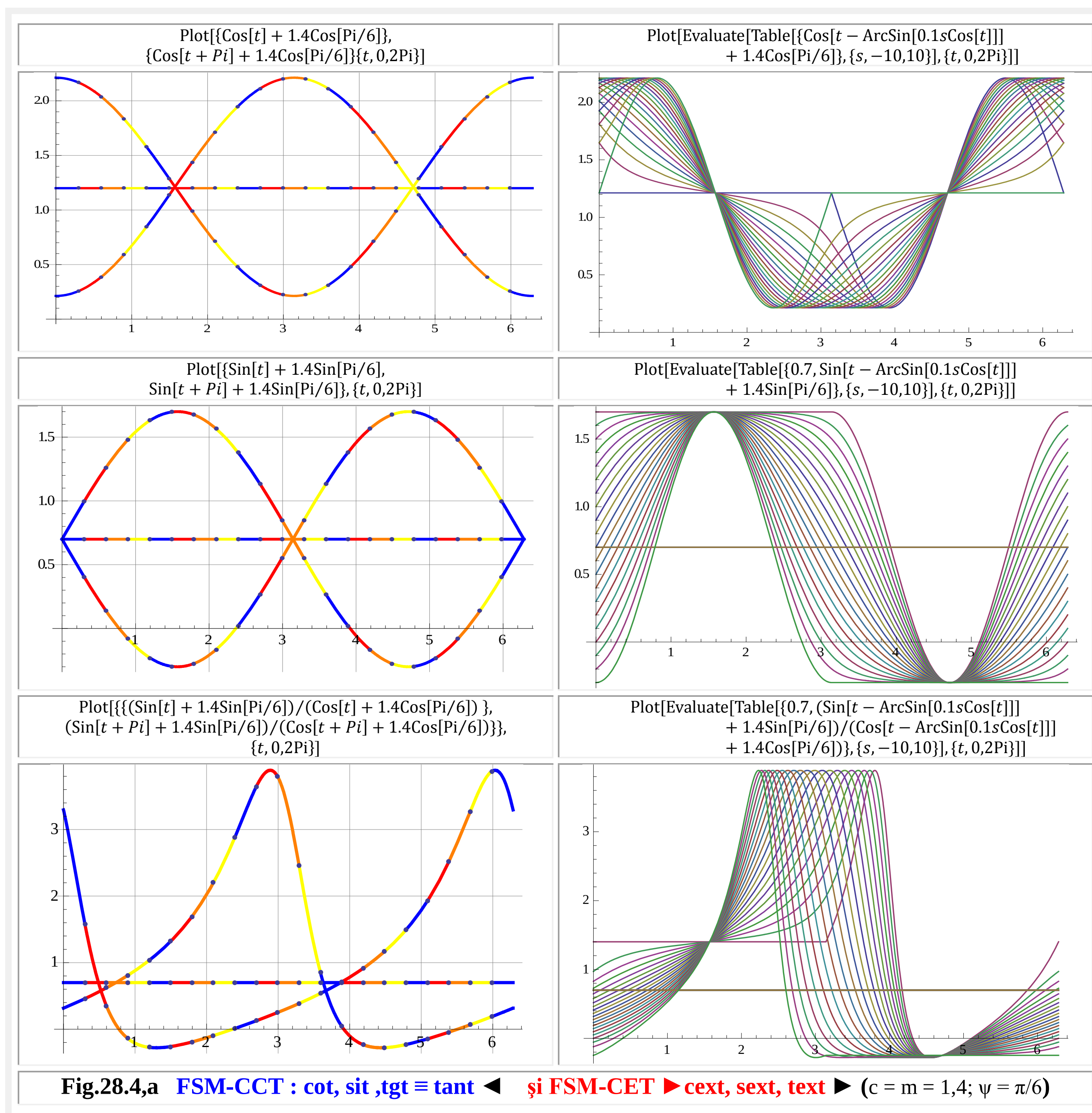


Fig.28.4,a FSM-CCT : cot, sit ,tgt ≡ tant ◄ şi FSM-CET ►cext, sext, text ► (c = m = 1,4; ψ = π/6)

Pentru **c = m = 1,4** se observă din **figura 4,a** că tangentele sunt strict pozitive în tot domeniul de 2π şi, ca uramare, tangenta **Euler** şi tangenta **Voinoiu** sunt identice. Pentru o valoare mai redusă, de **c = m = 0,4**, tangenta **Euler** şi tangentele **Voinoiu** sunt diferite şi sunt prezentate în **figura 4,b**.

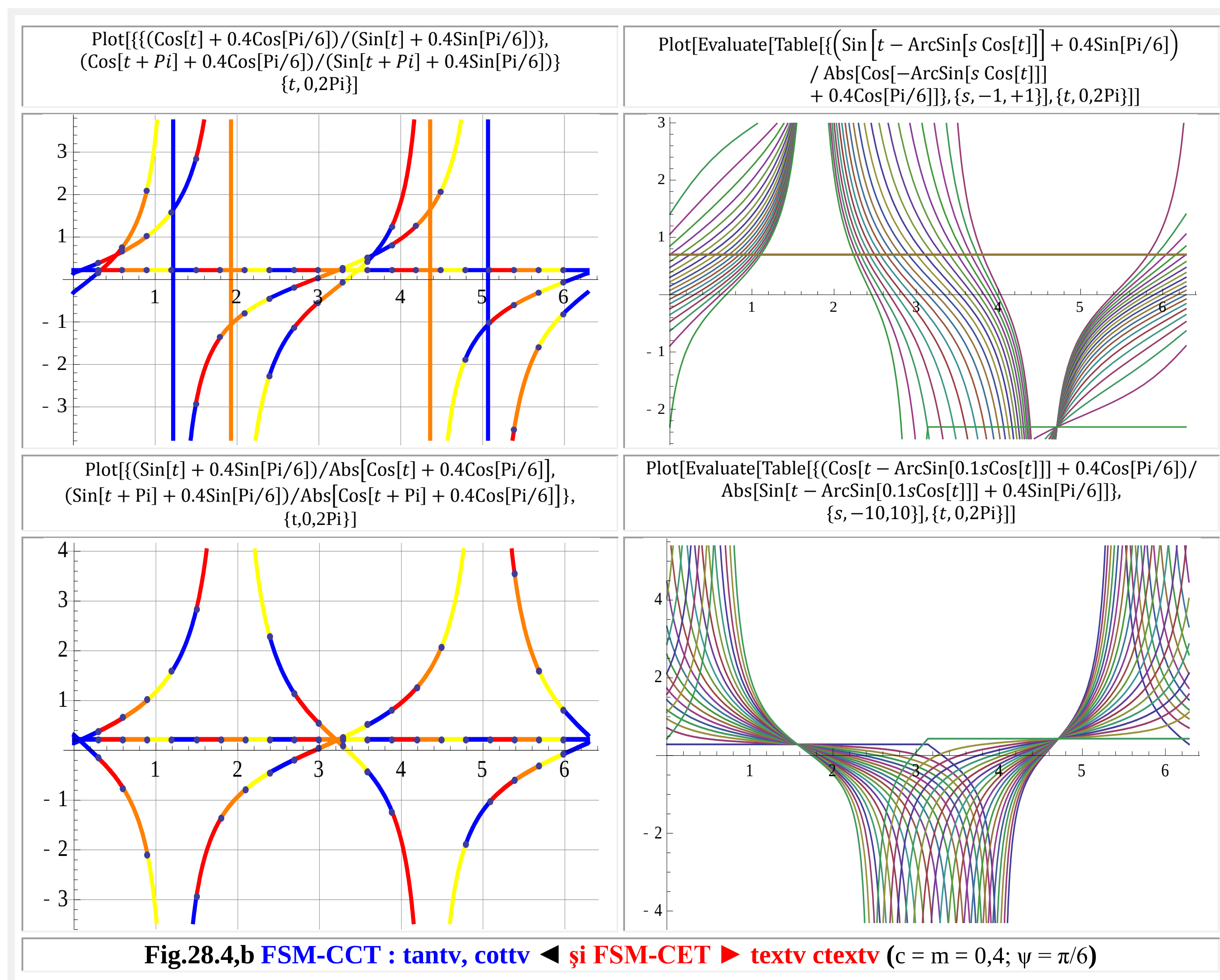


Fig.28.4,b FSM-CCT : tantv, cottv ◄ şi FSM-CET ► textv ctextv (c = m = 0,4; ψ = π/6**)**

În **figurile 28.4,a** şi **28.4,b** au fost reprezentate suprapuse ambele determinări ale **FSM-CCT**, iar în figurile următoare, în care **FSM-CCT** sunt multiple, sunt reprezentate în partea stângă doar graficele primei determinări, principale, iar în partea dreaptă sunt prezentate, datorita dantelăriei lor, suprapuse, ambele determinari.

Prin considerarea lui **c = m ∈ [-1,+1]** drept parametru, se obţin şi pentru **FSM-CCT** familii de funcţii paralele între ele (**Fig. 28.4,c**), dacă **c** şi **m** sunt nişte constante, iar **FSM-CET** îşi schimbă complet alura.

Oricare din aceşti parametri constanţi poate fi considerat variabil **ca direcţie** dacă unghiul **ψ** nu este constant, ci este o funcţie de **α** pentru **FSM-CCT** şi, respectiv de **θ** pentru **FSM-CET**, aşa cum este cazul din **figura 28.4,d**. Astfel, în **figura 28.4,e**, s-a ales **ψ** = $\frac{\pi}{6}$ → **cost**, iar în **figura 28.4,f** s-a ales **ψ** = $\frac{\pi}{6}$ → **sint.**

O serie de alte funcţii **excentrice** translatate, printre care şi radial excentric de variabilă excentrică θ

(1) rexθ = − s cost + $\sqrt{1-s^2 sin^2\theta}$ şi de variavila centrică $\alpha = \alpha_1$

(2) Rexα = $\sqrt{1+s^2-2scos\alpha}$, precum şi funcţia derivată excentrică de θ

(3) dexθ = 1− $\frac{s.cos\theta}{\sqrt{1-s^2 sin^2\theta}}$

sunt prezentate în **figura 28.6** cu ecuaţiile lor de definire, din considerente estetice, în două moduri de colorare individuală şi în grup, pe zone.

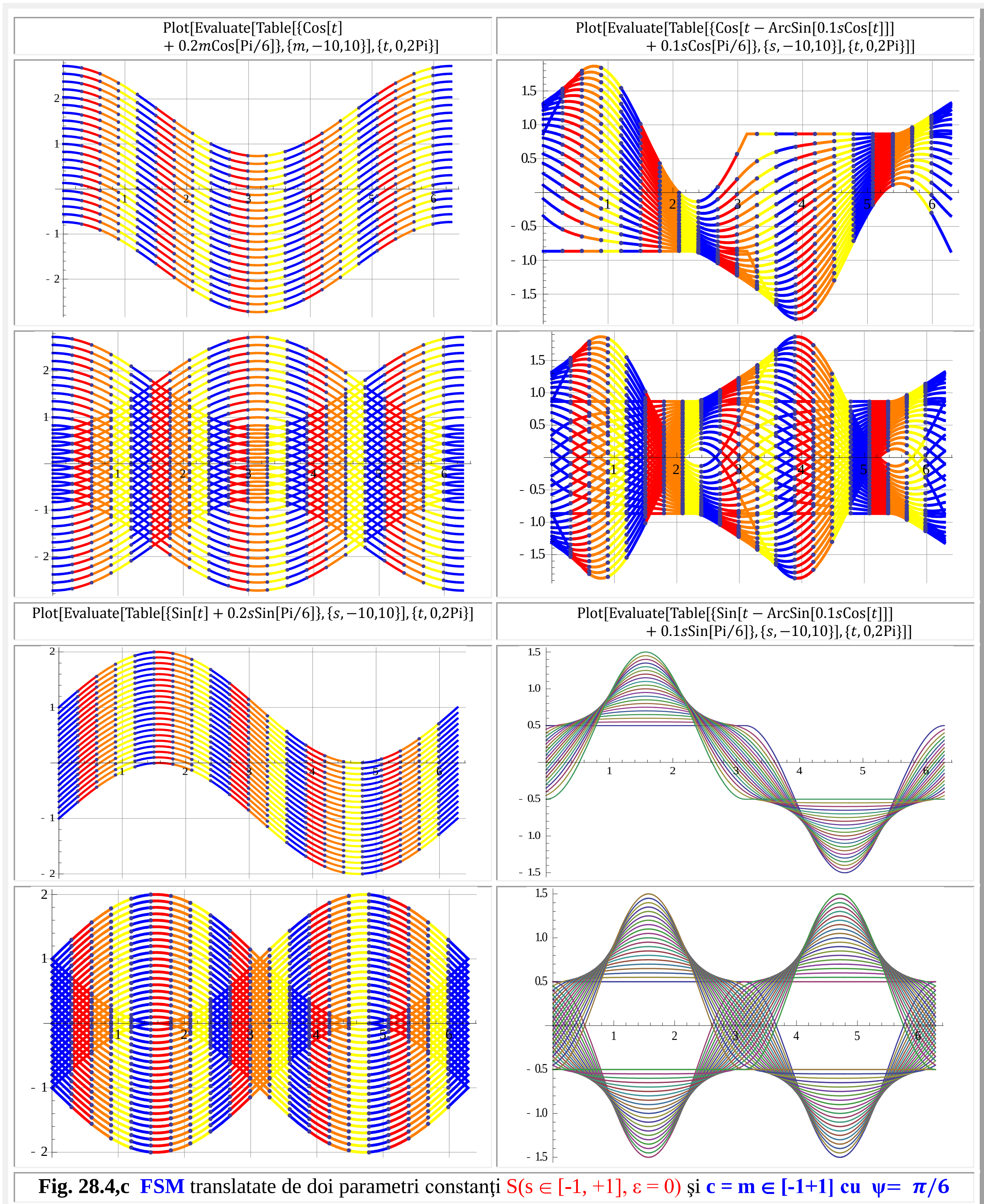


Fig. 28.4,c FSM translatate de doi parametri constanţi S(s ∈ [-1, +1], ε = 0) şi **c = m ∈ [-1+1] cu ψ= $\pi/6$**

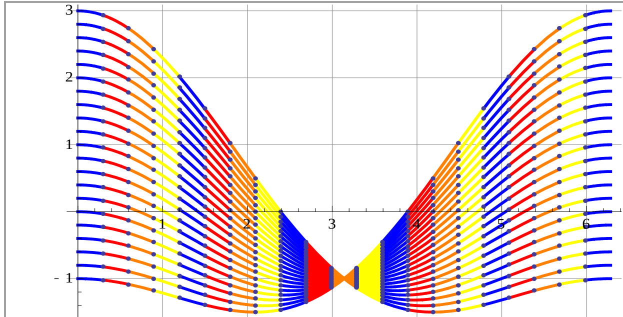
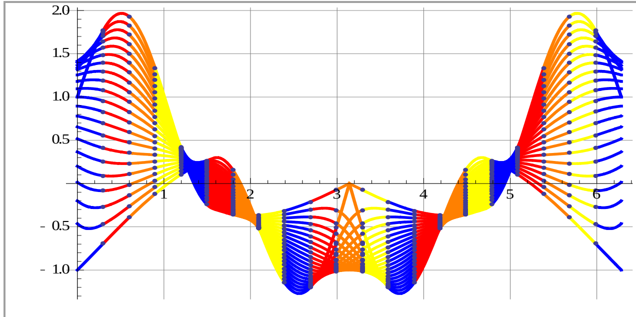
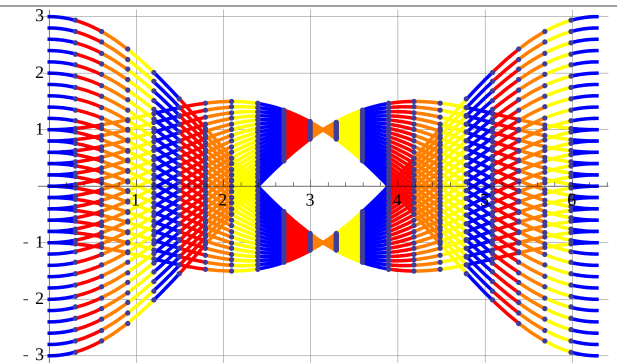
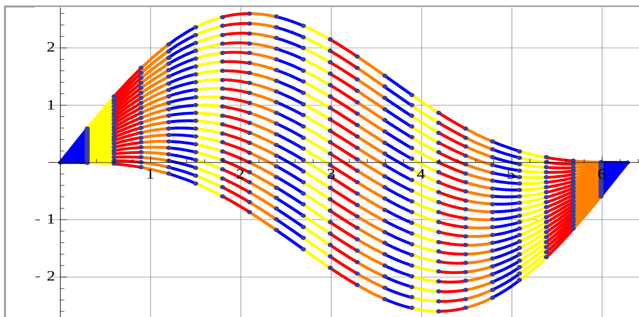
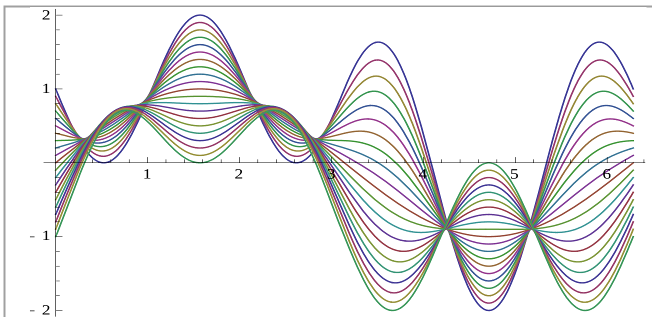
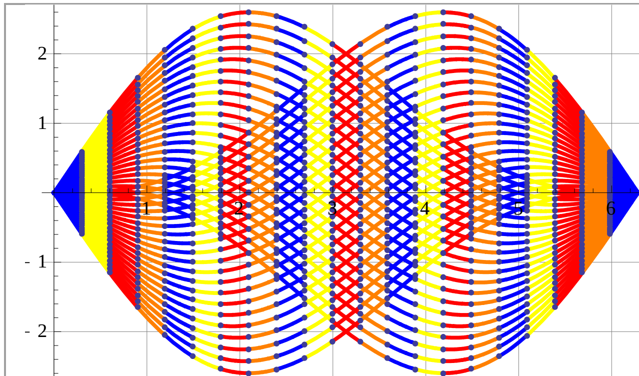
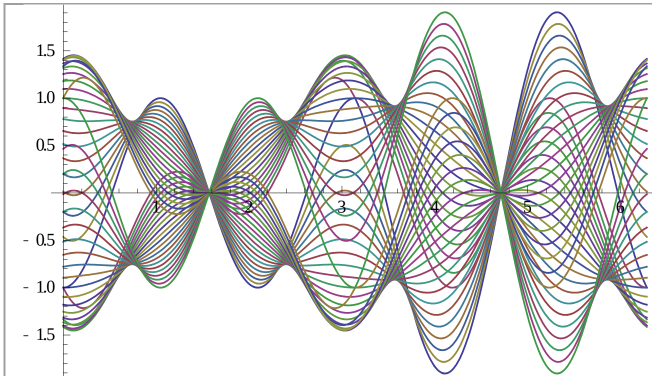
Plot[Evaluate[Table[{Cos[t] + 0.2sCos[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]	Plot[Evaluate[Table[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[2t]]] + 0.1sCos[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]
	
	
Plot[Evaluate[Table[{Sin[t] + 0.2sSin[t/2]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]	Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sCos[t]]] + 0.1sSin[3t]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]
	
	

Fig. 28.4,d FSM translatate de doi parametri S(s ∈ [-1, +1], ε = 0) şi **c = m ∈ [-1+1] cu ψ= $\pi/6$**

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.Ro

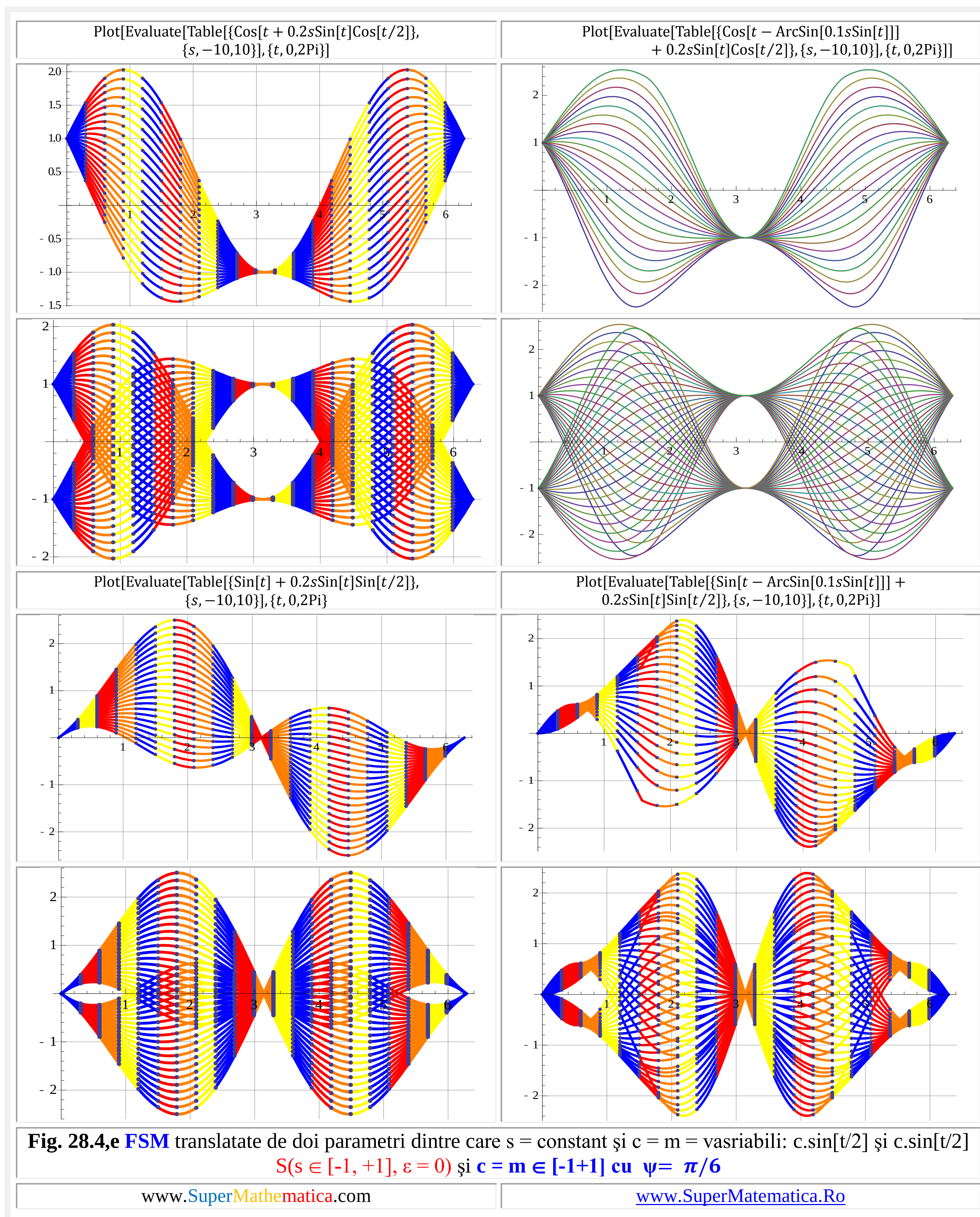


Fig. 28.4,e FSM translatate de doi parametri dintre care s = constant şi c = m = vasriabili: c.sin[t/2] şi c.sin[t/2]
S(s ∈ [-1, +1], ε = 0) şi **c = m ∈ [-1+1] cu ψ= $\pi/6$**

www.SuperMathematica.com | www.SuperMatematica.Ro

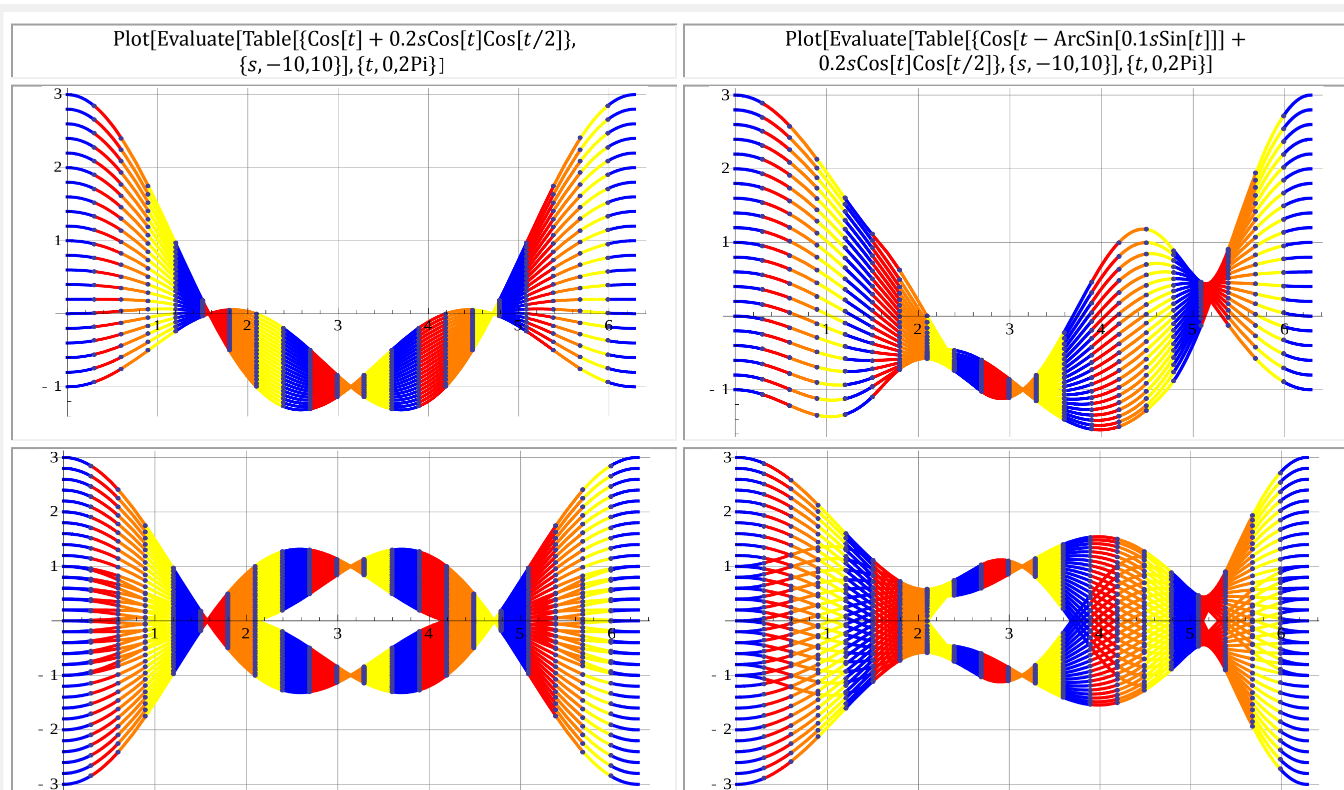


Fig. 28.4,e FSM translatate de doi parametri S(s ∈ [-1, +1], ε = 0) şi **c = m ∈ [-1+1] cu ψ= π/6**

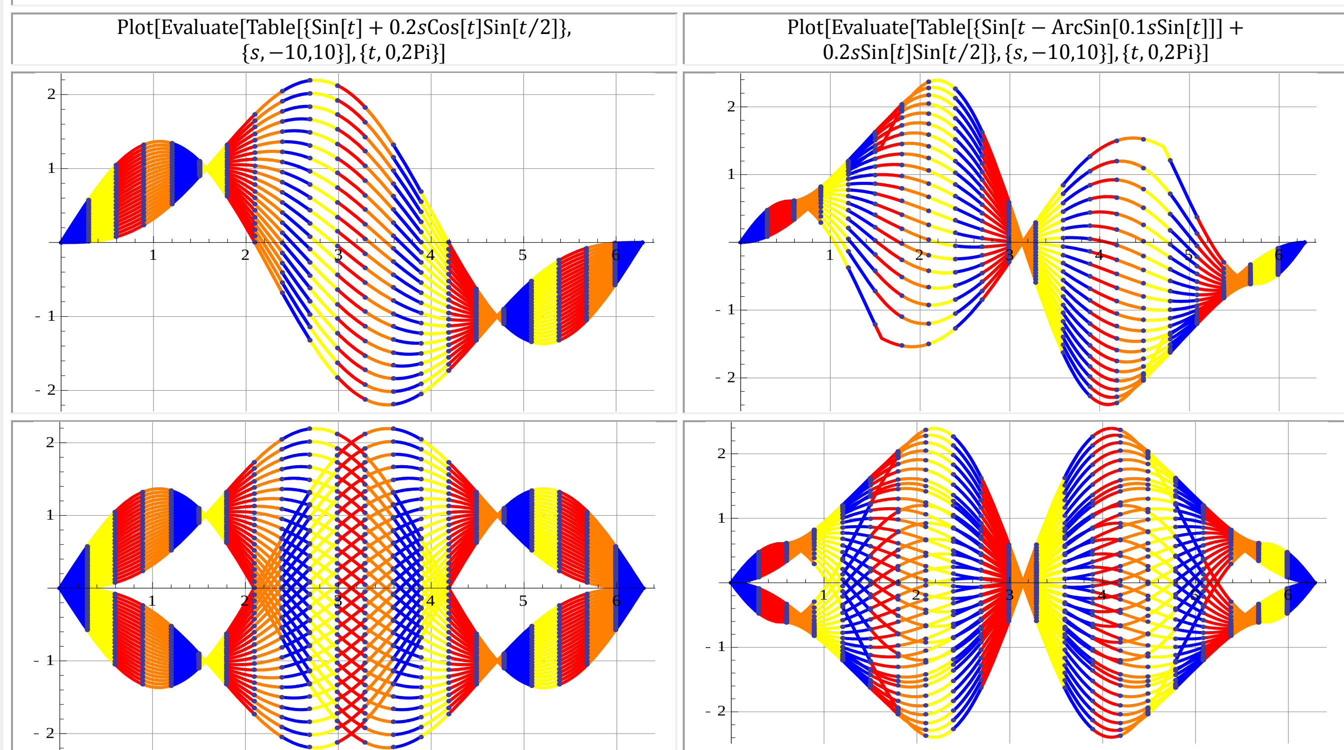


Fig. 28.4,f FSM translatate de doi parametri S(s ∈ [-1, +1], ε = 0) şi **c = m ∈ [-1+1] cu ψ= π/6**

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.Ro

Tangenta **Voinoiu** centrică translatată ◄ şi tangenta **Voinoiu** excentrică translatată►

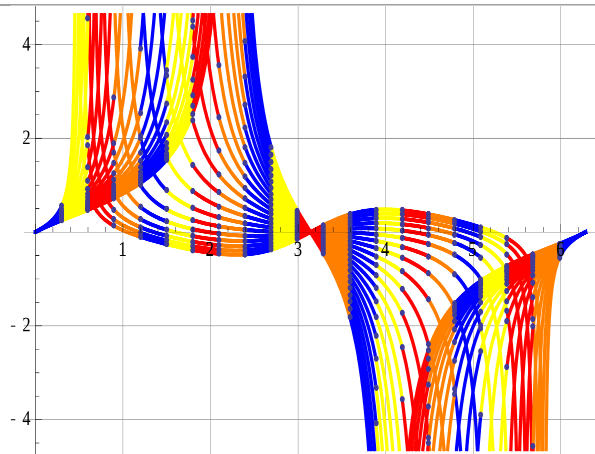
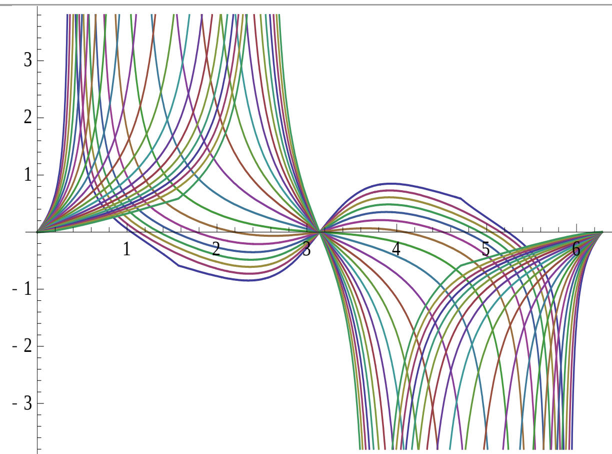
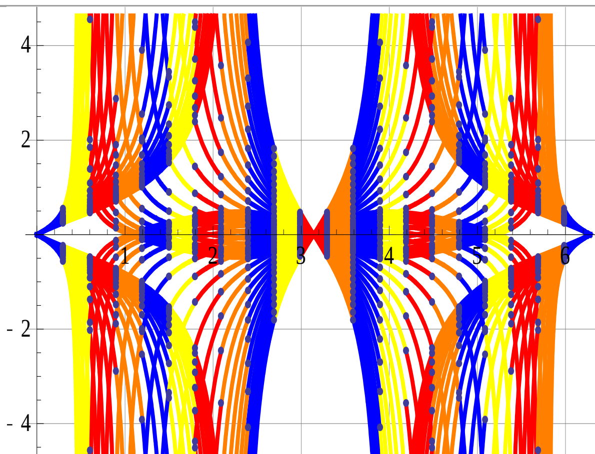
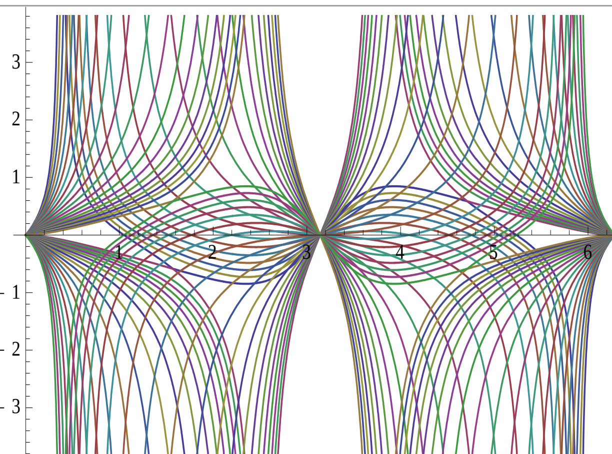
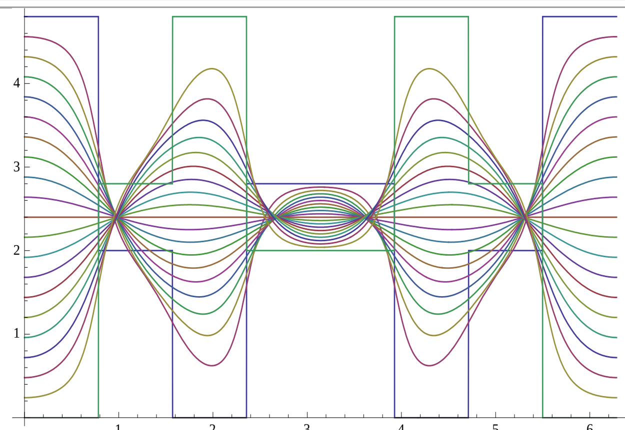
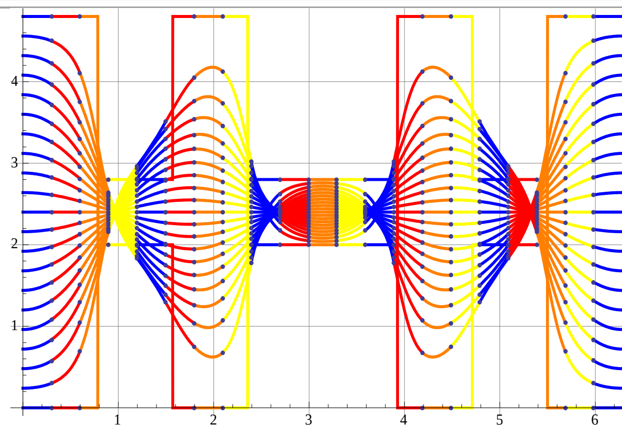
Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t] + 0.2sSin[t]Sin[t/2])/ Abs[Cos[t] + 0.2sSin[t]Cos[t/2]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}	Plot[Evaluate[Table[{(Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + 0.2sSin[t]Sin[t/2])/ Abs[Cos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]] + 0.2sSin[t]Cos[t/2]]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]
	
	

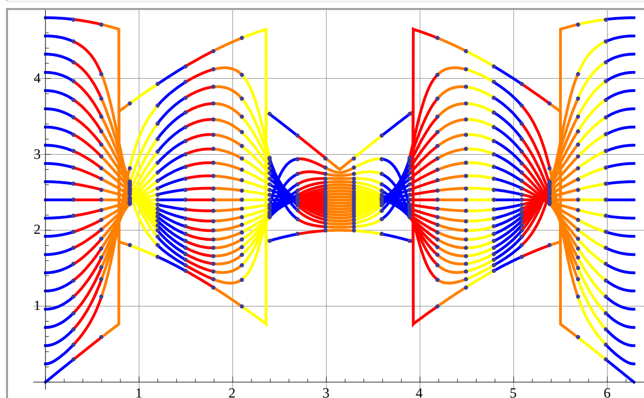
Fig. 28.5. Tangenta **Voinoiu** centrică translatată ◄ şi tangenta **Voinoiu** excentrică translatată►

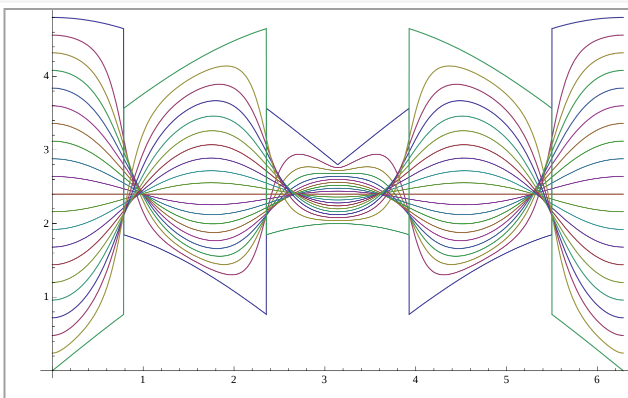
Plot[Evaluate[Table[{1 − 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] + 1.4(1 − 0.1s Cos[2t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t])^2])}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



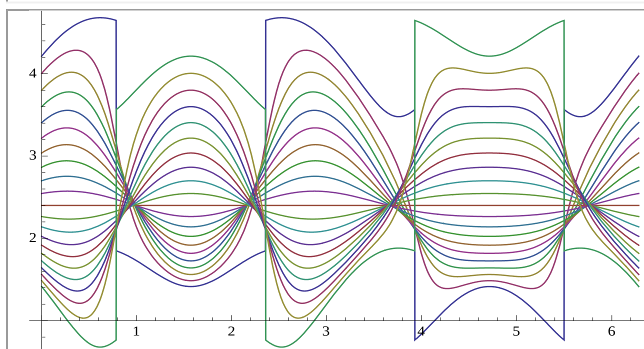


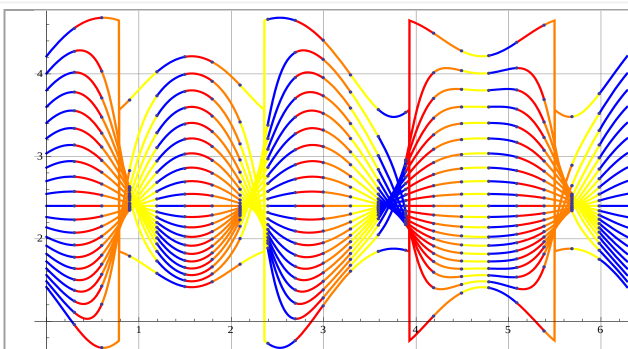
Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[t]] + 1.4(1 − 0.1s Cos[2t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t])^2])}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



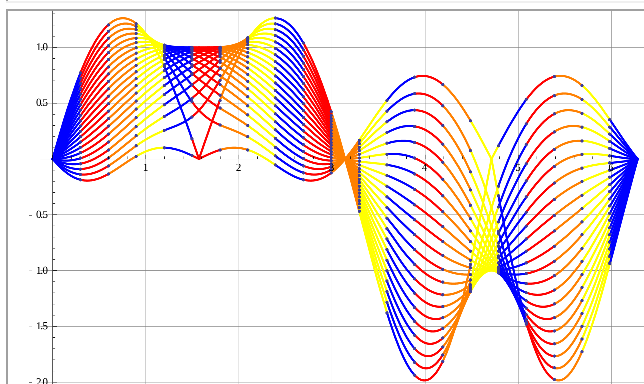


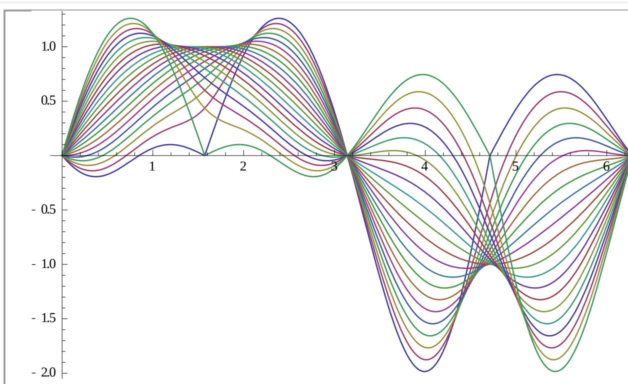
Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sSin[2t]Cos[t]] + 1.4(1 − 0.1s Cos[2t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[2t])^2])}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



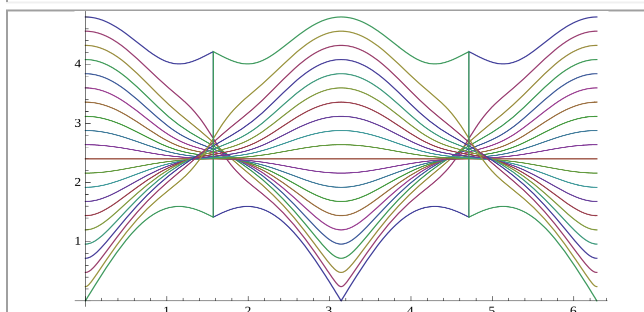


Plot[Evaluate[Table[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]Sin[t]]] + 0.2sCos[t]Sin[t]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]





Plot[Evaluate[Table[{Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]Cos[t]] + 1.4(1 − 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2])}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}]]



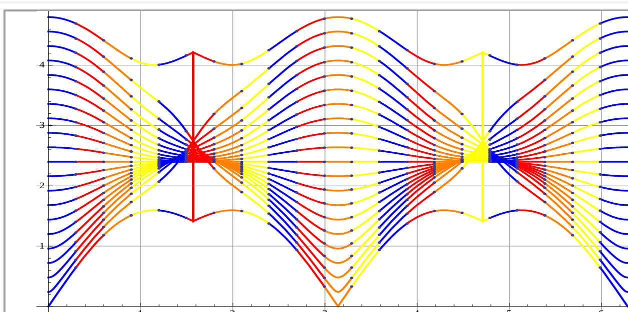
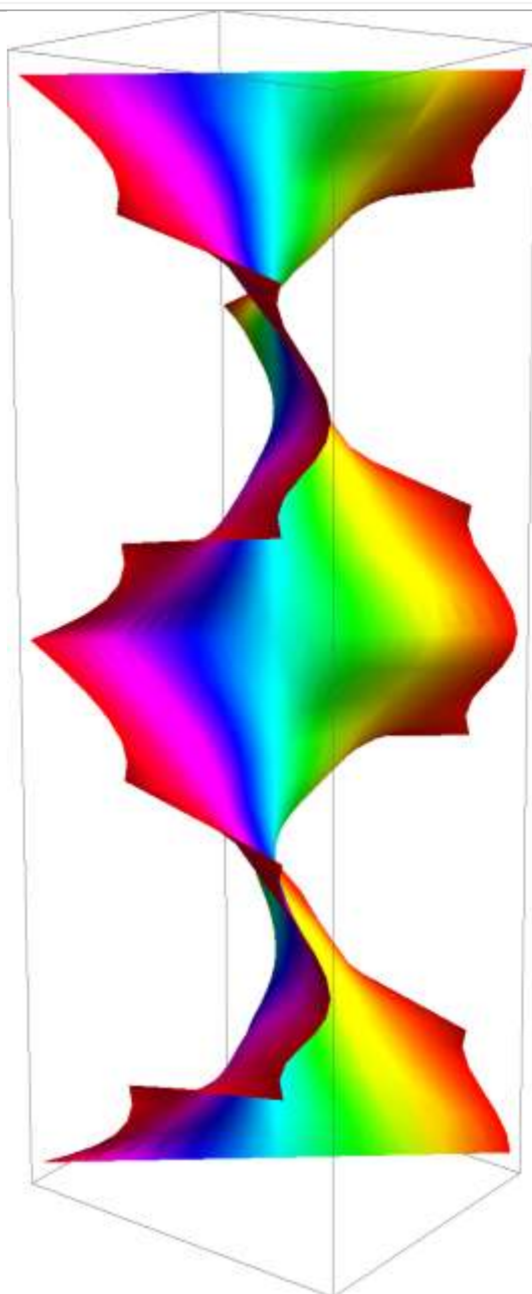
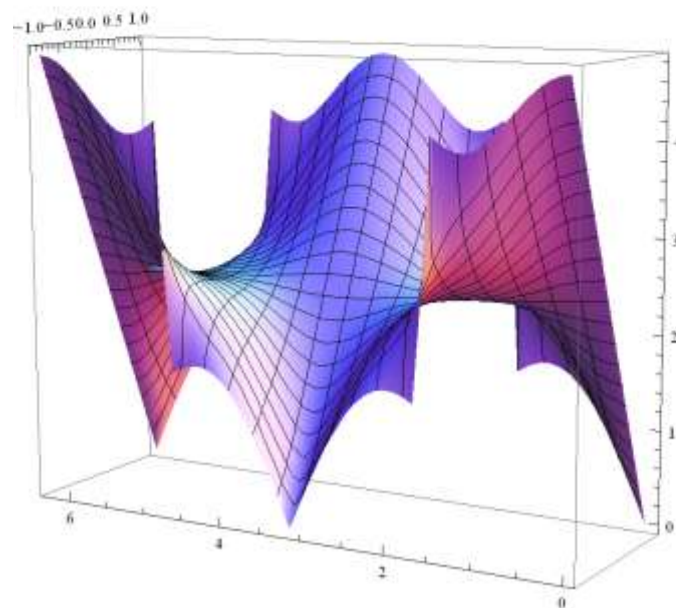


Fig. 28.6,a.FSM-CETranslatate având la bază **FSM-CE rexθ** și **dexθ**

ParametricPlot3D[{t, Sqrt[1 + (0.1s)^2 − 0.2sCos[2t]Cos[t]] + 1.4(1 − 0.1s Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]), 0.2s}, {s, −10,10}, {t, −2Pi, 2Pi}]





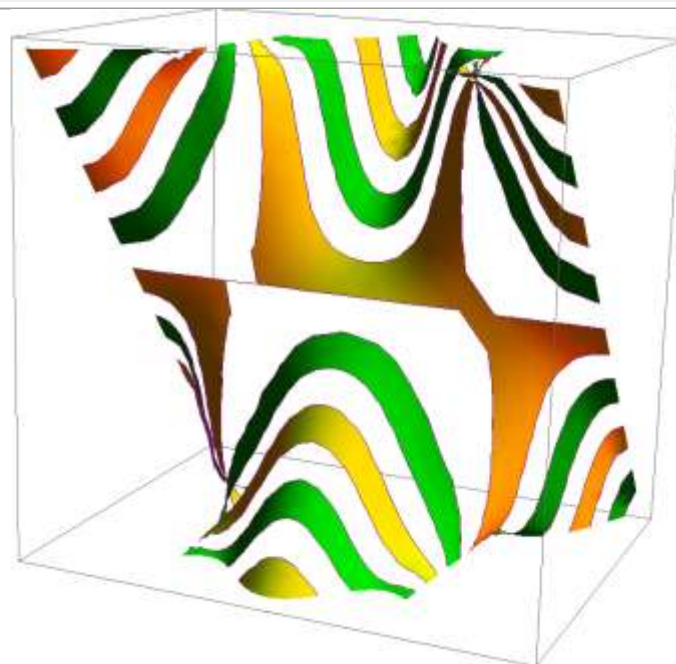


Fig. 28.6,b.FSM-CETranslatate având la bază **FSM-CE Rexθ** reprezentată în 3 D

Motto:” **Trilobiții** sunt cele mai cunoscute artropode marine fosile, care au avut cea mai mare răspândire cu circa 526 – 250 milioane de an în urmă,în timp ce **trilobele** au o vechime de-abe de câțiva ani”

Capitolul 29

FUNCŢII SUPERMATEMATICE TRILOBICE (FSM-T)

cotθ, sitθ, tatθ, tatvθ, ctatθ, ctatvθ

29.1 TRILOBELE

LOBELE sunt curbe plane, închise, cu un număr oarecare de lobi, obţinute cu ajutorul **funcţiilor super-matematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) care, pentru excentricitate nulă, degenerează într-un cerc perfect, iar, pentru excentricitatea liniară numeică **s = ± 1**, generează un poligon perfect, nu neapărat regulat. Cercul, neavând nici-o lobă, este o **zero lobă**. Există **monolobe**, **bilobe**, **trilobe**, **quadrilobe**, ş.a.m.d, pâna la **n-lobe** sau **polilobe** (**Fig.29.1**).

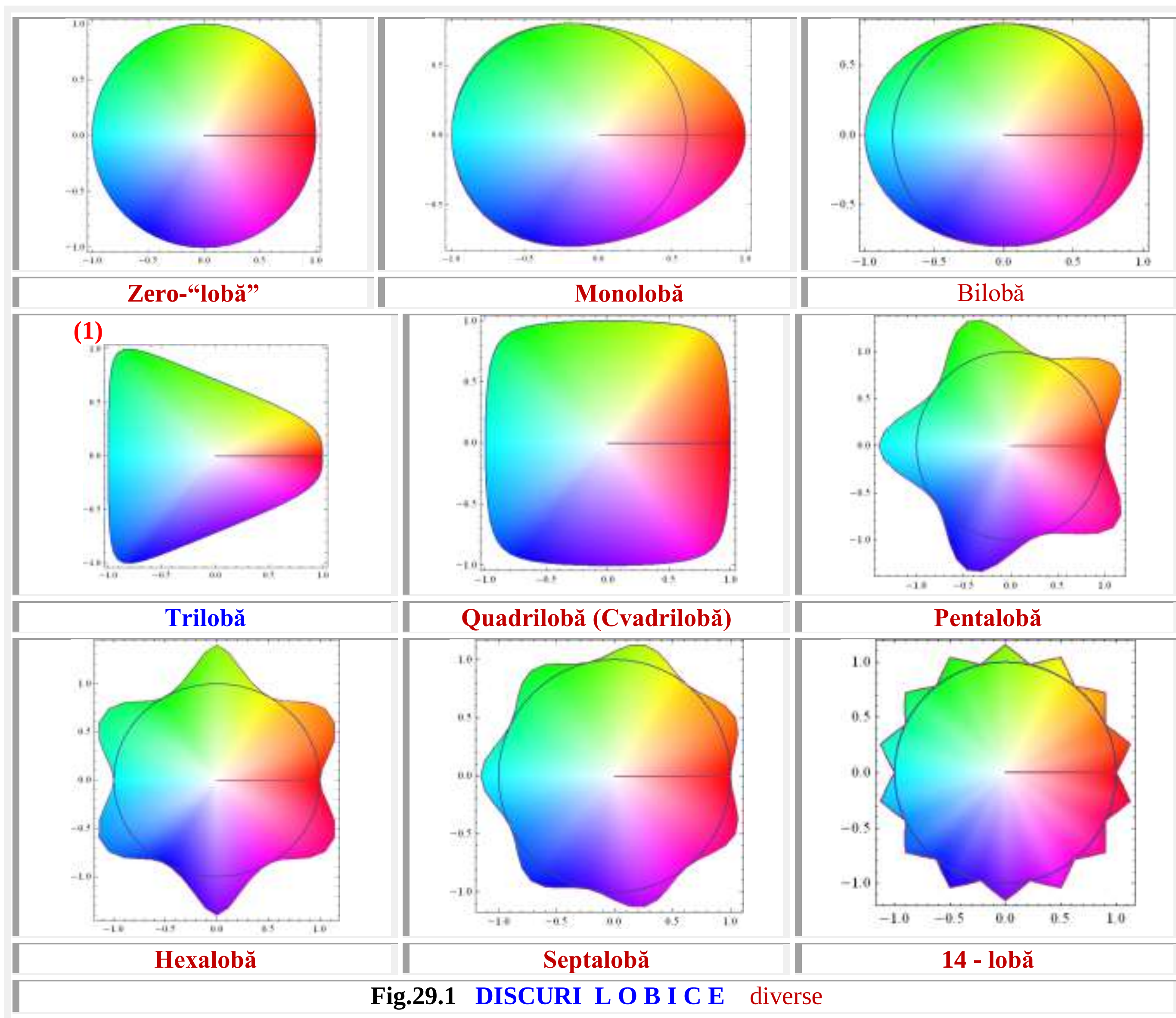


Fig.29.1 **DISCURI L O B I C E** diverse

TRILOBELE sunt, evident, lobe cu trei lobi, a căror triunghiuri dreptunghice isoscele, obţinute pentru s = ± 1, pot avea unghiul drept în oricare dintre cele patru vârfuri ale unui pătrat, aşa cum se observa în **figura 2,a**.

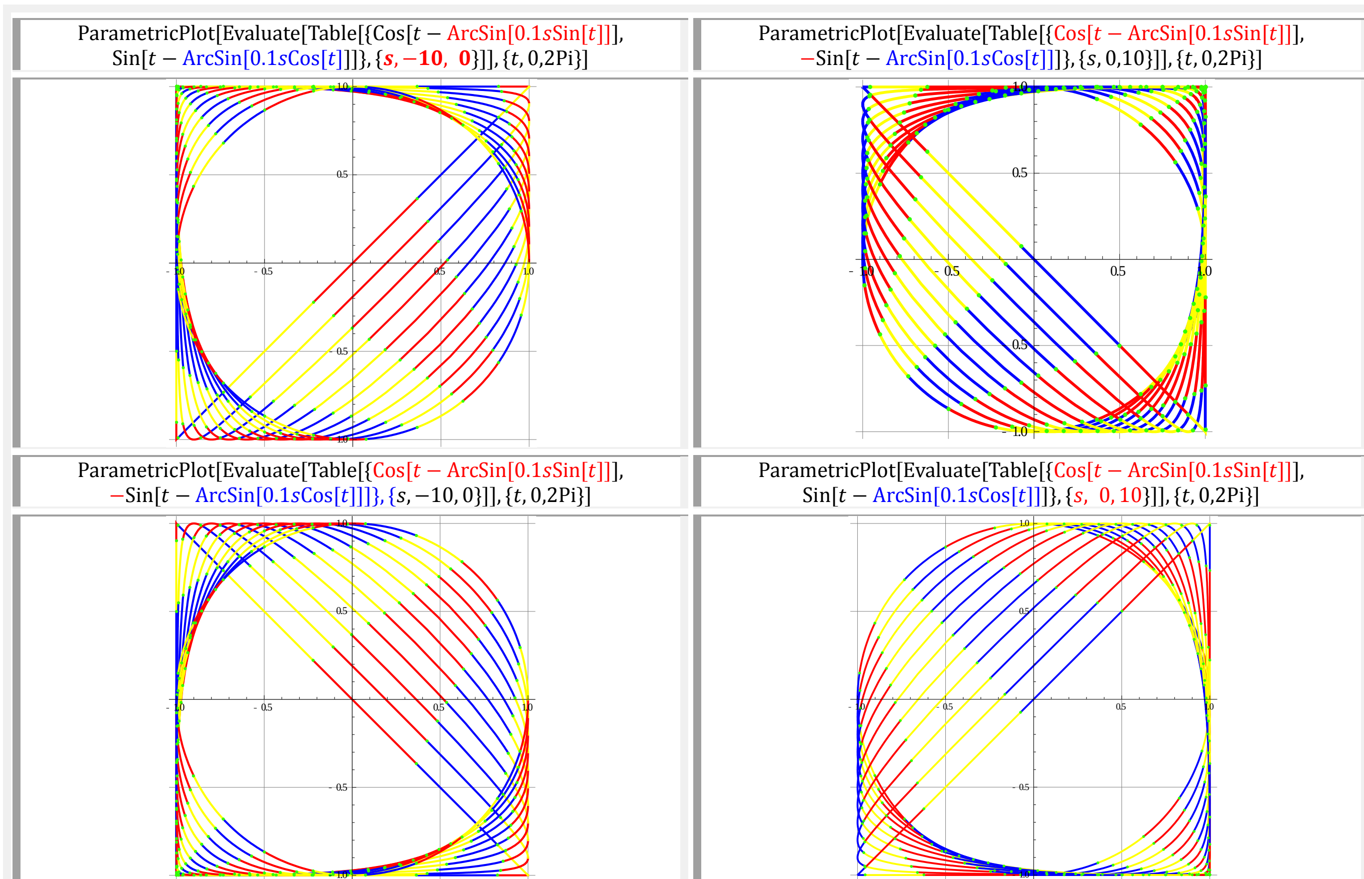


Fig.29.2,a T R I L O B E S (sinus)

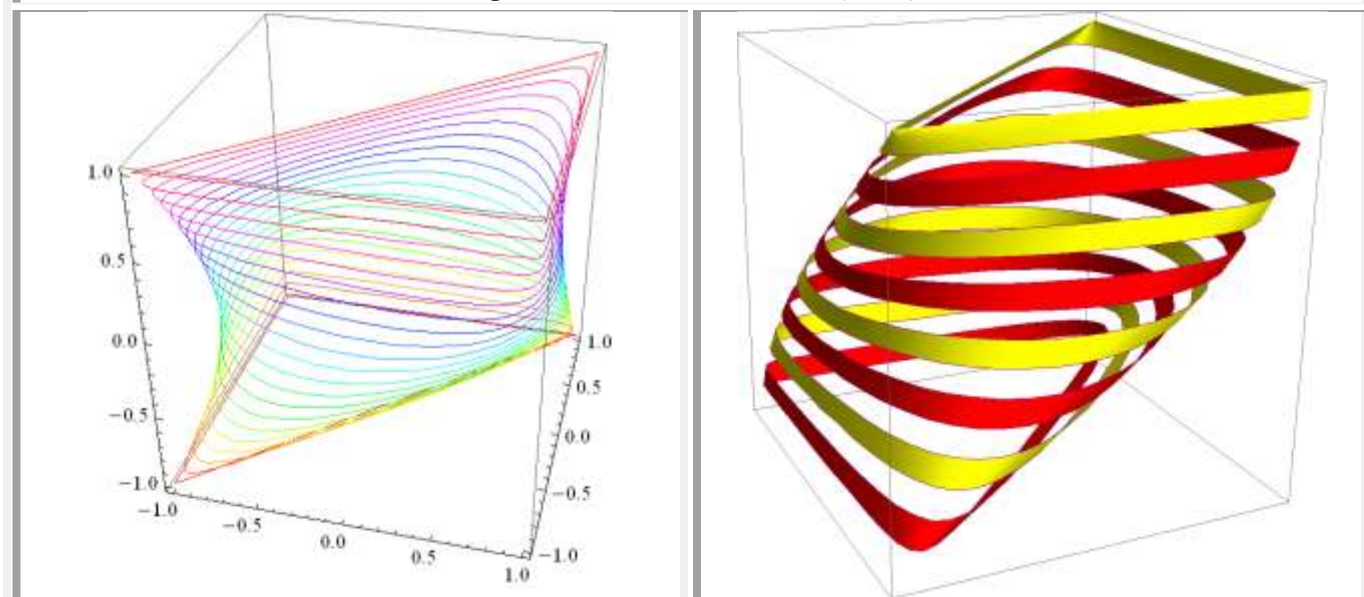


Fig.29.2,b T R I L O B E în 3D

Deoarece, pentru **s** = 0, trilobele degenerează în cerc, rezultă că **funcţiile SM trilobe** degenerează şi ele în funcţii **SM circulare excetrice**, adică cosinusul trilob **cotθ** = **cexθ**, sinusul trilob **sitθ** = sexθ, tangenta trilobă **tatθ** = texθ, tangenta trilobă **Voinoiu tatvθ** = texvθ ş.a.m.d. şi, pe de altă parte, se ştie că **cexθ** = **cos**α, **sexθ** = **sin**α ş.a.m.d.

Ecuaţiile parametrice ale **trilobelor** se exprimă cu una dintre ecuaţii cu următoarele **FSM-CE**

(29.1) $$\begin{cases} \mathbf{cex\theta} = \cos[\theta - \mathrm{bex_s}\theta] \\ \mathbf{sex\theta} = \sin[\theta - \mathrm{bex_s}\theta] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{cex\theta} = \cos[\theta - \mathrm{bex}\theta] \\ \mathbf{sex\theta} = \sin[\theta - \mathrm{bex}\theta] \end{cases}$$

şi cu cealaltă dintre ecuaţii exprimată cu ecuaţiile (1) modificate **FSM-CEM** astfel:

(29.2) $$\begin{cases} \mathbf{cex_C\theta} = \cos[\theta - \mathrm{bex_C}\theta] \\ \mathbf{sex_c\theta} = \sin[\theta - \mathrm{bex_c}\theta] \end{cases}$$

în care **FSM-CE beta excentrice bexθ** şi **cea modificată bex**$_C$**θ**, numită şi **beta de cosinus**, au expresiile

(29.3) $$\begin{cases} \mathrm{bex}\theta \equiv \mathrm{bex_s}\theta = \beta(\theta) = \arcsin[\mathrm{s}.\sin\theta] \\ \qquad \mathrm{bex_C}\theta = \arcsin[\mathrm{s}.\mathbf{cos\theta}] \end{cases}$$

aşa cum rezultă şi din ecuaţiile prezentate în **figura 29.2**.

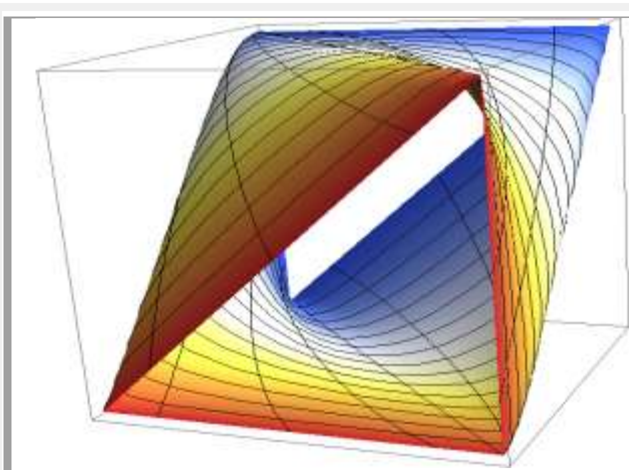


Fig.29.2,c T R I L O B O I D

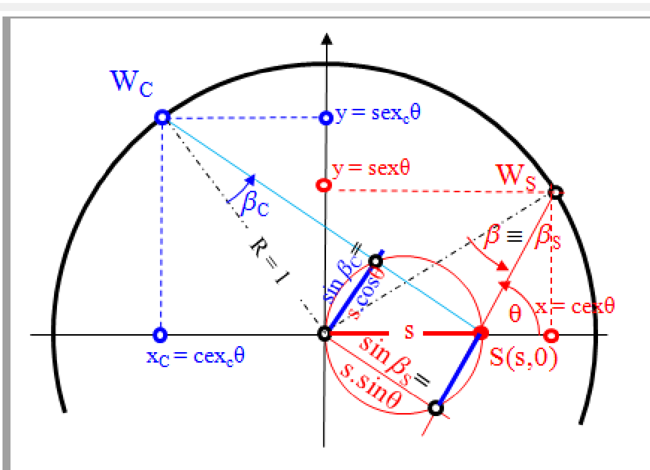


Fig.29.3 Schiţa explicativă pentru **bexθ** şi **bex**$_C$**θ**

Semnificaţiile geometrice ale **FSM-CE beta excentrice s** (de sinus) şi **c** (de cosinus) sunt prezentate în **figura 29.3,b**, fiind unghiurile $\beta \equiv \beta_s$ şi, respectiv, β_c din punctele de pe cerc W(**θ**) ≡ W$_s$, respectiv, **Wc**(**θ** + $\frac{\pi}{2}$) sub care se văd simultan **centrul O(0,0)** şi **excentrul S**(**s, ε**). Este evident că $\beta_c = \beta_s(\theta + \frac{\pi}{2}) \rightarrow$ **bex θ** = **bex**(**θ** + $\frac{\pi}{2}$).

Ca urmare, ecuaţiile parametrice ale trilobelor sunt :

(1) $$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{cex\theta} = \cos[\theta - \mathrm{bex}\theta] \\ \mathbf{y} = \pm\,\mathbf{sit\theta} = \pm\sin[\theta - \mathbf{bex_c}\theta] \end{cases}$$

şi, deoarece, abscisa **x** se exprimă prin **C** şi numai ordonata **y** se exprimă prin **FSM-TE** ± **cotθ** sau **± sitθ**, aceste trilobe pot fi numite **de sinus** (de **S**). Pentru a se distinge de celelalte trilobe în care **cexθ** → **cetθ**, aşa cum rezultă din următoarele ecuaţii parametrice ale **trilobelor de cosinus** (**C**) din relaţiile (5)

(2) $$\begin{cases} \mathbf{x} = \pm\,\mathbf{cot\theta} = \pm\cos[\theta - \mathbf{bex_c}\theta] \\ \mathbf{y} = \mathbf{sex\theta} = \sin[\theta - \mathrm{bex}\theta] \end{cases}$$

cu graficele din **figura 29.4,a** în **2D** şi în **figura 29.4,b** în **3D.**

S-a afirmat că o trilobă autentică, pentru excentricitatea liniară numerică **s** = ± 1, tinde spre un **triunghi isoscel dreptunghic** perfect. Respectă **trilobele C** acest principiu ? Pentru **s** = ± 1 trilobele degenerează într-o formă de **Y.** Această formă are trei laturi şi are un unghi drept. Aşa cum rezultă din **figura 29.4,c**, cele trei laturi ale triunghiului isoscel dreptunghic sunt în proporţia de ½ cu cele trei "laturi" ale lui **Y.** Atunci ?

Considerăm că degenerarea **trilobelor C** în această formă de **Y** poate fi numită drept "**triunghi excentric dreptunghic isoscel**".

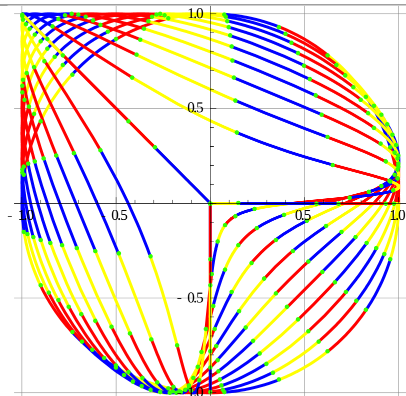
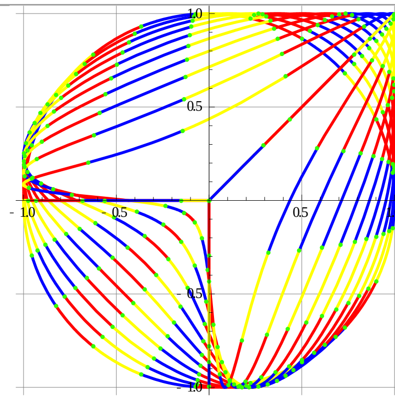
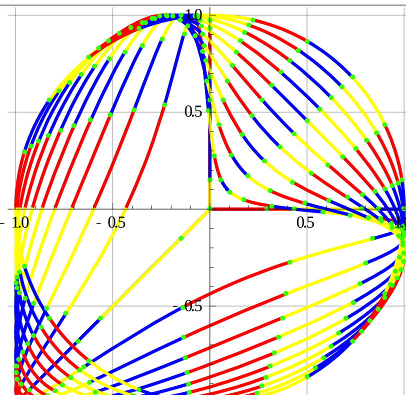
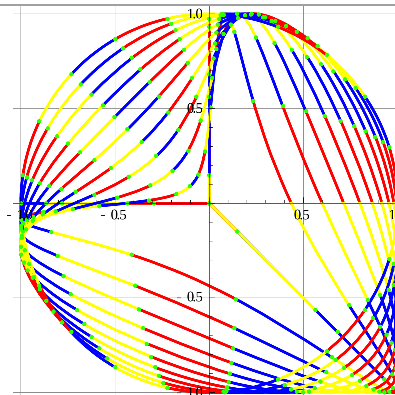
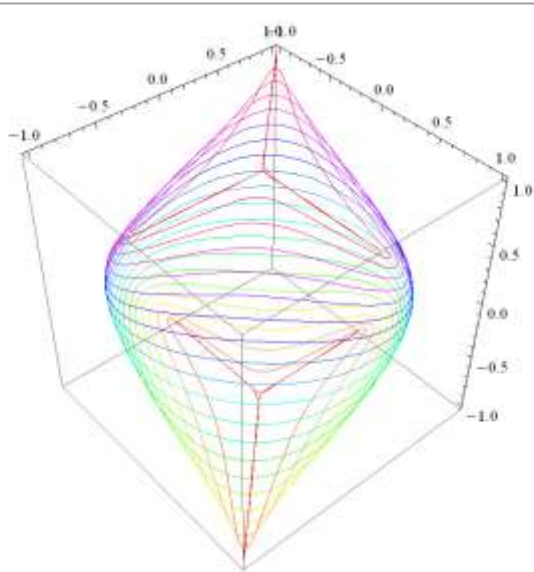
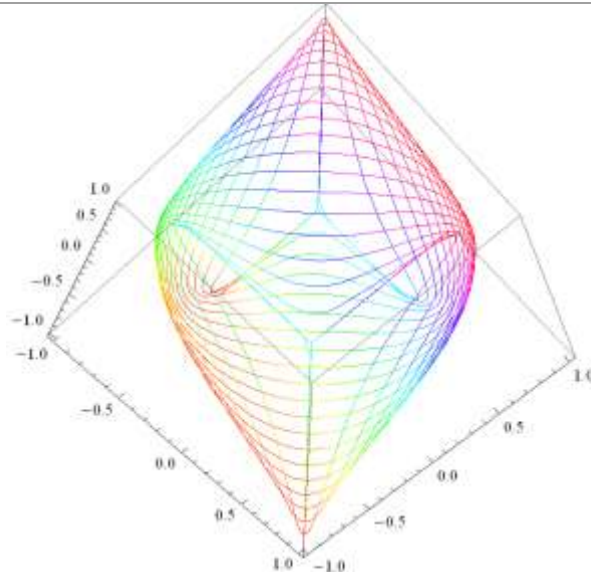
ParametricPlot[Evaluate[Table[{**Cos[*t*** − ArcSin[0.1*s***Cos[*t*]**]], Sin[*t* − ArcSin[0.1*s*Sin[*t*]]]}, {*s*, 0,10}]], {*t*, 0,2Pi}]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{−Cos[*t* − ArcSin[0.1*s***Cos[*t*]**]], Sin[*t* − ArcSin[0.1*s*Sin[*t*]]]}, {*s*, 0,10}]], {*t*, 0,2Pi}]
	
ParametricPlot[Evaluate[Table[{−**Cos[*t*** − ArcSin[0.1*s***Cos[*t*]**]], Sin[*t* − ArcSin[0.1*s*Sin[*t*]]]}, {*s*, −10,0}]], {*t*, 0,2Pi}]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{**Cos[*t*** − ArcSin[0.1*s***Cos[*t*]]],** Sin[*t* − ArcSin[0.1*s*Sin[*t*]]]}, {*s*, −10,0}]], {*t*, 0,2Pi}]
	
ParametricPlot3D[Evaluate[Table[{Cos[*t* − ArcSin[0.1*s*Cos[*t*]]], Sin[*t* − ArcSin[0.1*s*Sin[*t*]]],0.1*s*}, {*s*, −10,10}]], {*t*, 0,2Pi}]	ParametricPlot3D[Evaluate[Table[{Cos[*t* − ArcSin[0.1*s*Cos[*t*]]],0.1*s*, Sin[*t* − ArcSin[0.1*s*Sin[*t*]]]}, {*s*, −10,10}]], {*t*, 0,2Pi}]
	

Fig.29.4,a T R I L O B E C (cosinius)

ParametricPlot3D[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]], Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]], 0.1s}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}

ParametricPlot3D[{Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]],0.1s, Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]

ParametricPlot3D[{Sin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]],0.1s, Cos[t − ArcSin[0.1sCos[t]]]}, {s, −10,10}, {t, 0,2Pi}]

Fig.29.4,b T R I L O B E C (cosinius) în 3D

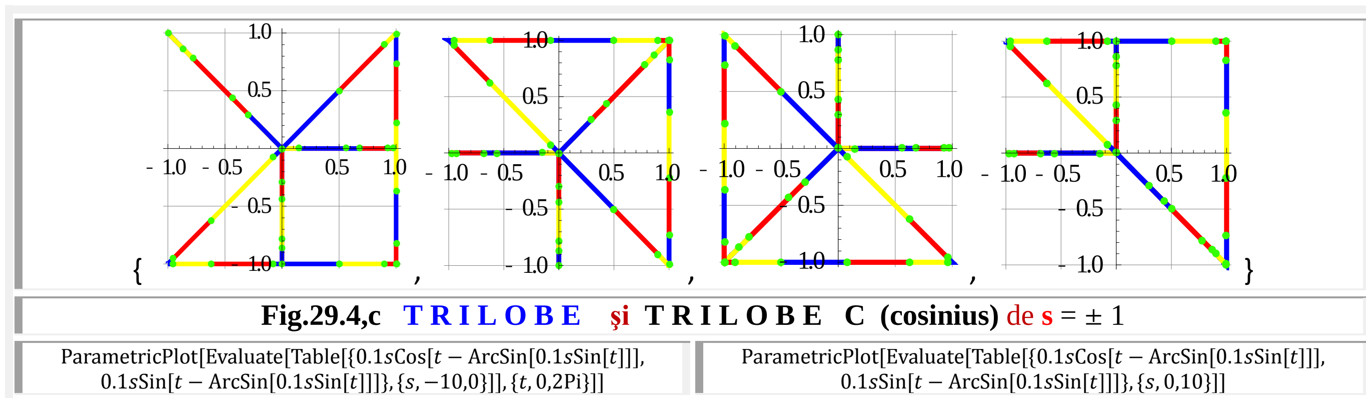


Fig.29.4,c T R I L O B E şi T R I L O B E C (cosinius) de s = ± 1

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1sCos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]], 0.1sSin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, −10,0}]], {t, 0,2Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1sCos[t − ArcSin[0.1sSin[t]]], 0.1sSin[t − ArcSin[0.1sSin[t]]]}, {s, 0,10}]]

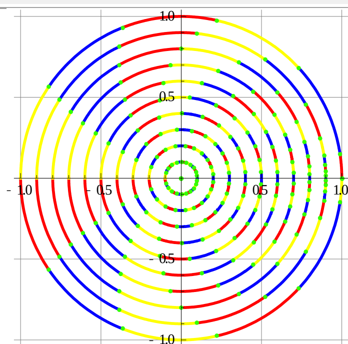
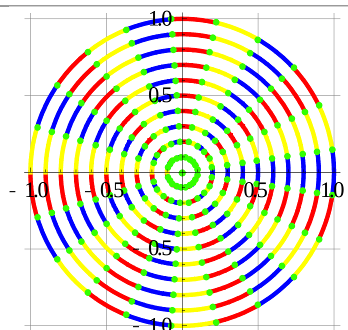


Fig.29.5,a1 **Cercuri de sinus**

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1*s*Cos[*t*],0.1*s*Sin[*t*]}, {*s*, −10,0}]], {*t*, 0,2Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1*s*Cos[*t*], 0.1*s*Sin[*t*]}, {*s*, 0,10}]], {*t*, 0,2Pi}]]



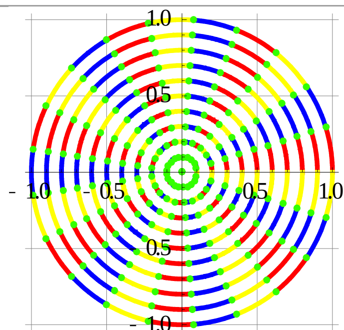
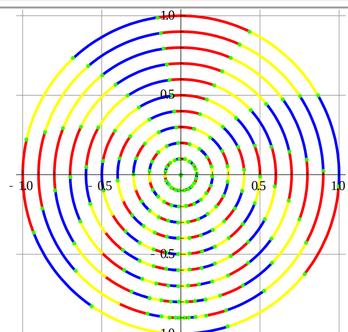


Fig.29.5,a2 **Cercuri**

ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1*s*Cos[*t* − ArcSin[0.1*s*Cos[*t*]]], 0.1*s*Sin[*t* − ArcSin[0.1*s*Cos[*t*]]]}, {*s*, −10,0}]], {*t*, 0,2Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{0.1*s*Cos[*t* − ArcSin[0.1*s*Cos[*t*]]],]]0.1*s*Sin[*t* − ArcSin[0.1*s*Cos[*t*]]]}, {*s*, 0,10}]], {*t*, 0,2Pi}]]



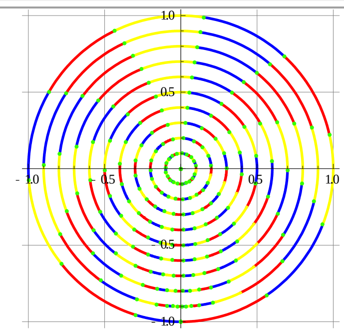


Fig.29.5,b **Cercuri de C (cosinius)**

Dacă, în ecuaţiile parametrice (4) şi /sau (5), se utilizează numai funcţii **beta** excentrice de sinus (bexθ) (**Fig. 29.5,a1**) sau numai **beta** excentrice de cosinus ($\mathbf{bex_c}\theta$) (**Fig. 29.5,b**), atunci se obţin cercuri (**Fig.29.5**).

Tot cercuri se obţin şi în cazul **FSM-CE** (**Fig. 29.5,a1**) ca şi în cazul **funcţiilor supermatematice circulare centrice** (**FSM-CC) :x = cosα, y = sinα (Fig.29.5,a2).** Pentru evitarea suprapunerii cercurilor, raza cercurilor s-a ales variabilă (**R** = 0,1s).

Deşi, în toate aceste cazuri, se obţin cercuri **ele nu sunt identice** (**Fig.29.5,a2**), decât în cazul **funcţiilor circulare centrice** (**FCC: cosα, sinα ş.a.m.d.**), deoarece, un punct curent, parcurge aceste cercuri cu viteze diferite, în funcţie de valoarea excentricităţii **s** ∈ [-1, +1]. Numai în cazul din **figura 29.5,a2,** toate cercurile familiei sunt parcurse cu aceeaşi viteză unghiulară, ceea ce se poate observa urmărind o anumită distibuţie a unei culori pe diverse intervale unghiulare.

Motto:"Natura este perfecţiunea perfecţiunilor.
Este, deci, supermatematică"

Capitolul 30

METODE DE SOLUŢIONARE COMPUTAŢIONALĂ A UNOR ECUAŢII ALGEBRICE NELINIARE CU O SINGURĂ NECUNOSCUTĂ

30.1 INTRODUCERE

Noile metode, prezentate în prezenta lucrare, se referă la metode numerice de rezolvare a ecuaţiilor algebrice, cele vechi fiind prezentate excelent şi pe larg în lucrarea [1] .

Pleiada de metode vechi, mai cunoscute şi mai frecvent utilizate, sunt următoarele [1]:

1) Metoda înjumătăţirii intervalului sau metoda bisecţiei (**Fig.30.1,c►**);
2) Metoda coardei sau metoda secantei (**Fig.30.1,c►**);
3) Metoda tangentelor de ordinul I a lui **Newton** sau metoda **Newton-Raphson** (**Fig. 30.1,c►**);
4) Metoda tangentelor de ordinul II a lui **Newton**;
5) Metoda iterativă x = g(x) (**Fig. 30.1,c ◄**).
6) **Metoda iteraţiei dinamice** [2] este o combinaţie a unor metode anterior prezentate (vezi **§ 3**).

30.2 METODA DIVIZĂRII ECUAŢIEI ŞI A CELOR DOUĂ TANGENTE

Rugat să contribui la rezolvarea unei ecuaţii din domeniul TEHNOLOGIILOR DE DEFORMARE LA RECE (**ŞTANŢARE-MATRIŢARE**), la găsirea soluţiei am aplicat mai multe din metodele cunoscute şi prezentate anterior, ca să testez rapiditatea fiecărei metode (v § 3) şi am constatat că sunt posibile şi alte metode mult mai rapide.

Lucrarea "***METODA ITERAŢIEI DINAMICE***" care s-ar putea denumi şi "***METODA DIVIZĂRII ECUAŢIEI ŞI A CELOR DOUĂ TANGENTE***", a fost prezentată la o conferinţă de specialitate.

Fiind vorba de operaţii de ambutisare la rece, se cerea, în final, rezolvarea ecuaţiei

(1) f(x) ≡ **Sirx + A.cosx -1 = 0**

în care, cu A ∈ [1, 3] s-a notat o anumită expresie, cu graficele din stânga **figurii 30.1◄,** valoarea concretă, considerată în continuare, fiind aleasă de A = 1,2 şi x ∈ [0, π/2], iar

(2) **Sirx** = **sinx** –**x. cosx**

este funcţia **sinus românesc** a lui **Gogu (George) Constantinescu,** definită pe o evolventă, cu graficul din f**igura 30.2▲** iar, pentru întregirea cunoştinţelor despre **funcţii româneşti** şi spre cinstea marelui savant român, dar nu şi a urmaşilor urmaşilor lui români care nu nu prea au auzit de el şi, cu atât mai puţin, de ele, iar **Corx** este funcţia **cosinus românesc**, definită de ecuaţia

(3) **Corx** = **cosx** + **x. sinx**

cu graficele din **figura 30.2▼**.

Rezolvarea ecuaţiei (1) **f(x) = 0**, cu soluţia $\mathbf{x_0}$, este echivalentă cu determinarea punctului de intersecţie $\mathbf{I(x_I,\ y_I)}$ a două curbe/funcţii în care s-a divizat funcţia ***f(x)*** = $f_1(x) + f_2(x) = 0$, în care

$$(4)\qquad \begin{cases} f_1(x) = \boldsymbol{Sirx} \\ f_2(x) = \mathbf{A\,cosx} \ -\mathbf{1} \end{cases}$$

adică la rezolvarea sistemului de ecuaţii

$$(5)\qquad \begin{cases} f_1(x) = 0 \ \Rightarrow\ y - \boldsymbol{Sirx = 0} \\ f_2(x) = 0 \Rightarrow y - A.cosx + 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I(x_I,\ y_I)}$$

în care, punctul de intersecţie al celor două curbe, **$I(x_I, y_I) = f_1(x) \cap f_2(x)$,** apare pe aceeaşi verticală cu punctul **(x_0, $y_0 = 0$)** de intersecţie al curbei **f(x)** cu axa **Ox**, adică ***$x_I = x_0$***, aşa cum se ilustrează în **figura 30.3,a**.

Cele două funcţii, în care s-a divizat **f(x),** sunt reprezentate suprapuse în dreapta **figura 30.1►**; $f_1(x)$ fiind o curbă unică ce intersectează familia de curbe $f_2(x)$, rezultate pentru **A∈ [1, 2]** cu pasul **0,2**.

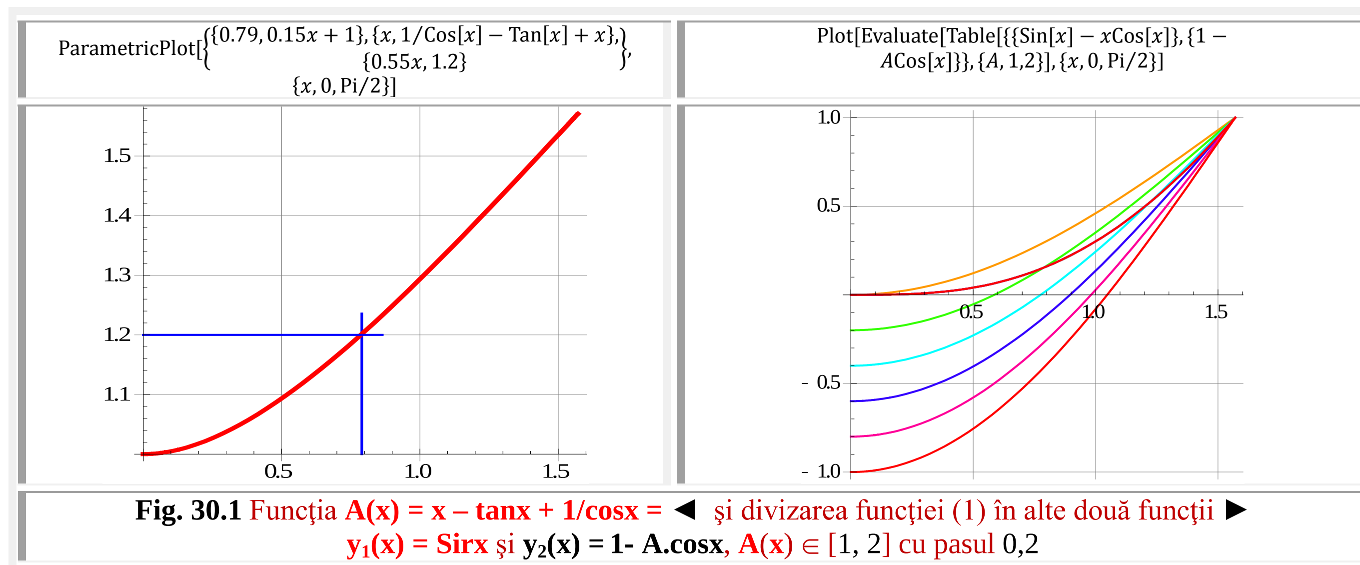


Fig. 30.1 Funcţia **A(x) = x – tanx + 1/cosx =** ◄ şi divizarea funcţiei (1) în alte două funcţii ►
y_1(x) = Sirx şi **y_2(x) = 1- A.cosx**, A(x) ∈ [1, 2] cu pasul 0,2

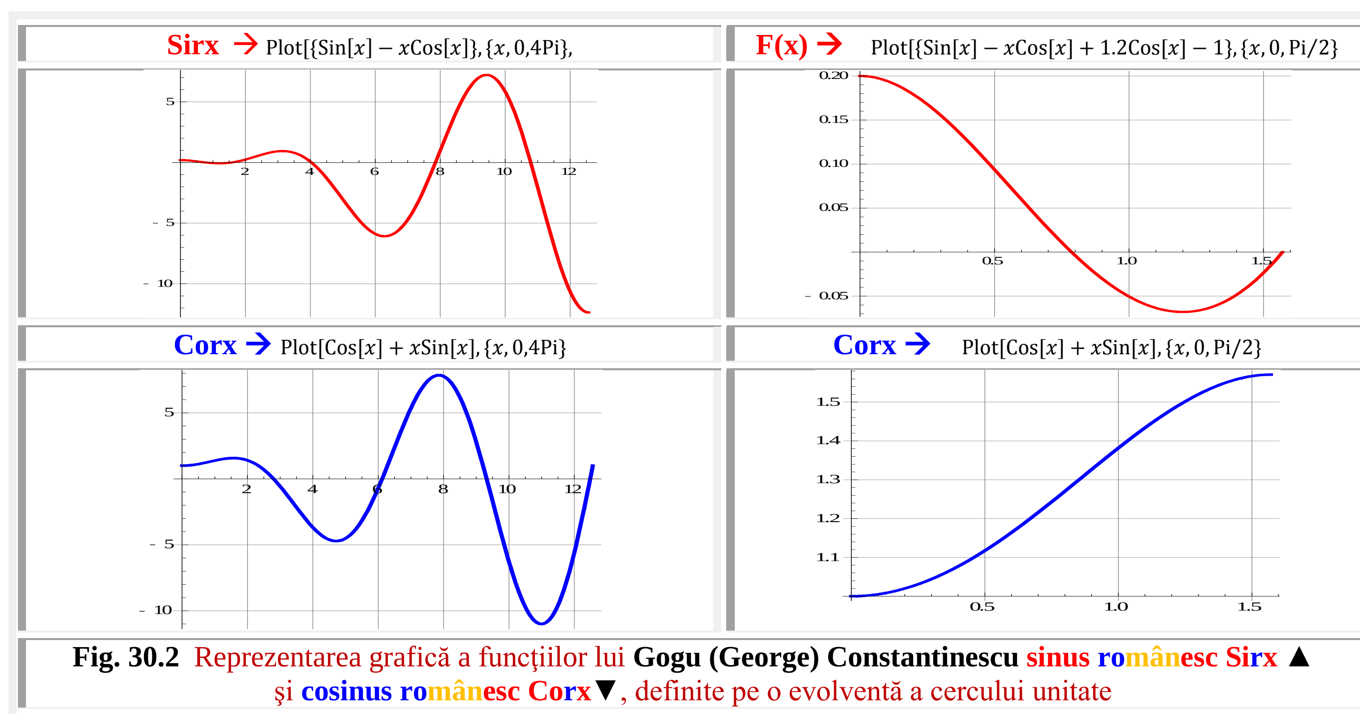


Fig. 30.2 Reprezentarea grafică a funcţiilor lui **Gogu (George) Constantinescu sinus românesc Sirx** ▲
şi **cosinus românesc Corx**▼, definite pe o evolventă a cercului unitate

Metoda clasică iterativă (**Fig. 30.4** ◄) de determinare a punctului de intersecţie a două curbe este prezentată în **figura 3,b,** prin linii întrerupte, de culoare bleau-ciel, iar o nouă metodă, mult mai rapidă, denumită **metoda celor două tangente simultane**, este prezentată suprapus în **figura 30.3,b** prin **linii negre**.

Pornind din x = x_0 cu o verticală, care intersecteaza cele doua curbe **f_1(x)** şi **f_2(x)** în punctele **T_1** şi, respectiv, **T_2**, în care, noua metodă, presupune reprezentarea celor două tangente la cele două curbe şi intersectarea lor în punctul **I_1(x_1, y_1).**

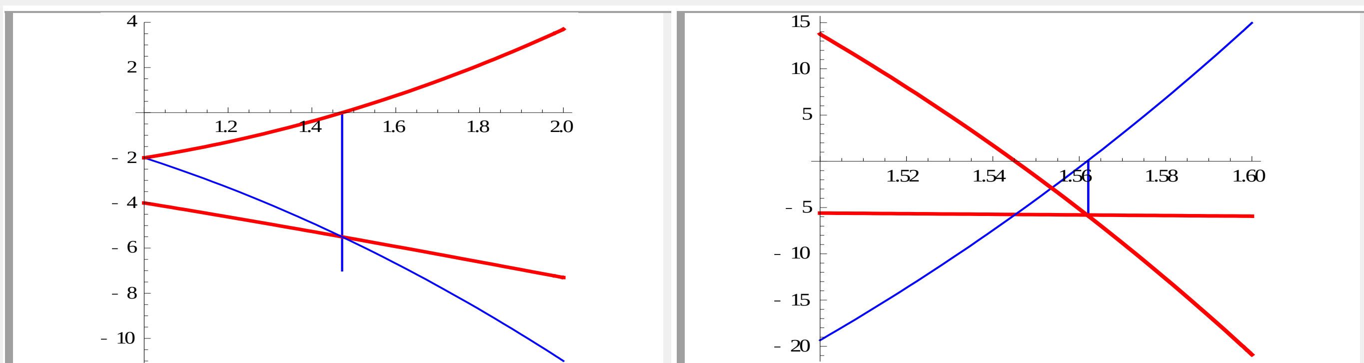


Fig. 30.3,a Echivalenţa intersectării unei funcţii cu axa x cu intersectarea celor două funcţii în care s-a **divizat funcţia;**
abscisele fiind egale, adică **$x_I = x_0$, $y_I \neq y_0 = 0$**

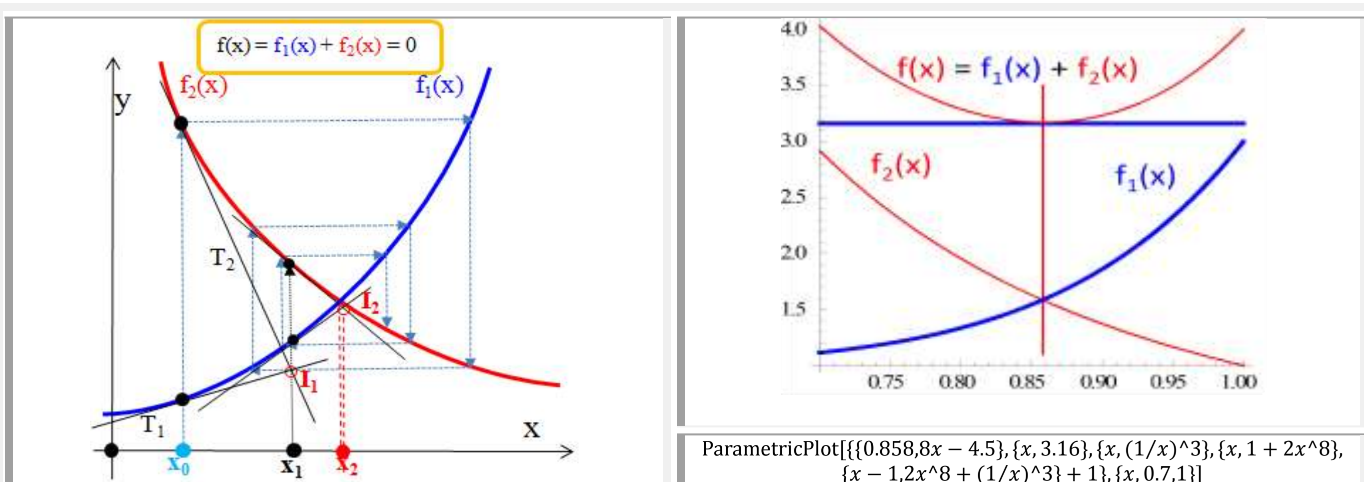


Fig. 30.3,b Reprezentarea grafică a funcţiei **f(x)** şi a divizarii ei în alte două funcţii **f_1(x)** şi **f_2(x)** ► precum şi determinarea punctului de minim al funcţiei **f(x)**, respectiv punctul de intersecţie a celor doua funcţii **f_1(x)** şi **f_2(x)** ◄
prin metoda bitangentelor simultane (MBTS)

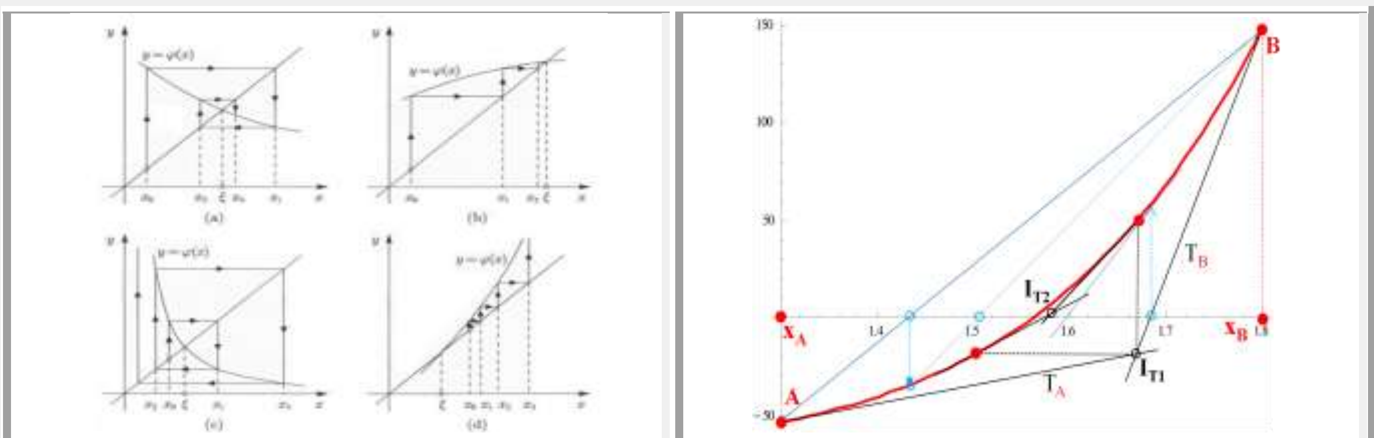


Fig. 30.4 Diverse metode numerice de soluţionare a unor ecuaţii: metoda aproximaţiilor succesive (http://ro.math.wikia.com/wiki/) ◄, metoda coardei, metoda tangentei şi **metoda bitangentei** (**T_A, T_B**) ►

30.2 METODA ITERAŢIEI DINAMICE

Este prezentată tabelar (**Fig. 30.6** şi **Tab. 30.2**), în continuare, prin comparaţie cu metoda divizării ecuaţiei **f(x)** (1) în două părţi şi a exprimării celor două tangente (**Fig. 30.5** şi **Tab. 30.1**), la cele două funcţii ale divizării **f_1(x)** şi **f_2(x),** în punctele **T_1** şi **T_2** de intersecţie cu o dreaptă verticală, dusă din punctul x_0 = 0,5856856 ⮙ 33,5573313^0 de amorsare / antamare a procesului.

Prin această metodă, intersecţia lui **f(x)** cu axa **Ox** este înlocuită cu intersecţia celor două funcţii între ele, adică prin rezolvarea sistemului de ecuaţii

$$(6)\qquad \begin{cases} f_1(x) \equiv \ \mathrm{Sirx}\ = 0 \\ f_2(x) \equiv 1 - \ A\cos x = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sin x - x.\cos x - y = 0 \\ 1 - 0{,}2\cos x - y = 0 \end{cases}$$

```
ParametricPlot[{{x, Sin[x] − xCos[x]}, {x, 0.06469953048401555 + 0.5856856Sin[0.5856856](x − 0.5856856)}, {0.7863354, 0.6x
− 0.35}, {0.7762164,0.6x − 0.35}, {0.5856856, 0.4x − 0.25}, {x, 1.2(x − 0.5856856)Sin[0.5856856]},
{x, −1.2Cos[x] + 1}, {Sin[x] − xCos[x] + 1.2Cos[x] − 1}, {x, 0.55,0.85}, AspectRatio → 1, PlotStyle → {Blue, {Red, Thick}}]
```

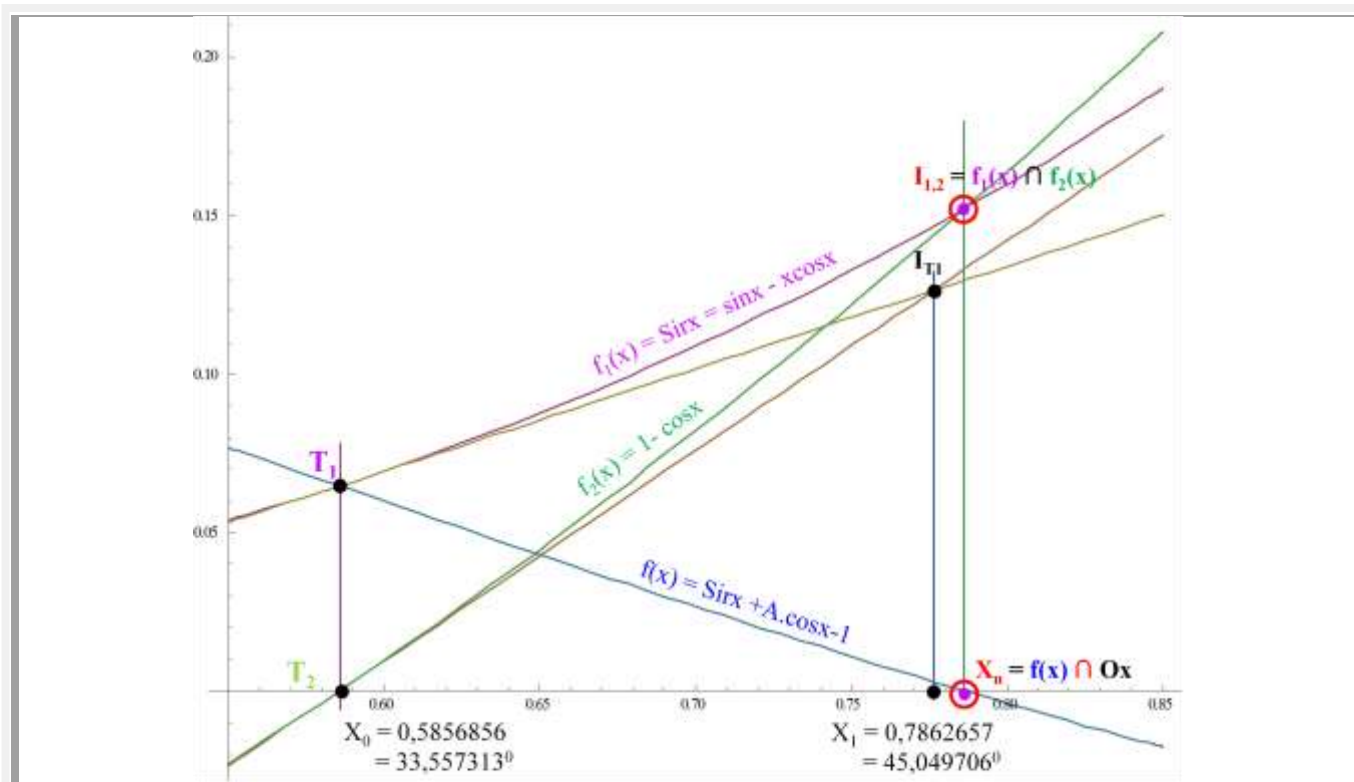


Fig. 30.5 Divizarea lui **f(x)** în **$f_1(x)$** şi $f_2(x)$, intersectarea lor cu dreapta verticală $X = X_0$, determinarea punctelor de intersecţie **T_1** şi **T_2**, în care se duc tangentele la cele două curbe şi se determină punctul lor de intersectie **$I_{T1}(X_1, Y_1)$**

X_n = 0,7863354 este soluţia căutată a ecuaţiei **Sirx + A cosx - 1= 0**, pentru **A = 1,2**

Intersecţia celor două tangente este punctul **I_{T1}** şi se poate observa, în **figura 5,** cât de apropiat este, după numai o singură iteraţie, de punctul soluţie **$I_{1,2}$**, a cărei abscisă **X_n** este soluţia ecuaţiei date. Acelaşi lucru rezultă şi pentru o ecuaţie, nespecificată, a cărei funcţie a fost descompusă în alte două funcţii şi prezentată în **figura 3,b.** În **figura 4** ► sunt prezentate, suprapuse, mai ulte metode pentru a evidenţia avantajele metodei cu două **tangente simultane,** care are o convergenţă mult mai rapidă decât toate celelalte metode.

Ceea ce este prezentat grafic în **figura 5**, este rezolvat analitic în **tabelul 1**. Soluţia cu 6 zecimale exacte este obţinută după numai 5 paşi.

Tabelul 30.1 Determinarea soluţiei ecuaţiei f(x) = **Sirx + A.cosx -1 = 0** prin metoda **TANGENTELOR** pentru **A = 1,2**

Ite-ra-ţia	X *Radiani* / Grade	$f_S(x)$ = Sirx $f_D(x)$ = 1-A.cosx f(x) = f_S-f_D	f'$_S$(x) = x.sinx f'$_D$(x) = A.sinx f'(x) = f'$_S$(x) - f'$_D$(x)	X_{n+1}	Obs
0	0,5856856 33,5573313^0	0,0646990 0 0,064695	0,3237499 0,6633250 0,3395751	**0,7762164**	
0	0,6981317 40^0	0,1079876 0,0807466 0,0272410	0,4487504 0,7713451 0,3225947	**0,7825751** **44,838251^0**	
1	0,7762164 44,473923^0	0,146700 0,1437167	0,5438053 0,0407015	**0,7862657**	

		0,0029836	0,296962		
2	0,7862657 45,049706⁰	0,1522287 0,1522083 0,0000204	0,5564560 0,8492640 0,2928080	**0,7862657**	
3	0,7863354 45,053699⁰	0,1522675 0,1522674 0,0000001	0,5565940 0,8493230 0,2927790	**0,7863357**	
4	0,7863357 45,053716⁰	0,15222676 0,1522678 -0,0000002	0,5565444 0,8493233 0,2927789	**0,786335**	**X_m = 0,7863355**
5	0,7863351 45,053682⁰	0,15222673 0,1522672 0,0000001	0,5565436 0,8493228 0,2927792	**0,7863354**	**SOLUŢIA: X = 0,7863354…**

În **figura 6** este prezentată o schiţă explicativă cu privire la **metoda iteraţiei dinamice** prezentate analitic în **tabelul 2** pentru aceeaşi ecuaţie (1).

Pentru exemplul considerat, punctele extreme ale segmentului $\overline{x_A x_B}$ **,** abscisele corespunzătoare ale punctelor **A** şi **B** de pe curba **f(x)** din relaţia (1), pe axa **Ox**, evident, pe care se află**,** totodată, soluţia **X** sunt punctele extreme ale coardei $\overline{AB}$. Ele sunt :

(7) $$\begin{cases} A:\ x_A = 40^0 = 0{,}6981317\text{ rad}; & y_A = f(x_A) = 0{,}0272410 \\ B: x_B = 50^0 = 0{,}8726646\, rad; & y_B = f(x_B) = -0{,}0235485 \end{cases}$$

Mijlocul segmentului $\overline{x_A x_B}$ ca, de altfel, şi a segmentului **AB,** este punctul **$M_M(x_M, y_M)$** de coordonate

(8) **M** $$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} 45^0 = 0{,}7853982 \\ y_M = f(x_M) = -0{,}0002746 \end{cases}$$

Derivata funcţiei **f(x)** este

(9) $f'(x) = -A.\mathrm{Sin}[x] + x\mathrm{Sin}[x] = -1{,}2.\mathrm{Sin}[x] + x.\mathrm{Sin}[x]$

Intersecţia tangentei din **A** cu axa Ox este punctul $\mathbf{X_{TA}}$

(10) $$\mathbf{X_{TA}} = x_A + \frac{-f'(x)}{f(x)} = 0{,}6981317007977318 - \frac{0{,}02724103146800938}{-0{,}32259472442167486} =$$

$\mathbf{X_{TA}}$ = 0,7825752127517639

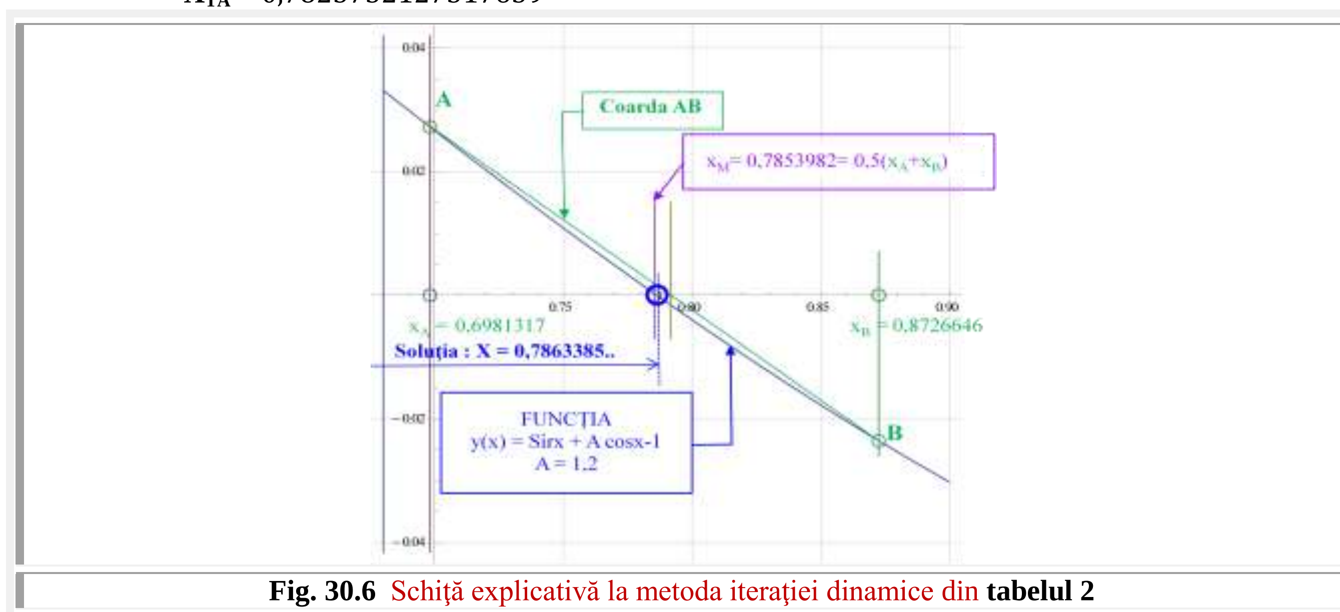


Fig. 30.6 Schiţă explicativă la metoda iteraţiei dinamice din **tabelul 2**

Tabelul 30.2 Determinarea soluţiei ecuaţiei f(x) = **Sirx + A.cosx -1 = 0** prin metoda **ITERAŢIEI DINAMICE**

	X^0, X_{rad}, f **Grade** ***Radiani*** f	X^0, X_{rad}, f_M, f_{mp} **Grade** ***Radiani*** f	X^0, X_{rad}, f **Grade** ***Radiani*** f	X^0, X_{rad}, f **Grade** ***Radiani*** f
1), 2)	Metoda înjumătăţirii intervalului sau metoda bisecţiei			Mtd. tangentei din A: **$T_A \cap$ Ox**
	$X_A = 40^0$ $\frac{2\pi}{9} = 0{,}6981317007977318$ **0,6981317** 0,02724103146800938 **f_A = 0,0272410**	**$X_M = 45^0$** $\frac{\pi}{4} = 0{,}7853981633974483$ **0,7853982** 0,00027455134060871966 **f_M = 0,0002746**	**$X_B = 50^0$** $\frac{5\pi}{18} = 0{,}8726646259971648$ **0,8726646** −0,023548434259890172 **f_B = − 0,0235485**	**$X_{TA} = 44{,}838251^0$** $44{,}83825684222856^0$ = **0,7825751** 0,7825752127517639 0,001103792430627304 **f_{TA} = 0,00110379**
3)	Metoda coardei AB ∩ **Ox** = **X_C**			
	Coarda AB **$y = y_A + \frac{y_B-y_A}{X_B-X_A}(x - X_A)$**	**$X_C = X_A - yA\frac{X_B-X_A}{y_B-y_A}$ = 0.7917427** 0,7917427841084541 → 44,83825684222856⁰ **f_C** =−0,0015770830181829343 = **- 0,0015779**	**Axa Ox** **y = 0**	**Precizia** **$\epsilon = -0{,}0015$**
3)	Metoda coardei T_AB ∩ **Ox** = **X_D**			
	$X_{TA} = 44{,}838251^0$ $44{,}83825684222856^0$ = **0,7825751** 0,7825752127517639 0,001103792430627304 **f_{TA} = 0,00110379**	$X_D = X_B - y_B(X_B - X_T)/(y_B - y_T)$ X_D = 0,7866089259602417 = **0,7866092** **f_D** = −0,00008010130908442381 **$f_D = -0{,}0000801$**	**$X_B = 50^0$** $\frac{5\pi}{18} = 0{,}8726646259971648$ **0,8726646** −0,023548434259890172 **f_B = − 0,0235485**	**Precizia** **ϵ =** **$-0{,}00008$**
4)	Metoda mediei ponderate a celor mai mici valori ale funcţiei f(x) de semne contrare			
4)	**$X_{mp} = X_{TA} + f_{TA}\frac{X_B-X_{TA}}{f_{TA}-f_B}$ ➔ $X_{mp} = 45{,}05203875^0$** $0.7825752127517639 + 0.001103792430627304\frac{(0.8726646259971648 - 0.7825752127517639)}{0.001103792430627304 + 0.023548434259890172} =$ = 0.7866089259602417 → **X_{mp} =$0{,}7866089$** **f_{mp}** =−0.00008010130908442381 = **-0,0000801**			**Precizia** **ϵ =** **$-0{,}00008$**

Aplicând metoda coardei, intersecţia acesteia AB cu axa Ox este

(11) $$\overline{AB} \cap Ox = X_C \rightarrow \begin{cases} y - y_A = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}(x - x_A) \\ y = 0 \end{cases}$$

(12) $$X_C = X_A - yA\frac{X_B-X_A}{y_B-y_A} = 0.6981317007977318 - 0.02724103146800938 * \frac{0.8726646259971648-0.6981317007977318}{-0.023548434259890172-0.02724103146800938} = \mathbf{0{,}7917427}$$

Aplicând din nou metoda coardei, pentru punctele **T_A** şi **B**, cu valorile cele mai apropiate între ele, dar cu ordonate de semne contrare, se obţine intersecţia cu axa Ox în punctul de abscisă

(13) $X_D = X_B - y_B(X_B - X_T)/(y_B - y_T) = 0{,}7866089259602417 = \mathbf{0{,}8766092}$

pentru care valoarea funcţiei este f(x_D) = $\mathbf{-0{,}0000801}$ ceea ce indică o precizie de 4 zecimale exacte

Prin metoda mediei ponderate, prezentată în ultima linie a **tabelului 30.2,** se obţin aceleaşi valori, ceea ce indică o posibilă saturare a acestor metode. De aceea se trece la o metodă absolut nouă, originală, dezvltată de autor şi în lucrarile [7] şi [8].

2. METODA DETERMINĂRII SUCCESIVE A CIFRELOR (MDSC) NUMĂRULUI SOLUŢIE AL UNEI ECUAŢII OARECARE

În lucrarea [1] s-au prezentat comparativ diversele metode de rezolvare a ecuaţiei

(14) $y(x) \equiv \text{Log}x + 3x^2 - 4x - 1 = 0$,

funcţie reprezentată în **figura 6**, a cărei rezolvare, printr-o metodă inedită, anterior amintită, se încadrează în domeniul "**Matematicii atomice** (**MA**)" [8] deoarece nu se caută un **număr (atomul matematicii clasice)**, aşa

cum se procedează în **matematica** clasică sau **centrică** (**MC**), ci **cifrele succesive** care-l compun [7] !. Cifrele întregi constituind "**protonii" MA** iar cifrele zecimale "**electronii" MA** de pe diversele "orbite".

Rezolvarea ecuaţiei, prin programe matematice specializate, dă următorul rezultat:

Solve[Log[x] + $3x^2 - 4x - 1 - y$ == 0, x]

`Solve::nsmet: This system cannot be solved with the methods available to Solve.` ≫ Adică : Acest sistem nu poate fi rezolvat cu metodele disponibile pentru rezolvare

Tabelul 30.3. Determinarea soluţiei prin metoda determinării **cifrelor consecutive ale numărului soluţie**

Ecuaţia	**Y(x)**
Sin[0]-0 Cos[0]+1.2Cos[0]-1 Sin[1]-1 Cos[1]+1.2Cos[1]-1 Sin[2]-2 Cos[2]+1.2Cos[2]-1	0.2 -0.0504686 0.242215
Sin[0.77]-0.77Cos[0.77]+1.2Cos[0.77]-1 Sin[0.78]-0.78 Cos[0.78]+1.2Cos[0.78]-1 Sin[0.79]-0.79 Cos[0.79]+1.2Cos[0.79]-1	0.00483683 0.00186311 -0.00107015
Sin[0.7863]-0.7863 Cos[0.7863]+1.2Cos[0.7863]-1 Sin[0.7864]-0.7864 Cos[0.7864]+1.2Cos[0.7864]-1 Sin[0.7865]-0.7865 Cos[0.7865]+1.2Cos[0.7865]-1	0.0000103305 -0.0000189468 -0.00004822
Sin[0.786335]-0.786335Cos[0.786335]+1.2Cos[0.786335]-1 Sin[0.786336]-0.786336Cos[0.786336]+1.2Cos[0.786336]-1 Sin[0.786337]-0.786337Cos[0.786337]+1.2Cos[0.786337]-1	8.29262×10-8 -2.09853×10-7 -5.02631×10-7
Sin[0.78633527]-0.78633527Cos[0.78633527]+1.2Cos[0.78633527]-1 Sin[0.78633528]-0.78633528Cos[0.78633528]+1.2Cos[0.78633528]-1 Sin[0.78633529]-0.78633529Cos[0.78633529]+1.2Cos[0.78633529]-1	3.87582×10-9 9.48029×10-10 -1.97976×10-9
Sin[0.7863352832]-0.7863352832 Cos[0.7863352832]+1.2Cos[0.7863352832]-1 Sin[0.7863352833]-0.7863352833 Cos[0.7863352833]+1.2Cos[0.7863352833]-1 Sin[0.7863352834]-0.7863352834 Cos[0.7863352834]+1.2Cos[0.7863352834]-1	1.11361×10-11 -1.81418×10-11 -4.74196×10-11
Sin[0.7]-0.7Cos[0.7]+1.2Cos[0.7]-1 Sin[0.8]-0.8 Cos[0.8]+1.2Cos[0.8]-1 Sin[0.9]-0.9 Cos[0.9]+1.2Cos[0.9]-1	0.0266388 -0.00396123 -0.0301901
Sin[0.786]-0.786 Cos[0.786]+1.2Cos[0.786]-1 Sin[0.787]-0.787Cos[0.787]+1.2Cos[0.787]-1 Sin[0.788]-0.788 Cos[0.788]+1.2Cos[0.788]-1	0.0000981873 -0.000194523 -0.000486817
Sin[0.78633]-0.78633 Cos[0.78633]+1.2Cos[0.78633]-1 Sin[0.78634]-0.78634 Cos[0.78634]+1.2Cos[0.78634]-1 Sin[0.78635]-0.78635 Cos[0.78635]+1.2Cos[0.78635]-1	1.54683×10^{-6} -1.38096×10^{-6} -4.30872×10^{-6}
Sin[0.7863352]-0.7863352Cos[0.7863352]+1.2Cos[0.7863352]-1 Sin[0.7863353]-0.7863353Cos[0.7863353]+1.2Cos[0.7863353]-1 Sin[0.7863354]-0.7863354Cos[0.7863354]+1.2Cos[0.7863354]-1	2.43704×10-8 -4.90755×10-9 -3.41855×10-8
Sin[0.786335283]-0.786335283 Cos[0.786335283]+1.2Cos[0.786335283]-1 Sin[0.786335284]-0.786335284 Cos[0.786335284]+1.2Cos[0.786335284]-1 Sin[0.786335285]-0.786335285 Cos[0.786335285]+1.2Cos[0.786335285]-1	6.96919×10-11 -2.23087×10-10 -5.15866×10-10
Sin[0.78633528323]-0.78633528323 Cos[0.78633528323]+1.2Cos[0.78633528323]-1 Sin[0.78633528324]-0.78633528324 Cos[0.78633528324]+1.2Cos[0.78633528324]-1 Sin[0.78633528325]-0.78633528325 Cos[0.78633528325]+1.2Cos[0.78633528325]-1	2.35278×10-12 -5.75096×10-13 -3.50286×10-12

Soluţia ecuaţiei **Sin[x]-x Cos[x]+1.2Cos[x]-1= 0, cu 12 cifre exacte**, după 12 paşi,
şi cu **11** zecimale exacte este **0,78633528323** cu eroarea de $\epsilon = y_{12} = 2{,}35278\times10^{-12}$

În principiu, **METODA DETERMINĂRII SUCCESIVE A CIFRELOR** (**MDSC**) este extrem de simplă, dar poate fi aplicată, raţional, doar în prezenţa unui program de matematică. Deci, este o metodă computaţională. Este singura / prima metodă matematică care nu caută soluţia sub forma directa a **numărului-soluţie**, ci determină, pe rând, **consecutiv**, **cifrele** care compun acest număr.

Problema devine banală, deoarece, pentru fiecare cifră componentă a numărului, nu există decât **10 cifre** posibile**: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.** Ca urmare, se scrie de 10 ori ecuaţia de rezolvat şi în prima ecuaţie, peste tot în locul variabilei **x**, de exemplu, se înlocuieşte / consideră : în prima ecuaţie **x = 0**, în a 2-a ecuaţie **x = 1**, în a 3-a **x = 2** ş.a.m.d., iar în ultima ecuţie **x = 9**.

Se dă ***enter*** şi apare o coloană de 10 numere cu valorile / rezultatele funcţiei pentru cele 10 cifre. Dacă, din întâmplare, apare un zero, însemnă că cifra corespunzătoare acelui $x = c_k$, din acea ecuaţie, este o primă cifră exactă a numărului-soluţie al ecuaţie: în acel punct funcţia / curba **2D** intersectează axa **Ox**. Dacă apar mai ulte zerouri, însemnă că funcţia f(x) taie axa Ox în mai multe puncte, în intervalul $x \in$ [**0, 9**] fiecare punct fiind o soluţie exactă întreagă şi pozitivă a acestei ecuaţii. Dacă nu, caz mult mai frecvent, apar valori diferite de zero, de semne diferite, cu erori / diferenţe negative şi pozitive.

La trecerea de la un semn la altul, de la o cifră la cea următoare, de la cifra c_i la c_j, curba intersectează axa Ox, ceea ce înseamnă că între aceste două cifre se află soluţia, adică $x \in [c_i\ldots., c_j\ldots..]$, punctele (**….**) sugerând următoarele cifre, care urmează să fie determinate în continuare, ale **numărului-soluţie**.

Dacă ordinea pe verticală a semnelor rezultate, de la cifra superioară (**x = 0**) spre cea inferioara (**x = 9**) ale funcţiei **f(x)** este, de exemplu, pentru $c_i = 0 \rightarrow f(c_i) < 0$ minus (−) iar pentru cifra următoare $c_j = 1 \rightarrow f(c_j) > 0$, (vezi **Tab.3**), este plus (+), înseamnă că funcţia **f(x)** intersectează axa **Ox** venind din cadranul **IV** în cadranul **I**, de exemplu, aşa cum se arată şi în **figura 30.6** ◄şi, ca urmare, prima cifră exactă a numărului soluţie este $c_i = 0$, care dă valoarea funcţiei $f(c_i)$ mai mică, prin lipsă, decât soluţia exactă a ecuaţiei f(x) = 0; valoarea ei fiind suplimentată, în continuare, prin cifrele următoare.

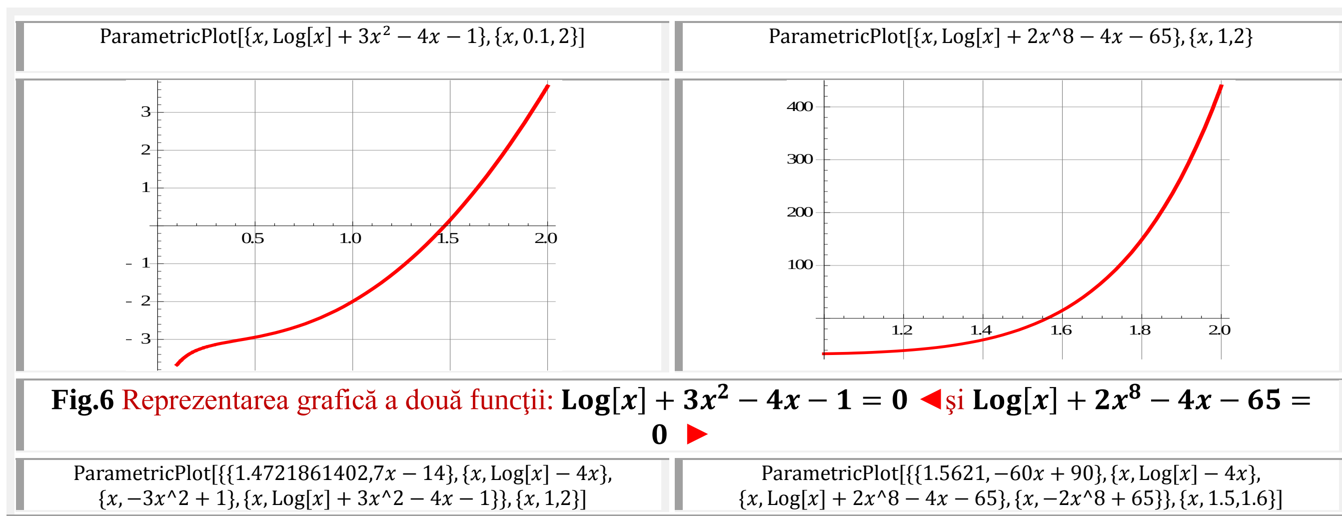


Fig.6 Reprezentarea grafică a două funcţii: $\mathrm{Log}[x] + 3x^2 - 4x - 1 = 0$ ◄şi $\mathrm{Log}[x] + 2x^8 - 4x - 65 = 0$ ►

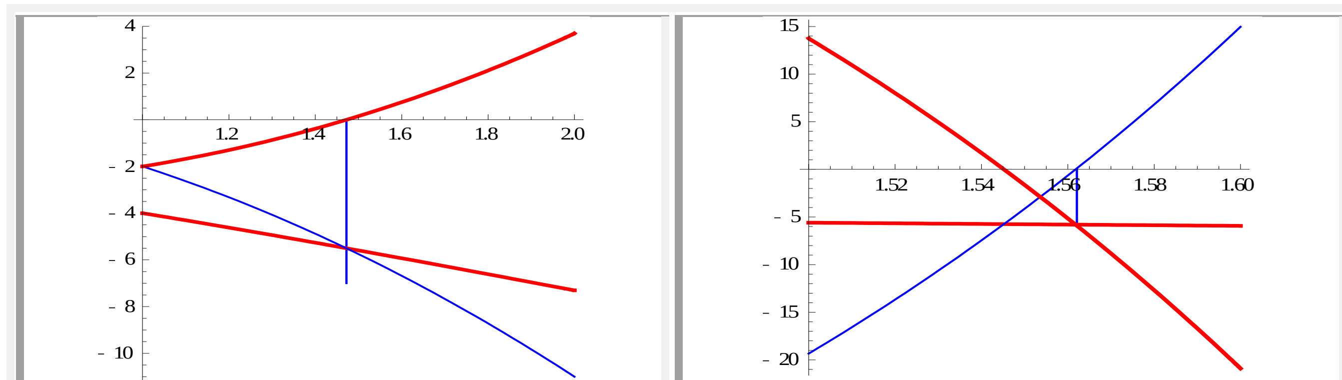


Fig. 30.7 Echivalenţa intersectării graficului funcţiei cu axa x şi intersecţia celor două **divizări ale ecuaţiei**

În **figura 30.7**, sunt reprezentate grafic două funcţii **f(x)**, uşor diferite între ele, şi cele două funcţii **f_1(x)** şi **f_2(x)** în care s-au descompus aceastea, în vederea aplicării metodei celor două tangente simultane, metodă tratată anterior, cu exemple de iteraţii comparate pentru doua situaţii arbitrare, exemplificate în **figura 30.8.**

În **tabelul 30.4,** au fost trecute doar ecuaţiile cu **cifrele** din zona schimbării de semn a valorii funcţiei **f(c),** din motive lesne de înţeles.

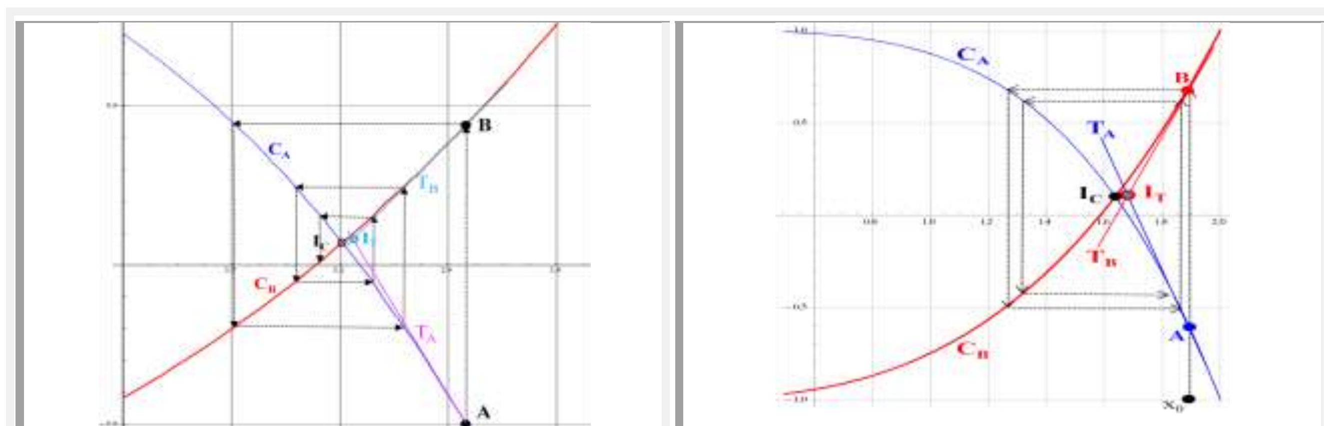


Fig. 30.8 Comparaţie între **metoda iteraţiei clasice** şi **metoda celor două tangente** simultane la soluţionarea determinării interseţiei a două curbe sau la soluţionarea unei ecuaţii prin descompunerea ei în alte două funcţii.

În **tabelul 30.4** este prezentată aplicarea **MDSC** la ecuaţia tratată pe larg în lucrarea [1], prin multitudinea de metode clasice cunoscute. Aici se va trata **MDSC** în varianta determinarii primelor cifre exacte consecutive ale numărului-soluţie prin metode grafice, atâta timp cât acestea mai sunt lizibile şi urmate de **MDSC** pur tabelară, prezentată în cazul anterior.

Tabelul 30.4,a Determinarea cifrelor consecutive ale numărului soluţie al ecuaţiei $\mathbf{Log}[x] + 3x^2 - 4x - 1 = 0$

0	Log[0] +3 0^2-4 0-1	-∞
1	Log[1] +3 1^2-4 1-1	-2
2	Log[2] +3 2^2-4 2-1	3+Log[2]
3	Log[3] +3 3^2-4 3-1	14+Log[3]
4	Log[4] +3 4^2-4 4-1	31+Log[4]
5	Log[5] +3 5^2-4 5-1	54+Log[5]

6 7 8 9	Log[6] +3 6^2-4 6-1 Log[7] +3 7^2-4 7-1 Log[8] +3 8^2-4 8-1 Log[9] +3 9^2-4 9-1	83+Log[6] 118+Log[7] 159+Log[8] 206+Log[9]
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	Log[10] +3 10^2-4 10-1 Log[11] +3 11^2-4 11-1 Log[12] +3 12^2-4 12-1 Log[13] +3 13^2-4 13-1 Log[14] +3 14^2-4 14-1 Log[15] +3 15^2-4 15-1 Log[16] +3 16^2-4 16-1 Log[17] +3 17^2-4 17-1 Log[18] +3 18^2-4 18-1 Log[19] +3 19^2-4 19-1	259+Log[10] 318+Log[11] 383+Log[12] 454+Log[13] 531+Log[14] 614+Log[15] 703+Log[16] 798+Log[17] 899+Log[18] 1006+Log[19]
0 1 2 3 4 5 6 7 8 **9**	Log[1.0] +3 1.0^2-4 1.0-1 Log[1.1] +3 1.1^2-4 1.1-1 Log[1.2] +3 1.2^2-4 1.2-1 Log[1.3] +3 1.3^2-4 1.3-1 Log[1.4] +3 1.4^2-4 1.4-1 Log[1.5] +3 1.5^2-4 1.5-1 Log[1.6] +3 1.6^2-4 1.6-1 Log[1.7] +3 1.7^2-4 1.7-1 Log[1.8] +3 1.8^2-4 1.8-1 Log[1.9] +3 1.9^2-4 1.9-1	-2. -1.67469 -1.29768 -0.867636 -0.383528 0.155465 0.750004 1.40063 2.10779 2.87185

În **tabelul 30.4,a** sunt executaţi trei paşi. În primul pas se determină prima cifră a numărului soluţie **c_1 = 1**. În al doilea pas, se introduce, în faţa cifrelor existente 0 …9, care se pastreaza tot timpul, **prima cifra exacta 1** şi se dă enter la calculul valorilor celor 10 funcţii cu cele 10 cifre. Se obeservă că ele nu schimbă de semn şi au, **toate**, valori pozitive mari, ceea ce denotă că valorile lui x, considerate temporar cu două **cifre protonice** (**întregi**), introduse în ecuaţie sunt mult prea mari şi că între ele trebuie introdusă virgula, care separă cifrele protonice (întregi) de cele **electronice** (**zecimale**). În pasul 3, după întroducerea virgulei între prima şi a doua cifră, rezultă o a doua cifră electronică exactă care este **4**, aşa cum se poate observa pe ultima coloană a **tabelului 30.4,a**.

Pentru reducerea dimensiunilor **tabelului 4**, un număr de paşi (cifre consecutive) se realizează pe cale grafică, aşa cum se prezintă situaţia din graficele consecutie din **figura 30.9**.

Astfel, au putut fi determinate încă 4 cifre consecutive, ajungându-se la **6 cifre exacte consecutive** ale numărului - soluţie al ecuaţiei, care este **x = 1,47218….**

Următoarele **cifre electronice consecutive exacte c_7 = 6… c_{11} = 2** se determină din nou analitic computaţional, aşa cum este prezentată situaţia în **tabelul 30.4,b**.

Plot[Log[x] + 3x^2 − 4x − 1, {x, 1,2}, GridLines → Automatic]	Plot[Log[x] + 3x^2 − 4x − 1, {x, 1.4,1.5}]

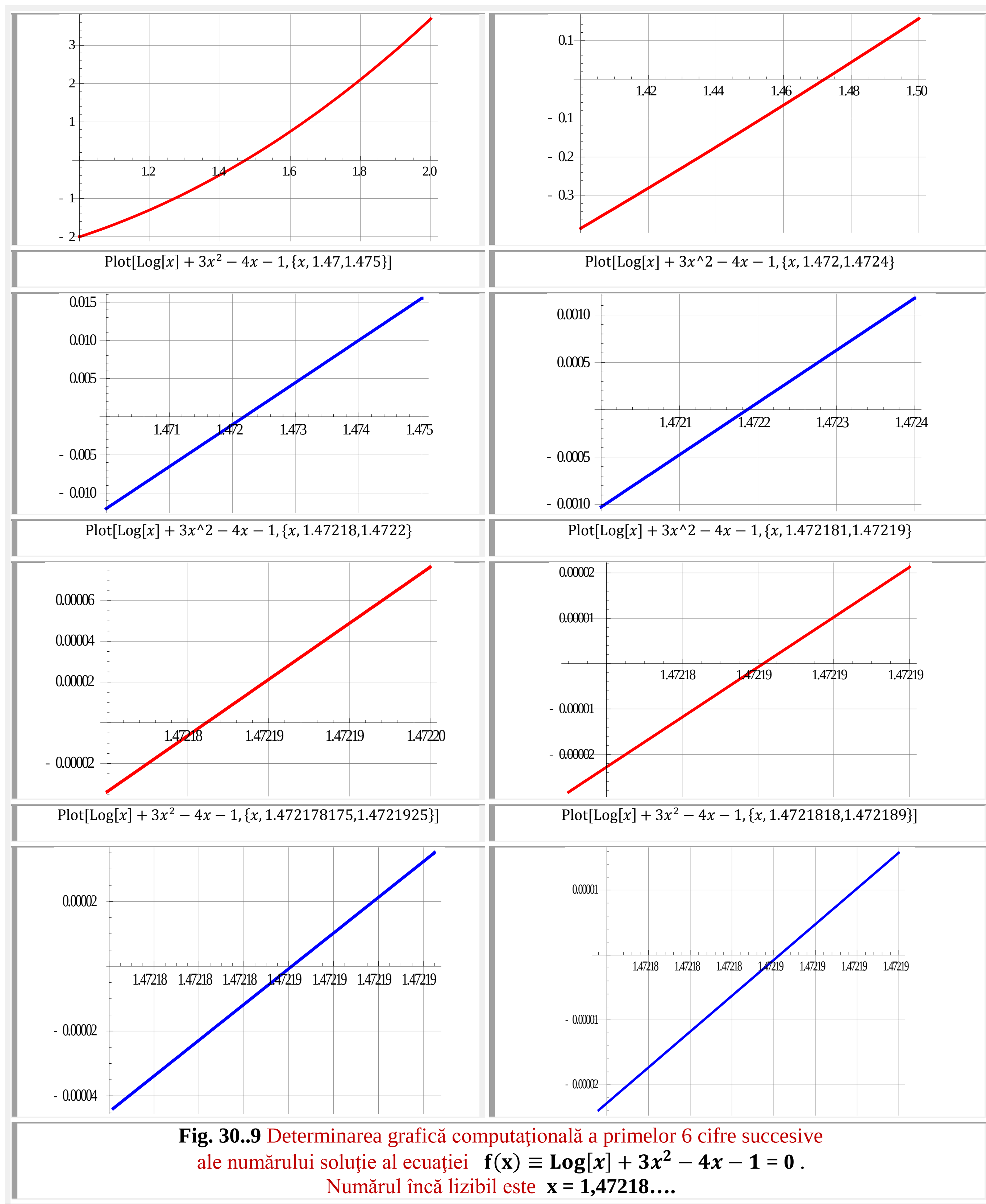


Fig. 30..9 Determinarea grafică computaţională a primelor 6 cifre succesive ale numărului soluţie al ecuaţiei $\mathbf{f(x) \equiv Log[x] + 3x^2 - 4x - 1 = 0}$.
Numărul încă lizibil este **x = 1,47218….**

Tabelul 30.4,b. Aflarea în continuare, a soluţiei prin metoda determinării **cifrelor consecutive ale numărului soluţie**

0	Log[1.472180] +3 1.472180^2-4 1.472180-1	-0.0000338474
1	Log[1.472181] +3 1.472181^2-4 1.472181-1	-0.000028335
2	Log[1.472182] +3 1.472182^2-4 1.472182-1	-0.0000228227
3	Log[1.472183] +3 1.472183^2-4 1.472183-1	-0.0000173103
4	Log[1.472184] +3 1.472184^2-4 1.472184-1	-0.0000117979
5	Log[1.472185] +3 1.472185^2-4 1.472185-1	-6.28557×10^{-6}
6	Log[1.472186] +3 1.472186^2-4 1.472186-1	-7.73192×10^{-7}
7	Log[1.472187] +3 1.472187^2-4 1.472187-1	4.73919×10^{-6}
8	Log[1.472188] +3 1.472188^2-4 1.472188-1	0.0000102516
9	Log[1.472189] +3 1.472189^2-4 1.472189-1	0.000015764
0	Log[1.4721860] +3 1.4721860^2-4 1.4721860-1	-7.73192×10^{-7}
1	Log[1.4721861] +3 1.4721861^2-4 1.4721861-1	-2.21954×10^{-7}
2	Log[1.4721862] +3 1.4721862^2-4 1.4721862-1	3.29283×10^{-7}
3	Log[1.4721863] +3 1.4721863^2-4 1.4721863-1	8.80521×10^{-7}
4	Log[1.4721864] +3 1.4721864^2-4 1.4721864-1	1.43176×10^{-6}
5	Log[1.4721865] +3 1.4721865^2-4 1.4721865-1	1.983×10^{-6}
6	Log[1.4721866] +3 1.4721866^2-4 1.4721866-1	2.53424×10^{-6}
7	Log[1.4721867] +3 1.4721867^2-4 1.4721867-1	3.08547×10^{-6}
8	Log[1.4721868] +3 1.4721868^2-4 1.4721868-1	3.63671×10^{-6}
9	**Log[1.4721869] +3 1.4721869^2-4 1.4721869-1**	4.18795×10^{-6}
0	Log[1.47218610] +3 1.47218610^2-4 1.47218610-1	-2.21954×10^{-7}
1	Log[1.47218611] +3 1.47218611^2-4 1.47218611-1	-1.66831×10^{-7}
2	Log[1.47218612] +3 1.47218612^2-4 1.47218612-1	-1.11707×10^{-7}
3	Log[1.47218613] +3 1.47218613^2-4 1.47218613-1	-5.65831×10^{-8}
4	Log[1.47218614] +3 1.47218614^2-4 1.47218614-1	-1.45928×10^{-9}
5	Log[1.47218615] +3 1.47218615^2-4 1.47218615-1	5.36645×10^{-8}
6	Log[1.47218616] +3 1.47218616^2-4 1.47218616-1	1.08788×10^{-7}
7	Log[1.47218617] +3 1.47218617^2-4 1.47218617-1	1.63912×10^{-7}
8	Log[1.47218618] +3 1.47218618^2-4 1.47218618-1	2.19036×10^{-7}
9	Log[1.47218619] +3 1.47218619^2-4 1.47218619-1	2.7416×10^{-7}
0	Log[1.472186140] +3 1.472186140^2-4 1.472186140-1	-1.45928×10^{-9}
1	Log[1.472186141] +3 1.472186141^2-4 1.472186141-1	4.0531×10^{-9}
2	Log[1.472186142] +3 1.472186142^2-4 1.472186142-1	9.56548×10^{-9}
3	Log[1.472186143] +3 1.472186143^2-4 1.472186143-1	1.50779×10^{-8}
4	Log[1.472186144] +3 1.472186144^2-4 1.472186144-1	2.05902×10^{-8}
5	Log[1.472186145] +3 1.472186145^2-4 1.472186145-1	2.61026×10^{-8}
6	Log[1.472186146] +3 1.472186146^2-4 1.472186146-1	3.1615×10^{-8}
7	Log[1.472186147] +3 1.472186147^2-4 1.472186147-1	3.71274×10^{-8}
8	Log[1.472186148] +3 1.472186148^2-4 1.472186148-1	4.26398×10^{-8}
9	**Log[1.472186149] +3 1.472186149^2-4 1.472186149-**	4.81521×10^{-8}
0	Log[1.4721861400] +3 1.4721861400^2-4 1.4721861400-1	-1.45928×10^{-9}
1	Log[1.4721861401] +3 1.4721861401^2-4 1.4721861401-1	-9.08039×10^{-10}
2	Log[1.4721861402] +3 1.4721861402^2-4 1.4721861402-1	-3.568×10^{-10}
3	Log[1.4721861403] +3 1.4721861403^2-4 1.4721861403-1	1.94436×10^{-10}
4	Log[1.4721861404] +3 1.4721861404^2-4 1.4721861404-1	7.45675×10^{-10}
5	Log[1.4721861405] +3 1.4721861405^2-4 1.4721861405-1	1.29691×10^{-9}

6	Log[1.4721861406] +3 1.4721861406^2-4 1.4721861406-1	1.84815×10^{-9}
7	Log[1.4721861407] +3 1.4721861407^2-4 1.4721861407-1	2.39939×10^{-9}
8	Log[1.4721861408] +3 1.4721861408^2-4 1.4721861408-1	2.95063×10^{-9}
9	Log[1.4721861409] +3 1.4721861409^2-4 1.4721861409-1	3.50186×10^{-9}
Soluţia, până în acest moment, cu 11 cifre exacte, este x =1,4721861402		

Moto:" **La intersecţia dintre DA şi NU este Adevărul Suprem**"

Capitolul 31

INTERSECŢII ÎN PLAN

0. ÎN LOC DE ÎNTRODUCERE

(http://ro.wikipedia.org/wiki/Teorema_lui_Bézout)

Teorema lui Bézout se referă la o formulare demonstrabilă din geometria algebrică privind un număr de puncte comune, sau puncte de intersecție a două curbe algebrice.

Teorema afirmă că două curbe plane algebrice, *X* de grad **m** și *Y* de grad **n**, au un număr **maxim** de puncte de intersecție egal cu produsul gradelor polinoamelor, **mn**.

Această afirmație este adevărată dacă se consideră curbele ca neavând nici o componentă comună înaintea intersectării propriu-zise și se consideră multiplicitatea acestora, respectiv apartenența punctelor la același câmp finit algebric.

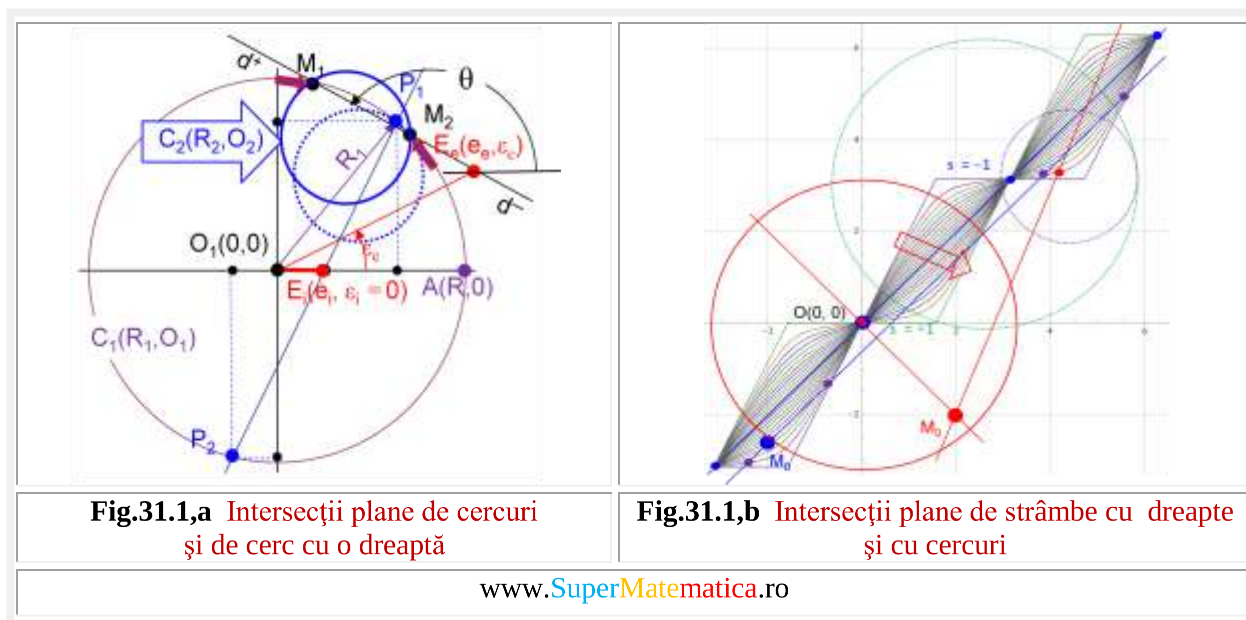


Fig.31.1,a Intersecţii plane de cercuri şi de cerc cu o dreaptă

Fig.31.1,b Intersecţii plane de strâmbe cu dreapte şi cu cercuri

www.SuperMatematica.ro

Exemple

- Două drepte ne-confundate se întâlnesc în exact un punct. Dacă sunt paralele punctul este aruncat la infinit. Pentru a ilustra algebric, în spații proiective, fie curbele $x+2y=3$ și $x+2y=5$, care sunt reprezentate de ecuațiile omogene $x+2y-3z=0$ and $x+2y-5z=0$. După rezolvare, se găsește că $x=-2y$ și $z = 0$, ceea ce corespunde punctului (-2 : 1 : 0) în coordonate omogene. dar cum coordonate z este 0, acest punct se găsește la infinit.
- Cazul deosebit a două curbe de grade diferite care se intersectează este o variantă a teoremei fundamentale a algebrei. De exemplu, parabola definită de $y - x^2 = 0$ are gradul 2, în timp ce dreapta $y - 2x = 0$ are gradul 1; ca atare, cele două curbe se întâlnesc în exact două puncte.

- Două cercuri nu se intersectează decât în exact două puncte în plan, deși teorema lui Bézout afirmă că ar fi patru. Discrepanța este aparentă și provine din faptul că fiecare din cele două cercuri trece prin aceleași puncte din planul complex de două ori. Dacă se alege cercul de coordonate:
  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
  în coordonate omogene, se obține
  $(x - az)^2 + (y - bz)^2 - r^2z^2 = 0,$
  de unde reiese că punctele (1:*i*:0) și (1:-*i*:0) se află pe fiecare cerc. Când două cercuri nu se intersectează în planul real (de exemplu, fiindcă sunt concentrice), se întâlnesc în aceste puncte la infinit.

31.1 VERIFICAREA TEOREMEI LUI BÉZOUT ÎN CAZUL STRÂMBELOR

O explicaţie mult mai simplă şi mult mai sugestivă, cu privire la intersecţia unei drepte cu un cerc ca şi a două cercuri între ele, este sugerată de **funcţiile supermatematice** (**FSM**) **circulare excentrice** (**CE**) de excentru **E**(e,ε) exterior discului cercului unitate, sau exterior unui cerc oarecare $C_1(O_1,R_1)$ şi de variabilă excentrică **θ**, cazuri reprezentat în **figura 31.1,a**.

Se ştie că, pentru definirea şi reprezentarea pe cerc a funcţiile trigonometrice / circulare cosinus şi sinus **centrice Euler (cosα, sinα),** cercul unitate **CU(O,1), (**fostul cercul trigonometric pe vremea lui **Euler**) a fost intersectat cu o **semidreaptă centrică D**, pentru că este turnantă în jurul **polului P(0,0)** ≡ O(0, 0) ≡ M(0,0), pol ales, în mod cu totul nefericit, pentru că a sărăcit matematica, în **centrul M(0,0),** al cercului unitate şi în **originea O(0, 0)** a sistemului / reperului rectangular cartezian drept sau polar.

Supermatematica a plasat polul într-un punct oarecare din planul cercului şi la denumit **ex-centru**, pentru că a fost expulzat din centrul **M**, l-a notat cu **S**(s, ε) – **punct solar** – în cercul unitate **CU(O,1)** şi cu **E**(**e**, **ε**) într-un cerc oarecare C(O,R), în care **s** = e/**R** şi **e** sunt excentricitaţile liniare numerică şi, respectiv, reală, iar **ε** este excentricitatea unghiulară. Şi, astfel, toate entităţile matematice au fost multiplicate la infinit, iar matematica centrică (**MC**) a devenit un caz particular, de excentricitate liniară nulă (**e** = 0) a **supermatematicii** (**SM**) şi o complementară a **matematicii excentrice** (**ME**) ! De aceea, se poate afirma că **SM** = **MC** ∪ **ME** şi că **MC** = **SM** **(** e = 0**)**.

Funcţiile supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) de variabilă excentrică **θ**, intersectează cercul unitate cu o **dreaptă excentrică d** = $\mathbf{d}^+ \cup \mathbf{d}^-$, denumită astfel pentru că este turnantă în jurul excentrului **S** şi au: două determinări, câte una pentru fiecare semidreaptă, dacă s < 1 sau e < R. Şi patru determinări, dar numai două în acelaşi timp, sau pentru aceeaşi valoare a variabilei excentrice **θ**, câte două pentru fiecare semidreaptă, în caz contrar, adică, pentru S exterior discului cercului unitate sau e exterior unui cerc oarecare (**Fig.31.1,a**). Intersecţia cercului cu o dreapta şi nu cu o semidreaptă, s-a făcut la sugestia Prof. univ. Dr. Math. **Horst Klepp,** pentru a aduce de acord **Trigonometria** cu **Geomatria Analitică,** care operează cu drepte şi nu cu semidrepte.

Pentru **e** < R sau **s** < 1 (**Fig.31.1**), adică pentru un excentru $\mathbf{E_i}$ interior discului cercului $\mathbf{C_1}$, aceste puncte de intersecţie sunt $\mathbf{P_1}$ şi $\mathbf{P_2}$ pe cercul oarecare C_1, puncte care pot fi notate împreună $\mathbf{P_{1,2}}$.

Pentru **s** > 1, **FSM-CE** există doar în intervalele în care dreapta excentrică **d** intersectează cercul unitate CU, începând cu punctul de tangenţa iniţial $\mathbf{W_i}$ şi terminând cu punctul de tangenţă final $\mathbf{W_f}$.

Dacă se roteşte dreapta excentrică în sens trigonometric, în momentul tangentei cu **CU** în punctul $\mathbf{W_i}$ sunt două puncte confundate $\mathbf{W_{1i}}$ şi $\mathbf{W_{2i}}$, care, în momentele următoare, la rotirea în continuare a dreptei excentrice **d**, se deplasează în sensuri contrare atât pe semidreapta $\mathbf{d^+}$ cât şi pe cercul $\mathbf{C_1}$: $\mathbf{M_1}$ spre stânga (Fig.**1,a**) şi $\mathbf{M_2}$ spre dreapta. Aceeaşi dreaptă **d**, cu semidreapta $\mathbf{d^+}$, intersecteaza simultan şi cercul $\mathbf{C_2}$, tot în punctele $\mathbf{M_{1,2}}$, care aparţin, de această dată, cercului $\mathbf{C_2}$. Ca urmare, fiecare punct $\mathbf{M_1}$ şi $\mathbf{M_2}$ este dedublat, aparţinând pe de o parte cercului $\mathbf{C_1}$ şi, pe de altă parte, cercului $\mathbf{C_2}$. Dacă dreapta **d** dispare, rămân cele două cercuri şi $\mathbf{M_{1,2}}$ sunt punctele de intersecţie ale celor două cercuri $\mathbf{C_1}$ cu $\mathbf{C_2}$: cu două puncte în $\mathbf{M_1}$ şi cu două puncte în $\mathbf{M_2}$. In momentul în care, cele două cercuri sunt tangente, interioare sau

exterioare, în punctul lor de tangenţă sunt de fapt **4 puncte confundate**; câte două pentru fiecare cerc. **QED.**

În **figura 31.1,b** sunt prezentate o **familie de stâmbe**, de variabilă excentrică **θ**, descrise de **FSM-CE** amplitudine excentrică **aexθ**, a căror ecuaţii sunt

(31.1) **y = aexθ = α(θ) = θ – arcsin[s.sin(θ- ε)],**

pentru un **excentru S**(**s** ∈ [-1, 1], **ε** = 0), în care **α** este variabila centrică, sau unghiul la centrul **O(0,0),** a direcţiei / semidreptei centrice D^+ sau a razei / segmentului OW_1, iar **θ** este unghiul de poziţie (sau mai precis de **orientare**, deoarece **poziţia** = **orientare (θ, φ, ψ)** ∪ **localizare (x, y, z)**) a semidreptei excentrice **d^+**, sau a razei excentrice $r_1 = rex_1\theta$ = **E**W_1, $rex_1\theta$ fiind **FSM-CE radial excentric** de variabilă excentrică **θ** şi de ecuaţie

(31.2) $rex_{1,2}$ **θ** = – **s**.cos(**θ** - **ε**) $\pm\sqrt{1-s^2sin^2(\theta\ -\ \varepsilon)}$

Strâmba este o generalizare vastă a dreptei: dreapta fiind un caz particular al strâmbei, de excentricitate numierică liniară **s** = 0. Strâmbele din **figura 31.1,b** sunt cuprinse între strâmbele de excentricitate **s** = $\pm$ 1, sau e $= \pm R$ care sunt linii frânte, cu segmente orizontale şi altele paralele cu prima bisectoare. Graficele curbele funcţiilor amplitudine excentrică din **figura 31.1,b** "**şerpuiesc**"/oscilează în jurul strâmbei centrale, de **s** = 0, care este dreapta centrală y = x, sau prima bisectoare.

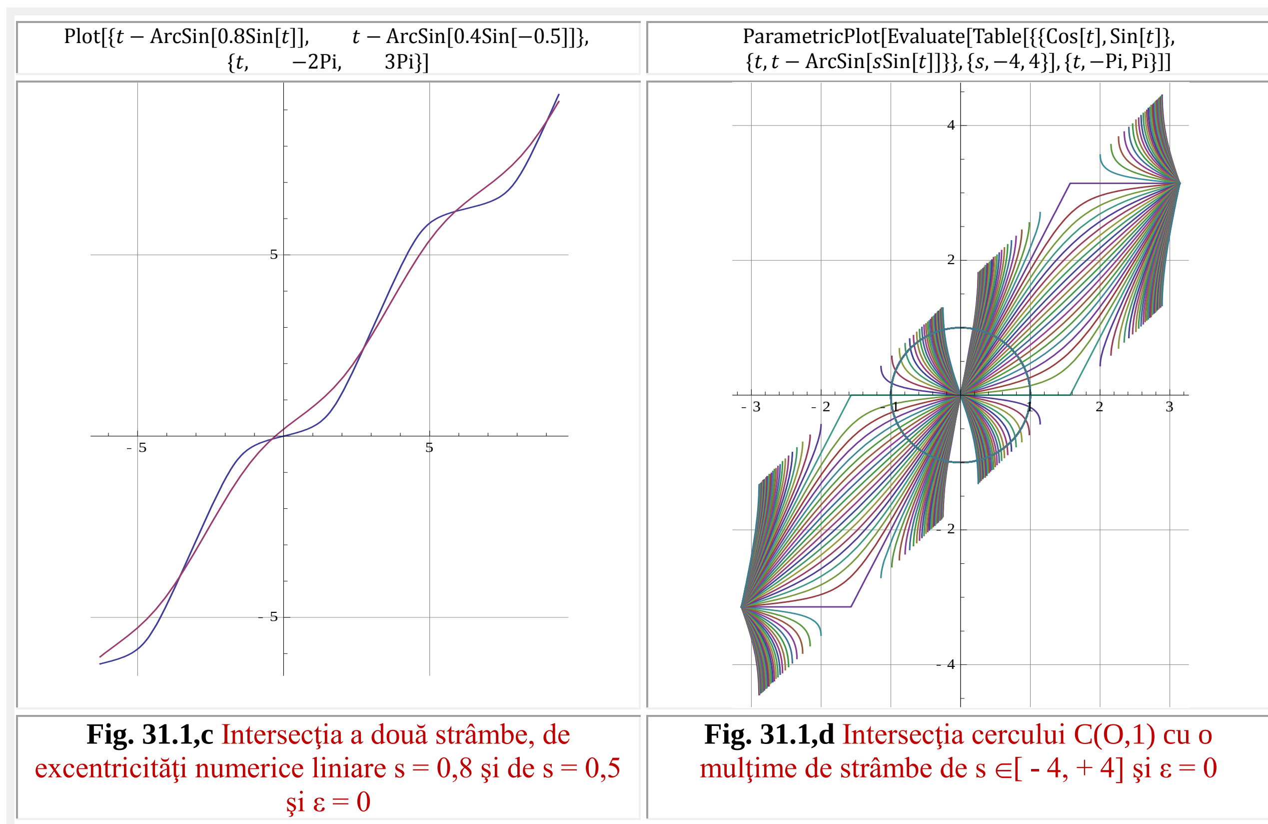


Fig. 31.1,c Intersecţia a două strâmbe, de excentricităţi numerice liniare s = 0,8 şi de s = 0,5 şi ε = 0

Fig. 31.1,d Intersecţia cercului C(O,1) cu o mulţime de strâmbe de s ∈[- 4, + 4] şi ε = 0

Cuvântul "**şerpuiesc**", folosit pentru descrierea formei graficelor curbelor funcţiilor amplitudine excentrică, a fost invocat / imaginat de un căpcăun drept pretext principal de respingere a unui Grant de Supermatematică. Îi amintim acestui inorog că, numai valoare unei mărimi poate oscila în jurul uniei valori medii, sau un punct poate oscila de-o parte şi de alta a altui punct sau dreaptă şi că orice oscilaţie **pretinde / presupune o mişcare,** liniară sau circulară **alternativă**; pe când o curbă, sau mai precis

graficul ei, ca cea a **FSM-CE** amplitudine excentrică **aexθ** are o infinitate de mulţimi de puncte (segmente de curbă) care sunt **stabile / imuabile** (nu oscileaza !) de o parte a primei bisectoare şi alte grupe de mulţimi de puncte care sunt de cealalta parte a dreptei şi ele **tot stabile / imuabile**, care, deci, nu oscilează, cum crede acel referent imbecil cu numele ţinut secret. (v."Nimic despre **supermatematică**. Totul despre prostie" **Revista Agero Stuttgart**".

În **figura 31.1,c** se poate deduce că intersecţia a două strâmbe, care şerpuiesc încolăcindu-se reciproc, de la -∞ la +∞ , pe direcţia primei bisectoare, are o infinitate de puncte de intersecţie, în acord cu teorema lui **Bézout**, deoarece strâmbele sunt reprezentate de polinoamele (1') de grad infinit.

Din figură, se poate constata că, nu pot exista mai mult de 2 puncte de intersecţie dintre **o strâmbă** şi **un cerc oarecare**; tot atâtea câte există la intersecţia unui cerc cu o dreaptă, în **dezacord** cu teorema lui **Bézout**, deoarece **funcţia amplitudine excentrică** nu este o cubă algebrică, pe de o parte. Pe de altă parte, strâmba este un polinom de grad infinit, aşa cum se va putea constata în continuare.

Teorema lui **Bézout** ar putea fi respectată numai de un cerc de raza infinit, cerc care degenerează în dreptă, sau dacă se consideră intersecţia cercului cu toate strâmbele de s ∈ [- ∞, + ∞], aşa cum se poate deduce din **figura 31.1,d**, sau dacă se consideră **caracterul amfoter al strâmbelor**: de gradul unu, pentru că este o generalizare a dreptei şi de grad infinit dacă se descompune în serii de puteri.

Intersecţia unei strâmbe cu o dreaptă, poate avea o infinitate de puncte de intersecţie, dacă dreapta are un punct al dreptei M_0 pe una dintre curbele funcţiilor amlitudine excentrică, (oricare) şi are coeficientul unghiular al dreptei **m = tanα = 1**, adică, dreapta este paralelă cu prima bisectoare.

Acest fenomen / lucru se explică prin faptul că exprimând desvoltarea în serie de puteri a funcţiei **arcsinθ** din relaţia (1), în care s.sin(**θ - ε**) → x se va obţine polinomul de grad infinit

(31.1') $$\mathrm{aex}(x, s) = \theta - \left(x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \cdots + \frac{1.3.5.7....\ (2n-1).x^{2n+1}}{2.4.6.8...(2n).(2n+1)}\right) =$$
$$= \arcsin\frac{x}{s} + \varepsilon - \left(x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \cdots + \frac{1.3.5.7....\ (2n-1).x^{2n+1}}{2.4.6.8...(2n).(2n+1)}\right).$$

In concluzie, intersecţia strâmbelor între ele sau cu o dreaptă respectă teorema lui **Bézout**, în timp ce, intersecţia cu un cerc nu o respectă. Ca urmare, se poate afirma că, teorema lui **Bézout** este respectată în domeniul **matematicii centrice** (**MC**) şi nu în totalitate şi în cel al **matematicii excentrice** (**ME**).

De fapt, aceeaşi problemă apare şi în **matematica centrică** (**MC**), la intersecţia unui cerc cu o funcţie sinus centric **sinx**, a cărui dezvoltare în serie de puteri este

(31.1") $$y = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \ldots + (-)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

O dreaptă, ca şi o strâmbă, intersectează o sinusoidă sau o sexoidă (**sexx**) într-o infinitate de puncte şi un cerc în maximum două puncte.

31.2 EXPRESIA GENERALĂ A COORDONATELOR PUNCTELOR DE INTERSECŢIE DINTRE UN CERC ŞI O DREAPTĂ

De la bun început, se poate declara şi demonstra că funcţiile supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) de variabilă excentrică **θ** cosinus excentric x = R.cex**θ** şi sinus excentric y = R.sex **θ** sunt coordonatele punctelor de intersecţie ale unei dreptei, a **dreptei excentrice d**, turnantă în jurul excentrului **E**, în acest caz (**Fig.31.2,c**), cu cercul **C(M, R)**, de rază **R** oarecare**,** cu centrul în punctul **M(a,b).**

În acest scop, trebuiesc determinate coordonatele carteziene ale excentrului E($\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$) sau cele polare **E**(e,ε), faţă de centrul **M**, considerat ca o nouă origine a unui reper cartezian drept sau /şi polar.

O dreaptă poate fi exprimată de ecuaţiile (31.3). Din aceste ecuaţii pot fi obţinute coordonatele carteziene ale unui punct E($\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$) sau pe cele polare **E**(e,ε), punct conţinut / aparţinând dreptei şi panta **m = tanα**, a dreptei, dacă ele nu sunt explicite.

Astfel, pot fi determinate coordonatele de intersecţie ale dreptei cu axele **Ox - A(a_d,0)** şi/sau **Oy - B(0,b_d)**, intersectând dreapat **d** cu axele respective y = 0 şi, respectiv x = 0.

Dacă coordonatele centrului cercului **C** sunt **M(a ,b),** atunci coordonatele excentrului E_x(**e**, **0**) considerat pe axa Ox sunt **e** = e_x = a_d – **a** şi **ε** = 0, iar al excentrului E_y(e, $\frac{\pi}{2}$), considerat plasat pe axa Oy vor fi **e** = e_y = b_d – **b**.

$$\left\{\begin{array}{c} Ax + By + C = 0 \\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \\ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ y = mx + n \\ \frac{x}{a_d} + \frac{y}{b_d} = 1 \\ x.cos\alpha + y.sin\alpha - p = 0, (Hesse) \\ \begin{cases} x = x_0 + r.cos\alpha \\ y = y_0 + r.sin\alpha \end{cases} \end{array}\right. \tag{31.3}$$

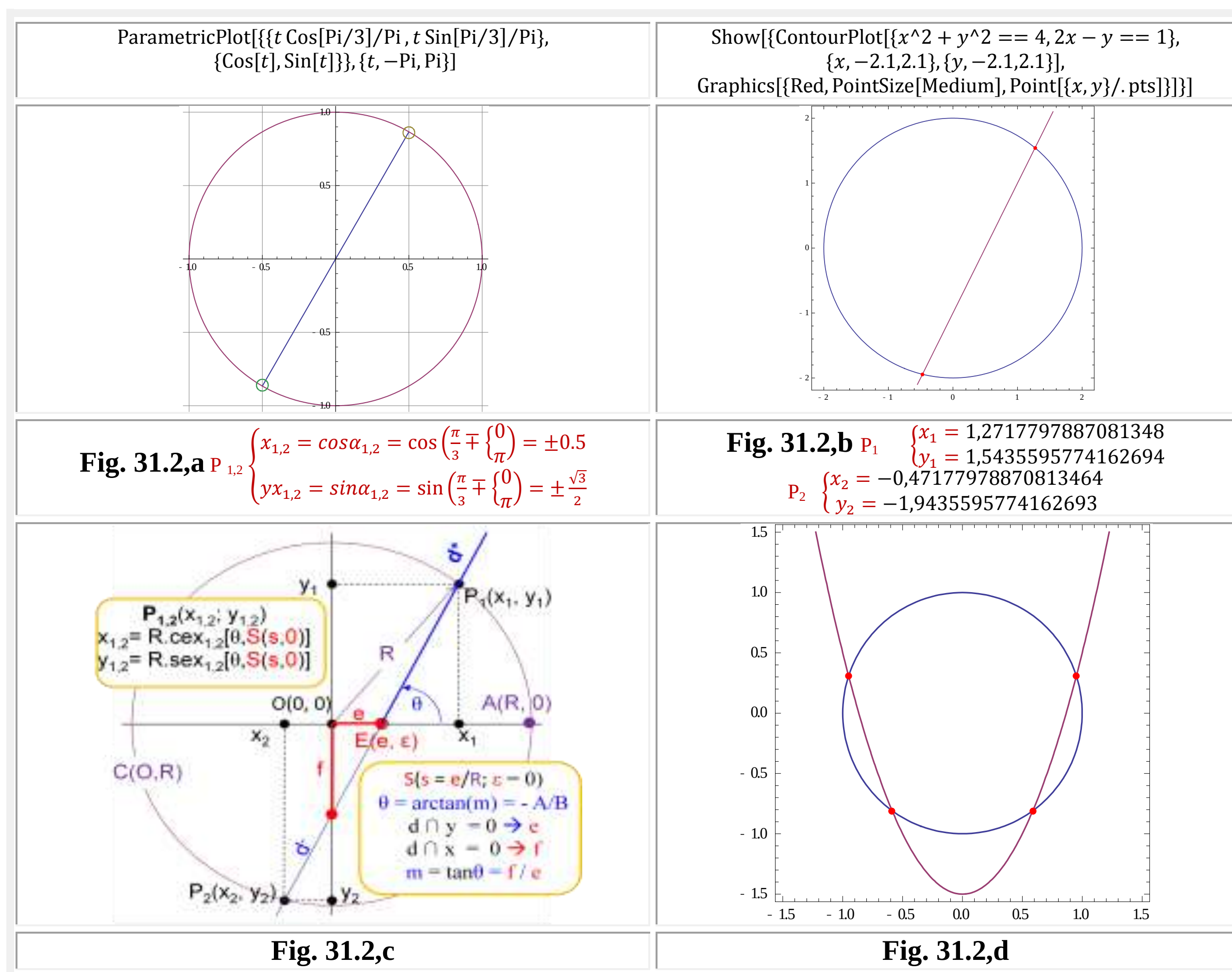


Fig. 31.2,a **Fig. 31.2,b** **Fig. 31.2,c** **Fig. 31.2,d**

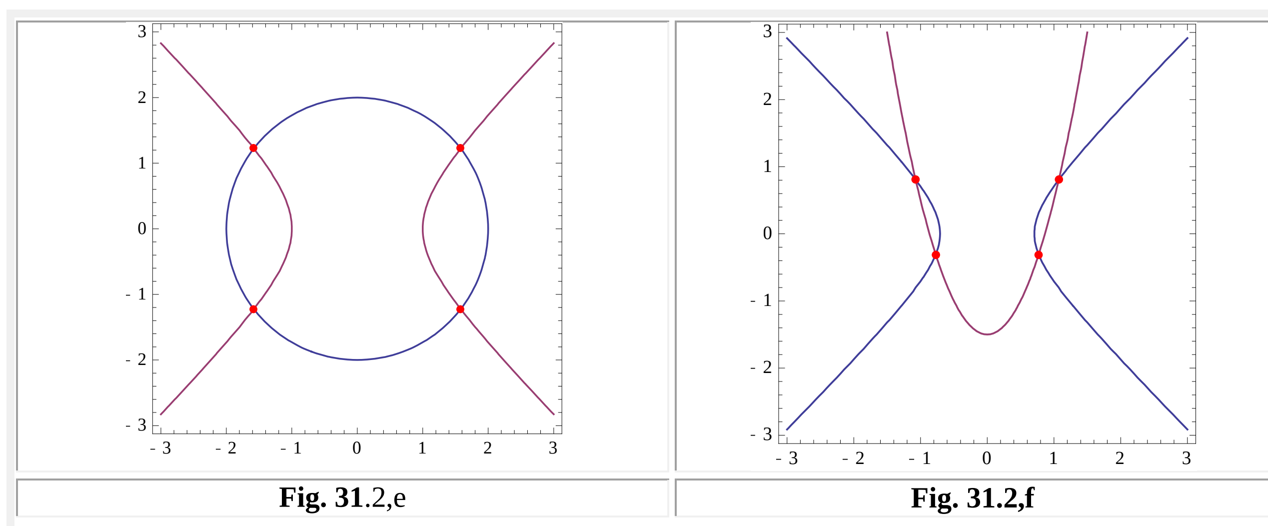


Fig. 31.2,e   **Fig. 31.2,f**

Din prima ecuaţie generala (31.3) a dreptei, panta ei se determină cu relaţia **m = tanθ** = $-\frac{A}{B}$.

Din ecuaţiile cercului, pot fi deduse raza cercurilor **R**, din ecuaţiile în care ea nu este evidentă şi coordonatele centrului M(a, b).

Un cerc poate fi exprimat prin ecuaţiile (31.5) din care se pot deduce razele acestora R, recum şi coordonatele centrului M(a,b), exprimate, de exemplu, de relaţiile (31.6).

În acest fel, sunt cunoscute toate mărimile necesare pentru exprimarea coordonatelor de intersecţie ale cercului C cu dreapta **d** prin **FSM-CE** $x_{1,2}$ = **cex**$_{1,2}$**θ** şi $y_{1,2}$ = **sex**$_{1,2}$**θ.**

(31.4) $$\begin{cases} x_{1,2} = R.cex_{1,2}\theta = R.\cos\{\theta \mp \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] \mp \begin{Bmatrix}0\\ \pi\end{Bmatrix}\} \\ y_{1,2} = R.sex_{1,2}\theta = R.\sin\{\theta \mp \arcsin[s.\sin(\theta-\varepsilon)] \mp \begin{Bmatrix}0\\ \pi\end{Bmatrix}\}, \end{cases}$$

în care **θ** = arctan**(m),** iar excentrul este **S(s = e/R, ε)**, caz prezentat în **figura 31.2,c**.

(31.5) $$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 = R^2, axe\ rectangulare \\ x^2+y^2-2ax-2by+c=0,\ Ec.normal\breve{a} \\ \begin{cases} x = a + R.cos\alpha = a = R\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b + R.sin\alpha = b + R\frac{2t}{1+t^2} \end{cases}, \\ \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0) = R^2,\ Coord\ polare \end{cases}$$

(31.6) $$\begin{cases} R = \sqrt{a^2+b^2-c} \\ M(a,b) \end{cases}$$

Dacă dreapta **d** trece prin centrul cercului **C**(O,R), ca în **figura 31.2,a**, atunci rezolvarea este banală, deoarece excentricitatea liniară **e** = **s** = 0 şi **FSM-CE** degenerează în funcţiile centrice **cosα** şi **sinα** şi punctele de intersecţie sunt

(31.7) $$P_{1,2}\begin{cases} x_{1,2} = R.cos\alpha_{1,2} = R.\cos\left[\arctan(m) \mp \begin{Bmatrix}0\\ \pi\end{Bmatrix}\right] \\ y_{1,2} = R.sin\alpha_{1,2} = R.\sin\left[\arctan(m) \mp \begin{Bmatrix}0\\ \pi\end{Bmatrix}\right] \end{cases}$$

Programul **Mathematica 8** a lui **Stephan Wolfram** oferă posibilitatea determinării coordonatelor punctelor de intersecţie a două curbe plane precum şi poziţionarea acestor puncte pe curbe, aşa cum se poate constata în **figura 31.2,b** pentru un cerc, centrat în origine, cu o dreaptă excentrică; acelaşi caz ca şi cel din **figura 31.2,c**. Şi poate rezolva numeric şi unele sisteme de ecuaţii pentru determinarea punctelor lor de intersecţie, aşa cum se poate deduce din **figura 31.2,b**.

Intersecţia cercului cu o parabolă este reprezentată în **figura 31.2,d**, cu o hiperbolă în **figura 31.2,e**, cu o hiperbolă echilateră, în **figura 31.2,e** şi dintre o hiperbolă şi o parabolă în **figura 31.2,f**.

31.3 INTERSECŢIA A DOUĂ STRÂMBE

Programul de matematică, anterior amintit, nu poate să rezolve, însă, problema intersecţiei a două strâmbe. În acest scop, e necesar să se rezolve sistemul de ecuaţii

(31.8) $$\begin{cases} y = \theta - \arcsin\left[s_1.\sin\left(\theta - \varepsilon_1\right)\right] \\ y = \theta - \arcsin\left[s_2.\sin\left(\theta - \varepsilon_2\right)\right] \end{cases}$$

la care, răspunsul programului pentru **S₁**(s_1= 0,4; ε_1 = 0) şi **S₂**(s_2 = 0,8 ; $\varepsilon_2 = \frac{\pi}{4}$) este:

```
NSolve[ArcSin[0.4Sin[x]]-ArcSin[0.8Sin[x+Pi/4]]==0, x, Reals]
NSolve::ivar: _-1_ is not a valid variable. ≫
NSolve[False,-1,Reals]
```

Nici programul de intersecţii n-a putut da un rezultat. Raspunsul lui a fost

```
NSolve[{x-ArcSin[0.4Sin[x]]==0,x-ArcSin[0.8Sin[x+Pi/4]]==0},{x}]
NSolve::ivar: _-1_ is not a valid variable. ≫
NSolve[{False,False},{-1}]
```

De aceea s-a apelat la **metoda succesivă** (**MS**) din **Matematica Atomică** (V.**www.cartiaz.ro**)

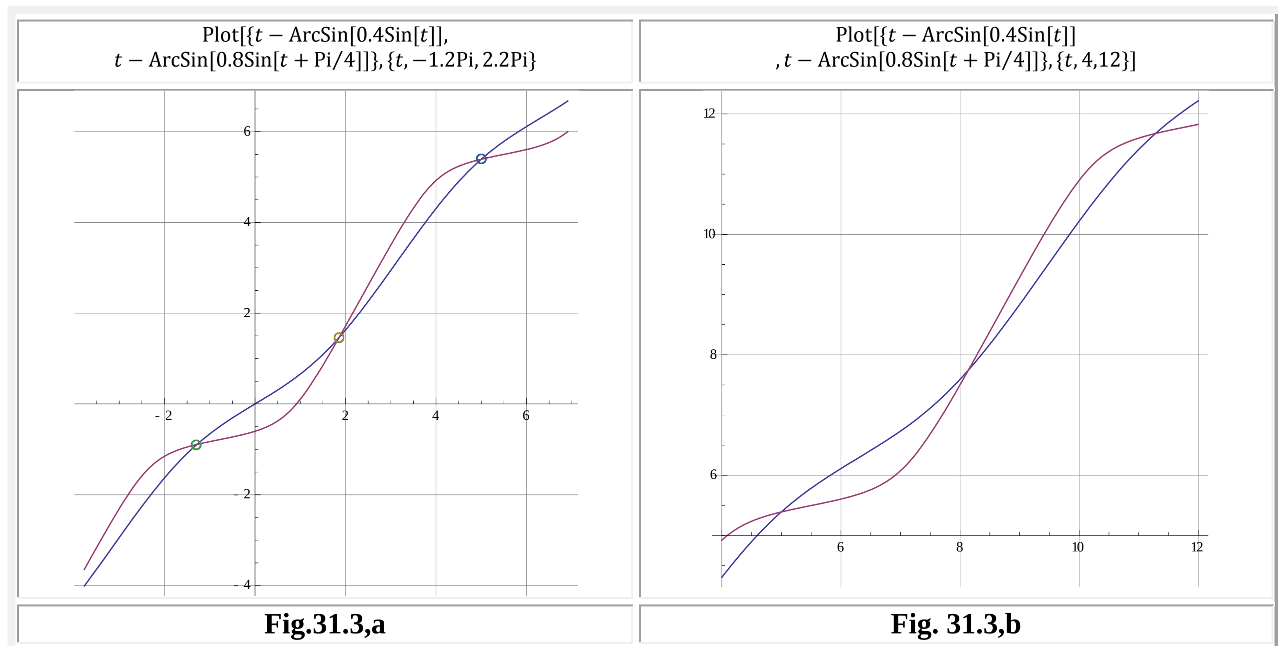


Fig.31.3,a **Fig. 31.3,b**

Tabelul 31.1

Ecuaţia	Eroarea	Ecuaţia	Eroarea
ArcSin[0.4Sin[0]]-ArcSin[0.8Sin[0+Pi/4]]	-0.60126	ArcSin[0.4Sin[1.0]]-ArcSin[0.8Sin[1.0+Pi/4]]	-0.554014
ArcSin[0.4Sin[**1**]]-ArcSin[0.8Sin[**1**+Pi/4]]	**-0.55401**	ArcSin[0.4Sin[1.1]]-ArcSin[0.8Sin[1.1+Pi/4]]	-0.499945
ArcSin[0.4Sin[2]]-ArcSin[0.8Sin[2+Pi/4]]	0.08953	ArcSin[0.4Sin[1.2]]-ArcSin[0.8Sin[1.2+Pi/4]]	-0.439536
ArcSin[0.4Sin[3]]-ArcSin[0.8Sin[3+Pi/4]]	0.55735	ArcSin[0.4Sin[1.3]]-ArcSin[0.8Sin[1.3+Pi/4]]	-0.37469
ArcSin[0.4Sin[4]]-ArcSin[0.8Sin[4+Pi/4]]	0.61620	ArcSin[0.4Sin[1.4]]-ArcSin[0.8Sin[1.4+Pi/4]]	-0.307159
ArcSin[0.4Sin[**5**]]-ArcSin[0.8Sin[**5**+Pi/4]]	**-0.00171**	ArcSin[0.4Sin[1.5]]-ArcSin[0.8Sin[1.5+Pi/4]]	-0.238442
ArcSin[0.4Sin[6]]-ArcSin[0.8Sin[6+Pi/4]]	-0.50730	ArcSin[0.4Sin[1.6]]-ArcSin[0.8Sin[1.6+Pi/4]]	-0.169749
ArcSin[0.4Sin[7]]-ArcSin[0.8Sin[7+Pi/4]]	-0.65825	ArcSin[0.4Sin[1.7]]-ArcSin[0.8Sin[1.7+Pi/4]]	-0.102012
ArcSin[0.4Sin[**8**]]-ArcSin[0.8Sin[**8**+Pi/4]]	**-0.09076**	ArcSin[0.4Sin[**1.8**]]-ArcSin[0.8Sin[**1.8**+Pi/4]]	**-0.0359235**
ArcSin[0.4Sin[9]]-ArcSin[0.8Sin[9+Pi/4]]	0.45177	ArcSin[0.4Sin[1.9]]-ArcSin[0.8Sin[1.9+Pi/4]]	0.0280326
Concluzia: **cifrele protonice** din domeniul (**0; 9**) sunt:**1**, **5** şi **8**		**Concluzia**: Pentru cifra protonică **1**, prima **cifră electronică** este **8**	
ArcSin[0.4Sin[1.84]]-ArcSin[0.8Sin[1.84+Pi/4]] ArcSin[0.4Sin[1.8**5**]]-ArcSin[0.8Sin[1.8**5**+Pi/4]] ArcSin[0.4Sin[1.86]]-ArcSin[0.8Sin[1.86+Pi/4]]	-0.01006 **-0.00365** 0.00272	ArcSin[0.4Sin[1.854]]-ArcSin[0.8Sin[1.854+Pi/4]] ArcSin[0.4Sin[1.85**5**]]-ArcSin[0.8Sin[1.85**5**+Pi/4]] ArcSin[0.4Sin[1.856]]-ArcSin[0.8Sin[1.856+Pi/4]]	-0.001098 **-0.000459** 0.000172
Concluzia: A 2-a **cifră electronică** este **5**		**Concluzia**: A 3-a **cifră electronică** este **5**	
ArcSin[0.4Sin[1.855**7**]]-ArcSin[0.8Sin[1.855**7**+Pi/4]] ArcSin[0.4Sin[1.8558]]-ArcSin[0.8Sin[1.8558+Pi/4]] ArcSin[0.4Sin[1.8559]]-ArcSin[0.8Sin[1.8559+Pi/4]]	0.000076894 **0.000013056** 0.000050778	ArcSin[0.4Sin[1.85571]]-ArcSin[0.8Sin[1.85571+Pi/4]] ArcSin[0.4Sin[1.8557**2**]]-ArcSin[0.8Sin[1.8557**2**+Pi/4]] ArcSin[0.4Sin[1.85573]]-ArcSin[0.8Sin[1.85573+Pi/4]]	-6.67303×10^{-6} $\mathbf{-2.89442\times10^{-7}}$ 6.09412×10^{-6}
Concluzia: A 4-a **cifră electronică** este **7**		**Concluzia**: A 5-a **cifră electronică** este **2**	

Graficele celor două strâmbe, luate în consideraţie, sunt prezentate în **figura 31.3,a**, în care sunt marcate trei din infinitatea punctelor lor de intersecţie şi continuarea acestor grafice ale strâmbelor sunt prezentate în **figura 31.3,b**, fără marcarea punctelor lor de intersecţie.

Metoda determinării succesive (**MS**) a cifrelor concomitente ale numărului soluţie a coordonatei **x** a primului punct de intersecţie $P_1(x_1, y_1)$ este prezentată în **tabelul 31.1**, până la determinarea celei de a 5-a cifre zecimale / electronice. Procesul, însă, poate fi continuat, oricât de mult, sau până la determinarea numărului exact, dacă acesta există, când eroare arezultă devine zero.

Metoda succesivă (**MS**) are la bază observaţia că metodele numerice caută să afle **numărul** (**atomul matematicii**) ca soluţie a unei probleme şi nu **cifrele concomitente** care-l compun şi care sunt **particulele elementare** ale **atomului număr**. Ele (**cifrele concomitente**) trebuie depistate, în primul rând, ca să se compună **atomul – număr** căutat ca soluţie.

Întroducând valoarea lui x_1 în expresia / ecuaţia celor două strâmbe, ordonatele lor $\mathbf{y}_1$ trebuie să fie aceleaşi, ceea ce şi sunt până la a 6-a zecimală.

A rezultat

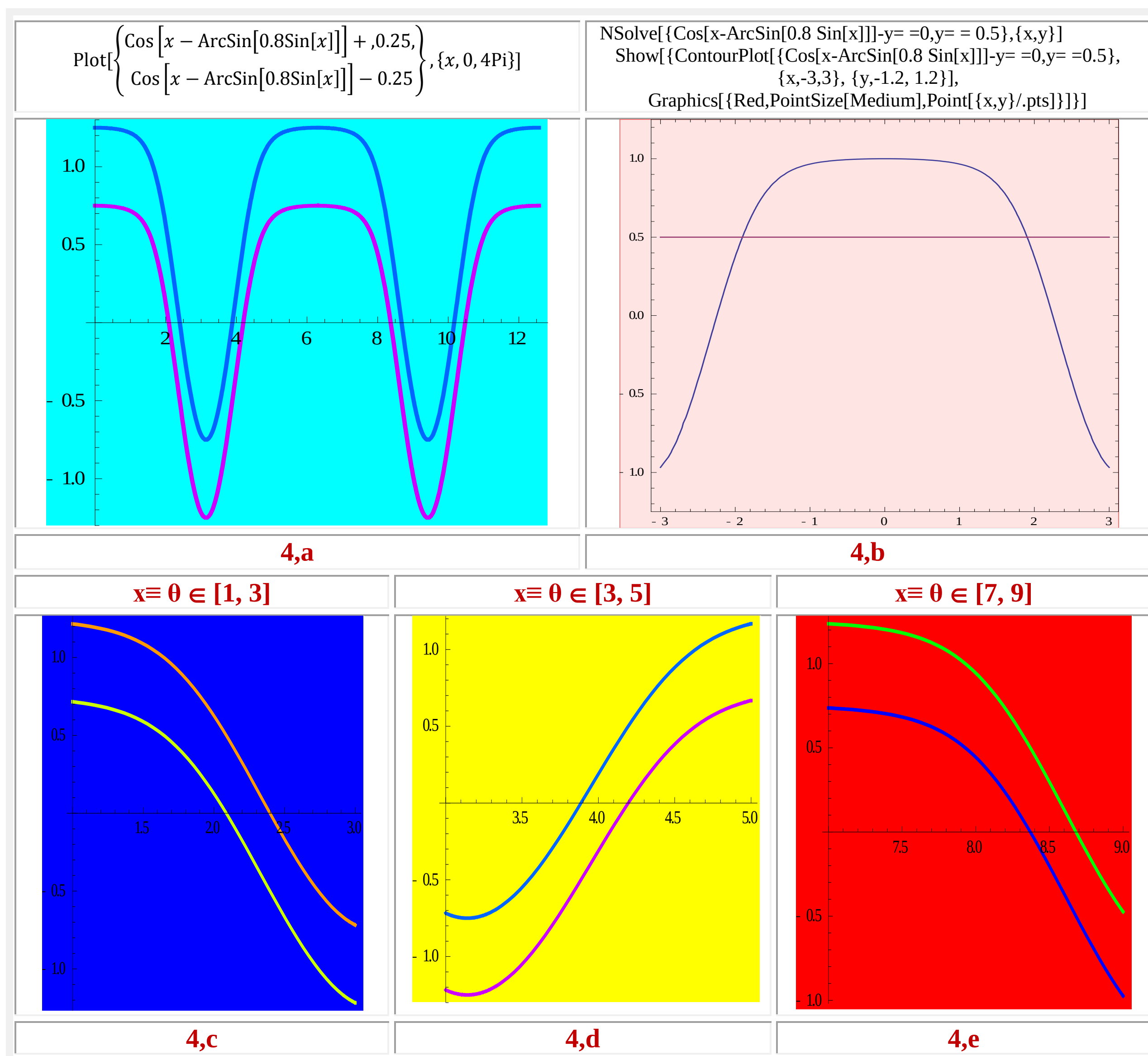
$$(31.9)\qquad \begin{cases} x = \mathbf{1,85572} \\ y = \begin{cases} 1{,}85572 - \mathrm{ArcSin}\big[0{,}4\mathrm{Sin}[1.85572]\big] = 1{,}461732 \\ 1{,}85572 - \mathrm{ArcSin}\big[0{,}8\mathrm{Sin}[1{,}85572 + \mathrm{Pi}/4]\big] = 1{,}461732 \end{cases} \end{cases}$$

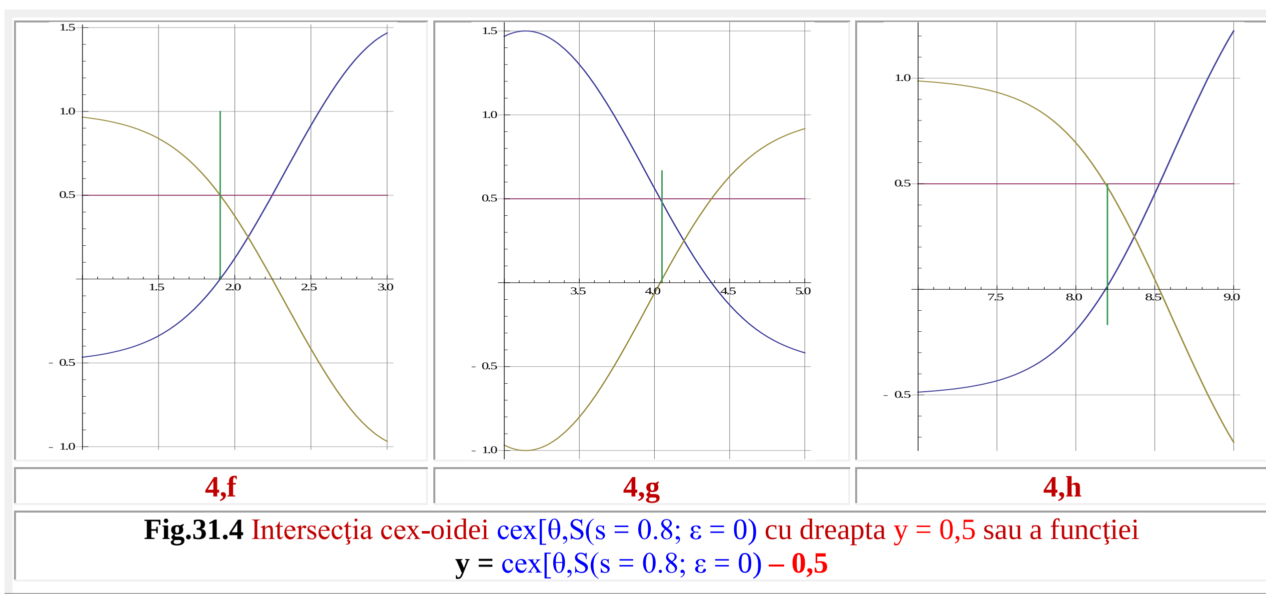
În mod asemănător pot fi determinate şi coordonatele celorlalte puncte de intersecţie ale celor două strâmbe, ca şi a oricăror alte strâmbe, de alte excentricităţi, ca şi a acestora cu drepte, ş.m.a..

31.4 INTERSECŢIA UNEI cex-OIDE DE EXCENTRU S(0,5; 0) CU DREAPTA y = 0,5

Această aplicaţie, oferă posibilitatea aprofundării metodei succesive (**MS**), de determinare succesivă a cifrelor **protonice** şi, apoi, a celor **electronice** consecutive ale unui **număr**, comparat / considerat cu un **atom**, ce constitue o soluţie a coordonatelor punctelor de intersecţie a două curbe plane.

Cex-oida şi dreapta, care se intersectează, sunt prezentate în **figura 314,a** ca şi funcţia y (x ≡ θ) care intersectează axa Ox într-o infinitate de puncte, dintre care, în domeniul **cifrelor neutronice 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9** intersecţia are loc înaintea cifrelor denumite **protonice 1, 4, 8,** cu detalii în **figura 31.4, c, d şi e.**





4,f | 4,g | 4,h

Fig.31.4 Intersecţia cex-oidei cex[θ,S(s = 0.8; ε = 0) cu dreapta y = 0,5 sau a funcţiei
y = cex[θ,S(s = 0.8; ε = 0) **– 0,5**

Intersecţia celor două curbe pretinde rezolvarea sistemului de ecuaţii

(31.10) $\begin{cases} y = cex[\theta, S(s,\varepsilon)\} \\ y = C\,, C \in [-1,\ 1\} \end{cases}$ sau, explicit $\begin{cases} y = \cos\,[\theta - \arcsin\,[s.\sin\,(\theta - \varepsilon)]] \\ y = C \end{cases}$

sau a ecuaţiilor cu o singură necunoscută

(31.11) Y = C – $cex[\theta, S(s,\varepsilon)$ (**Tabelul 31.2,a**) sau

(31.12) Y = $cex[\theta, S(s,\varepsilon)$ – C (**Tabelul 31.2,b**), pentru C = 0,5, s = 0,8 şi ε = 0.

În tabele este prezentată coordonata x de intersecţie, în conformitete cu cele două ecuatii (31.12) şi (31.13); coordonata y fiind evident y = C.

Au fost prezentate în paralel, coordonatele x ≡ θ ale punctului de intersecţie dintre Y(x) cu axa Ox în două ipostaze. În toate cazurile, “adevărul se află la mijloc”, adică între cele două cifre neutronice, din cele **9** considerate ca soluţie, care schimbă de semn, deoarece una este prea mare şi dă eroare pozitivă, iar cealaltă este prea mică şi dă eroare negativă. Dacă, totuşi, eroarea este nulă (Ə = Δy = 0), înseamnă că s-a depistat soluţia exactă şi procesul determinării numărului soluţie încetează.

Tabelul 2,a		**Tabelul 2,b**	
Ecuaţia	Eroarea	Ecuaţia	Eroarea
0.5-Cos[0-ArcSin[0.8 Sin[0]]]	-0.5	Cos[0-ArcSin[0.8 Sin[0]]]- 0.5	0.5
0.5-Cos[1-ArcSin[0.8 Sin[1]]	**-0.466002**	Cos[1-ArcSin[0.8 Sin[1]]]- 0.5	**0.466002**
0.5-Cos[2-ArcSin[0.8 Sin[2]]]	0.124091	Cos[2-ArcSin[0.8 Sin[2]]]- 0.5	-0.124091
0.5-Cos[3-ArcSin[0.8 Sin[3]]]	1.46773	Cos[3-ArcSin[0.8 Sin[3]]]- 0.5	-1.46773
0.5-Cos[4-ArcSin[0.8 Sin[4]]]	**0.562028**	Cos[4-ArcSin[0.8 Sin[4]]]- 0.5	**-0.562028**
0.5-Cos[5-ArcSin[0.8 Sin[5]]]	-0.417592	Cos[5-ArcSin[0.8 Sin[5]]]- 0.5	0.417592
0.5-Cos[6-ArcSin[0.8 Sin[6]]]	-0.498333	Cos[6-ArcSin[0.8 Sin[6]]]- 0.5	0.498333
0.5-Cos[7-ArcSin[0.8 Sin[7]]]	-0.486679	Cos[7-ArcSin[0.8 Sin[7]]]- 0.5	0.486679
0.5-Cos[8-ArcSin[0.8 Sin[8]]]	**-0.194136**	Cos[8-ArcSin[0.8 Sin[8]]]- 0.5	**0.194136**
0.5-Cos[9-ArcSin[0.8 Sin[9]]]	1.22431	Cos[9-ArcSin[0.8Sin[9]]]- 0.5	-1.22431
Concluzii: Cifrele protonice din domeniul 0 ... 9 sunt 1, 4, 8		**Concluzii**: Cifrele protonice din domeniul 0 ... 9 sunt 1, 4, 8	
0.5-Cos[1.9 - ArcSin[0.8 Sin[1.9]]]	**-0.00515988** 0.124091	Cos[1.9-ArcSin[0.8 Sin[1.9]]]- 0.5 Cos[2.0-ArcSin[0.8 Sin[2.0]]]- 0.5	**0.00515988** -0.124091

0.5-Cos[2.0−ArcSin[0.8 Sin[2.0]]]			
Concluzia: Prima cifră electronică este 9		**Concluzia:** Prima cifră electronică este 9	
0.5-Cos[1.90-ArcSin[0.8 Sin[1.90]]] 0.5-Cos[1.91-ArcSin[0.8 Sin[1.91]]]	**-0.00515988** 0.00697769	Cos[1.90-ArcSin[0.8 Sin[1.90]]]- 0.5 Cos[1.91-ArcSin[0.8 Sin[1.91]]]- 0.5	**0.00515988** -0.124091
Concluzia: A 2-a cifră electronică este **0**		**Concluzia:** A 2-a cifră electronică este **0**	
0.5-Cos[1.904-ArcSin[0.8 Sin[1.904]]] 0.5-Cos[1.905-ArcSin[0.8 Sin[1.905]]]	**-0.000326684** 0.000886171	Cos[1.904-ArcSin[0.8 Sin[1.904]]]- 0.5 Cos[1.905-ArcSin[0.8 Sin[1.905]]]- 0.5	**0.000326684** -0.000886171
Concluzia: A 3-a cifră electronică este **4**		**Concluzia:** A 3-a cifră electronică este **4**	
0.5-Cos[1.9042-ArcSin[0.8 Sin[1.9042]]] 0.5-Cos[1.9043-ArcSin[0.8 Sin[1.9043]]]	**-0.000326684** 0.000886171	Cos[1.9042-ArcSin[0.8 Sin[1.9042]]]- 0.5 Cos[1.9043-ArcSin[0.8 Sin[1.9043]]]- 0.5	**0.0000842587** -0.0000369813
Concluzia: A 4-a cifră electronică este **2**		**Concluzia:** A 4-a cifră electronică este **2**	
0.5-Cos[1.90426-ArcSin[0.8 Sin[1.90426]]] 0.5-Cos[1.90427-ArcSin[0.8 Sin[1.90427]]]	**-0.0000842587** 0.0000369813	Cos[1.90426-ArcSin[0.8 Sin[1.90426]]]- 0.5 Cos[1.90427-ArcSin[0.8 Sin[1.90427]]]- 0.5	**0.0000115169** -6.07374×10^{-7}
Concluzia: A 5-a cifră electronică este **6**		**Concluzia:** A 5-a cifră electronică este **6**	
0.5-Cos[1.904269-ArcSin[0.8 Sin[1.904269]]] 0.5-Cos[2.004270-ArcSin[0.8 Sin[2.004270]]]		Cos[1.904269-ArcSin[0.8 Sin[1.904269]]]- 0.5 Cos[1.904270-ArcSin[0.8 Sin[1.904270]]]- 0.5	**6.05062×10^{-7}** -6.07374×10^{-7}
Concluzia: A 6-a cifră electronică este **9**		**Concluzia:** A 6-a cifră electronică este **9**	
A 7-a este **4**, a 8-a este **0** Ş. A. M. D.			
Verificare: 0.5- Cos[1.90426940-ArcSin[0.8 Sin[1.90426940]]] = $1.096857571436515\times10^{-8}$			

Dacă se caută o soluţie pe axa Ox, cum este cazul considerat ca exemplu, trebuie să ne apropiem de numărul exact, spre care tindem, şi nu ştim dacă-l vom atinge / afla, din stânga spre dreapta, adică în sensul pozitiv al axei Ox, deoarece **MS** determină succesiv cifrele care ne apropie de acest număr, începând cu cifrele nucleului (**întregi**), denumite **cifre protonice** şi **adăugând succesiv cifrele electronice** (**zecimale**) la atomul / numărul căutat ca soluţie.

Prima ipostază este când curba Y(x) intersectează axa Ox, trecând din cadranul I în cadranul IV, caz în care, diferenţa (eroarea) Ə = Δy < 0 la schimbarea semnelor erorilor şi **cifra neutronică** (considerată drept particulă elementară a atomului soluţie) se alege cea care are semnul negativ (Fig.**4,c** şi tabelelul **2,a**) şi care, deci este în stânga **punctului – soluţie**.

A doua ipostază este cazul în care, curba traversează axa Ox din cadranul IV în cadranul I, când Ə = Δy > 0 , (**Fig.31.4,f** şi **tabelelul 31.2,b**) şi se alege cifra care corespunde semnului pozitiv al celor două erori limitrofe, de semne diferite, deoarece numai aşa ne situăm tot la stânga valorii / numărului (**atomic**) căutat ca soluţie a unei probleme; în cazul de faţa, a abscisei puntului de intersecţie x.

Se observă că, pe măsura determinării succesive a cifrelor numărului-soluţie, erorile prezentate în tabele, arată şi gradul de precizie cu care ne apropiem de numărul soluţie exactă.

Aşa cum s-a arătat în lucrarea "Matematica atomică" → (www.cartiaz.ro), procesul determinării soluţiei poate fi mult scurtat, dacă, o parte din cifrele care alcătuesc numărul-soluţie / **atomul** matematic sunt determinate prin reprezentarea graficele curbelor în domenii din ce în ce mai reduse în jurul soluţiei.

Aşa cum rezultă din **figura 31.4,b**, programul **Mathematica 8** a lui **Stephan Wolfram**, considerat unul dintre cele mai evoluate programe comerciale de matematică computaţională, n-a putut soluţiona acestă problemă, nici ca intersecţie de curbe şi nici ca rezolvare numerică a ecuaţiei neliniare cu o singură necunoscută.

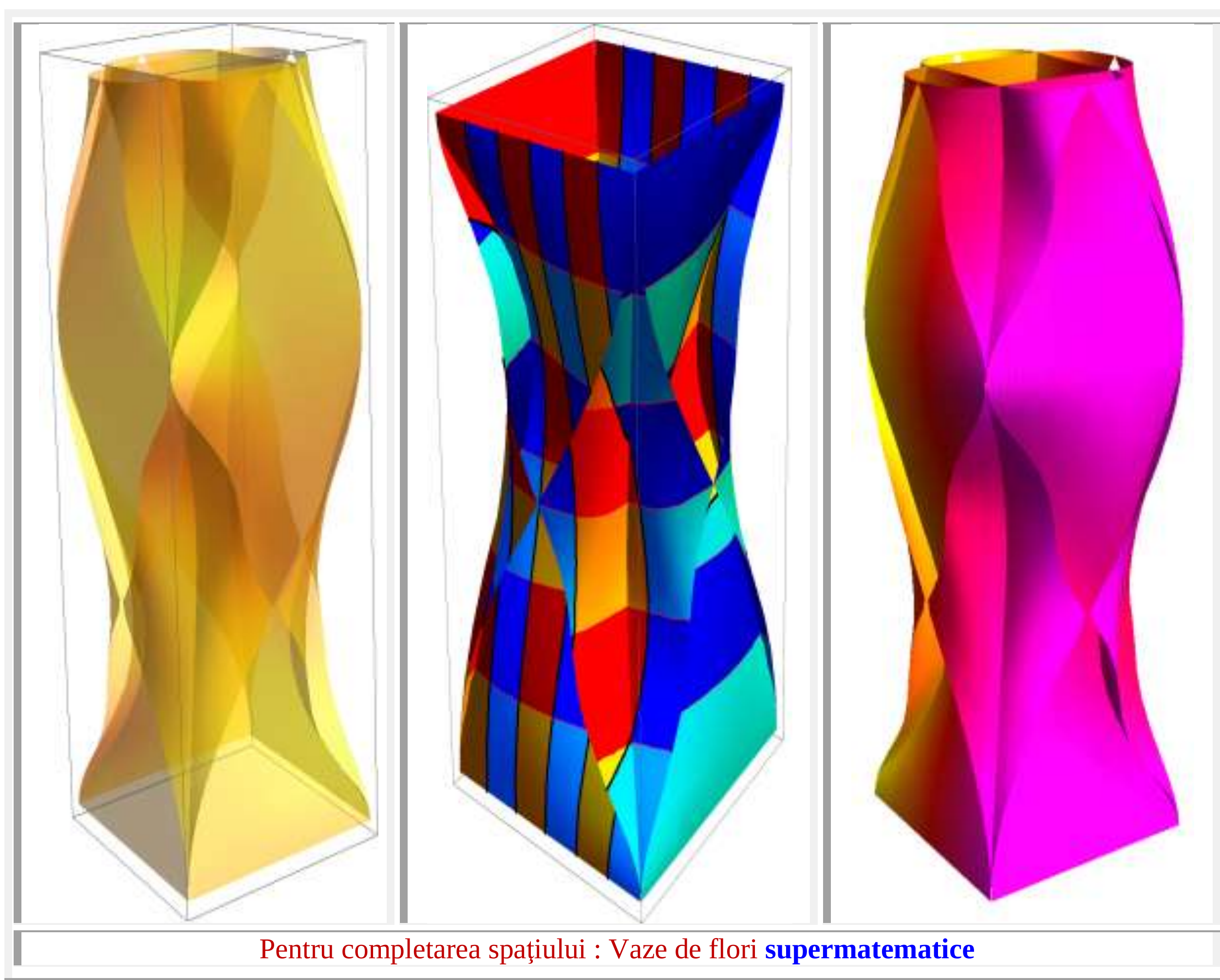
Ceea ce nu însemna că nu există şi alte programe de matematică computaţională, capabile sa rezolve cu succes această problemă, cum sunt cele utilizate de ilustrul programator american de origine ramână

Dr. Ing **Dan Micşa (***www.dmicsa.com, dan@dmicsa.com*), absolvent al **Universităţii "POLITEHNICA"** din Timişoara. El a fost acela care a realizat **primele programe Realan 1** de vizualizare a **funţiilor supermatematice circulare excentrice** (**FSM-CE**) fără scrierea funcţii circulare centrice **cos, sin**, ci direct **cex**, **sex** ş.a.m.d., în cadrul proiectului său de diploma la absolvirea secţiei de **TCM.**

Dar, existenţa acestor programe de matematică computaţională superperformante, nu ştirbeşte cu nimic din importanţa apariţiei unor **metode matematice eminamente noi**, ţinând cont de faptul că matematica actuală operează cu **numere** şi nu cu **cifrele** care-l compun.

Tocmai pentru a sublinia şi a scoate în evidenţă importanţa **cifrelor**, ca **particule elementare** ale **numerelor**, care, de la caz la caz, devin **cifre protonice** sau **cifre electronice**, s-a recurs la o comparaţie / alăturare a **matematicii** cu / de **fizica** particulelor elementare, de **Fizica Atomică**, denumind aceast prim pas, un pas mic pentru matematică, dar realizat într-un nou domeniu, domeniul **Matematicii Atomice**.

Este bine de reţinut, în concluzie, că **numerele** sunt "**atomii matematicii** " şi cifrele "**particulele sale elementare**"



Pentru completarea spaţiului : Vaze de flori **supermatematice**

Motto:" Nu râdeţi de **zero**. El e **împăratul** numerelor negative**"** **Valeriu Butulescu** din *Stepa memoriei*
*Şi separă protonii, **cifrele supraunitare**, de electroni, **cifrele subunitare**, ale **atomului –număr**.*
Autorul

Capitolul 32

REZOLVAREA ECUAŢIILOR DE GRAD SUPERIOR CU COEFICEINŢI OARECARE

32.1.INTRODUCERE

Este incredibil că o metodă extrem de simplă şi facil de aplicat, de soluţionare a ecuaţiilor de grad superior, oricât de ridicat, cu coeficienţi oarecare, care permite ***determinarea sucesivă a cifrelor care compun numerele soluţii ale oricărei ecuaţiei***, a rămas fără ecou în rândul matematicienilor, ca şi al celorlalţi utilizatori de matematică, unii chiar consumatori care, zic ei, "mâncă matematică pe paine". E vorba de unii programatori. Unul prezentat în continuare.

Dacă peste 300 (**trei sute ! !**) de ani, nimeni n-a observat că marele **EULER** (Leonhard), la definirea funcţiilor trigonometrice, ca funcţii circulare, pe cercul unitate, fost cerc trigonometric, a considerat un caz cu totul particular în care originea **O(0, 0),** centrul cercului C(0, 0) şi polul P(0, 0) erau de-a valma suprapuse în acelaşi loc în planul cercului, din care cauză matematica a rămas, atâta timp, ***enorm de sărăcită***, cu ***un singur rând de entităţi***.

În privinţa ***numerelor*** situaţia este cu mult mai veche şi cu mult mai tristă. **Matematica centrică** (**MC**) caută **numere** şi nu **cifrele** care-l compun !. Şi după ce-l găsesc pe celebrul **π** (Pi), de exemplu, constată cu stupoare că **π** nu-i un număr, ci valoarea minimă a unei funcţii **Π**(**s**) (Pi mare) în punctul de abscisă sau pentru **s = 0** (V. **Mircea Eugen Şelariu** "**DEZLEGAREA MISTERULUI NUMĂRULUI π** " **www.** cartiaz. ro).

A trebuit să vină un român să observe că prin simpla deplasare a polului **P** din centrul **O(0, 0)** şi devenit excentrul S(s, ε) se pot obţine o infinitate de alte funcţii cos, sin, tan, ş.a precum şi o imensitate de alte funcţii noi (aex, bex cex, dex, ... – deocamdată lipsesc -…rex, sex, tex, texv, ş.m.a.) ca şi multe alte entităţi matematice noi.

Noua matematică, cu o infinitate de entităţi, a fost denumită **matematica excentrică** (**ME**), datorită deplasării din centru a polului şi denumit **excentru S(s, ε),** iar cealaltă, ordinară, cu câte o singură entitate, a fost denumită **matematică centrică** (**MC**); împreună, adică prin reuniunea lor, dând naştere **supermatematicii** (**SM**). Cuvânt devenit "rău famat" în rândul multor cârcotaşi, sau fiind un produs 100 % românesc să fie posibile şi alte raţiuni pentru care **supermatematica** este ferită de ochii lumii ?

După peste 40 de ani ([1] anul 1972 → prima <u>*publicare*</u> în 1978) de la descoperirea sa sau, mai precis, **inventarea** supermatematicii, comparând discrepanţa dintre importanţa pentru ştiinţă a noii matematici, numită de specialiştii de vază "***matematica mileniului III***" şi ecoul ei în rândul matematicienilor, autorul este îndreptăţit să creadă în teoria conspiraţiei. ***CUI (QUID) PRODEST ?***

Iată un exemplu de subliniere a importanţei **SM** pentru dezvolatrea altor stiinţe de vârf:

"……..

Spre exemplu teoria relativitatii restrinse se poate obţine aplicand transformarile lui **Lorentz** între două sisteme de referinţă inerţiale şi considerand viteza luminii constanta, se obţine astfel ecuaţia energiei.

Mai mult decât atât, teoria relativităţii se poate formaliza matematic în mod simplu şi direct folosind « **supermatematica** ». Denumirea şi conceptul de **supermatematică** este familiar specialiştilor, ea este în fapt o familie mult lărgită de funcţii trigonometrice, obţinute prin acordarea gradelor de libertate posibile în sistemul trigonometric.

Supermatematica a fost fondată şi dezvoltată de Domnul Profesor Şelariu din centrul Universitar Timişoara. Dumnealui a activat în cadrul Facultăţii de Mecanică, eu am avut contact direct cu dansul la Institutul de Electrochimie şi Materie Condensată din Timişoara unde lucra cu o jumatate de normă, fiind la pensie. În cadrul întrevederii mi-a descris funcţiile **supermatematice** pe subfamilii şi pe fiecare în particular.

Un bun matematcican poate ajunge la modele simle şi directe numai după un îndelug şi atent studiu folosind mai mult în mod extensiv decît intensiv resursle pe care le oferă matematica.

…………………………….” Nebăl Ionuţ din articolul **“**Cateva impresii despre lumea în care trăim “ de pe http://desprelumea.blogspot.ro/

Să fie aceeaşi situaţie şi cu “**Matematica atomică**“ ? Dacă matematica actuală (**CENTRICĂ**) operează doar cu **numere**, pe care le caută cu asiduitate şi care sunt atomii **MC**, matematicienii n-au înţels, încă, faptul că ***orice număr este alcătuit din cifre*** şi că **acestea**, ca şi succesiunea lor în număr, **trebuie determinate** şi nu direct numărul. Altfel spus, spre deosebire de Fizica, Matematica n-a întrat încă, în era atomică !

Cifrele sunt ***particulele elementare ale numărului,*** adică, ale numărului ridicat la rangul de atom pentru a şoca şi, totodată, pentru a atrage atenţia asupra Fizicii Atomice care a depaşit stadiul în care se complace matematica, oporită / limitată la număr !!. Poate aşa…

Dar, reacţia a fost chiar inversă, de respingere… ***CUI (QUID) PRODEST*** *?*

Această metodă poate fi desluşita în articolele **Mircea Eugen Şelariu**: 1) “**CIFRELE, PARTICULELE ELEMENTARE ALE MATEMATICII**”, pag.1-a, 2) “**INTERSECŢII ÎN PLAN**” pag.4-a şi 3) “**MATEMATICA ATOMICA. METODA DETERMINARII SUCCESIVE A CIFRELOR (CONSTITUTIVE) CONSECUTIVE ALE UNUI NUMAR** ”, pag. a 4-a, toate de pe www.cartiaz.ro.

De ce scriu acest lucru ? Pentru că am căutat pe internet rezolvarea ecuaţiilor de grad superior, ca şi a celor polinomiale şi am dat peste un frumos curs de ”**Ecuaţii polinomiale**” la adresa

http://www.youtube.com/watch?v=AIYKHBXfk_w şi unul interesant, clasic, curs ţinut de un ilustru pedagog, iar, la adresa următoare, am dat peste o metodă computaţională nouă, **dar greşită**, aşa cum se va demonstar în continuare, de rezolvare a unei ecuaţii de gradul 9:

http://forum.computergames.ro/93-stiinta/639915-rezolvarea-ecuatiilor-de-grad-superior.html



REDĂM :

”Am bagat si eu niste coeficienti, asa din burta, si flosind metoda lui **Newton** am rulat un program facut de mine in limbaj **QBASIC 2.2** pe un calculator de tip palmtop - **HP 200LX** (nu se (m)ai fabrica din 1996) si care dupa vreo cateva zeci de iteratii mi-a dat rezultatul .

Surprinzator este ca pentru o alternanta a semnelor coeficientilor (+, -, +, -, ...-), exista doar o singura radacina reala adica ecuatia are o singura solutie. La fel am "rezolvat-o" si cu o aplicatie de tip "solver" a calculatorului de tip CPB - **HP 50g** .

Uite ecuatia polinomiala de gradul 9 cu coeficientii aleatorii (ar fi interesant de stiut coeficientii ecuaţiei tatălui lui **SM** ca sa vedem rezultatul):

0,25*X^9-1,98*X^8+3,17*X^7-17*X^6+97*X^5-127*X^4++357*X^3789*X^2+1027*X-3577=0

Solutia este aflata cu HP 50g este **X=6,28913206734”**

32.2. METODA SUCCESIVĂ (MS-MEŞ) DE DETERMINARE A CIFRELOR CONSECUTIVE ALE UNUI NUMĂR

32.2.1 DETERMINAREA NUMĂRULUI DE SOLUŢII ŞI A DOMENIULUI LOR

Şi acum, să aplicăm "**Metoda succesivă**" (**MS**) ***de determinare a cifrelor consecutive ale unui numărului, soluţie*** a ecuaţie precedente F(x) = 0.

Aşa cum orice drum începe cu un prim pas, tot aşa, orice număr începe / are o prima cifră.

Determinarea ei este facilă, deoarece există doar **10 cifre** (**0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**), pe care le vom considera, succesiv, ca soluţii ale ecuaţiei, prin înlocuirea lui **X,** în ecuaţie, cu cifrele pe care le considerăm **neutronice**, deoarece nu le cunoaştem, încă, semnul / sarcina, aşa cum se poate constata în **tabelul 32.1**.

Rădacinile ecuaţiei F(X) = 0 apar acolo unde funcţia F(X) intersectează axa OX, adică unde F(X) trece de la valori /erori negative la cele pozitive, adică din **cadranul IV** în **cadranul I,** cum este cazul rădăcinilor / soluţiilor $\mathbf{X_1}$ şi $\mathbf{X_3}$ sau invers, din I în IV, de la eroare în plus (+) la eroare in minus (-) cum este cazul radacinii X_2 (**Tab.32,1**).

În prealabil se vizionează, prin tatonări, graficul grob al funcţiei F(x), prezentat în **figura 32.1,a.** Antamarea are loc pentru domeniul X ∈ [-10, 10] şi are drept scop să verifice dacă, nu cumva, aceleaşi valor $X_{1,2,3}$ pot fi şi negative. Se observă (**Fig.32.1,a**) că nu, astfel că ele sunt strict pozitive şi, în consecinţă, vor fi denumite **cifre protonice** sau cifrele părţii intregi ale **numărului pozitiv**.

Apoi, domeniul se restrânge (**Fig.32.1,b**) la X ∈ [0, 7], constatându-se, anterior, că pentru X < 0 nu există soluţii. Restrângerea domeniului continuă până când intersecţia cu axa OX, locul în care F(X) intersectează axa OX, mai poate fi lizibil, pentru determinarea mai precisă a domeniilor soluţiilor, (**Fig.32.1,c… Fig.32.1,d**).

Tabelul 32.1 Determinarea zonelor cu soluţii / rădăcini ale ecuaţiei şi, implicit, a numărului lor

CIFRA	E C U A Ţ I A	VALOAREA /EROAREA
0	0.25***0**^9-1.98*0^8+3.17*0^7-17*0^6+97*0^5-127*0^4+357*0^3-789*0^2+1027***0**-3577	-3577.
1	0.25***1**^9-1.98*1^8+3.17*1^7-17*1^6+97*1^5-127*1^4+357*1^3-789*1^2+1027***1**-3577	-3027.56
2	0.25***2**^9-1.98*2^8+3.17*2^7-17*2^6+97*2^5-127*2^4+357*2^3-789*2^2+1027***2**-3577	-1812.12
PRIMA RĂDĂCINĂ $X_1 \in (2, 3)$ ↗		
3	0.25***3**^9-1.98*3^8+3.17*3^7-17*3^6+97*3^5-127*3^4+357*3^3-789*3^2+1027***3**-3577	1795.76
A DOUA RĂDĂCINĂ $X_2 \in (3, 4)$ ↘		
4	0.25***4**^9-1.98*4^8+3.17*4^7-17*4^6+97*4^5-127*4^4+357*4^3-789*4^2+1027***4**-3577	-4349.
5	0.25***5**^9-1.98*5^8+3.17*5^7-17*5^6+97*5^5-127*5^4+357*5^3-789*5^2+1027***5**-3577	-52917.
6	0.25***6**^9-1.98*6^8+3.17*6^7-17*6^6+97*6^5-127*6^4+357*6^3-789*6^2+1027***6**-3577	-70997.6
A TREIA RĂDĂCINĂ $X_3 \in (6, 7)$ ↗		
7	0.25***7**^9-1.98*7^8+3.17*7^7-17*7^6+97*7^5-127*7^4+357*7^3-789*7^2+1027***7**-3577	697448.
8	0.25***8**^9-1.98*8^8+3.17*8^7-17*8^6+97*8^5-127*8^4+357*8^3-789*8^2+1027***8**-357	5.3223×10^6
9	0.25***9**^9-1.98*9^8+3.17*9^7-17*9^6+97*9^5-127*9^4+357*9^3-789*9^2+1027***9**-3577	2.28466×10^7
CONCLUZIA: Există trei radacini / soluţii ale ecuaţiei		

Acum se poate observa că ecuaţia, în domeniul **X ∈ [0, 7],** are mai multe soluţii decât a prevăzut / găsit sau, mai precis, n-a găsit / prevăzut programatorul-rezolvator.

Rolul determinării grafice a domeniului soluţiilor, a locurilor / punctelor în care graficul F(X) intersectează axa X este acela de-a ne apropia mai rapid şi mai facil de soluţiile exacte, prin reducerea paşilor, altfel necesari, aplicării **MS - MEŞ analitice**.

Ca urmare se observă că există şi alte două soluţii, în afara aceleia indicate de / pe web site-ul amintit şi că **X = 6,28913206734** poate fi a treia rădăcină / soluţie **X_3 ∈ (6, 7).**

32.2.2. DETERMINAREA PRIMEI SOLUŢII / RĂDĂCINI X_1 A ECUAŢIEI

Prin restrângerea domeniului, de la **X ∈ [0, 7]**, s-a determinat, printr-o observaţie atentă, că prima soluţie / rădăcină este în domeniul **X ∈ (2,533269; 2,533270).**

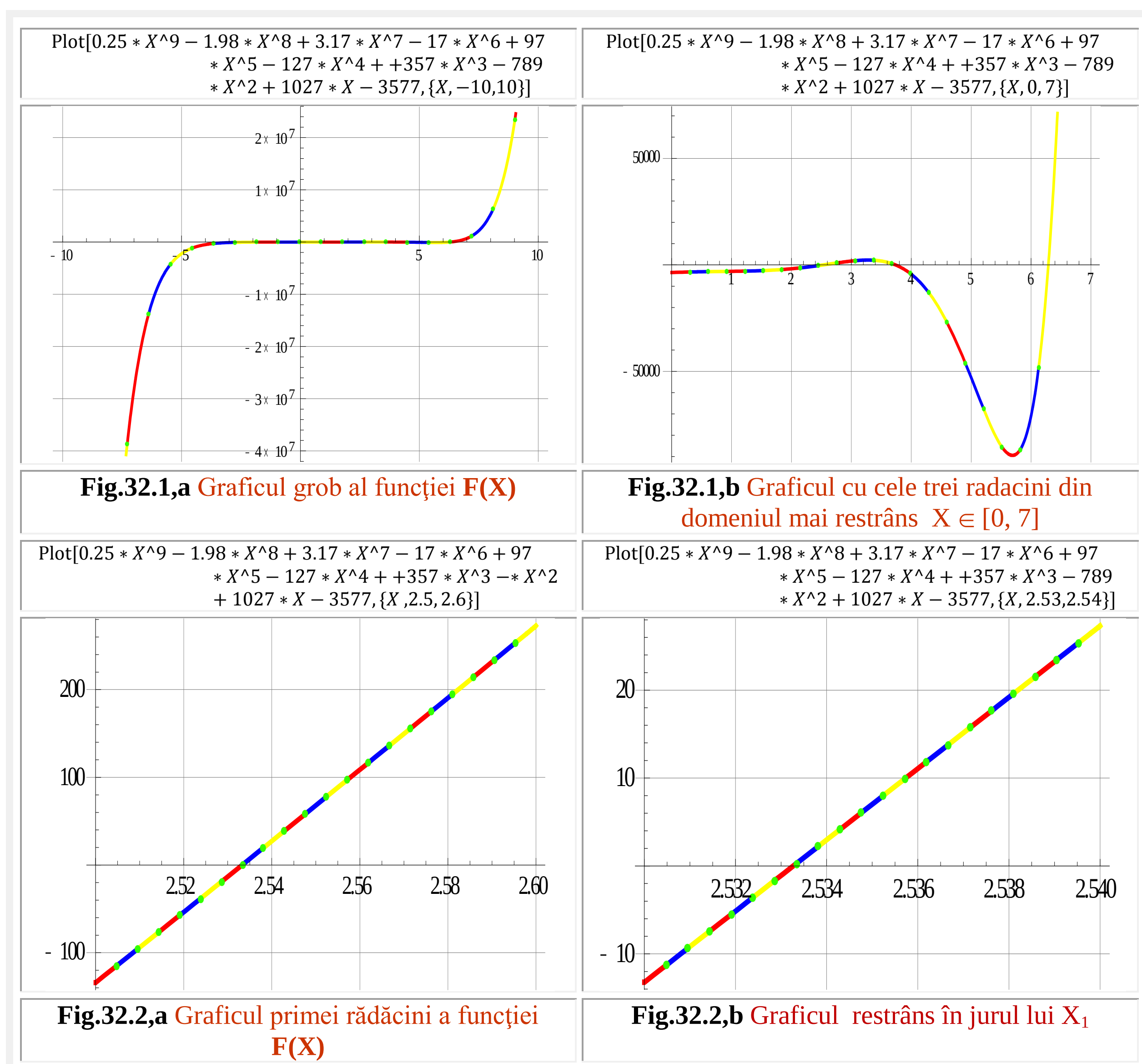
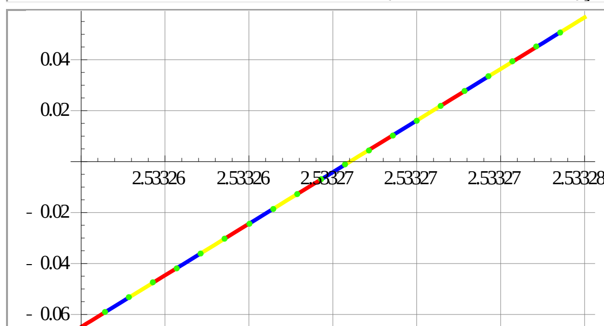
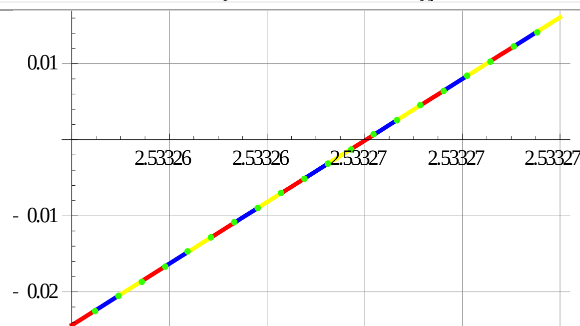


Fig.32.1,a Graficul grob al funcţiei **F(X)**

Fig.32.1,b Graficul cu cele trei radacini din domeniul mai restrâns X ∈ [0, 7]

Fig.32.2,a Graficul primei rădăcini a funcţiei **F(X)**

Fig.32.2,b Graficul restrâns în jurul lui X_1

Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + +357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ −3577, {X, 2.533, 2.5335}]	Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + +357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {X, 2.53326, 2.53327}]
	
Fig.32.2,c Graficul şi mai restrâns în jurul primei radăcinii	**Fig.32.2,d** Graficul restrâns la limita lizibilă în jurul primei radăcinii
Concluzia : Prima rădacină este cuprinsă în intervalul **X ∈ [2,533269; 2,533270]**	

Pentru derminarea în continuare a cifrelor zecimale (0, 1, 2, …, 9) – numite electronice, se trece la aplicarea metodei succesive analitice: Se scrie de 10 ori ecuaţia, aşa cum s-a facut în **tabelul 32.1** şi, în prima, se înlocuieşte X cu valoarea **X = 2,5332690,** în a adoua cu **X =2,5332701,** în a treia cu a treia cifră posibilă din cele 10 existente, adică **X =2,**5332702 ş.a.m.d. şi în ultima ecuaţie cu **X =2,5332799**, aşa cum rezultă din **tabelul 32.2**, în care s-au trecut doar zonele de interes.

Tabelul 32.2 Determinarea primei soluţii / rădăcini X_1 a ecuaţiei

	Ecuaţia 0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + 357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577	**Valoarea / Erorarea**
8	**0.25 ∗ 2.5332698^9 − 1.98 ∗ 2.5332698^8 + 3.17 ∗ 2.5332698^7 − 17 ∗ 2.53327698^6 +97 ∗ 2.5332698^5 − 127 ∗ 2.5332698^4 + 357 ∗ 2.5332698^3 − 789 ∗ 2.5332698^2 + 1027 ∗ 2.5332698 − 3577**	−0.061107842571800575
9	0.25*2.5332699^9-1.98*2.5332699^8+3.17*2.5332699^7-17*2.53327699^6+97*2.5332699^5-127*2.5332699^4+357*2.5332699^3-789*2.5332699^2+1027*2.5332699-3577	−0.059744895095718675
Aici este domeniul soluţiei X_1 → următoarea cifră exactă,a 8 - a, este 9		
0	0.25*2.5332700^9-1.98*2.5332700^8+3.17*2.5332700^7-17*2.5332700^6+97*2.5332700^5-127*2.5332700^4+357*2.5332700^3-789*2.5332700^2+1027*2.5332700-3577	+ 0.016109877235976455
1	0.25 ∗ 2.5332701^9 − 1.98 ∗ 2.5332701^8 + 3.17 ∗ 2.5332701^7 − 17 ∗ 2.5332701^6 + 97 ∗ 2.5332701^5 − 127 ∗ 2.5332701^4 + 357 ∗ 2.5332701^3 − 789 ∗ 2.5332701^2 + 1027 ∗ 2.5332700 − 3577	+ 0.016515081099896634
Cifrele consecutive determinate grafic au fost 2.533269 A 8-a cifră a numărului X_1 şi a 7-a cifră electronică (zecimală), determinată prin **MS** este **9 →** X_1 = **2.5332699** … … ..		

Din **tabelul 32.2** rezultă că prima cifră determinată analitic şi a 8-a cifra exactă a soluţiei X_1, pe lângă celelalte 7 (**2.533269**), dintre care una **protonică** (2) şi **6 electronice** (.**533269**) fiind subunitare, determinate grafic, dar care puteau la fel de bine să fie determinate tot analitic, este **9.**

În continuare se trece la determinarea celei de a **9** cifre a numărului X_1 şi a celei de a **8**-a cifre **electronice (zecimale),** care se face conform aceluiaşi tipic: în faţa ultimei coloane de cife **0 ...9 ,** din valorile lui X_1, din toate cele 10 ecuaţii, se trece pe toate coloanele X cifra anterior determinată ca soluţie, adică, cifra **9** (**Tab.32.3**). Rezultă că între **2** şi 3 se schimbă semnul valorii / erorii, deci următoarea cifră electronică, ca o componentă a soluţiei exacte a lui X_1 este **2**.

Tabelul 3 Determinarea celei de **a 8-a** cifre zecimale **(electronică)** a lui X_1		
CI - FRA	**E C U A Ţ I A**	**Valoarea / Eroarea**
0	0.25 ∗ 2.53326990^9 − 1.98 ∗ 2.53326990^8 + 3.17 ∗ 0^7 − 17 ∗ 2.53326990^6 + 97 ∗ 0^5 − 127 ∗ 2.53326990^4 + 357 ∗ 2.53326990^3 − 789 ∗ 2.53326990^2 + 1027 ∗ 0 − 3577	−14844.029449164675
1	0.25 ∗ 2.53326991^9 − 1.98 ∗ 2.53326991^8 + 3.17 ∗ 1^7 − 17 ∗ 2.53326991^6 + 97 ∗ 1^5 − 127 ∗ 2.53326991^4 + 357 ∗ 2.53326991^3 − 789 ∗ 2.53326991^2 + 1027 ∗ 1 − 3577	−13716.859677302495
2	0.25 ∗ 2.53326992^9 − 1.98 ∗ 2.53326992^8 + 3.17 ∗ 2^7 − 17 ∗ 2.53326992^6 + 97 ∗ 2^5 − 127 ∗ 2.53326992^4 + 357 ∗ 2.53326992^3 − 789 ∗ 2.53326992^2 + 1027 ∗ 2 − 3577	− 9280.269905440326
A I C I E S T E S O L U Ţ I A → următoarea cifră exactă,a 9-a, este 2		
3	0.25 ∗ 2.53326993^9 − 1.98 ∗ 2.53326993^8 + 3.17 ∗ 3^7 − 17 ∗ 2.53326993^6 + 97 ∗ 3^5 − 127 ∗ 2.53326993^4 + 357 ∗ 2.53326993^3 − 789 ∗ 2.53326993^2 + 1027 ∗ 3 − 3577	+ 18740.75986642184
4	0.25 ∗ 2.53326994^9 − 1.98 ∗ 2.53326994^8 + 3.17 ∗ 4^7 − 17 ∗ 2.53326994^6 + 97 ∗ 4^5 − 127 ∗ 2.53326994^4 + 357 ∗ 2.53326994^3 − 789 ∗ 2.53326994^2 + 1027 ∗ 4 − 3577	140529.249638284
5	0.25 ∗ 2.53326995^9 − 1.98 ∗ 2.53326995^8 + 3.17 ∗ 5^7 − 17 ∗ 2.53326995^6 + 97 ∗ 5^5 − 127 ∗ 2.53326995^4 + 357 ∗ 2.53326995^3 − 789 ∗ 2.53326995^2 + 1027 ∗ 5 − 3577	541072.2194101461
6	0.25 ∗ 2.53326996^9 − 1.98 ∗ 2.53326996^8 + 3.17 ∗ 6^7 − 17 ∗ 2.53326996^6 + 97 ∗ 6^5 − 127 ∗ 2.53326996^4 + 357 ∗ 2.53326996^3 − 789 ∗ 2.53326996^2 + 1027 ∗ 6 − 3577	1632987.089182008
7	0.25 ∗ 2.53326997^9 − 1.98 ∗ 2.53326997^8 + 3.17 ∗ 7^7 − 17 ∗ 2.53326997^6 + 97 ∗ 7^5 − 127 ∗ 2.53326997^4 + 357 ∗ 2.53326997^3 − 789 ∗ 2.53326997^2 + 1027 ∗ 7 − 3577	4233255.278953871
8	0.25 ∗ 2.53326998^9 − 1.98 ∗ 2.53326998^8 + 3.17 ∗ 8^7 − 17 ∗ 2.53326998^6 + 97 ∗ 8^5 − 127 ∗ 2.53326998^4 + 357 ∗ 2.53326998^3 − 789 ∗ 2.53326998^2 + 1027 ∗ 8 − 3577	9819839.808725732
9	0.25 ∗ 2.53326999^9 − 1.98 ∗ 2.53326999^8 + 3.17 ∗ 9^7 − 17 ∗ 2.53326999^6 + 97 ∗ 9^5 − 127 ∗ 2.53326999^4 + 357 ∗ 2.53326999^3 − 789 ∗ 2.53326999^2 + 1027 ∗ 9 − 3577	$2.088416369849759 \times 10^7$
A 8-a cifră electronică (zecimală), determinată prin **MS** este **2** → X_1 = **2.53326992**		

La fel se va proceda pentru obţinerea exactă, în continuare, a celei de a **9-a** cifre electronice, a celei de a **10** - a ş.a.m.d.

Dacă una din cele **10** erori sau valori calculate ale lui F(X) cu X_1, corespunzătoare celor **10 cifre,** adăugate la valoarea anterioară a lui X_1, dă valoare / eroare nulă, (ecuaţia este satisfăcută) atunci cifra respectivă, care dă această valoare, este ultima cifră exactă posibilă şi care dă valoarea exactă a rădacinii / soluţiei şi procedeaul, evident, nu mai continuă din lipsă de sens.

Dacă, din prima iteraţie, avem norocul ca pentru una din cifrele 0 … 9 să se obţină acest lucru (eroare / valoare nulă), atunci, cifra respectivă **singură** este soluţie exactă întregă a ecuaţiei. Ceea ce nu corespunde cazului de faţă.

Pentru a **9-a** cifră exactă a soluţiei dăm tabelul în jurul cifrelor electronice **2** şi **3** soluţie (**Tab.32.4**), parţial redus şi întrerupt în domeniul de schimbare a semnului funcţiei **F(x),** în care se găseşte următoarea cifă exactă a soluţiei. Şi intrerupem căutarea celorlalte cifre exacte ale primei rădăcini şi trecem la a 2-a rădăcină / soluţie a ecuaţiei, deoarece restul este o repetare şi o rutină.

CI - FRA	**Tabelul 32.4** Determinarea celei de **a 9-a** cifre zecimale **(electronice)** **E C U A Ţ I A cu X_1**	**VALOAREA / EROAREA**
0	0.25*2.533269920^9-1.98*2.533269920^8+3.17*0^7-17*2.533269920^6+97*0^5-127*2.533269920^4+357*2.533269920^3-789*2.533269920^2+1027*0-3577	-14844.
1	0.25*2.533269921^9-1.98*2.533269921^8+3.17*1^7-17*2.533269921^6+97*1^5-127*2.533269921^4+357*2.533269921^3-789*2.533269921^2+1027*1-3577	-13716.9
2	0.25*2.533269922^9-1.98*2.533269922^8+3.17*2^7-17*2.533269922^6+97*2^5-127*2.533269922^4+357*2.533269922^3-789*2.533269922^2+1027*2-3577	**−9280.27 < 0**
A I C I E S T E S O L U Ţ I A → următoarea cifră exactă,a 9-a, este tot 2		
3	0.25*2.533269923^9-1.98*2.533269923^8+3.17*3^7-17*2.533269923^6+97*3^5-127*2.533269923^4+357*2.533269923^3-789*2.533269923^2+1027*3-3577	**+18740.8 > 0**
4	0.25*2.533269924^9-1.98*2.533269924^8+3.17*4^7-17*2.533269924^6+97*4^5-127*2.533269924^4+357*2.533269924^3-789*2.533269924^2+1027*4-3577	140529.
5	0.25*2.533269925^9-1.98*2.533269925^8+3.17*5^7-17*2.533269925^6+97*5^5-127*2.533269925^4+357*2.533269925^3-789*2.533269925^2+1027*5-3577	541072.
A 9-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este tot 2 → X_1 = 2.533269922		

32.4. DETERMINAREA CELEI DE A 2-A SOLUŢII / RADĂCINI X_2 A ECUAŢIEI

Pentru reducerea numărului de iteraţii se prezinţă funcţia F(X) în domeniul celei de-a doua rădăcini / soluţii, iniţial în domneiul **$X_2 \in [3, 4]$,** apoi, pe baza constatărilor se trece la ingustarea acestui domeniu, ceea ce scurtează durata determinarilor şi evită unele iteraţii de prisos / inutile (**Fig 3**).

În domeniul încă lizibil, se observă că valoarea ei, deocamdată cu numai **6** cifre zecimale (electronice) exacte, determinate grafic, este **$X_2 \in$ (3,735960; 3,735961).**

Cele 10 valori date ecuaţiei de gardul 9 vor fi, în coloană, **3,7359600, 3,7359601, 3,7359602, 3,7359603, 3,7359604, 3,7359605, 3,7359606, 3,7359607, 3,7359608, 3,7359609.**

Următoarele cifre exacte se vor determina prin metoda succesiva (**MS-MEŞ**) şi este prezentată în **tabelul 5**. Schimbarea semnului valorii funcţiei are loc, aşa cum se poate observa, între cifrele **3** şi **4**, între care tabelul a fost separat în două, cel cu valori / erori negative, sus ▲, şi cel cu valori / erori pozitive, jos ▼. Aceste valori ale F(X), pentru diversele cifre date soluţiei / radacinii presupuse / virtuale au fost denumite erori, deoarece reprezintă abaterile faţă de valoarea exactă pentru care aceste erori ar fi nule.

Spre deosebire de cazul anterior, al determinării radacinii X_1, în care F(X) traversa axa X într-un sens, de jos în sus sau din cadranul IV în cadranul I, în cazul de faţă pentru X_2 F(X) traverseaza axa X în sens invers, din cadranul I în cadranul IV, sau de sus în jos, dar variabila X evoluează tot în sensul pozitiv al axei OX, de aceea cifra exactă este cea cu valoarea erorii negative minimă. Adică **3**.

Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + +357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {**X**, **3** , **4**}]

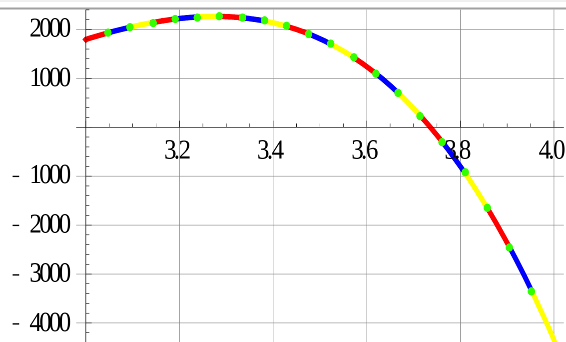


Fig.32.3,a Graficul grob al funcţiei **F(X)** în domeniul / jurul lui **$X_2 \in$ [3, 4]**

Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + +357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {**X**, **3.7**, **3.8**}]

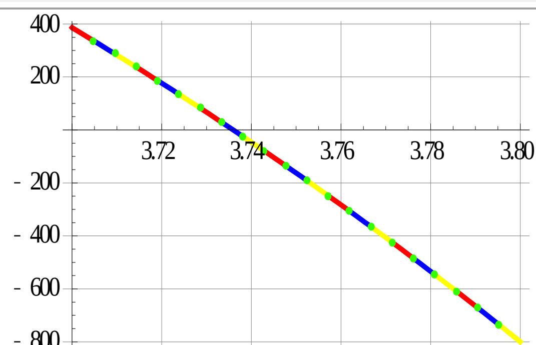


Fig.32.3,b Graficul mai restrâns în jurul lui **X_2** **$X_2 \in$ [3.7, 3.8]**

Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + +357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {**X**, **3.73**, **3.74**}]

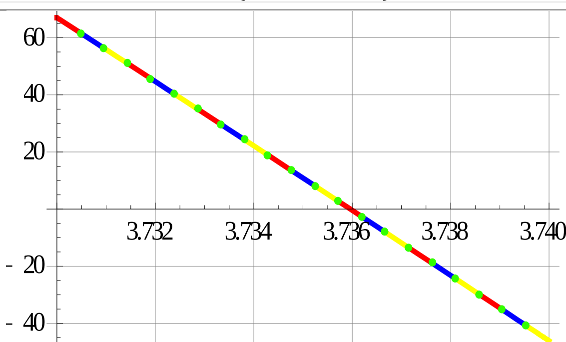


Fig.32.3,c Graficul rădăcinii a funcţiei **F(X)** în domeniul / jurul lui **$X_2 \in$ [3,73; 3,74]**

Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + +357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {**X**, **3.7355**, **3.7365**}]

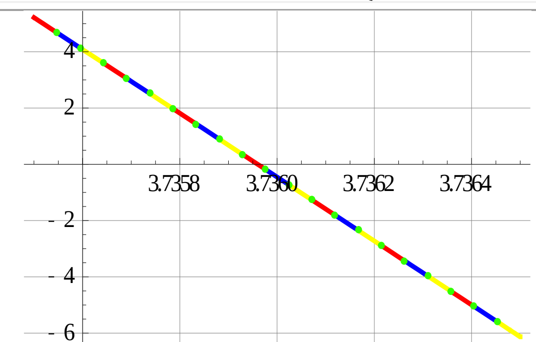


Fig.32.3,d Graficul restrâns în jurul lui **X_2** în domeniul / jurul lui **$X_2 \in$ [3,7355, 3.7365]**

Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + +357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {**X**, **3.7359**, **37360**}]

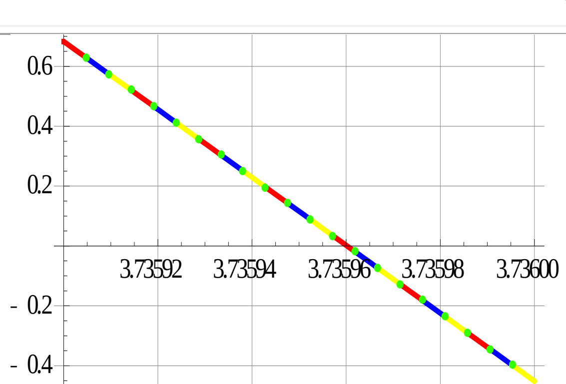


Fig.32.3,e Graficul primei rădăcini a funcţiei **F(X)** în domeniul / jurul lui **$X_2 \in$ [3,7359, 3.7360]**

Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + +357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {**X**, **3.735960**, **3.735961**}]

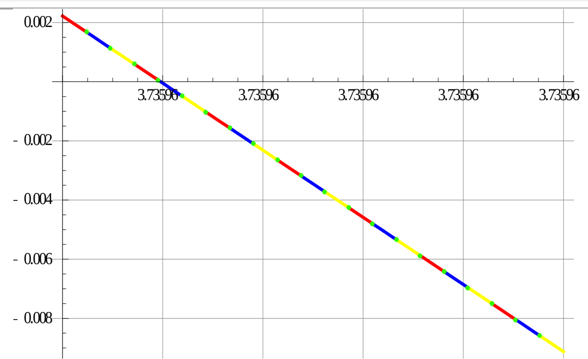


Fig.32.3,f Graficul primei rădăcini a funcţiei **F(X)** în domeniul lui **$X_2 \in$ [3,735960, 3.735961]**

CI FRA	Tabelul 32.5 Determinarea celei de a 7-a cifre zecimale (electronice) E C U A Ţ I A cu X_2	VALOAREA / EROAREA
0	0.25*3.7359600^9-1.98*3.7359600^8+3.17*0^7-17*3.7359600^6+97*0^5-127*3.7359600^4+357*3.7359600^3-789*3.7359600^2+1027*0-3577	-106635.
1	0.25*3.7359601^9-1.98*3.7359601^8+3.17*1^7-17*3.7359601^6+97*1^5-127*3.7359601^4+357*3.7359601^3-789*3.7359601^2+1027*1-3577	-105508.
2	0.25*3.7359602^9-1.98*3.7359602^8+3.17*2^7-17*3.7359602^6+97*2^5-127*3.7359602^4+357*3.7359602^3-789*3.7359602^2+1027*2-3577	-101071.
3	0.25*3.7359603^9-1.98*3.7359603^8+3.17*3^7-17*3.7359603^6+97*3^5-127*3.7359603^4+357*3.7359603^3-789*3.7359603^2+1027*3-3577	-73049.9
DOMENIUL SOLUŢIEI X_2 = 3,7359603 ↘		
4	0.25*3.7359604^9-1.98*3.7359604^8+3.17*4^7-17*3.7359604^6+97*4^5-127*3.7359604^4+357*3.7359604^3-789*3.7359604^2+1027*4-3577	48738.5
5	0.25*3.7359605^9-1.98*3.7359605^8+3.17*5^7-17*3.7359605^6+97*5^5-127*3.7359605^4+357*3.7359605^3-789*3.7359605^2+1027*5-3577	449281.
6	0.25*3.7359606^9-1.98*3.7359606^8+3.17*6^7-17*3.7359606^6+97*6^5-127*3.7359606^4+357*3.7359606^3-789*3.7359606^2+1027*6-3577	1.5412×10^6
7	0.25*3.7359607^9-1.98*3.7359607^8+3.17*7^7-17*3.7359607^6+97*7^5-127*3.7359607^4+357*3.7359607^3-789*3.7359607^2+1027*7-3577	4.14146×10^6
8	0.25*3.7359608^9-1.98*3.7359608^8+3.17*8^7-17*3.7359608^6+97*8^5-127*3.7359608^4+357*3.7359608^3-789*3.7359608^2+1027*8-3577	9.72805×10^6
9	0.25*3.7359609^9-1.98*3.7359609^8+3.17*9^7-17*3.7359609^6+97*9^5-127*3.7359609^4+357*3.7359609^3-789*3.7359609^2+1027*9-3577	2.07924×10^7
CONCLUZII : A 7-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este 3 → X_2 = 3. 7359603.		

CI - FRA	Tabelul 32.6 Determinarea celei de a 8-a cifre zecimale (electronice) E C U A Ţ I A cu X_2	VALOAREA / EROAREA
2	0.25*3.73596032^9-1.98*3.73596032^8+3.17*2^7-17*3.73596032^6+97*2^5-127*3.73596032^4+357*3.73596032^3-789*3.73596032^2+1027*2-3577	-101071.
3	0.25*3.73596033^9-1.98*3.73596033^8+3.17*3^7-17*3.73596033^6+97*3^5-127*3.73596033^4+357*3.73596033^3-789*3.73596033^2+1027*3-3577	-73049.9
DOMENIUL SOLUŢIEI X_2 = 3,73596033 ↘		
4	0.25*3.73596034^9-1.98*3.73596034^8+3.17*4^7-17*3.73596034^6+97*4^5-127*3.73596034^4+357*3.73596034^3-789*3.73596034^2+1027*4-3577	48738.5
5	0.25*3.73596035^9-1.98*3.73596035^8+3.17*5^7-17*3.73596035^6+97*5^5-127*3.73596035^4+357*3.73596035^3-789*3.73596035^2+1027*5-3577	449282.
CONCLUZII : A 8-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este 3 → X_2 = 3. 73596033.		

CI - FRA	Tabelul 32.7 Determinarea celei de a 9-a cifre zecimale (electronice)	VALOAREA / EROAREA
	E C U A Ţ I A cu X_2	
2	0.25*3.735960332^9-1.98*3.735960332^8+3.17*2^7-17*3.735960332^6+97*2^5-127*3.735960332^4+357*3.735960332^3-789*3.735960332^2+1027*2-3577	-101071
3	0.25*3.735960333^9-1.98*3.735960333^8+3.17*3^7-17*3.735960333^6+97*3^5-127*3.735960333^4+357*3.735960333^3-789*3.735960333^2+1027*3-3577	-73049.9
	DOMENIUL SOLUŢIEI X_2 = 3,735960333 ↘	
4	0.25*3.735960334^9-1.98*3.735960334^8+3.17*4^7-17*3.735960334^6+97*4^5-127*3.735960334^4+357*3.735960334^3-789*3.735960334^2+1027*4-3577	1.5412×10^6
5	0.25*3.735960335^9-1.98*3.735960335^8+3.17*5^7-17*3.735960335^6+97*5^5-127*3.735960335^4+357*3.735960335^3-789*3.735960335^2+1027*5-3577	4.14146×10^6
	CONCLUZII: A 8-a cifră electronică (zecimală), determinată prin MS este tot 3 → X_2 = 3.735960333.	

În mod similar, pot fi determinate şi următoarele cifrele exacte a numărului X_2: a **10 - a** cifră exactă, a **11 – a** ş.a.m.d. până la atingerea preciziei cerute soluţiei sau până când eroarea apare zero, caz în care soluţia este un număr exact.

32.5. DETERMINAREA CELEI DE A 3-A SOLUŢII / RADĂCINI X_3 A ECUAŢIEI

Aceasta este soluţia găsită şi de programatorul amintit anterior, care a dat valoarea de $X_3\equiv$ $\equiv$ **X=6,28913206734** şi, deocamdată, nu avem motive să nu-l credem.

Determinările computaţionale grafice sunt redate în **figura 4** până la a **5-a** cifră zecimală care este X_3 = 6.28913……

Până aici, rezultatele se coincid,să vedem mai departe…

În continuare, pentru determinarea următoarelor cifre exacte ale numarului X_3, se aplică metoda determinării succesive (**MS-MEŞ**) a cifrelor cere sunt soluţii ale ecuaţiilor de oricare grad cu oricare tip de coeficienţi, aşa cum s-a putut constata şi până în prezent, pentru X_1 şi X_2.

Rezultatele primului pas de determinarea celei de a **7-a** cifrei exacte şi a 6-a cifră zecimală (electronică) sunt prezentate în **tabelul 8**. Cifra succesivă exactă a numărului soluţie rezultă clar ca este ***este 6 şi nu 2*** !! Deci, până în prezent **a 3-a** soluţia este X_3 = **6.289136** … …*şi nu* **X = 6,289132.**

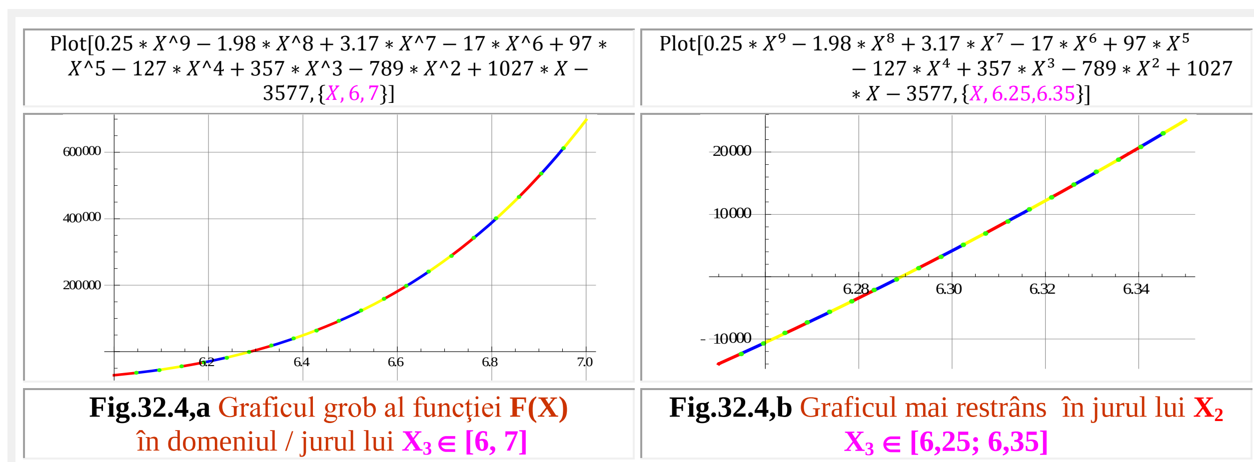
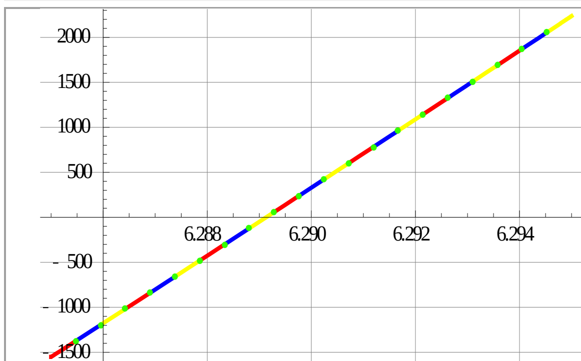
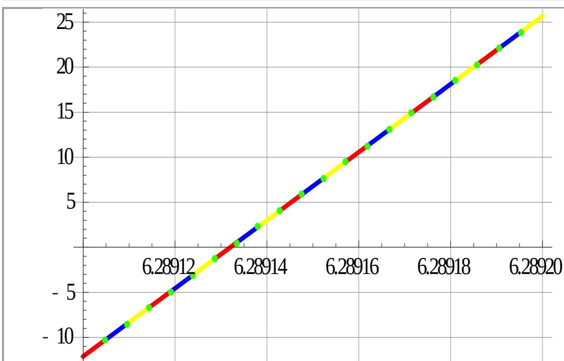
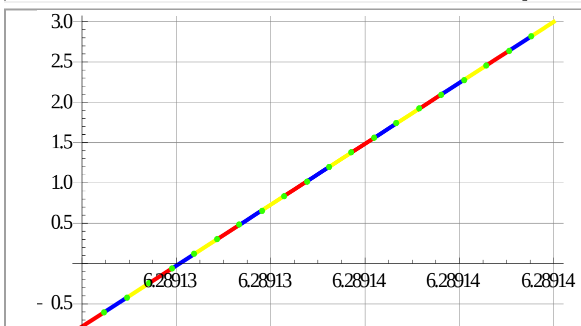
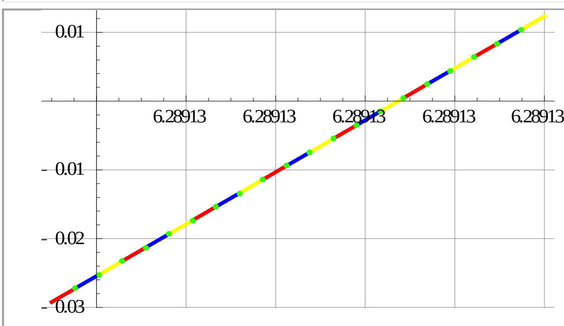
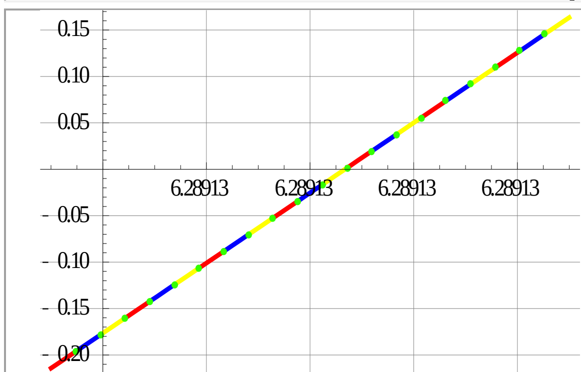
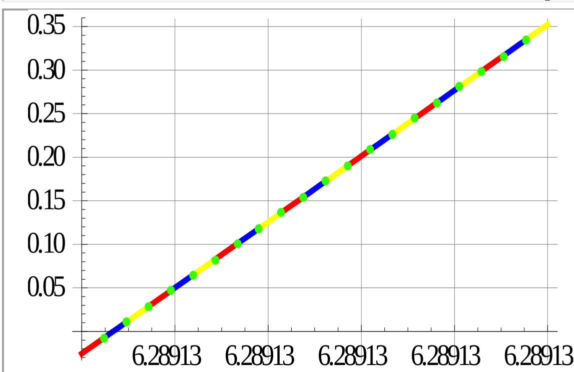


Fig.32.4,a Graficul grob al funcţiei **F(X)** în domeniul / jurul lui $X_3 \in$ [6, 7]

Fig.32.4,b Graficul mai restrâns în jurul lui X_2 $X_3 \in$ [6,25; 6,35]

Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + 357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {X, 6.285, 6.295}]	Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + 357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {X, 6.2891, 6.2892}]
	
Fig.32.4,c Graficul rădăcinii a funcţiei **F(X)** în domeniul / jurul lui **$X_3 \in$ [6,285; 6,295]**	**Fig.32.3,d** Graficul restrâns în jurul lui **X_2** în domeniul / jurul lui **$X_3 \in$ [3,7355, 3.7365]**
Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + 357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {X, 6.28913, 6.28914}]	Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + 357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {X, 6.28913199,6.2891321}]
	
Fig.32.4,e Graficul primei rădăcini a funcţiei **F(X)** în domeniul / jurul lui **$X_3 \in$** [6,28913; 6,28914]	**Fig.32.3,f** Graficul primei rădăcini a funcţiei **F(X)** în domeniul lui **$X_3 \in$ [6.28913199,6.2891321]**
Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + 357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {X, 6.2891315, 6.2891325}]	Plot[0.25 ∗ X^9 − 1.98 ∗ X^8 + 3.17 ∗ X^7 − 17 ∗ X^6 + 97 ∗ X^5 − 127 ∗ X^4 + 357 ∗ X^3 − 789 ∗ X^2 + 1027 ∗ X − 3577, {X, 6.289132, 6.289133}]
	
Fig.32.4,g Graficul primei rădăcini a funcţiei **F(X)** în domeniul / jurul lui	**Fig.32.4,h** Graficul primei rădăcini a funcţiei **F(X)** în domeniul / jurul lui

$X_3 \in [6.2891315, 6.2891325]$	$X_3 \in [6.289132, 6.289133]$

CI - FRA	**Tabelul32. 8** Determinarea celei de **a 6-a** cifre zecimale **(electronice)** **E C U A Ţ I A cu X_3**	**VALOAREA / EROAREA**
0	0.25*6.289130^9-1.98*6.289130^8+3.17*0^7-17*6.289130^6+97*0^5-127*6.289130^4+357*6.289130^3-789*6.289130^2+1027*0-3577	-2.1945×10^{6}
1	0.25*6.289131^9-1.98*6.289131^8+3.17*1^7-17*6.289131^6+97*1^5-127*6.289131^4+357*6.289131^3-789*6.289131^2+1027*1-3577	-2.19338×10^{6}
2	0.25*6.289132^9-1.98*6.289132^8+3.17*2^7-17*6.289132^6+97*2^5-127*6.289132^4+357*6.289132^3-789*6.289132^2+1027*2-3577	-2.18894×10^{6}
3	0.25*6.289133^9-1.98*6.289133^8+3.17*3^7-17*6.289133^6+97*3^5-127*6.289133^4+357*6.289133^3-789*6.289133^2+1027*3-3577	-2.16092×10^{6}
4	0.25*6.289134^9-1.98*6.289134^8+3.17*4^7-17*6.289134^6+97*4^5-127*6.289134^4+357*6.289134^3-789*6.289134^2+1027*4-3577	-2.03913×10^{6}
5	0.25*6.289135^9-1.98*6.289135^8+3.17*5^7-17*6.289135^6+97*5^5-127*6.289135^4+357*6.289135^3-789*6.289135^2+1027*5-3577	-1.63859×10^{6}
6	0.25*6.289136^9-1.98*6.289136^8+3.17*6^7-17*6.289136^6+97*6^5-127*6.289136^4+357*6.289136^3-789*6.289136^2+1027*6-3577	-546680.
	DOMENIUL SOLUŢIEI X_3 = 6.289136 ↘	
7	0.25*6.289137^9-1.98*6.289137^8+3.17*7^7-17*6.289137^6+97*7^5-127*6.289137^4+357*6.289137^3-789*6.289137^2+1027*7-3577	2.05359×10^{6}
8	0.25*6.289138^9-1.98*6.289138^8+3.17*8^7-17*6.289138^6+97*8^5-127*6.289138^4+357*6.289138^3-789*6.289138^2+1027*8-3577	7.64017×10^{6}
9	0.25*6.289139^9-1.98*6.289139^8+3.17*9^7-17*6.289139^6+97*9^5-127*6.289139^4+357*6.289139^3-789*6.289139^2+1027*9-3577	1.87045×10^{7}
	CONCLUZII: A **7-a** cifră electronică (zecimală), determinată prin **MS** este 6 → X_3 = **6.289136**	

Mergem mai departe cu determinarea cifrelor exacte ale numărului-soluţie X_3 şi rezultatele sunt prezentate parţial în **tabelul 9**, doar în preajma zonei de schimbare a semnelor erorii, adica în zona cifrei soluţie exacte

CI - FRA	**Tabelul 32.9** Determinarea celei de **a 7-a** cifre zecimale **(electronice)** **E C U A Ţ I A cu X_3**	**VALOAREA / EROAREA**
5	0.25*6.2891365^9-1.98*6.2891365^8+3.17*5^7-17*6.2891365^6+97*5^5-127*6.2891365^4+357*6.2891365^3-789*6.2891365^2+1027*5-3577	-1.6386×10^{6}
6	0.25*6.2891366^9-1.98*6.2891366^8+3.17*6^7-17*6.2891366^6+97*6^5-127*6.2891366^4+357*6.2891366^3-789*6.2891366^2+1027*6-3577	-546681.
	DOMENIUL SOLUŢIEI X_3 = 6.2891366 ↗	
7	0.25*6.2891367^9-1.98*6.2891367^8+3.17*7^7-17*6.2891367^6+97*7^5-127*6.2891367^4+357*6.2891367^3-789*6.2891367^2+1027*7-3577	2.05359×10^{6}
8	0.25*6.2891368^9-1.98*6.2891368^8+3.17*8^7-17*6.2891368^6+97*8^5-127*6.2891368^4+357*6.2891368^3-789*6.2891368^2+1027*8-3577	7.64017×10^{6}
	CONCLUZII: A **7-a** cifră electronică (zecimală), determinată prin **MS** este tot **6** → X_3 = **6.2891366**	

CI - FRA	Tabelul 32.10 Determinarea celei de a 8-a cifre zecimale (electronice) **E C U A Ţ I A cu X_3**	VALOAREA / EROAREA
5	0.25*6.28913665^9-1.98*6.2891365^8+3.17*5^7-17*6.28913665^6+97*5^5-127*6.28913665^4+357*6.2891365^3-789*6.28913665^2+1027*5-3577	-1.6386×10^{6}
6	0.25*6.28913666^9-1.98*6.2891366^8+3.17*6^7-17*6.28913666^6+97*6^5-127*6.28913666^4+357*6.2891366^3-789*6.28913666^2+1027*6-3577	-546681.
DOMENIUL SOLUŢIEI X_3 = 6.28913666 ↗		
7	0.25*6.28913667^9-1.98*6.28913667^8+3.17*7^7-17*6.28913667^6+97*7^5-127*6.28913667^4+357*6.28913667^3-789*6.2891367^2+1027*7-3577	2.05359×10^{6}
8	0.25*6.28913668^9-1.98*6.28913668^8+3.17*8^7-17*6.28913668^6+97*8^5-127*6.28913668^4+357*6.28913668^3-789*6.28913668^2+1027*8-3577	7.64017×10^{6}
CONCLUZII: A **8-a** cifră electronică (zecimală), determinată prin **MS** este din nou tot **6** → X_3 = **6.28913666**		

CI - FRA	Tabelul 32.11 Determinarea celei de a 9-a cifre zecimale (electronice) **E C U A Ţ I A cu X_3**	VALOAREA / EROAREA
5	0.25*6.289136665^9-1.98*6.289136665^8+3.17*5^7-17*6.289136665^6+97*5^5-127*6.289136665^4+357*6.289136665^3-789*6.289136665^2+1027*5-3577	-1.6386×10^{6}
6	0.25*6.289136666^9-1.98*6.289136666^8+3.17*6^7-17*6.289136666^6+97*6^5-127*6.289136666^4+357*6.289136666^3-789*6.289136666^2+1027*6-3577	-546681.
DOMENIUL SOLUŢIEI X_3 = 6.289136666 ↗		
7	0.25*6.289136667^9-1.98*6.289136667^8+3.17*7^7-17*6.289136667^6+97*7^5-127*6.289136667^4+357*6.289136667^3-789*6.289136667^2+1027*7-3577	2.05359×10^{6}
8	0.25*6.289136668^9-1.98*6.289136668^8+3.17*8^7-17*6.289136668^6+97*8^5-127*6.289136668^4+357*6.289136668^3-789*6.289136668^2+1027*8-3577	7.64017×10^{6}
CONCLUZII: A **9-a** cifră electronică (zecimală), determinată prin **MS** este din nou tot **6** → X_3 = **6.289136666**		

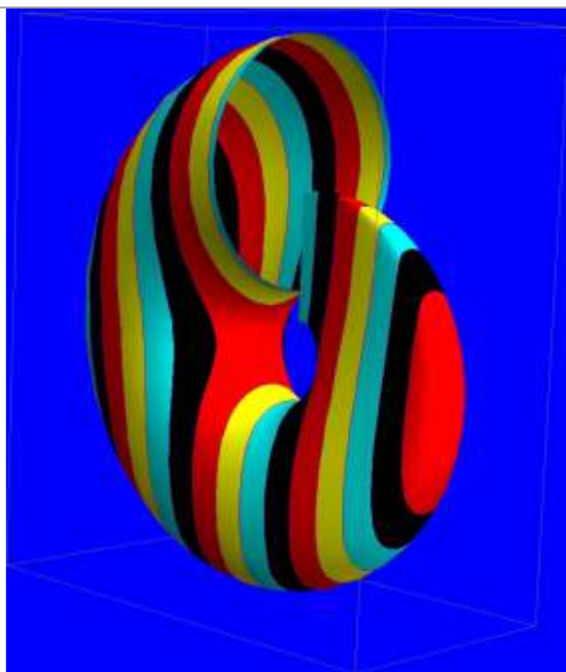
CI - FRA	Tabelul 32.12 Determinarea celei de a 10-a cifre zecimale (electronice) **E C U A Ţ I A cu X_3**	VALOAREA / EROAREA
5	0.25*6.289136665^9-1.98*6.289136665^8+3.17*5^7-17*6.289136665^6+97*5^5-127*6.289136665^4+357*6.289136665^3-789*6.289136665^2+1027*5-3577	-1.6386×10^{6}
6	0.25*6.289136666^9-1.98*6.289136666^8+3.17*6^7-17*6.289136666^6+97*6^5-127*6.289136666^4+357*6.289136666^3-789*6.289136666^2+1027*6-3577	-546681.
DOMENIUL SOLUŢIEI X_3 = 6.2891366666 ↗		
7	0.25*6.289136667^9-1.98*6.289136667^8+3.17*7^7-17*6.289136667^6+97*7^5-127*6.289136667^4+357*6.289136667^3-789*6.289136667^2+1027*7-3577	2.05359×10^{6}
8	0.25*6.289136668^9-1.98*6.289136668^8+3.17*8^7-17*6.289136668^6+97*8^5-127*6.289136668^4+357*6.289136668^3-789*6.289136668^2+1027*8-3577	7.64017×10^{6}
CONCLUZII : A **9-a** cifră electronică (zecimală), determinată prin **MS** este din nou tot **6** → X_3 = **6.289136 6 666**		
CI - FRA	Tabelul 13 Determinarea celei de a 11-a cifre zecimale (electronice)	VALOAREA / EROAREA

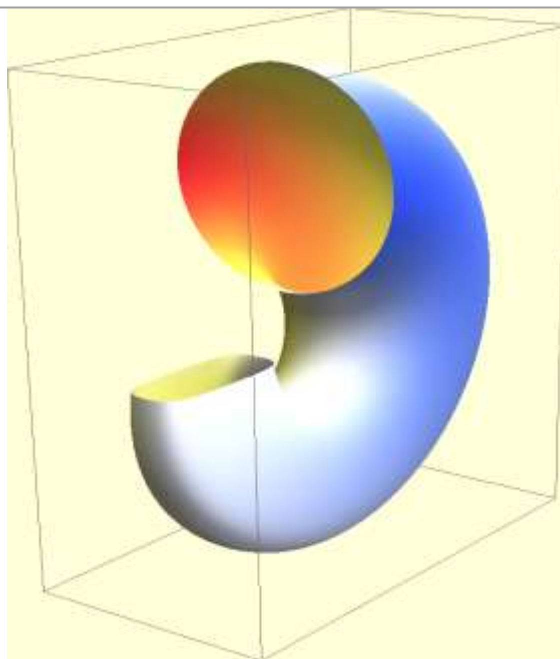
	E C U A Ţ I A cu X_3	
5	0.25*6.2891366665^9-1.98*6.2891366665^8+3.17*5^7-17*6.2891366665^6+97*5^5-127*6.2891366665^4+357*6.2891366665^3-789*6.2891366665^2+1027*5-3577	-1.6386×10^6
6	0.25*6.2891366666^9-1.98*6.2891366666^8+3.17*6^7-17*6.2891366666^6+97*6^5-127*6.2891366666^4+357*6.2891366666^3-789*6.2891366666^2+1027*6-3577	-546681.
	DOMENIUL SOLUŢIEI X_3 = 6.28913 666 666 ↗	
7	0.25*6.2891366667^9-1.98*6.2891366667^8+3.17*7^7-17*6.2891366667^6+97*7^5-127*6.2891366667^4+357*6.2891366667^3-789*6.2891366667^2+1027*7-3577	2.05359×10^6
8	0.25*6.2891366668^9-1.98*6.2891366668^8+3.17*8^7-17*6.2891366668^6+97*8^5-127*6.2891366668^4+357*6.2891366668^3-789*6.2891366668^2+1027*8-3577	7.64017×10^6
	CONCLUZII : A **9-a** cifră electronică (zecimală), determinată prin **MS** este din nou tot **6** → X_3 = **6.28913 6 6 6 666**	

La fel se repată situaţia în **tabelele 32.10, 32.11, 32,12** şi **32.13**, în care, cifra exacta este de fiecare dată **cifra electronica 6**.
Ca urmare, numarul X_3 cu 11 zecimale şi 12 cifre exacte este

X_3 = **<u>6,28913</u> 666666 …** şi nu **X=6<u>,28913</u> 206734**

Concluziile sunt de prisos.





În completarea capitolului : Torurile lui Şerban Şelariu

Moto:” Imaginaţia e mai importantă decât cunoaşterea,
dar singurul lucru cu adevărat valoros e **intuiţia**. ”
Albert Einstein

Capitolul 33

ELEMENTE NELINIARE LEGATE ÎN SERIE

Scopul acestui capitol este de a prezenta relaţiile unice din literatura mondială, ca posibilităţi analitice de determinare a **elementului echivalent** / **sumă**, în cazul **legării în serie** a două elemente cu **caracteristici elastice statice neliniare** (CESN), pentru care, până la publicarea lucrării [1] în anul 1978 şi susţinerea referatului [2], acestea erau, evident, relaţii necunoscute. Se fac referiri şi exemplificări la compunerea **elementelor elastice mecanice**, dar, datorită similitudinii existente, relaţiile pot fi utilizate cu succes şi în **domeniul electrotehnic**.

31.1 I N T R O D U C E R E

Există o similitudine perfectă între mecanică şi electrotehnică, aşa cum a subliniat şi a demonstrat reputatul savant englez de origine româna **George (Gogu) Constantinescu***, în cadrul noului şi importantului domeniu al ştiinţei, **TEORIA SONICITĂŢII**, domeniu descoperit şi dezvoltat de el.

Ca dovadă, legarea în serie, în paralel şi mixt a două elemente elastice (arcuri), care aparţine domeniului mecanic şi **reologic****, este similară cu aceleaşi legări ale rezistorilor / rezistenţelor şi a altor componente ale circuitelor electrice.

Ansamblul elementelor componente ale unui sistem tehnologic închis, **maşină-dispozitiv-piesă-sculă,** prin care se propagă diverse tipuri de forţe, cele de aşchiere fiind cele mai frecvente, forţe ce provoacă diverse deformaţii, vinovate de o parte a erorilor / impreciziilor de prelucrare mecanică, poartă denumirea de **sistem tehnologic elastic (STE)** [2].

33.2 CARACTERISTICI ELASTICE STATICE LINIARE ŞI NELINIARE

Dacă se înregistrează deformaţiile elementelor la **încărcare**, în funcţie de forţele care le solicită şi care cresc continuu, cu o viteză de creştere extrem de mică, viteză considerată nulă, până la o **valoare maximă** (**F_M**), care să nu provoace deformaţii remanente ale elementelor, se vor obţine graficele care poartă denumirea de **caracteristici elastice statice (CES)**.

O astfel de caracteristică poate avea o expresie generală de forma

(33.1) $F_{ij} = C_{i1}x + C_{i2}x^2 + C_{i3}.x^3 + C_{i4}x^4 + \ldots$

sau de forma, mai des utilizată, de tip **Duffing (Fig. 33.1,b,** cazul **1)**

(33.2) $F_i = k_i x + \mu_i x^3$.

Notaţiile din relaţia anterioară sunt consacrate şi nu sunt întâmplătoare: **k_i** este constanta elastică a părţii **liniare**, iar **μ_i** aminteşte de notaţia consacrată a coeficienţilor de frecare, exprimaţi de relaţia $\mu_i = tan\varphi_i$, în care, φ_i este unghiul de frecare; partea **neliniară** a expresiei (2) datorându-se fie frecărilor interne, din materialul elementului elastic, fie celor externe, la contactul acestuia cu alte elemente. Sunt posibile următoarele situaţii

(33.3) $$\begin{cases} \mu_i = tan\boldsymbol{\varphi_i} < 0 \Rightarrow \boldsymbol{CES}\ este\ \boldsymbol{neliniar}ă\ şi\ \boldsymbol{moale}\ sau\ regresivă \\ \mu_i = tan\boldsymbol{\varphi_i} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{CES}\ este\ \boldsymbol{liniar}ă\ (\boldsymbol{Fig. 33.1, b}) \\ \mu_i = tan\boldsymbol{\varphi_i} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{CES}\ este\ \boldsymbol{neliniar}ă\ şi\ \boldsymbol{tare}\ sau\ progresivă \end{cases}$$

* ***George Constantinescu*** *a lăsat în urma lui 133 de brevete (317 după alţi autori) şi multe alte invenţii nepublicate. A fost poate prea rapid şi surprinzător pentru timpul său.* ***Inginerul Constantinescu*** *a fost numit de către revista engleză* **The Graphic** unul *din cei 17* ***titani ai lumii*** *care au revoluţionat ştiinţa, aşezându-l alături de* ***Einstein, Marconi, Edison*** sau ***Lister****.*

** ***Reologia*** *este ştiinţa care studiază interdependenţa dintre solicitările mecanice, răspunsul corpurilor şi proprietăţile acestora. Această ştiinţă stabileşte modelele matematice care descriu comportamentul corpurilor supuse la solicitări. Acest comportament este determinat de dependenţa dintre forţe (solicitări) şi deformare (răspuns), de exemplu.*

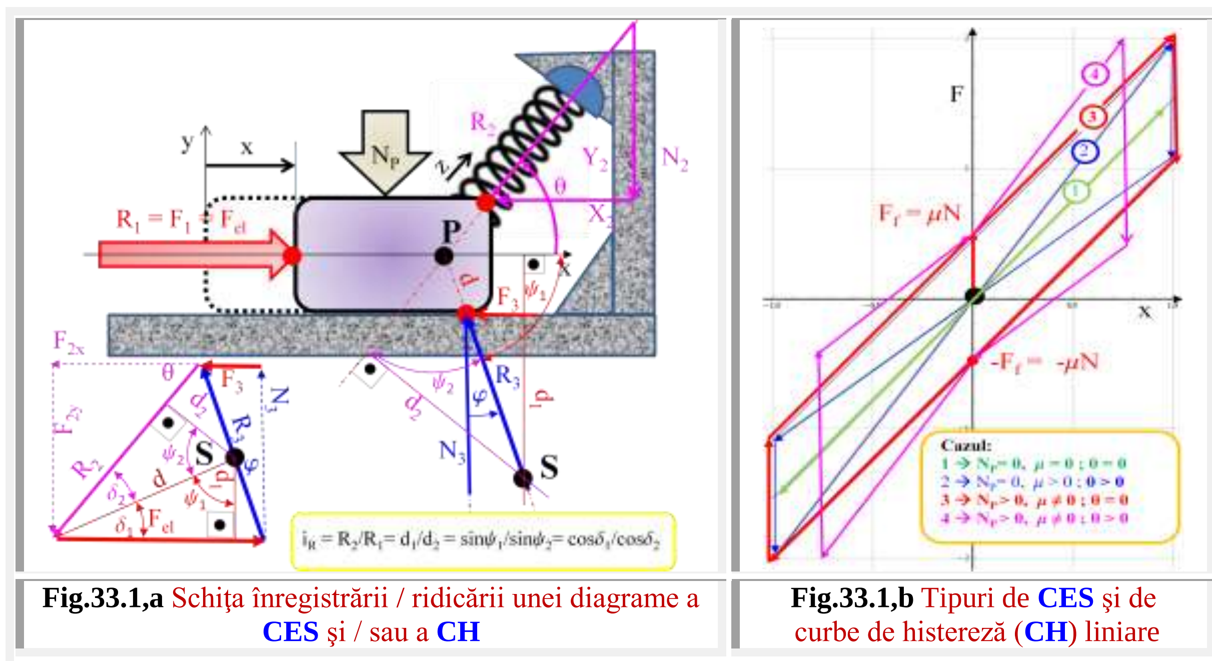


Fig.33.1,a Schiţa înregistrării / ridicării unei diagrame a **CES** şi / sau a **CH**

Fig.33.1,b Tipuri de **CES** şi de curbe de histereză (**CH**) liniare

Pentru sisteme elastice **liniare**, există patru cazuri posibile de **CES** şi de curbe de histereză **CH**, cu graficele reprezentate în **figura 33.1,b** şi care pot fi ridicate / înregistrate pe baza schemei din **figura 33.1,a**, în care arcul este considerat ca fiind un element liniar de constantă k.

Aceastea sunt :

Cazul 1 (Fig. 33.1,b)

Un element sau sistem are **CES** liniară, caracteristică dată de arcul de constantă **k** şi de direcţie orizontală $\alpha = 0$, iar forţa de prestrângere $N_P = 0$. Rezultă dependenţa forţa deplasare / deformare dată de relaţia arhicunoscută

(33.4) $\quad \mathbf{F = k.x}$,

în care **k** este caracteristica liniară a arcului şi, totodată, coeficientul unghiular al dreptei ce trece prin originea O(0, 0) şi, ca urmare, **k = tanα**, astfel că **CES liniară,** în acest caz, este dreapta ce trece prin originea sistemului O(0, 0) şi de pantă **α**

(33.5) $\quad \mathbf{F = \tan\alpha . x}$

Cazul 2 (Fig.33.1,b).

Pentru $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$ forţa de prestrângere $N_P = 0$, iar $Y_2 \equiv N_2 = R_2.\sin\alpha = -N_3$ astfel că apare o forţă de frecare $F_3 = -\mu.N_2 = -\tan\varphi.N_2 = \tan\varphi.N_3$ proporţională cu deplasarea x.

Ca urmare, pentru o aceeaşi deplasare x, forţa exterioară activă, $R_1 = F_1 \equiv F$, trebuie sa fie mai mare / (să crească) cu forţa de frecare F_3 variabilă cu deplasarea x, decât în cazul în care nu mai există o altă forţă oponentă în sistem.

Forţa normală N_2 variază cu deplasarea x, conform relaţiei

(33.6) $\quad N_2 = R_2\sin\theta = k.z.\sin\theta = k.\frac{x}{\cos\theta}\sin\theta = k.x.\tan\theta$,

în care **k** este constanta arcului şi **z** este deformaţia lui (**Fig.33.1,a**) pe direcţia **θ** a forţei rezultante R_2, astfel că dependenţa ei de deplasare, pe direcţia x a elementului, este

(33.7) $\quad z = \frac{x}{\cos\theta}$

şi rezultă

(33.8) $\quad N_2 = \mathbf{k}.x.\tan\theta = \tan\alpha.\tan\theta.x$

şi, ca urmare, forţa de frecare variabilă cu deplasarea **x** va fi

(33.9) $\quad F_3 = \mu.N_3 = -\mu.N_2 = -\mu.\tan\alpha.\tan\theta.x = -\tan\varphi.\tan\alpha.\tan\theta.\mathbf{x}$,

în care, **k** este constanta sau **rigiditatea arcului** înclinat cu unghiul θ, faţă de deplasarea **x**, deplasare considerată **deformare** a elementului sau a sistemului cercetat.

Din echilibrul forţelor pe direcţia x rezultă

(33.10) $R_1 \equiv F_1 = R_2 \cos\theta \pm F_3$ sau $F = k \frac{x}{\cos\theta} \cos\theta \pm F_3 \rightarrow F = k.x \pm F_3$

(33.11) $F_1 = F = k.x \pm \tan\varphi.\tan\alpha.\tan\theta.x \rightarrow$

(33.12) $F_1 = F = \tan\alpha\,(1 \pm \tan\varphi.\tan\theta).x = k'\,x = \tan\alpha'.x$,

în care, semnul **+**, **plus**, corespunde deplasării elementului sau a sistemului pe direcţia **x** în sensul axei **x** > 0, **pozitive**, iar semnul **−**, **minus**, deplasării în sens invers, adică, în sensul axei **x** < 0, **negative**.

Din relaţia (12) rezultă că:

- CES_2 este liniară, deoarece **k'** = constant;
- Dreapta care reprezintă CES_2 diferă ca înclinaţie de CES_1 din **cazul 1** cu ± $\tan\varphi.\tan\theta$;
- După atingerea forţei maxime, pentru antamarea inversării deplasării, elementului sau a sistemului, forţa activă exterioară F_1 trebuie să scadă cu $2F_{3Max}$ ca mişcarea în sens invers (x < 0) să se producă la capetele de cursă.

Cazul 3 (Fig.33.1,b)

În acest caz se consideră $\theta = 0$ şi existenţa unei forţe constante de prestrângere $Np > 0$.

Pentru a respecta mărimile din **figura 33.1,b**, se consideră arbitrar **Np** = N_3, din cazul anterior, pentru ca singura forţă de frecare din sistem F_3 să rămână neschimbată / aceeaşi, astfel încât, graficele din **figura 33.1,b**, în cele 3 cazuri, să se corespundă.

Efectul este acelaşi cu considerarea altui arc vertical la $\alpha = \pi/2$ şi prestrâns la o valoare egală cu forţa de prestrângere, adică $R'_2 = Y'_2 \equiv N'_2 = Np$, deoarece, deplasarea pe direcţia orizontala **x** (**Fig.33.1,a**) nu va tensiona arcul de pe direcţia verticală **y**, astfel că $R'_2 = N'_2$ va rămâne constantă şi va îndeplini / juca rolul unei forţe de prestrângere.

Se observă din schiţa din **figura 33.1,a** că, mişcarea (deplasarea / deformarea) elementului sau a sistemului nu are loc decât atunci când forţa exterioară activă $F \equiv R_2$ depăşeşte valoarea forţei de frecare F_3, preexistentă în sistem. Ca urmare, graficul CES_3, în **cazul 3**, începe din originea sistemului O(0,0) şi continuă pe verticală, pe axa **F**, până la $F = F_3$, punct din care începe deplasarea şi deformarea arcului aflat acum în poziţie orizontală ($\theta = 0$) după o dreaptă înclinată cu coeficientul unghiular al dreptei $k = \tan\alpha$ până la atingerea valorii maxime a forţei F_M.

Pentru ca mişcarea să se producă şi în sens invers, în care acţionează forţa $R_2 = kx$ din arc, e necesar ca forţa exterioară activă $F_1 \equiv F$ să scadă cu $2F_{3Max}$.

Destinderea arcului **liniar** se face, aşa cum se ştie, după aceeaşi pantă $k = \tan\alpha$, până când CES_3 atinge axa Ox sau la $F_1 \equiv F = 0$, moment în care $-R_2 = F_3$.

Pentru a continua mişcarea şi a obţine o cubă de histereză (CH_3) completă, e necesar ca forţa externă $R_1 = F_1 = F$ să-şi schimbe sensul din împingerea elementului în tragerea lui.

Pentru $F = -F_3$ şi $x = 0$ arcul este complet destins, adică $R_2 = 0$, urmând ca prin tragerea în continuare a elementului / piesei, cu forţe exterioare în sens invers ($-F$), forţa R_2 care solicita arcul la compresiune, să-l solicite acum la întindere, adică să schimbe de semn / sens ($-R_2$).

Cazul 4 (Fig, 33.1,b).

În acest caz, atât forţa iniţială de prestrângere a elementuli $Np > 0$ cât şi unghiul de înclinare al arcului $\theta > 0$, deci forţa elastică R_2 sunt prezente simultan în sistem.

Ca urmare, în domeniul forţei exterioare $F_1 \equiv F \in [-F_3, +F_3]$ nu apar deformaţii / deplasări Când apar deplasările, apar şi forţele de frecare suplimentare, proporţionale cu deformaţia arcului pe direcţia z, astfel că dreapta CES_4 are panta **k'** dată de relaţia (12).

În consecinţa, la fine de cursă, când $x = x_M$ şi la atingerea forţei exterioare $F_1 \equiv F$ **maxime**, în sistem sunt două forţe de frecare: una constantă μN_p şi una variabilă maximă, deoarece variază cu deplasarea x_M care este maximă. De aceea segmentul de CES_4 de direcţie verticală la $\pm x_{Max}$ este mai mare decât în cazul anterior, în care exista numai o singură forţă de frecare constantă

În cazul **CES neliniare**, acestea pot avea o infinitate de forme grafice sau aluri, dintre care sunt prezentate cele mai frecvent considerate în literatura de specialitate şi în practică.

Evident că **CES** de tip **Duffing**, exprimate de relaţia (2) şi prezentate în **figura33.2,a**, sunt acelea care deschid "gala" curbelor **CES neliniare**.

Caracteristic acestora este faptul că, pentru deformaţii / deplăsări reduse, caracteristicile elastice statice **CES** sunt, aşa cum se poate observa, foarte apropiate de cele **liniare**, atât pentru cele tari sau progresive ◄ cât şi pentru cele moi sau regresive ►.

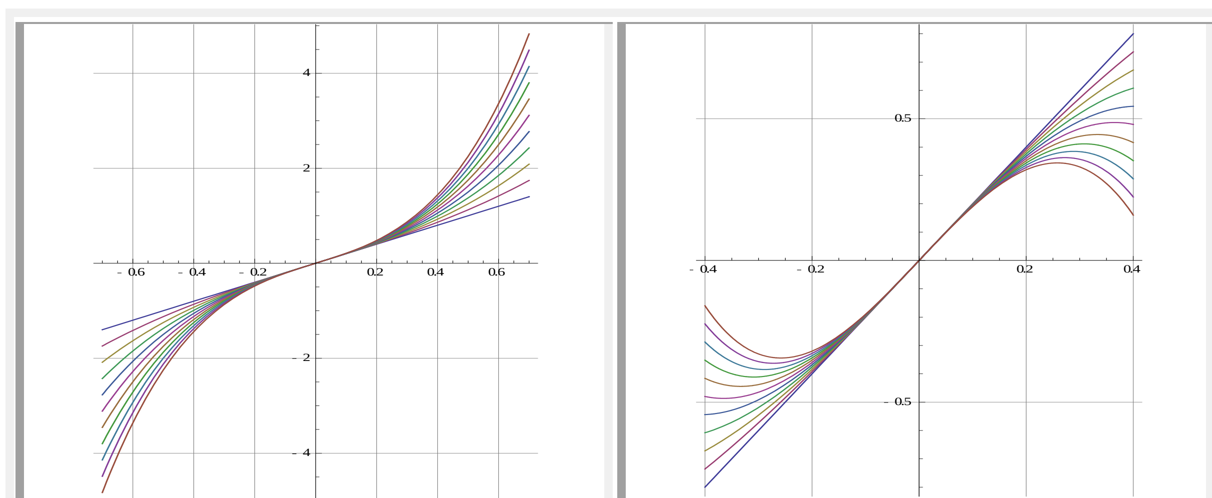


Fig.33.2,a Elemente elastice liniare şi neliniare moi şi tari tip **Duffing**, relaţia (2), pentru **μ** ∈ [0, 1]

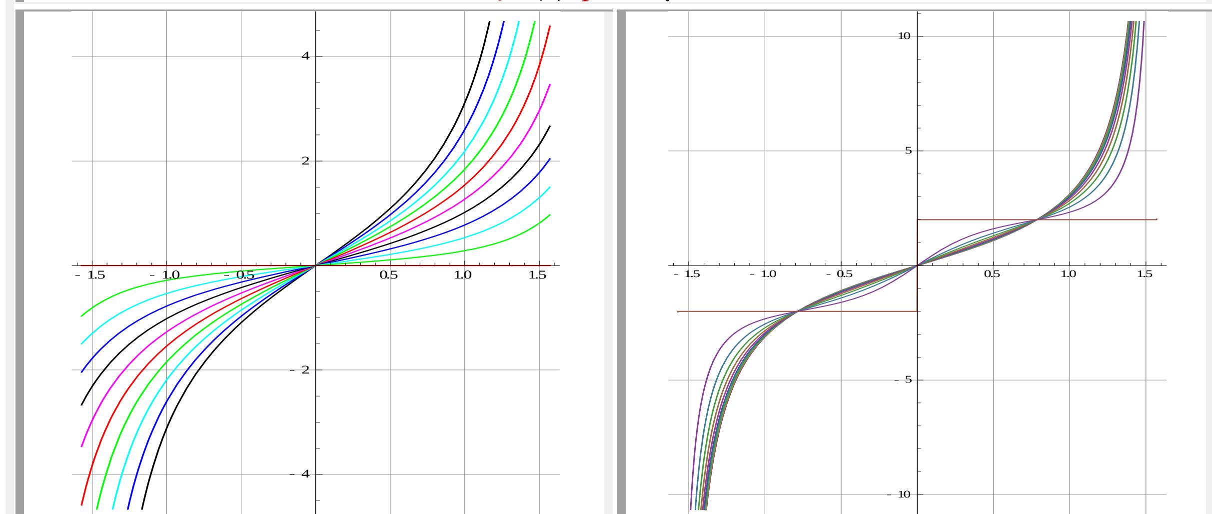


Fig.33.2,b Elemente elastice neliniare tari sau progresive◄ exprimate de funcţia supermatematică circulară excentrică (**FSM-CE**)
F = 2.tex(x, S(s ∈[-1,1], ε = 0)

Fig.33.2,c Elemente elastice neliniare: • **moi** până la x ≤ ±0,8 şi ••**tari**, pentru x ≥ 0,8 ► exprimate de funcţia supermatematică cvadrilobă excentrică (**FSM-QE**)
F = 2.teq(x, S(s ∈[-1,1], ε = 0)

Se cunoaşte faptul că, prin trecerea din domeniul matematicii **centrice** (**MC**) în cel al matematicii **excentrice** (**ME**) se trece, totodată, din domeniul **liniar** sau **ideal** în domeniul **neliniar** sau **real**. Şi, mai precis, în domeniul supermatematicii (**SM**), care este o reuniune a celor două matematici (**SM** = **MC** ∪ **ME**), <u>liniarul şi neliniarul se contopesc</u>; între aceste două domenii, graniţele sunt de domeniul trecutului: liniarul este un caz particular de **excentricitate** zero (**e** = **s** = 0) al neliniarului. Tot aşa cum, matematica centrică (**MC**) este un caz particular, de excentricitate zero, a supermatematicii (**SM**), adică **MC = SM(e = 0).**

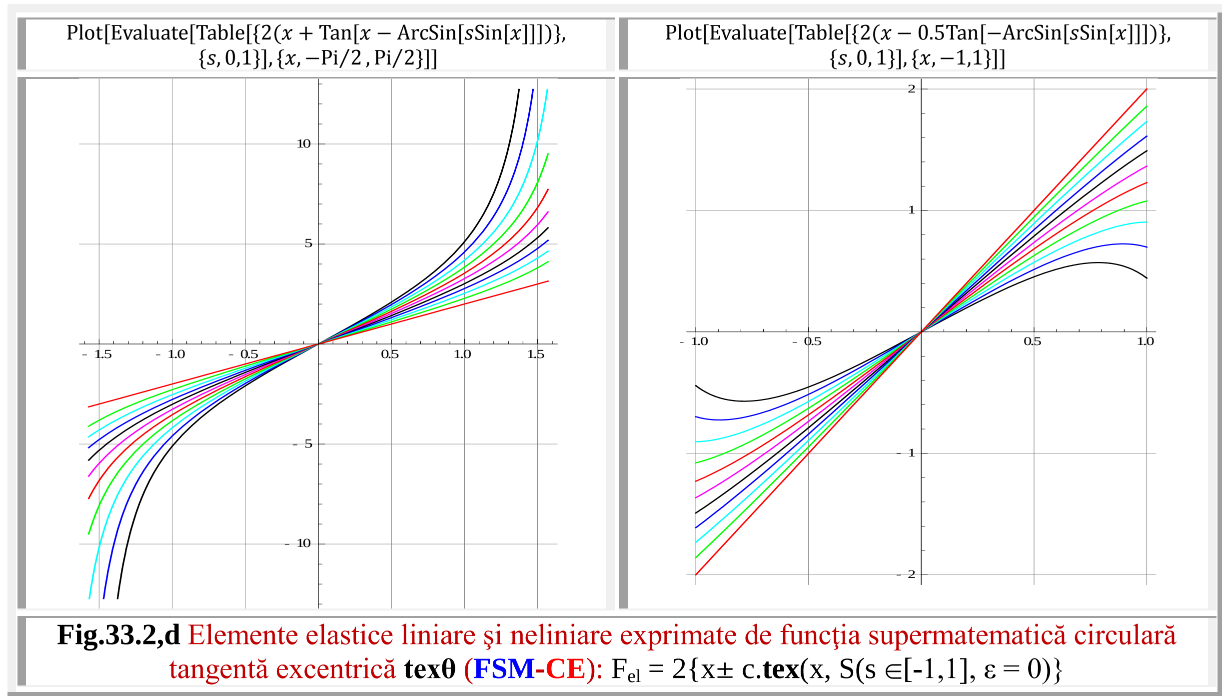
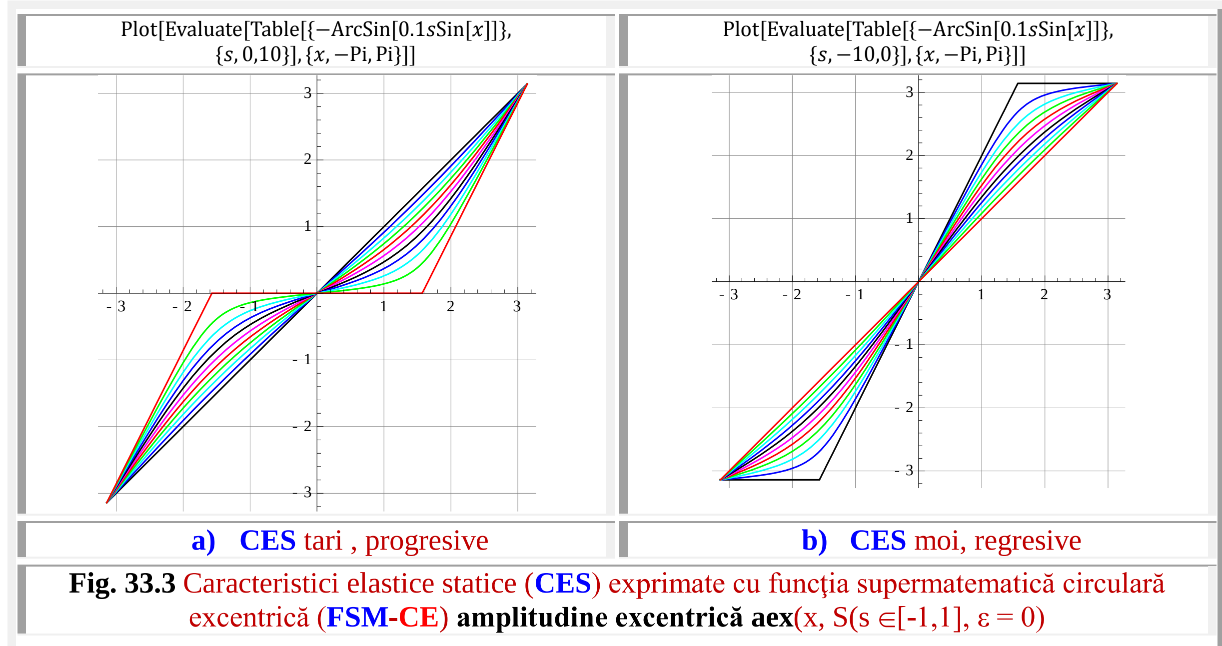


Fig.33.2,d Elemente elastice liniare şi neliniare exprimate de funcţia supermatematică circulară tangentă excentrică **texθ** (**FSM-CE**): F_{el} = 2{x± c.**tex**(x, S(s ∈[-1,1], ε = 0)}

Prin urmare, dacă o **CES liniară** se exprimă prin funcţia circulară centrică (**FCC**) **tanα** – relaţia (5)- atunci e de aşteptat ca funcţia circulară excentrica (**FCE**) tangentă excentrică **texα** să exprime o **CES neliniară**, ceea ce se şi întâmplă, aşa cum se poate observa din **figurile 33.2,b** şi **33.2,d**.



a) **CES** tari , progresive

b) **CES** moi, regresive

Fig. 33.3 Caracteristici elastice statice (**CES**) exprimate cu funcţia supermatematică circulară excentrică (**FSM-CE**) **amplitudine excentrică aex**(x, S(s ∈[-1,1], ε = 0)

Ceea ce s-a afirmat, se poate şi dovedi, că matematica **centrică** (**MC**) este proprie sistemelor (şi deci şi elementelor lor componente) **ideale**, **liniare**, iar matematica **excentrică** (**ME**) este proprie sistemelor **reale**, **neliniare**.

De exemplu, dacă relaţia (5), prin funcţia matematică centrică **tanx,** descrie o **CES liniară**, echivalenta ei, din domeniul excentric, adică funcţia supermatematică circulară excentrică (**FSM-CE**), de variabila excentrică **θ**, **tangenta excentrică** de θ, **tex θ**,

(33.13) $$\boldsymbol{tex}[\theta = x; S(s,\varepsilon)] = \frac{sex\theta}{cex\theta} = \tan\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]\}$$

va exprima, pentru excentricitatea numerică s = 0, o **CES liniară** iar pentru restul valorilor, din domeniul **s ∈ [-1, 1],** va exprima **CES neliniare**, aşa cum se poate observa în **figurile 33.2,b** şi **33.2,d.**

Prin relaţia

(33.14) F_{el} = k.tex[x, S(s, ε)]},

rezultă **CES neliniare** şi o **CES liniară**, de **s = 0**, ce se suprapune peste axa Ox (**Fig. 33.2,b).**

Pentru a obţine, la s = 0, **CES liniare** cu pantă k diferită de zero, se utilizeaza relaţia

(33.15) F_{el} = k{x + c.**tex**(x, S(s ∈[-1,1], ε = 0)}. Pentru c > 0 se obţin **CES neliniare tari** şi pentru c < 0 se obţin **CES neliniare moi (Fig. 33.2,d).**

Cu ajutorul **FSM cvadrilobe excentrice – QE - teq[x = θ, S(s, ε)]** pot fi reprezentate **CES neliniare** moi într-un domeniu θ ≡ x ∈ [- 0,8; + 0.8] şi tari în exteriorul acestuia **(Fig.33.2,c).**

Aşa cum rezultă din graficele din **figura 33.3,a** şi **33.3,b** reprezentările **CES liniare** şi **neliniare** se asociază / concordă cel mai bine cu realitatea prin **FSM-CE amplitudine excentrică** de variabilă excentrică θ ≡ x, deoarece, atât pentru s = 0 cât şi pentru s = ± 1 se obţin sisteme liniare. În primul caz, cu **CES liniară continuă** şi, în al doilea caz, cu **CES liniară pe porţiuni**, aşa cum s-a mai constatat şi s-a afirmat în lucrarea [8].

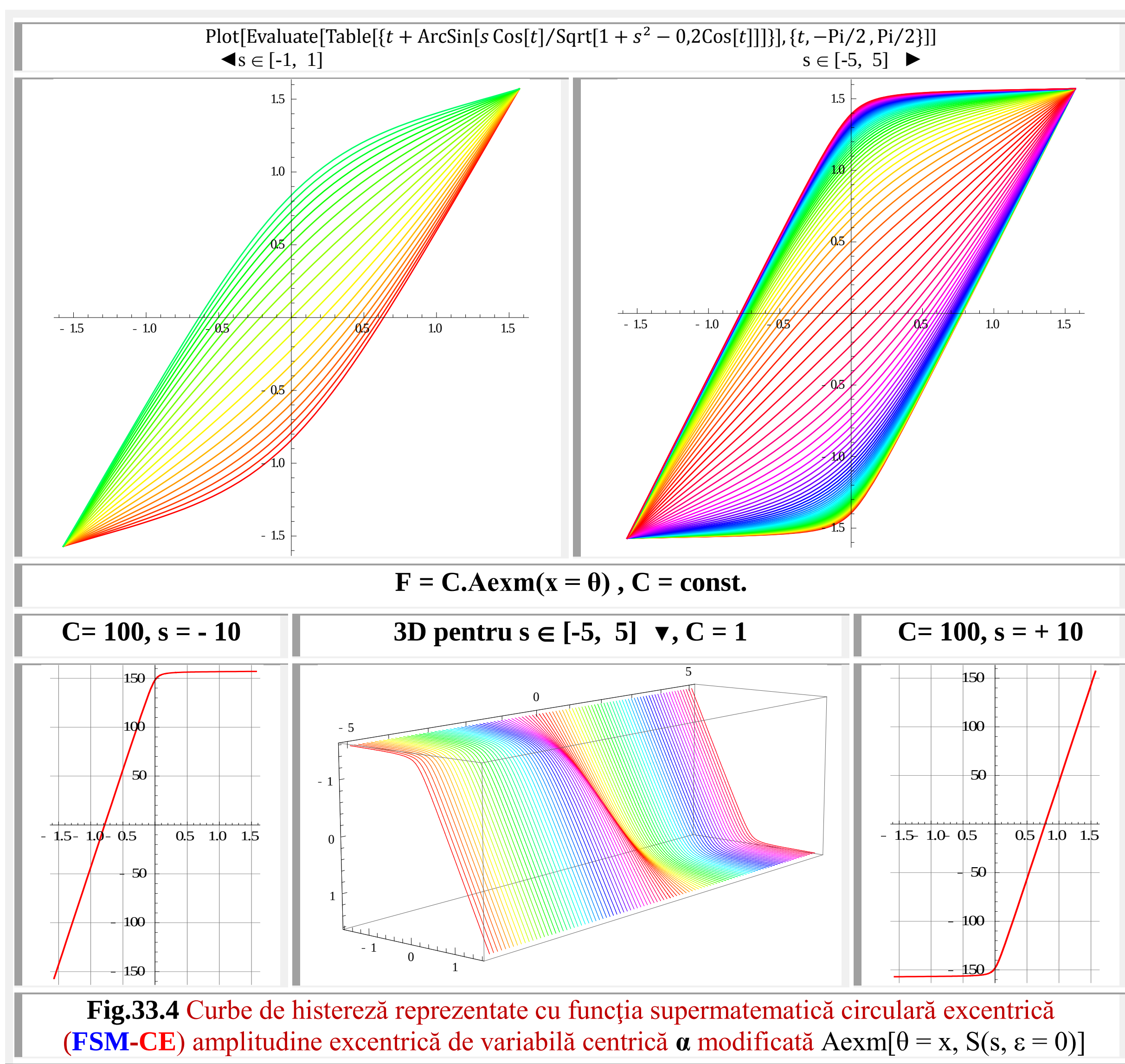


Fig.33.4 Curbe de histereză reprezentate cu funcţia supermatematică circulară excentrică (**FSM-CE**) amplitudine excentrică de variabilă centrică **α** modificată Aexm[θ = x, S(s, ε = 0)]

Dacă se continuă înregistrarea **curbei forţă-deformaţie** şi la scaderea forţelor de la F_M la zero (**F** = 0), adică la **descărcare**, sau chiar la valori negative, se obţine o altă curbă care, împreună cu curba de încărcare, determină **curba de histereză** (**CH**) a elementului sau a sistemului respectiv.

Pentru sisteme neliniare, sunt posibile o infinitate de tipuri de caracteristici elstice statice (**CES**) şi de curbe de histereză (**CH**), din care, sunt prezentate câteva în continuare.

Cele mai apropiate de realitate sunt tot cele reprezentate de **FSM-CE amplitudine excentrică** de variabilă centrică Aexα modificată, în sensul că, în ultimul termen al ecuaţiei (16), la numitor, în loc de 2s şi s ∈ [-1, +1] sau s ∈ [-5, +5] s-a întrodus o excentricitate numerică liniară constantă de s = 0.1, adică termenul 0,2 în loc de 2.s, aşa cum se poate vedea din relaţia de deasupra ▲ graficelor **CH neliniare** din **figura 33.4**.

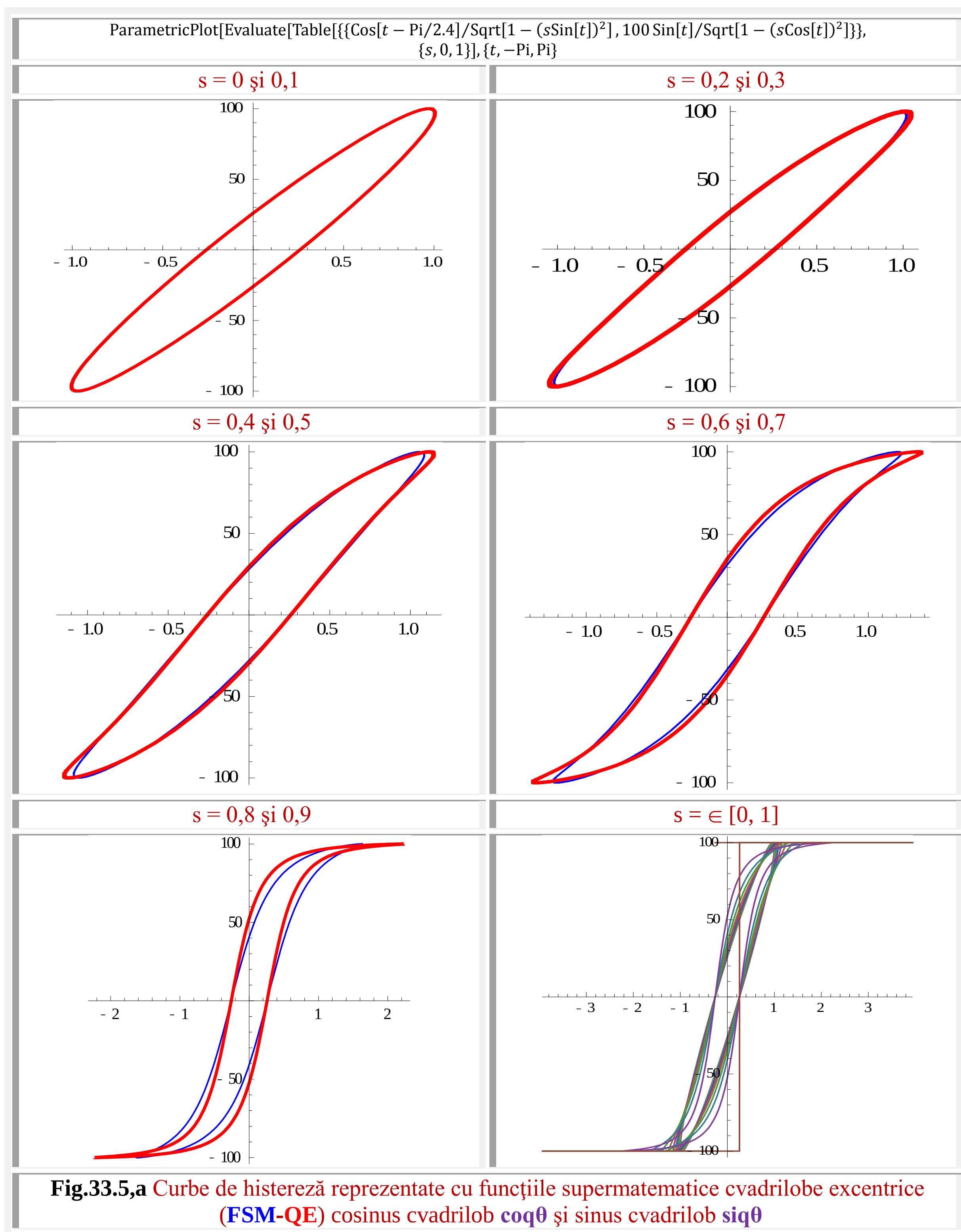


Fig.33.5,a Curbe de histereză reprezentate cu funcţiile supermatematice cvadrilobe excentrice (**FSM-QE**) cosinus cvadrilob **coqθ** şi sinus cvadrilob **siqθ**

Aşa cum se vede, mai clar în graficele din **3D** (**Fig. 33.4▼**), o curbă de histereză din **2D** (**Fig. 33.4▲**), are două ramuri: cea din stânga, care rezultă pentru excentricităţi liniare negative $s < 0$ sau de **s > 0** şi **ε = π** şi cea din dreapta pentru cele pozitive **s > 0** şi **ε = 0**.

Pentru a putea compara expresiile, se dă expresia **FSM-CE amplitudine excentrică Aexα**, care este

(33.16) $$\text{Aex}\alpha = \alpha(\theta) = \theta + \beta = \theta + \arcsin\frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{Rex\theta} = \theta + \arcsin\frac{s.\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s\cos(\theta-\varepsilon)}}$$

CH neliniare, frecvent întâlnite în electromagnetism (**Fig. 5**), pot fi obţinute, în ecuaţii parametrice, prin utilizarea funcţiilor cvadrilobe excentrice **coqx** şi C.**siqx**, pentru $\theta \equiv x$, cu expresiile

(33.17) $$\begin{cases} x = coq\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-s.\sin\theta}} \\ F = y = C.siq\theta = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-s.\cos\theta}} \end{cases}, pentru\ C = 100,$$

în care constanta **C** s-a ales **C** = 100, pentru a putea reprezenta şi **CH** din domeniul mecanic, ca forţă F în funcţie de deformaţia x: F(x), forţe considerabil mai mari decât deformaţiile.

Se observă ca energia disipată, proporţională cu suprafaţa închisă de **CH**, creşte cu scăderea excentricităţii unghiulare **ε**, fiind minimă pentru $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.

Pentru s = 0.9 şi pentru diverse valori ale **excentricităţii unghiulare ε**, se obţin curbele de histereză (**CH**) din figura **5,c**, dintre care, curba de $\varepsilon = \pi/2{,}4 \ldots \varepsilon = \pi/2{,}8$ seamănă leit cu o curbă de magnetizare reală, prezentată în [13, pag196].

Caracteristici elastice statice (**CES**) **neliniare** pot fi obţinute şi cu ajutorul familiei de funcţii sinus excentric de variabilă excentrică **sexθ** (**Fig. 6**) ca si prin programe speciale (**Fig.33.5,b**).

Pentru excentricitate liniară numerică negativă ($s < 0$), **CES** sunt moi sau regresive, iar pentru $s > 0$ o parte sunt sunt moi, cele din domeniul $s \in [0; 0{,}5]$, şi o altă parte sunt tari, cele din domeniul $s \in [0{,}5; 1]$. Pentru s = 0.5 **CES** sunt aparent liniare.

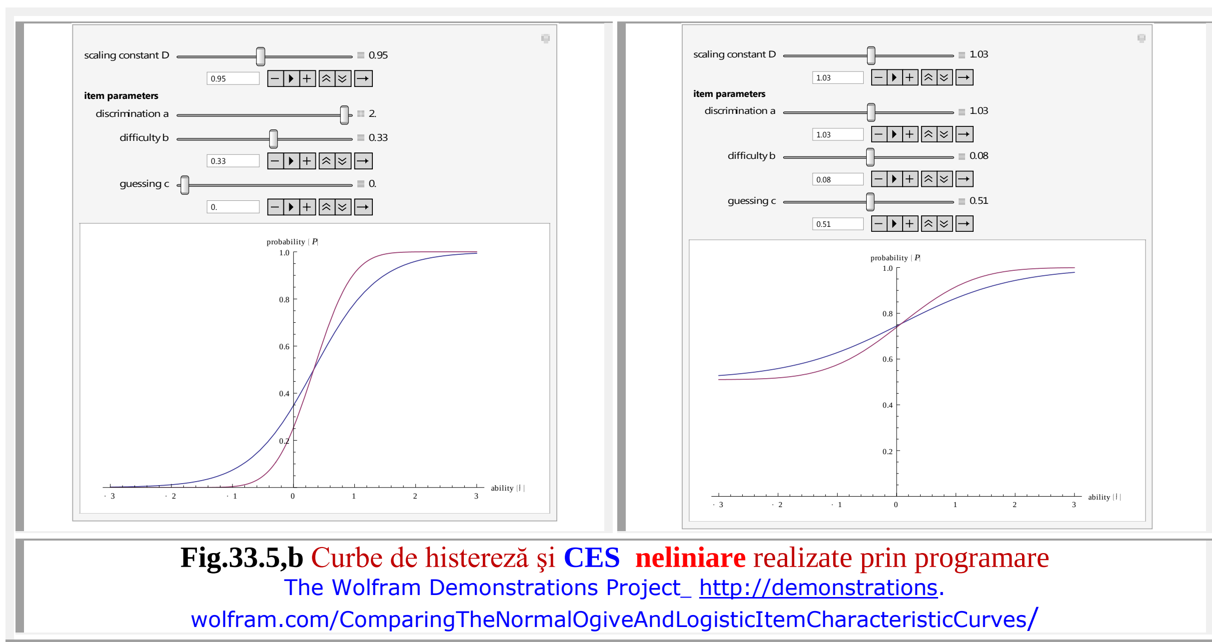


Fig.33.5,b Curbe de histereză şi **CES neliniare** realizate prin programare
The Wolfram Demonstrations Project_ http://demonstrations.
wolfram.com/ComparingTheNormalOgiveAndLogisticItemCharacteristicCurves/

Dacă elementele sunt **neliniare**, dar **legate în paralel**, (**Fig.33.7,a◄**) deformaţiile / deplasările tuturor elementelor sunt egale între ele / aceleaşi, inclusiv ale elementului echivalent, iar suma forţelor elementelor componente este egală cu forţa care solicită elementul echivalent.

FSM-CE amplitudine excentrică **aexθ** şi **Aexα** pot exprima nu numai **CES** liniare şi neliniare extrem de reale, dar chiar şi **CES liniare în trepte** sau **pe porţiuni / tronsoane** (**Fig. 33.6,b**). Astfel, curbele din **figura 33.6,c** reprezintă caracteristicile forţă-deplasare ale sistemului cu amortizare columbiană, conectat elastic, pentru o deplasare ciclică a izolatorului complet (◄ în stânga) şi pentru ansamblul amortizorului, adică împreună cu arcul liniar, prezentată în dreapta ► figurii [14, Vol.II, pag, 346, Fig. 30.12].

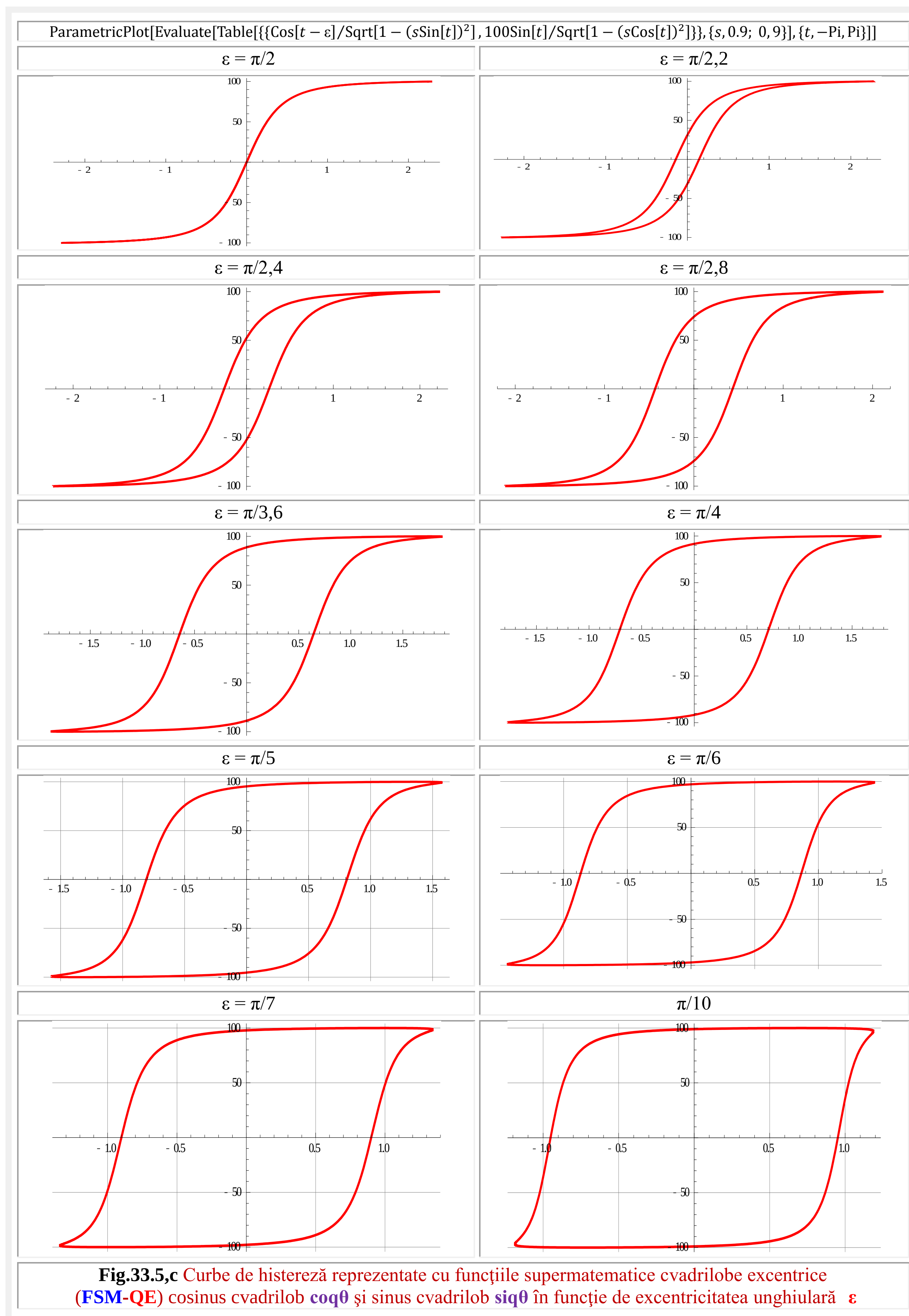


Fig.33.5,c Curbe de histereză reprezentate cu funcţiile supermatematice cvadrilobe excentrice (**FSM-QE**) cosinus cvadrilob **coqθ** şi sinus cvadrilob **siqθ** în funcţie de excentricitatea unghiulară **ε**

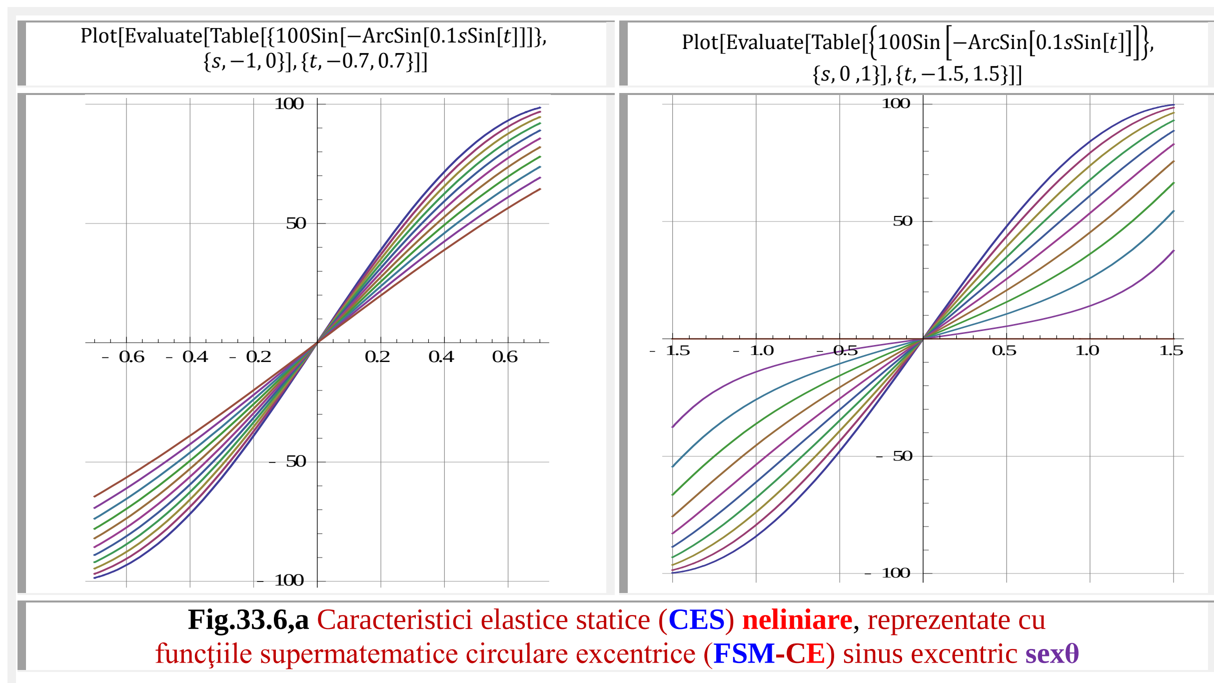


Fig.33.6,a Caracteristici elastice statice (**CES**) **neliniare**, reprezentate cu funcţiile supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) sinus excentric **sexθ**

Multe alte ecuaţii sunt existente în literatura de specialitate, din care cauză nu au mai fost prezentate aici. Ele sunt prezentate, ca exprimare analitică a **CES** neliniare, în referatul [2].

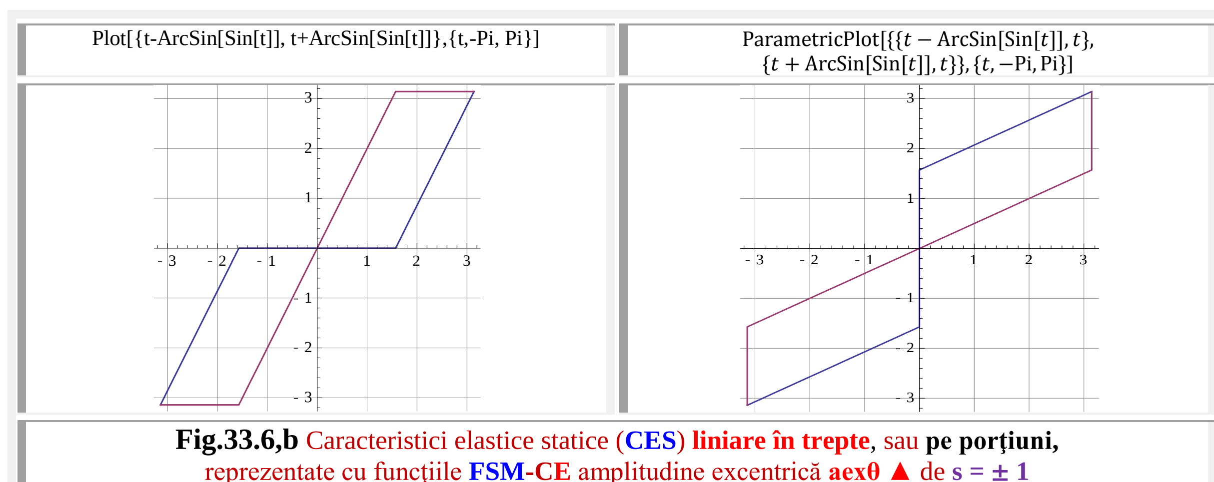


Fig.33.6,b Caracteristici elastice statice (**CES**) **liniare în trepte**, sau **pe porţiuni**, reprezentate cu funcţiile **FSM-CE** amplitudine excentrică **aexθ ▲** de **s = ± 1**

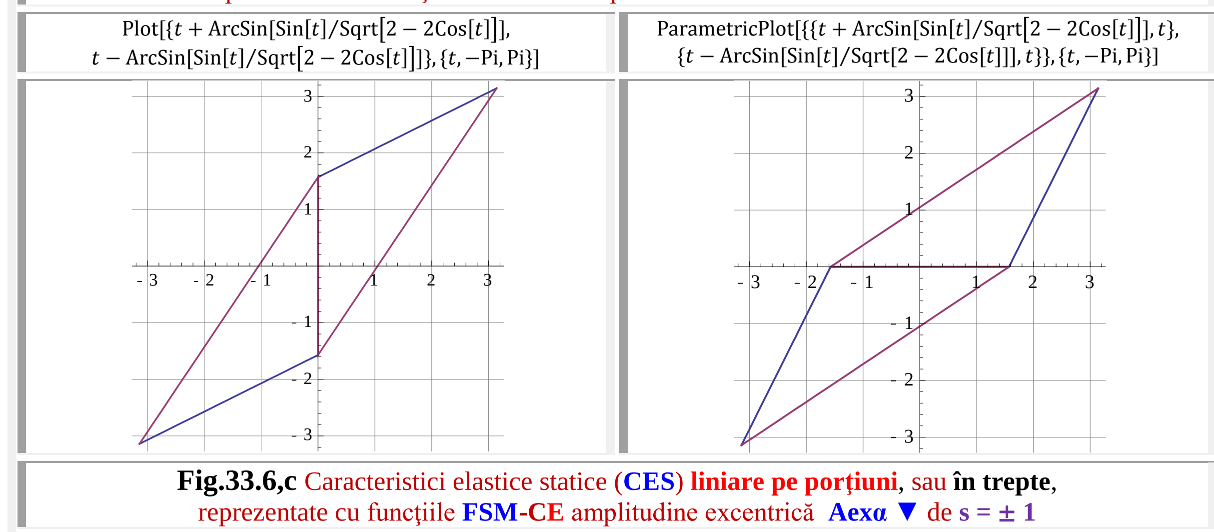


Fig.33.6,c Caracteristici elastice statice (**CES**) **liniare pe porţiuni**, sau **în trepte**, reprezentate cu funcţiile **FSM-CE** amplitudine excentrică **Aexα ▼** de **s = ± 1**

2. LEGAREA ÎN SERIE, ÎN PARALEL ŞI MIXT A ELEMENTELOR ELASTICE

Dacă elementele sunt **liniare**, determinarea analitică a elementului echivalent, mecanic sau electric, pentru diverse elemente legate în diverse moduri, **serie**, **paralel** şi **mixt** (**Fig.7**), nu ridică niciun fel de probleme.

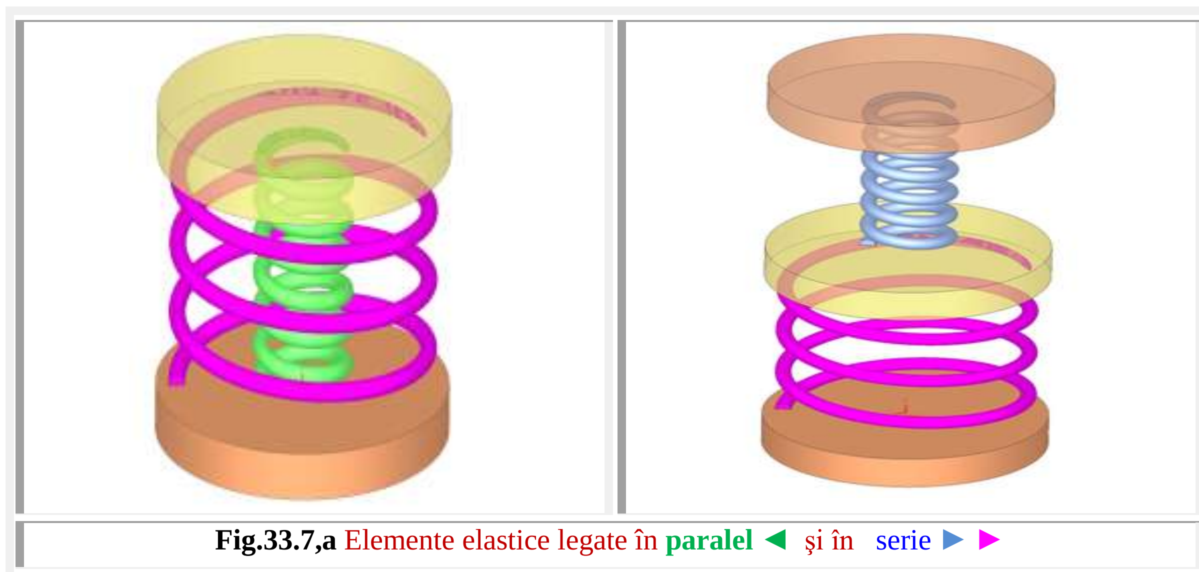


Fig.33.7,a Elemente elastice legate în **paralel** ◄ şi în serie ► ►

Sistemul, determinat de **n** elemente componente, ce au forţele elastice exprimate de ecuaţiile (1) sau (2) şi **CES neliniare**, dacă sunt legate în **paralel**, determinarea expresiei **CES** a sistemului, a elementului sumă sau echivalent, de asemenea nu ridică niciun fel de probleme.

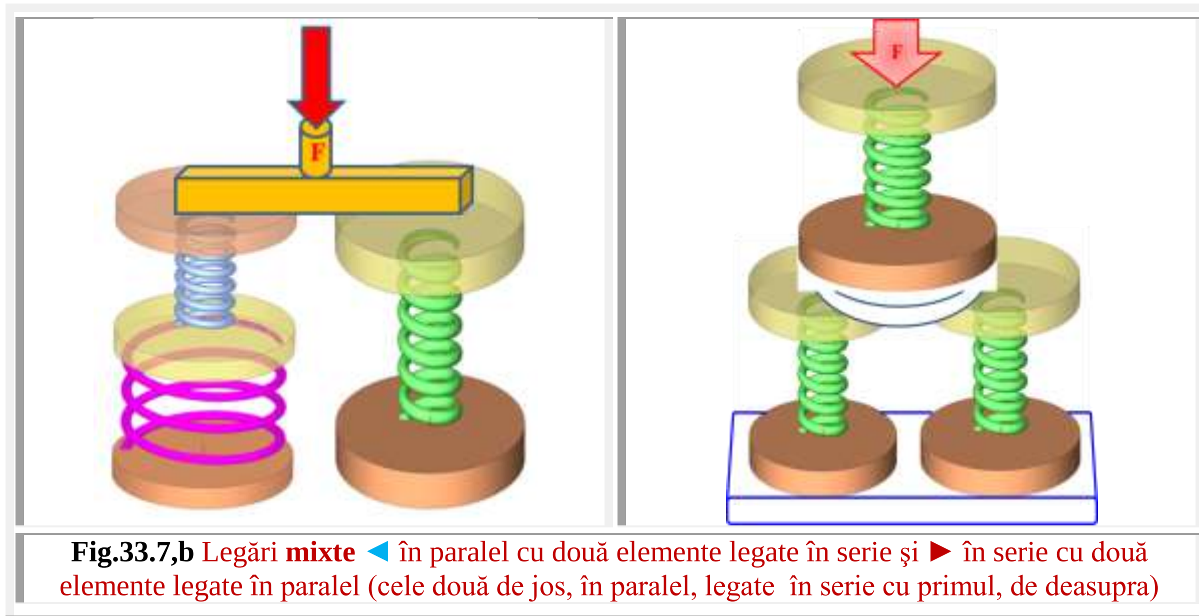


Fig.33.7,b Legări **mixte** ◄ în paralel cu două elemente legate în serie şi ► în serie cu două elemente legate în paralel (cele două de jos, în paralel, legate în serie cu primul, de deasupra)

În acest caz, al legării în **paralel**, forţa **F**, care solicită elementul sumă sau echivalent, reprezintă suma forţelor $\mathbf{F_i}$ ale elementelor componente, iar deformaţia elementului sumă **x**, ca şi deformaţiile $\mathbf{x_i}$ ale celor **n** componente sunt aceleaşi (**Fig.33.7,a** ◄), adică

$$(33.18)\quad \begin{cases} \boldsymbol{x} = x_i \Rightarrow \boldsymbol{x} = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n \\ \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i \Rightarrow \boldsymbol{F} = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n \end{cases}$$

Pentru ca niciun arc să nu aibă deformaţii suplimentare şi să respecte relaţiile (18), este necesar ca ele să fie de aceeaşi lungime iniţială maximă $\mathbf{L_M}$, în stare netensionată, la F = x = 0.

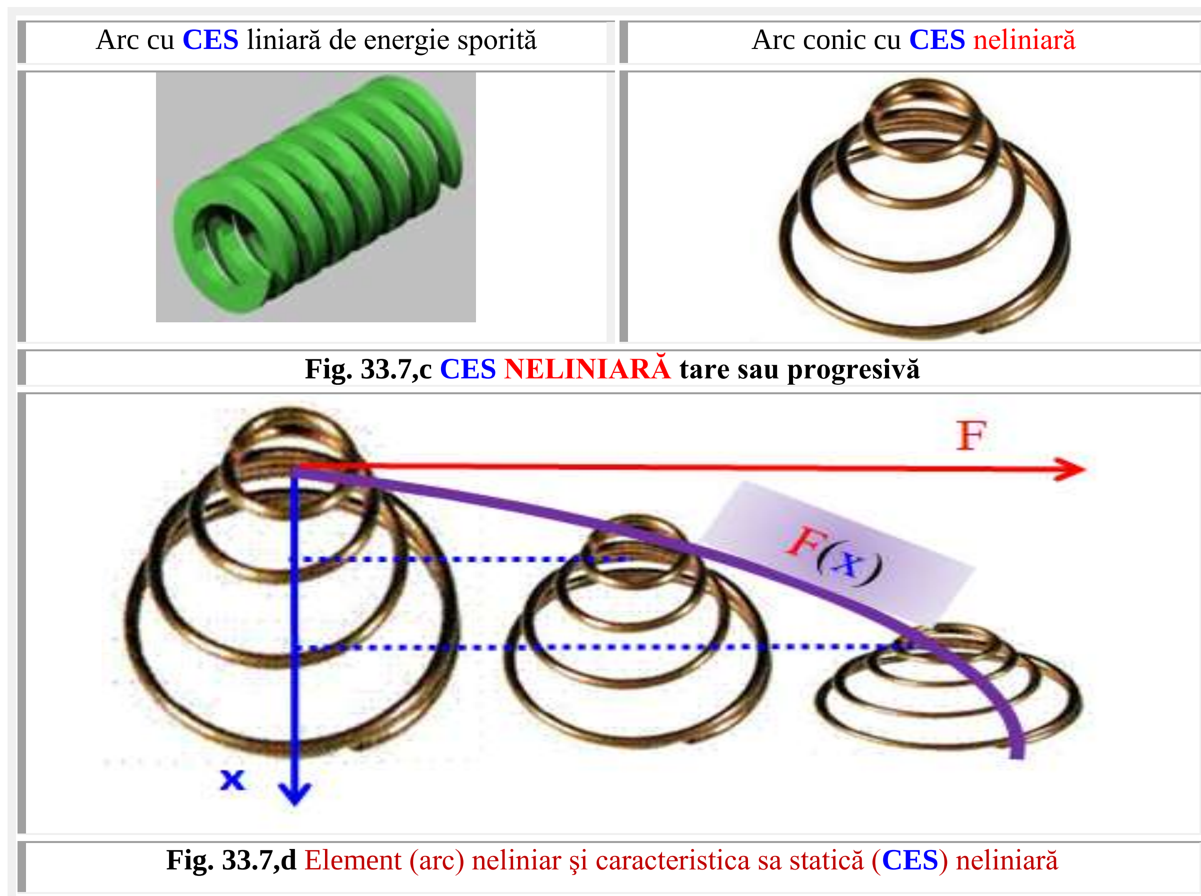


Fig. 33.7,c CES NELINIARĂ **tare sau progresivă**

Fig. 33.7,d Element (arc) neliniar şi caracteristica sa statică (**CES**) neliniară

Pentru toate tipurile de elemente şi pentru toate tipurile de legări / conexiuni între ele, există **metode grafice**, consacrate, de determinare a elementului sumă, a două sau mai multe elemente componente.

În literatura mondială de specialitate, se cunosc **metode grafice** de determinare a caracteristicii elastice **neliniare**, în cazul legării elementelor în serie, dar **nu se cunoaştea expresia analitică** a elementului chivalent, de compunere a două sau mai multe elemente elastice **neliniare**, în cazul **legării în serie** (**Fig. 33.7,a** ► ►).

În cazul legării în **paralel**, graficele elementelor componente neliniare, defalcate / descompuse în părţile lor liniare şi în cele neliniare, zise neliniare **pure**, pentru că nu au şi unul sau mai mulţi termeni liniari, sunt prezentate în **figura 33.8,a**.

Având atât termen liniar, de forma $\mathbf{F_{Li} = k_i x_i}$, cât şi termen neliniar, de forma $\mathbf{F_{Ni}} = \mu_i x_i^p$, elementele neliniare, de forma $\mathbf{F_i} = \mathbf{F_{Li}} + \mathbf{F_{Ni}}$, au fost denumite neliniare **impure**.

Se constată că însumarea se poate face direct sau pe componente.

Astfel, componenta liniară sumă $\mathbf{F_L}$ va fi suma componentelor liniare $\mathbf{F_{Li}}$ ale elementelor componente, iar componenta neliniară sumă, adică $\mathbf{F_N}$, va fi suma componentelor neliniare $\mathbf{F_{Ni}}$, adică

$$\begin{cases} F_L = \sum_1^n F_{Li} \\ F_N = \sum_1^n F_{Ni} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{F} = F_L + F_N \rightarrow \mathbf{F} = \sum_1^n F_{Li} + \sum_1^n F_{Ni}, \tag{33.19}$$

ceea ce rezultă şi se poate verifica în **figura 33.8,a**.

Acest neajuns, al inexistenţei unei relaţii de calcul a elementului sumă, în cazul legarii în serie a elementelor **neliniare**, a fost eliminat în anul 1978, an în care, prin comunicarea [1], autorul a prezentat, în premieră mondială, relaţia de calcul şi metoda analitică de calcul a **CES** neliniare legate în serie, metodă pe care a dezvoltat-o apoi în referatul de doctorat [2] cu privire la "Rigiditatea sistemelor tehnologice elastice"

Legarea în serie a două elemente elastice (arcuri) este prezentată în dreapta **figurii 33.7,a** ►►, iar **metoda grafică** de determinarea a **CES** echivalente, în cazul legării în **serie**, este prezentată în **figura 33.8,b**.

Această descompunere, în părţi **liniare** şi în părţi **neliniare pure**, stă la baza obţinerii, după mulţi ani de trudă, a relaţiei exacte de însumare a elementelor neliniare şi în cazul nesoluţionat al **legării în serie**.

LEGAREA ÎN PARALEL

$\text{Plot}[\{x+2, 2x, 3x, x-0.2x^3+2, x-0.2x^3+1.7, 1.7, 2x-0.3x^3, 3x-0.5x^3, -0.2, -0.5, -0.2x^3, -0.3x^3-0.2, -0.5x^3\}, \{x,0,1\}]]$

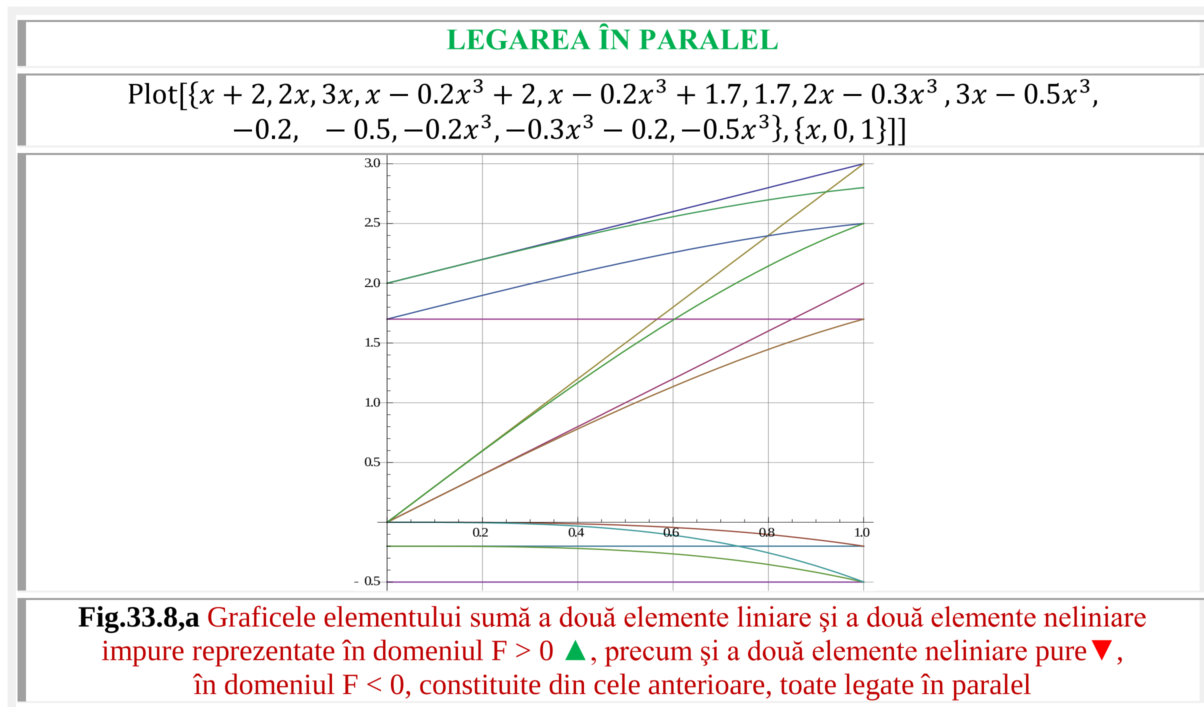


Fig.33.8,a Graficele elementului sumă a două elemente liniare şi a două elemente neliniare impure reprezentate în domeniul F > 0 ▲, precum şi a două elemente neliniare pure ▼, în domeniul F < 0, constituite din cele anterioare, toate legate în paralel

LEGAREA ÎN SERIE

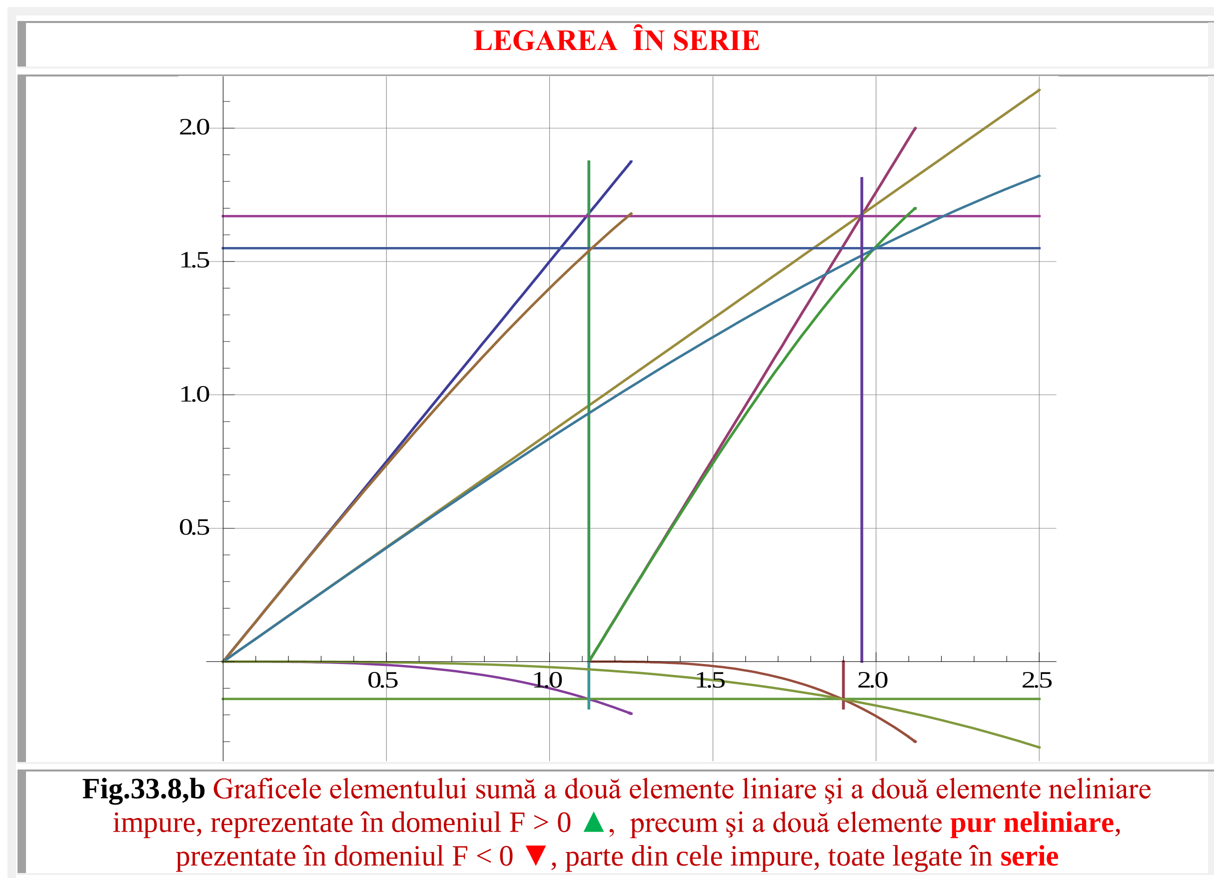


Fig.33.8,b Graficele elementului sumă a două elemente liniare şi a două elemente neliniare impure, reprezentate în domeniul F > 0 ▲, precum şi a două elemente **pur neliniare**, prezentate în domeniul F < 0 ▼, parte din cele impure, toate legate în **serie**

Acest succes este şi rodul aplicării principiului lui **Fred Menger** "***Dacă torturezi datele suficient, acestea îţi vor mărturisi aproape totul***". Astfel s-a dovedit, încă odată, că acest principiu este adevărat şi, totodată, că "***intuiţia este o ştiinţă exactă***".

Mai "torturat" decât datele, a fost autorul. În anii '60 … '70, nedispunând de calculatoare numerice, nici măcar de buzunar, graficele **CES** neliniare, pentru verificarea ipotezelor (în cadrul acţiunii de "***torturararea datelor***"), se realizau / ridicau pe hartie milimetrică, după calcule efectuate manual. Ce vremuri.. N-aveam peste 77 de ani, eram ambiţios şi plin de energie. Ca şi acum.

Şi a fost găsită / dedusă relaţia generală pentru însumarea elementelor cu **CES pur neliniare**

(33.20)

$$\mu_\Sigma = \frac{\mu_1 * \mu_2}{\left(\sqrt[p]{\mu_1} + \sqrt[p]{\mu_2}\right)^p}$$

Relaţia (20) se mai poate scrie sub forma

(33.21) $$\frac{1}{\sqrt[p]{\mu_\Sigma}} = \frac{1}{\sqrt[p]{\mu_1}} + \frac{1}{\sqrt[p]{\mu_2}}$$

În acest fel, expresia **CES** a elementului rezultant sau sumă a două elemente componente neliniare impure va fi

(33.22) $$\mathbf{F}_\Sigma = k_\Sigma\, x + \mu_\Sigma x^p = \frac{k_1 * k_2}{k_1 + k_2}\, x + \frac{\mu_1 * \mu_2}{\left(\sqrt[p]{\mu_1} + \sqrt[p]{\mu_2}\right)^p} x^p$$

Odată gasită relaţia, care verifica ipotezele, demonstrarea adevărului ei nu mai ridică probleme insurmontabile. Iar însumarea elementelor **neliniare impure**, legate în **serie**, nici atât, deoarece însumarea părţii liniare era deja cunoscuta ca fiind

(33.22) $$\frac{1}{k_\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots + \frac{1}{k_n}$$

şi, pentru numai două elemente, rezultă

(33.24) $$\frac{1}{k_\Sigma} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \rightarrow \quad k_\Sigma = \frac{k_1 * k_2}{k_1 + k_2}$$

Astfel că elementul sumă a două elemente **neliniare impure** legate în **serie** va fi

(33.25) $$F_\Sigma = F_L + F_{PN} = k_\Sigma . x + \mu_\Sigma x^p = \frac{k_1 * k_2}{k_1 + k_2}\, x + \frac{\mu_1 * \mu_2}{\left(\sqrt[p]{\mu_1} + \sqrt[p]{\mu_2}\right)^p} x^p$$

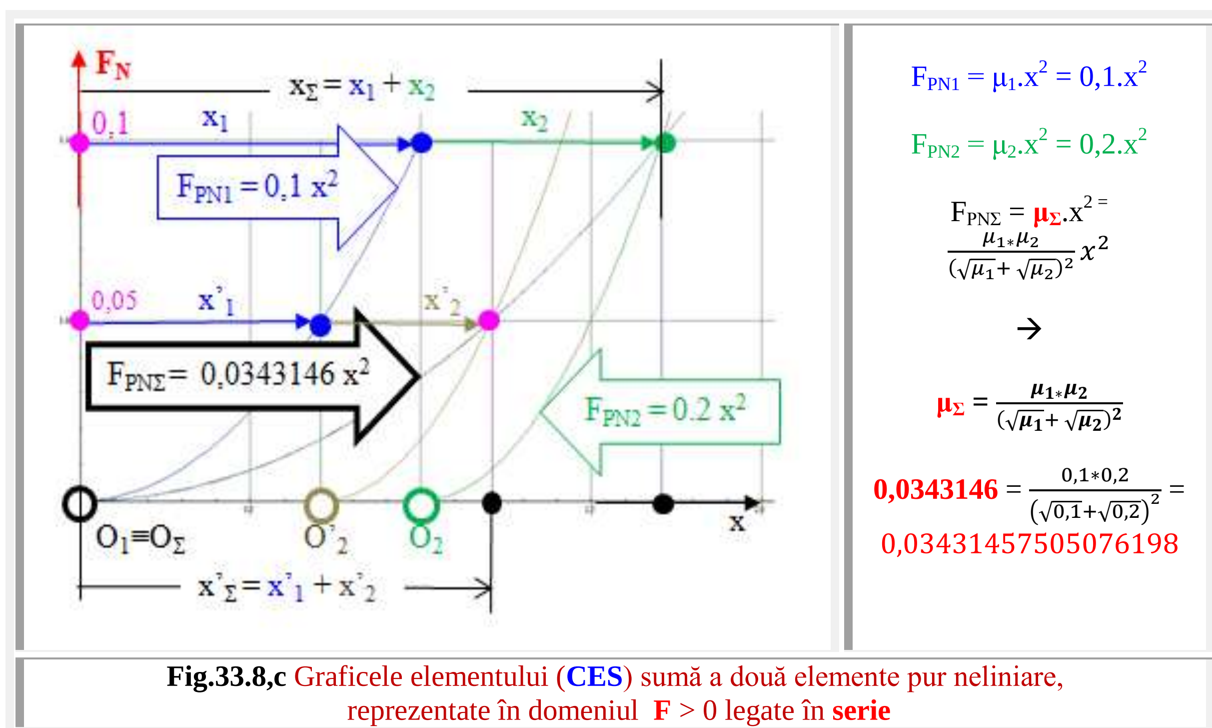


Fig.33.8,c Graficele elementului (**CES**) sumă a două elemente pur neliniare, reprezentate în domeniul **F** > 0 legate în **serie**

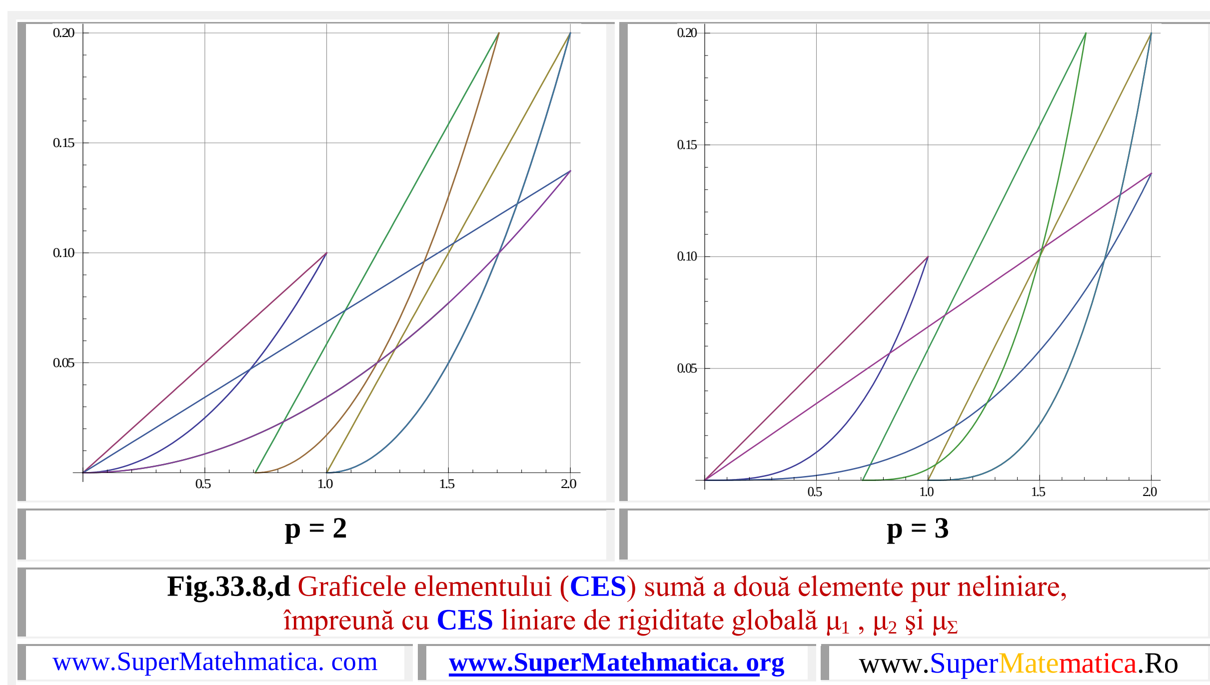


Fig.33.8,d Graficele elementului (**CES**) sumă a două elemente pur neliniare, împreună cu **CES** liniare de rigiditate globală μ_1 , μ_2 şi μ_Σ

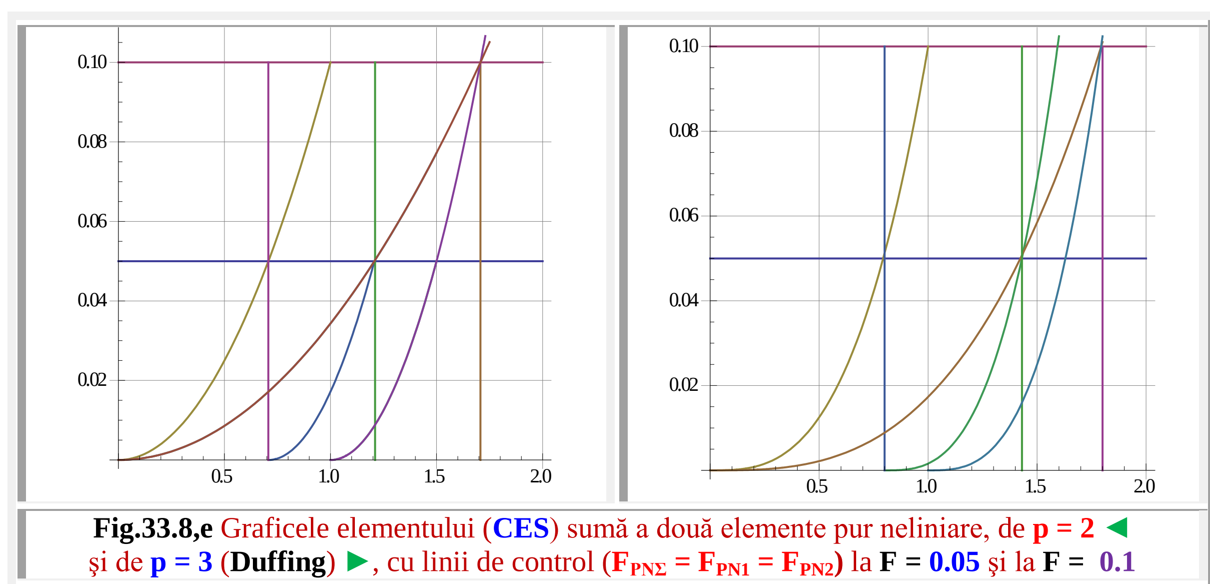


Fig.33.8,e Graficele elementului (**CES**) sumă a două elemente pur neliniare, de **p = 2** ◄ şi de **p = 3** (**Duffing**) ►, cu linii de control ($F_{PN\Sigma} = F_{PN1} = F_{PN2}$) la **F = 0.05** şi la **F = 0.1**

Tabel 33.1 Verificarea cu programul **Mathematica 8** a datelor			
Fig.33.8,e ◄		**p = 2**	
$x_1 = \pm 3,1622776601683795\sqrt{F}$		$x_2 = \pm 2,23606797749979\sqrt{F}$	
F	x_1	x_2	x
0.05	0.7071067811865476	0.5	1.2071067811865477
0.075	0.8660254037844386	0.6123724356957945	1.478397839480233
0.1	1	0.7071067811865476	1.707106781186548

Relaţia (23) este valabilă numai pentru elemente elastice omogene, respectiv care au partea **pur neliniară** de aceeaşi putere / exponent **p**.

Relaţiile (20) şi apoi (23) au putut fi găsite pornind de la urmatoarele ipoteze:

- Elementele **liniare** au ca sumă tot un element **liniar,** ipoteză valabilă şi cunoscută;
- Elementele **pur neliniare** au ca sumă tot un element **pur neliniar** (**Fig.33.8,c**), toate de acelaşi **tip** (exponent / putere - **p** -);
- Elementul **neliniar impur** sumă este de aceeaşi formă (exponent / putere) ca şi elementele **impure neliniare** componente.
- Coeficienţii μ_i ai elementelor componente ale unui sistem elastic, ca şi al elementului sumă μ_Σ reprezintă **rigiditatea globală** a elementelor pur neliniare pentru o deformaţie unitară, adică pentru valoarea de x = 1 (**Fig. 33.8,d**);
- Elementul sumă are aceeaşi formă / expresie ca şi elementele componente, adică, mai explicit, dacă elementele componente, legate în serie, sunt **toate** de forma $F_i = k_i + \mu_i.x^p$, atunci şi elementul sumă are aceeaşi forma $F_\Sigma = k_\Sigma + \mu_\mu.x^p$;

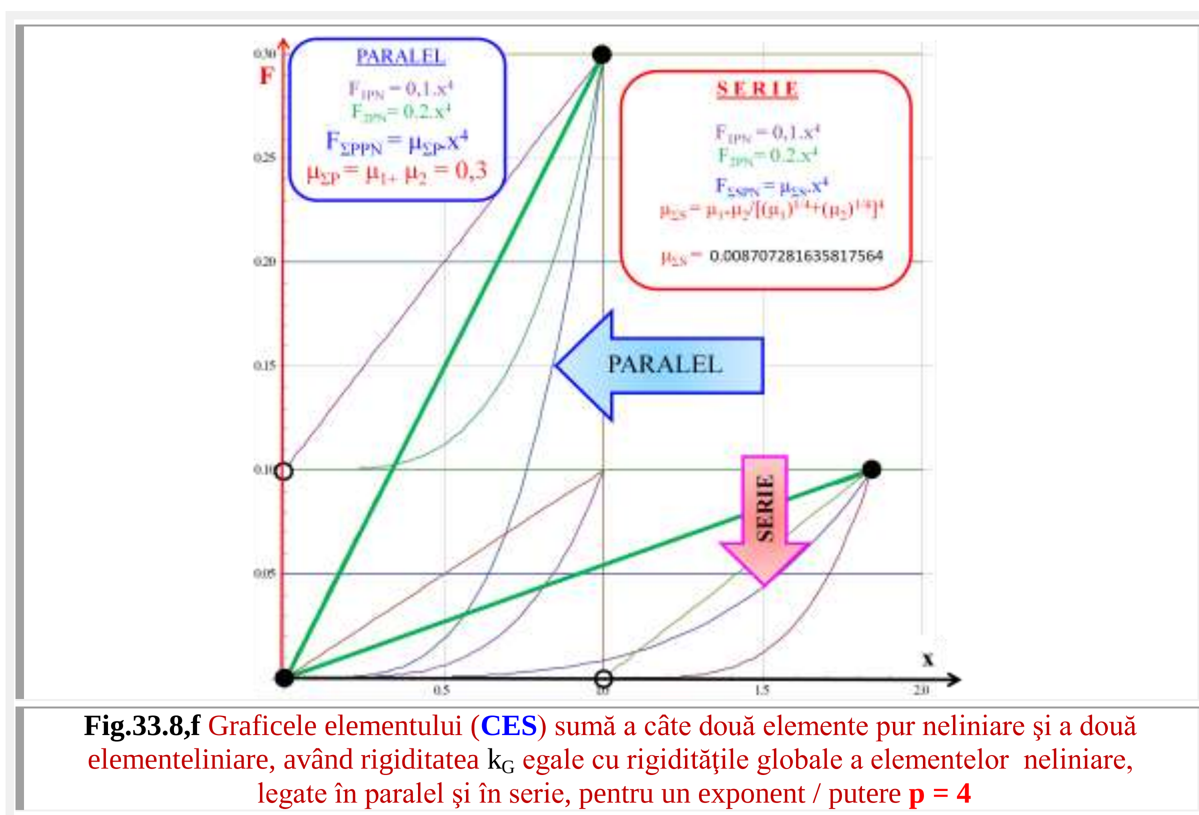


Fig.33.8,f Graficele elementului (**CES**) sumă a câte două elemente pur neliniare şi a două elementeliniare, având rigiditatea k_G egale cu rigidităţile globale a elementelor neliniare, legate în paralel şi în serie, pentru un exponent / putere **p = 4**

3 DEMONSTRAREA RELAŢIEI (33.20) PENTRU p = 3 RIGIDITATE LOCALĂ şi RIGIDITATE GLOBALĂ

Se ştie că, tangenta într-un punct **P**(**F**, x) la o curbă (**CES** = **F**(x)) este dată de **derivata** $\frac{dF}{dx}$ a ecuaţiei **F**(x) care descrie această curbă. Pentru deplasări sau, mai precis, pentru deformaţii mici, ţinând cont că x reprezintă o deformaţie elastică neliniară, în jurul punctului **P**, curba poate fi aproximată cu tangenta în acest punct, adică cu **rigiditatea locală** [1],[2],[11],[12] sau **rigiditatea tangentă** [15], [16] din punctul **P**(**F**, x), notată cu $\mathbf{R_L}$ sau cu $\mathbf{k_L}$ şi care va fi

(33.26) $$\boldsymbol{R_L} \equiv k_L = \frac{dF}{dx}\Big|_P$$

Pentru **CES Duiffing** date de relaţiile (33.2) **rigidităţile locale** sau **tangente** sunt

(33.27) $$\begin{cases} k_{L1} = k_1 \pm 3.x^2 \\ k_{L2} = k_2 \pm 3.x^2 \\ k_{L\Sigma} = k_\Sigma \pm 3.x^2 \end{cases}$$ şi, în general, pentru un exponent **p** $$\begin{cases} k_{L1} = k_1 \pm p.x^{p-1} \\ k_{L2} = k_2 \pm p.x^{p-1} \\ k_{L\Sigma} = k_\Sigma \pm p.x^{p-1} \end{cases}$$

Din relaţia (27) rezultă că, în origine, adică în punctul P ≡ O(0,0), în care x = F = 0, rigiditatea locală R_L este chiar rigiditatea sau constanta elastică k a elementelor cu **CES neliniare impure** în origine, care este şi rigiditatea sau constanta elastică **k** a componentelor sau a părţii lor **liniare** (**k_1, k_2, k_Σ**), adică, pentru x = 0 , indiferent de valoarea exponentului **p** rezultă

(33.28) $$\begin{cases} k_{L1}(0) = k_1 \\ k_{L2}(0) = k_2 \\ k_{L\Sigma}(0) = k_\Sigma \end{cases}$$

Rigidităţile locale în originea O(0,0), adica pentru x = 0, sunt în relaţiile cunoscute de la elemente liniare legate în serie, adică

(33.29) $$\frac{1}{k_{L\Sigma}} = \frac{1}{k_{L1}} + \frac{1}{k_{L2}} \quad \text{sau} \quad k_{L\Sigma} = \frac{k_{L1} * k_{L2}}{k_{L1} + k_{L2}}$$

Din O în P se poate ajunge prin deplasarea pe **CES** sau pe dreapta care uneşte cele două puncte şi care este secanta OP.

Coeficientul unghiular al acestei drepte secante este dat de **diferenţiala** funcţiei sau a **CES** în punctul P, adică, de **rigiditatea în ansamblu** sau pe tot domeniul de deformare a elementului elastic

(33.30) $$R_G = \frac{\Delta F}{\Delta x}\Big|_P$$

şi poartă denumirea de **rigiditate globală** [16],[11], [12] sau de **rigiditate secantă** [15],[17],[12].

Pentru **CES Duiffing** date de relaţiile (2) **rigidităţile globale** sau **secante** sunt

(33.31) $$\begin{cases} R_{G1} = \frac{F_1}{x} = k_1 \pm \mu_1 . x^2 \\ R_{G2} = \frac{F_2}{x} = k_2 \pm \mu_2 . x^2 \\ R_{G\Sigma} = \frac{F_\Sigma}{x} = k_\Sigma \pm \mu_\Sigma . x^2 \end{cases}$$

De asemenea, se observă că **CES** pot fi mai sintetic exprimate cu ajutorul **rigidităţii globale**, prin relaţiile F(x) = k_G(x).x astfel

(33.32) $$\begin{cases} F_1 = (k_1 \pm \mu_1 . x^2) . \boldsymbol{x} \\ F_2 = (k_2 \pm \mu_2 . x^2) . \boldsymbol{x} \\ F_\Sigma = (k_\Sigma \pm \mu_\Sigma . x^2) . \boldsymbol{x} \end{cases}$$

ceea ce revine la a da pe **x** factor comun din expresiile **CES neliniare impure** (2).

Între cele două tipuri de rigidităţi exista următoarele dependenţe / relaţii

(33.33) $$k_G = \frac{1}{x}\int_0^x k_L(x).dx \quad \text{şi}$$

(33.34) $$k_L = x\,\frac{d(k_G)}{dx} + k_G \quad ,$$

iar **CES** se poate exprima şi prin relaţia

(33.35) $$F(x) = \int_0^x k_L(x).dx.$$

Cedarea **w** este inversa rigidităţii, adică

(33.36) **w** = $\boldsymbol{\frac{1}{R}} = \boldsymbol{\frac{1}{k}}$, astfel că, pentru **CES neliniare impure** (2) **Duiffing**, **cedarea locală** este

(33.37) $$\begin{cases} w_{L1} = \frac{1}{k_1 \pm 3.x^2} \\ w_{L2} = \frac{1}{k_2 \pm 3.x^2} \\ w_{L\Sigma} = \frac{1}{k_\Sigma \pm 3.x^2} \end{cases}, \quad \text{pentru } \mathbf{p} = 3 \text{ şi,în general,} \quad \begin{cases} w_{L1} = \frac{1}{k_1 \pm p.x^{p-1}} \\ w_{L2} = \frac{1}{k_2 \pm p.x^{p-1}} \\ w_{L\Sigma} = \frac{1}{k_\Sigma \pm p.x^{p-1}} \end{cases}$$

iar **cedarea globală** va fi

(33.38) $$\begin{cases} w_{G1} = \frac{1}{k_1 \pm x^2} \\ w_{G2} = \frac{1}{k_2 \pm x^2} \\ w_{G\Sigma} = \frac{1}{k_\Sigma \pm x^2} \end{cases} \quad \text{şi pentru un } \mathbf{p} \text{ oarecare} \quad \begin{cases} w_{G1} = \frac{1}{k_1 \pm x^{p-1}} \\ w_{G2} = \frac{1}{k_2 \pm x^{p-1}} \\ w_{G\Sigma} = \frac{1}{k_\Sigma \pm x^{p-1}} \end{cases}$$

La legarea în **serie**, pentru aceleaşi forţe, adică

(33.39) $F_1 = F_2 = F_\Sigma$, → $k_1 x_1 \pm \mu_1 x_1^3 = k_2 x_2 \pm \mu_2 x_2^3 = k_\Sigma x \pm \mu_\Sigma x_\Sigma^3$

iar cedarea elementului sumă este egală cu suma cedărilor elementelor componente, adică

(33.40) $w_\Sigma = w_1 + w_2$ şi $x_\Sigma = x_1 + x_2$,

Deoarece relaţiile (39) sunt universal valabile, atât pentru pentru sisteme liniare, cât şi pentru cele neliniare, ele sunt valabile şi pentru rigidităţile locale în origine [liniare **k_1, k_2, k_Σ** -rel (28)-] cât şi pentru cele globale, în oricare punct de pe **CES**, în care se consideră egalităţile (39), deoarece **P** este comun **CES** şi dreptei OP, în punctul extrem al dreptei, dreaptă de pantă k_G.

Pentru **CES neliniare impure** (2) **Duiffing**, rezultă că egalităţile (39) sunt valabile atât pentru partea liniară, adica

(33.41) $k_1 x_1 = k_2 x_2 = k_\Sigma x$,

cât şi pentru componentele pur neliniare simultan, adică

(33.42) $\pm \mu_1 x_1^3 = \pm \mu_2 x_2^3 = \pm\mu_\Sigma x^3$, în punctele în care $F_1 = F_2 = F_\Sigma$, adică în toate secţiunile paralele cu axa Ox, aşa cum se poate verifica în **figurile 8**.

Din relaţiile (42) rezultă

(33.43) $$\begin{cases}\mu_\Sigma = \mu_1\left(\frac{x_1}{x}\right)^3\\ \mu_\Sigma = \mu_2\left(\frac{x_2}{x}\right)^3\end{cases}, \text{ din care rezultă } \rightarrow \mu_\Sigma = \mu_1\left(\frac{x_1}{x}\right)^3 = \mu_2\left(\frac{x_2}{x}\right)^3$$

iar din (29), ca şi din (41)

(33.44) $$\begin{cases}\frac{x_1}{x} = \frac{k_\Sigma}{k_1}\\ \frac{x_2}{x} = \frac{k_\Sigma}{k_2}\end{cases} \rightarrow x k_\Sigma = x_1 k_1 = x_2 k_2 \rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

Din relaţiile (42) se obţine

(33.45) $$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt[3]{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$ şi, ţinând cont de relaţia (44)

(33.46) $$\frac{k_2}{k_1} = \sqrt[3]{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \quad \text{şi} \quad \frac{k_1}{k_2} = \sqrt[3]{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

Înlocund expresiile (44) în (43) şi ţinând cont de relaţia (29), rezultă

(33.46) $$\begin{cases}\mu_\Sigma = \mu_1\left(\frac{k_\Sigma}{k_1}\right)^3 = \mu_1\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}\right)^3 = \mu_1\left(\frac{1}{\frac{k_1}{k_2}+1}\right)^3\\ \mu_\Sigma = \mu_2\left(\frac{k_\Sigma}{k_2}\right)^3 = \mu_2\left(\frac{k_1}{k_1+k_2}\right)^3 = \mu_2\left(\frac{1}{1+\frac{k_2}{k_1}}\right)^3\end{cases}$$

(33.47) $$\mu_\Sigma = \mu_1\left(\frac{1}{\frac{k_1}{k_2}+1}\right)^3 = \mu_2\left(\frac{1}{1+\frac{k_2}{k_1}}\right)^3 \rightarrow \mu_\Sigma = \mu_1\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\mu_1}{\mu_2}}+1}\right)^3 = \mu_2\left(\frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{\mu_2}{\mu_1}}}\right)^3$$

din care rezultă imediat, relaţia mult căutată

(33.48) $$\mu_\Sigma = \mu_1\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\mu_1}{\mu_2}}+1}\right)^3 = \mu_1\left(\frac{\sqrt[3]{\mu_2}}{\sqrt[3]{\mu_1}+\sqrt[3]{\mu_2}}\right)^3 = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\left(\sqrt[3]{\mu_1}+\sqrt[3]{\mu_2}\right)^3}$$

QED.

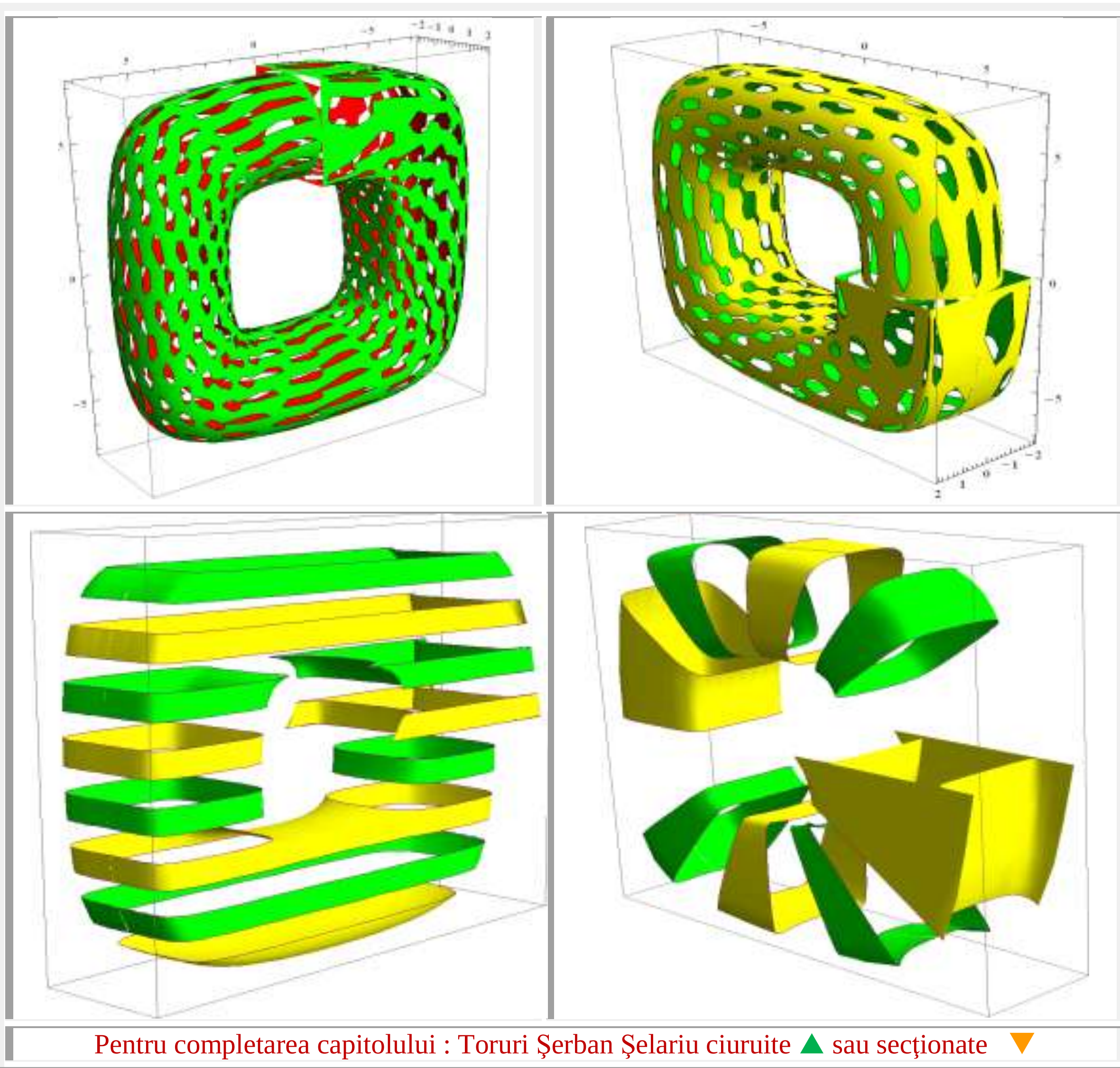
În [2] sunt tratate şi legările în serie ale elementelor alastice neliniare cu elemente elastice liniare ca şi legarea / compunerea în serie a elementelor elastice neliniare împure de exponenţi **p** diferiţi.

BIBLIOGRAFIE PENTRU CAPITOUL 33

1	**Şelariu Mircea Eugen**	**DETERMINAREA ANALITICĂ a CARACTERISTICII ELASTICE STATICE ECHIVALENTE a SISTEMELOR cu ELEMENTE NELINIARE LEGATE în SERIE**	Comunicările celei de a II-a Conf. P.U.P.R. , Timişoara, 1978,pag. 161 ... 168
2	**Şelariu Mircea Eugen**	**RIGIDITATEA SISTEMELOR TEHNOLOGICE ELASTICE**	Referat Doctorat 1976, 82 pagini

3	**Şelariu MirceaEugen**	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE**	Com. I Conferinţă Naţională de Vibraţii în Construcţia de Maşini, Timişoara , 1978, pag.101...108.
4	**Şelariu MirceaEugen**	**FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE şi EXTENSIA LOR.**	Bul .St.şi Tehn. al I.P. "TV" Timişoara, Seria Mecanică, Tomul 25(39), Fasc. 1-1980, pag. 189...196
5	**Şelariu MirceaEugen**	**STUDIUL VIBRAŢIILOR LIBERE ale UNUI SISTEM NELINIAR, CONSERVATIV cu AJUTORUL FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE**	Com. I Conf. Naţ. Vibr.în C.M. Timişoara,1978, pag. 95...100
6	**Şelariu Mircea Eugen**	**DETERMINAREA ANALITICĂ a CARACTERISTICII ELASTICE STATICE ECHIVALENTE a SISTEMELOR cu ELEMENTE NELINIARE LEGATE în SERIE**	Comunicările celei de a II-a Conf. P.U.P.R. , Timişoara, 1978,pag. 161 ... 168
7	**Şelariu Mircea Eugen**	**QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**	The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 … 82
8	**Şelariu MirceaEugen**	**DETERMINAREA ORICÂT DE EXACTĂ A RELAŢIEI DE CALCUL A INTEGRALEI ELIPTICE COMPLETE DE SPETA ÎNTÂIA K(k)**	Bul. VIII-a Conf. de Vibr. Mec., Timişoara, 1996, Vol III, pag.15 ... 24.
9	**Şelariu MirceaEugen**	**FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ CA SOLUŢII ALE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE**	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţa de Inginerie Managerială şi Tehnologică, Timişoara 1998, pag 557…572
10	**Şelariu MirceaEugen**	**INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ**	Lucr. Simp. Naţional "Zilele Universităţii Gh. Anghel" Ed. II-a, Drobeta Turnu Severin, 16-17 mai 2003, pag. 171 … 178
11	**Şelariu MirceaEugen**	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE Vol. I**	Editura « POLITEHNICA», Timişoara, 2007
12	**Şelariu MirceaEugen**	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE Vol. II**	Editura « POLITEHNICA», Timişoara, 2011
13	**Dietmar Mende Gunter Simon**	**PHYSIK, GLEIHUNGEN UND TABELLEN**	VEB Fachbuchverlag Leipzig pag.196
14	**Cyril M.Harris** Columbia University **Charles E. Crede** California Institute of Technology	**SHOCK and VIBRATION HANDBOOK** IHN TRREE VOLUMES	McGraw – Hill Book Company şi Ed. Tehnica, Buc.,1968
15	**Gheorghiu Al.**	**CONCEPŢII MODERNE ÎN CALCULUL STRUCTURILOR**	Ed. Tehnica, Buc.,1975

16	**Şelariu MirceaEugen**	**STUDIUL VIBRAŢIILOR LIBERE ALE SISTEMELOR CU CARACTERISTICĂ ELASTICĂ NELINIARĂ CU AJUTORUL SISTEMELOR ELASTICE LINIARE ECHIVALENTE**	Com. Celei de a II-a Conferinţe din Domeniul Proceselor şi Utilajelor de Prelucrare la Rece, 26-27 oct 1973, Institutul Politehnic « Traian Vuia » din Timişoara
17	**Bănuţ,V., Popescu, H.**	**STABILITATEA STRUCTURILOR ELASTICE**	Ed. Academiei, Buc. 1975



Pentru completarea capitolului : Toruri Şerban Şelariu ciuruite ▲ sau secţionate ▼

Motto:" **Geometria** este ştiinţa care restaurează situaţia dinainte de creaţia lumii şi încearcă să umple "golul" renunţând la oficiile materiei "
Lucian Blaga, *Discobolul*

Capitolul 34

FUNCŢII SUPERMATEMATICE (FSM) RADIAL EXCENTRICE CVADRILOBE

34.1 Q U A D R I L O B E (C V A D R I L O B E)

Quadrilobele sunt curbe plane închise, întroduse în matematică în anul 2005 prin lucrarea [19, **Şelariu Mircea Eugen** "**QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS**", The 11 – th International Conference on **Vibration Engineering**, Timişoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 … 82].

34.1.1 QUADRILOBE (QLE) CVADRILOBE EXTERIOARE CERCULUI UNITATE

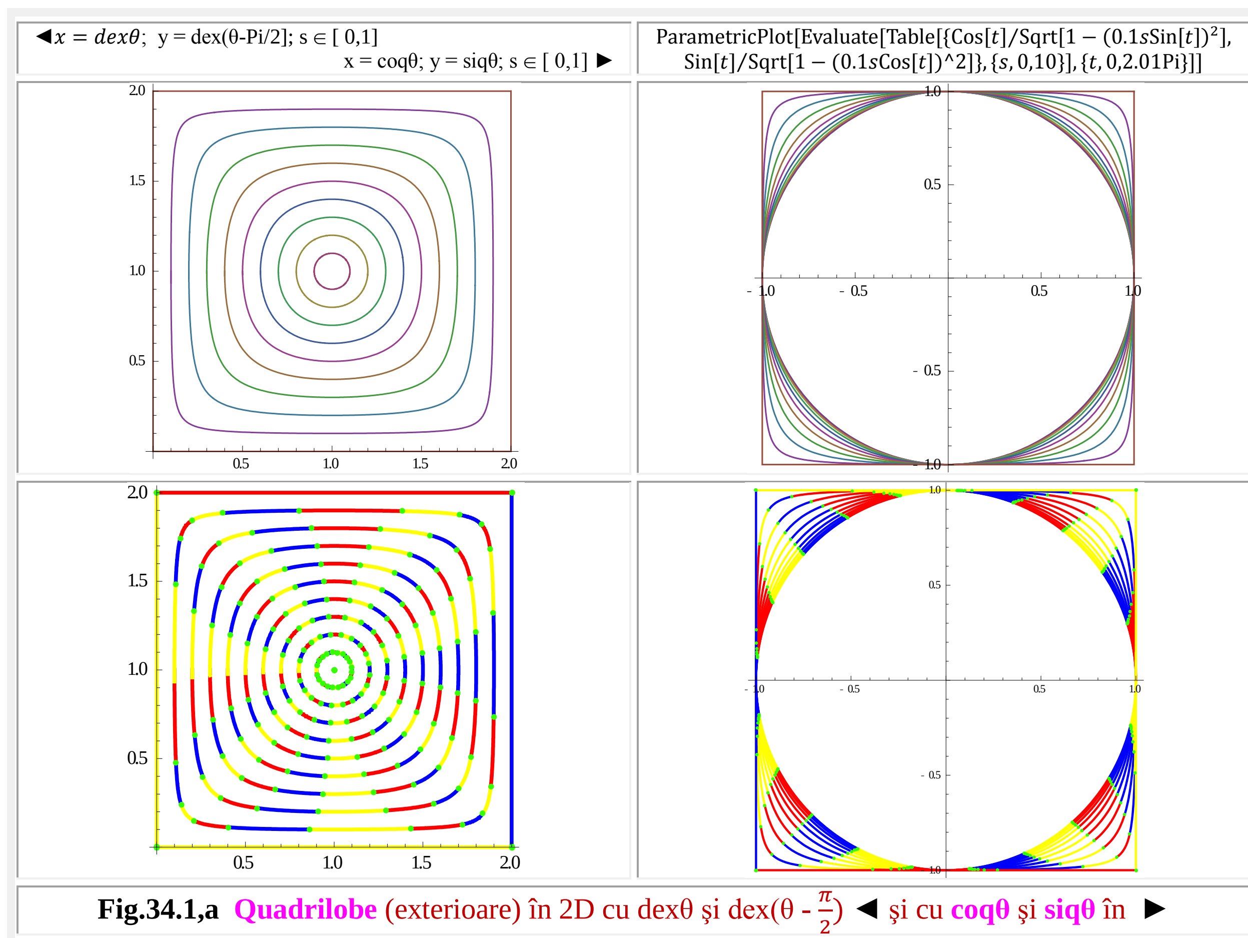


Fig.34.1,a **Quadrilobe** (exterioare) în 2D cu dexθ şi dex(θ - $\frac{\pi}{2}$) ◄ şi cu **coqθ** şi **siqθ** în ►

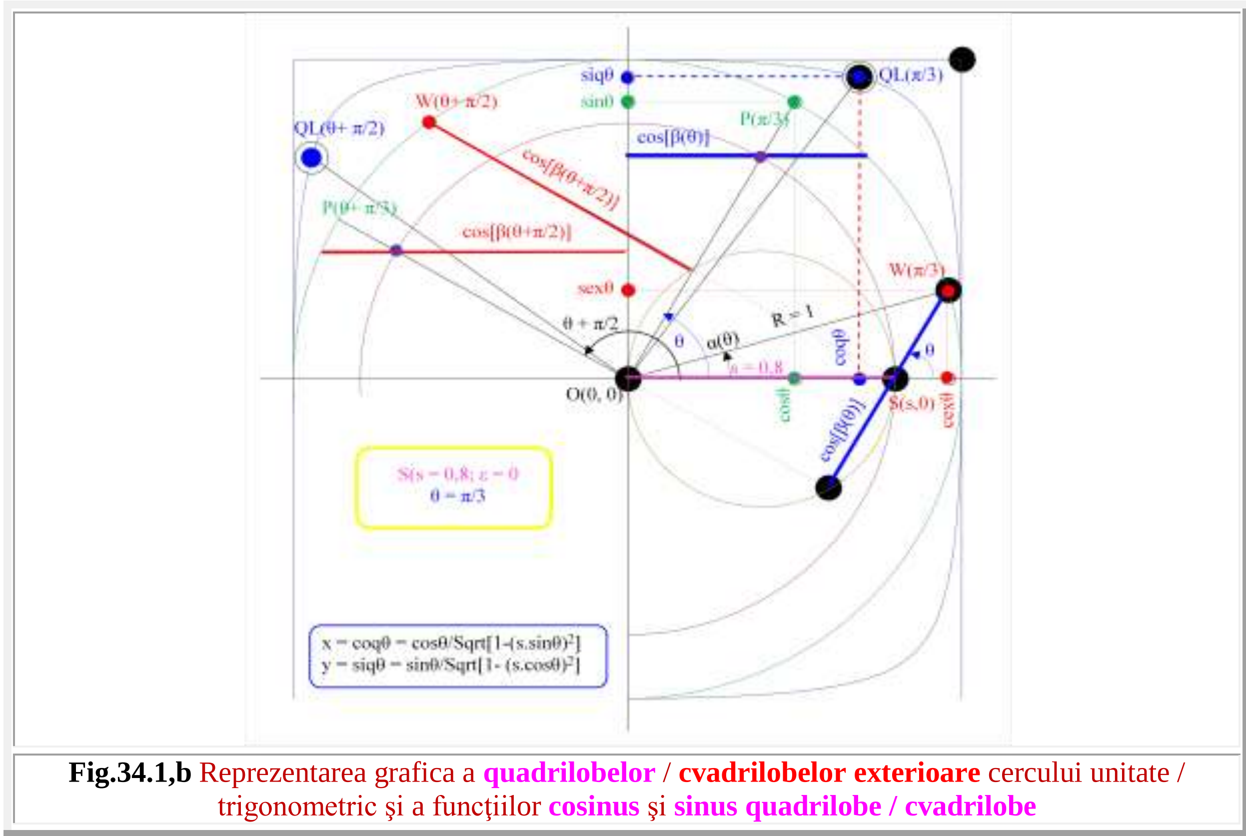


Fig.34.1,b Reprezentarea grafica a **quadrilobelor** / **cvadrilobelor exterioare** cercului unitate / trigonometric şi a funcţiilor **cosinus** şi **sinus quadrilobe / cvadrilobe**

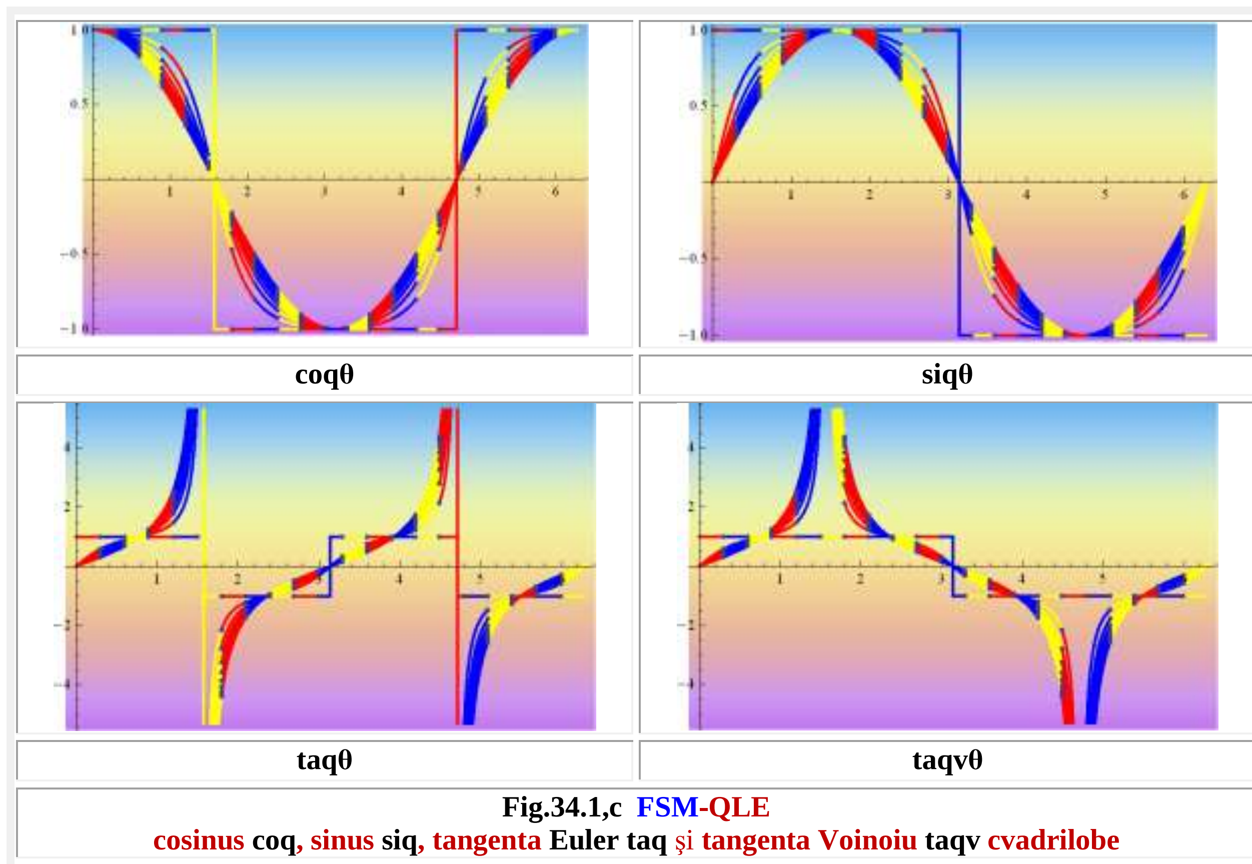
Funcţiile quadrilobe, cosinus **coqθ** şi sinus **siqθ** quadrilobe, sunt acelea care, ca şi **funcţia supermatematică circulară excentrică** (**FSM-CE**) **derivată excentrică**, de **variabilă excentrică dexθ**, pot realiza transformarea continuă a cercului în pătrat (**Fig.34.1,a**) sau a conului în piramidă (**Fig.34.1,d◄**), respectiv al cilindrului circular în cilindru pătrat, aşa cum se poate constata în f**igura 34.1,d**.

Dacă cercul şi pătratul sunt entităţi matematice proprii **matematicii centrice** (**MC**), **qudrilobele** sunt proprii **matematicii excentrice** (**ME**). Altfel spus, quadrilobele sunt curbele **supermatematice (SM) excentrice închise (excentrice pătratice)** obţinute prin **hibridarea matematică** a 2 curbe **matematice centrice închise**: **cercului** cu **pătratul**.

Cvadrilobele (în limba engleză **quadrilobes**) **exterioare** cercului unitate sau trigonometric (**Fig.34.1,a**), de raza R = 1, au fost întroduse în matematică simultan cu funcţiile periodice cvadrilobe cosinus cvadrilob **coqθ** şi sinus cvadrilob **siqθ (Fig.34.1,a►)** a căror expresii de definiţie sunt

(34.1) $$\begin{cases} coq\theta = coq[\theta, S(s,\varepsilon)] = \frac{\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}} \\ siq\theta = siq[\theta, S(s,\varepsilon)] = \frac{\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 cos^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases},$$

cu graficele din **figura 34.1,c**, în care **s** şi **ε** sunt coordonatele polare radiale centrice şi, respectiv, unghiulare ale **excentrului** sau polului **S**(s, ε): raza polară **s**, sau **excentricitatea** liniară **numerică** şi unghiul polar, azimutul **ε**, sau **excentricitatea unghiulară**.



coqθ | siqθ | taqθ | taqvθ

Fig.34.1,c FSM-QLE
cosinus coq, sinus siq, tangenta Euler taq și tangenta Voinoiu taqv cvadrilobe

Pentru s = ± 1 cvadriloba degenerează într-un pătrat perfect, circumscris cercului unitate (**Fig.34.1,a ►**și **Fig. 34.1,d ►**), denumit și **pătrat supermatematic** (SM) pentru a se distinge de pătratul **Alaci**, înscris în cercul unitate și rotit cu ± π/4, pe care sunt definite **funcțiile trigonometrice pătratice Alaci**.

Pentru ca o curbă să fie din **familia lobelor** (**bi**-, **tri**-, **cvadri**-, ş.a.m.d), ea trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

1. Să fie o curbă închisă, pentru toate valorile date excentricității numerice liniare **s**, în domeniul **s** ∈ [0, 1] → **S**(**s** ∈ [0, 1]; **ε** = 0);
2. Curba să nu conțină puncte unghiulare în vârfurile ei, cu excepția poligonului, adică pentru **s** = ± 1
3. Pentru **s** = 0 să degenereze într-un cerc perfect;
4. Pentru **s** = 1 să degenereze într-un poligon perfect, regulat sau neregulat.

Se spune că "**degenerează**" pentru că, plecând de la **s = 0**, care este domeniul **matematicii centrice** (**MC**), la **s** = 1, trecând prin **domeniul matematicii excentrice** (**ME** → **s** ∈ (−∞, +∞)\ 0), se ajunge la un poligon, adică, din nou la o figură comună matematicii ordinare, **centrice**.

Ambele poligoane, sau pătrate, de exemplu, sunt identice **ca formă**, și totuși, diferențele dintre poligoanele sau pătratul **MC** și poligoanele sau pătratul matematicii excentrice (**ME**) sunt **colosale**.

Pătratul **MC** nu are ecuații sau, mai precis, ***nu avea*** ca cercul, de exemplu, el compunându-se din patru segmente de dreaptă congruente și paralele, două câte două, pe când pătratul **ME** are ecuațiile

parametrice (34.1), obţinute pentru **s** = ± 1 în ecuaţiile (34.1), sau cu ajutorul funcţiei supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) derivată excentrică de variabilă excentrică dex**θ**

(34.2) $\begin{cases} x = R\ dex[\theta, S(s,\varepsilon)] \\ y = R\ dex[\theta \pm \frac{\pi}{2}, S(s,\varepsilon)] \end{cases}$, dex**θ** = $1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\cos^2(\theta-\varepsilon)}}$

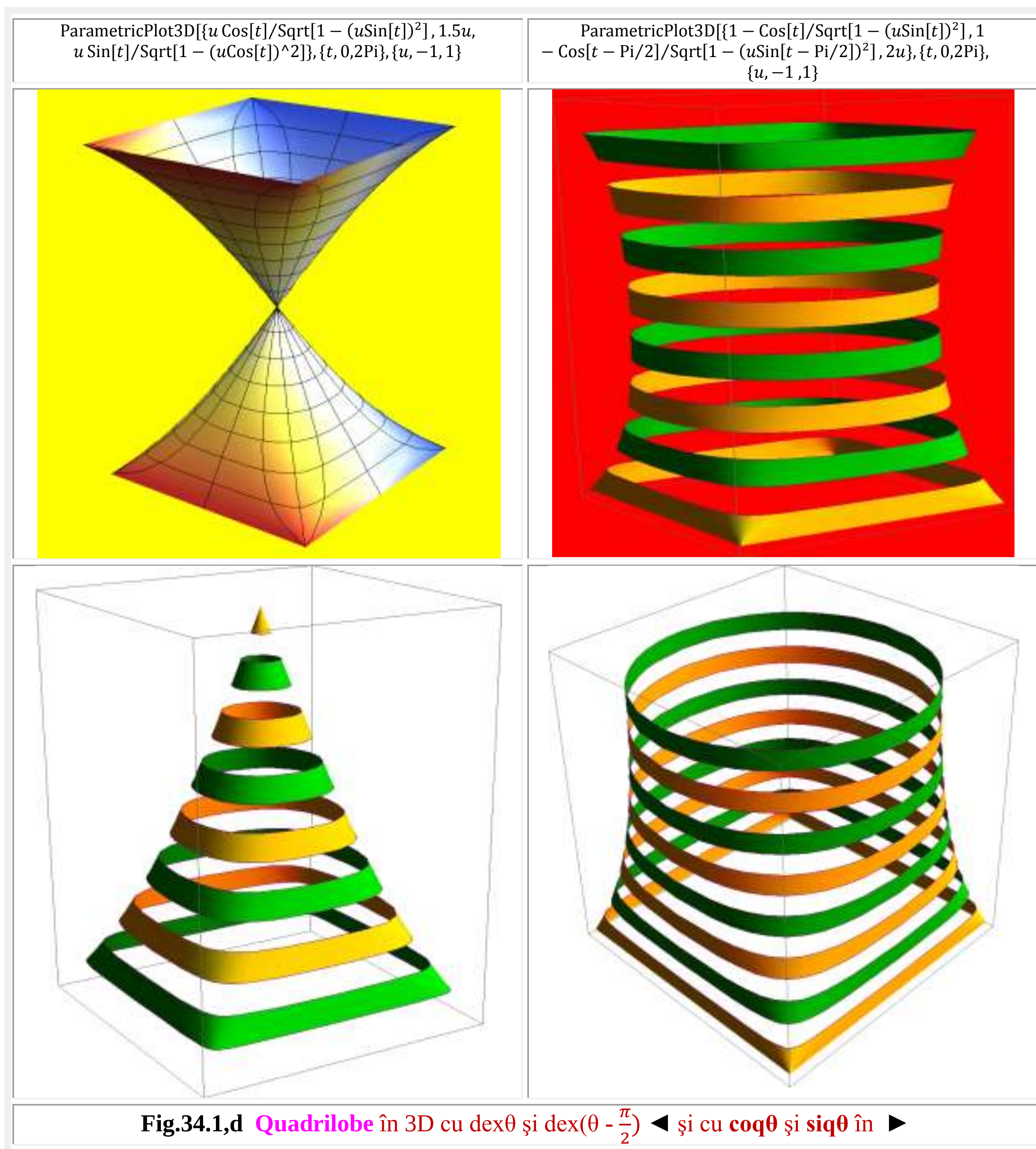


Fig.34.1,d **Quadrilobe** în 3D cu dexθ şi dex(θ - $\frac{\pi}{2}$) ◄ şi cu **coqθ** şi **siqθ** în ►

34.1.2 QUADRILOBE (CVADRILOBE) INTERIOARE CERCULUI UNITATE (QLI)

Quadrilobele (cvadrilobele) **interioare** cercului unitate, prezentate în **figura 34.2,a**, respectă doar două din cele trei condiţii; ele degenerând, pentru **s** = 1, într-un pătrat cu colţuri rotunjite, rotit cu $\frac{\pi}{4}$ faţă de quadrilobele exterioare de s = 1, ca şi pătratul **Valeriu Alaci**. Dar pătratul quadrilobelor interioare este cu colţuri rotunjite şi nu este, deci, un pătrat perfect, iar pentru **s** > 1 ia forma astroidelor din **figura 34.2,b**, de aceea denumirea de quadrilobe este impropríe / forţată.

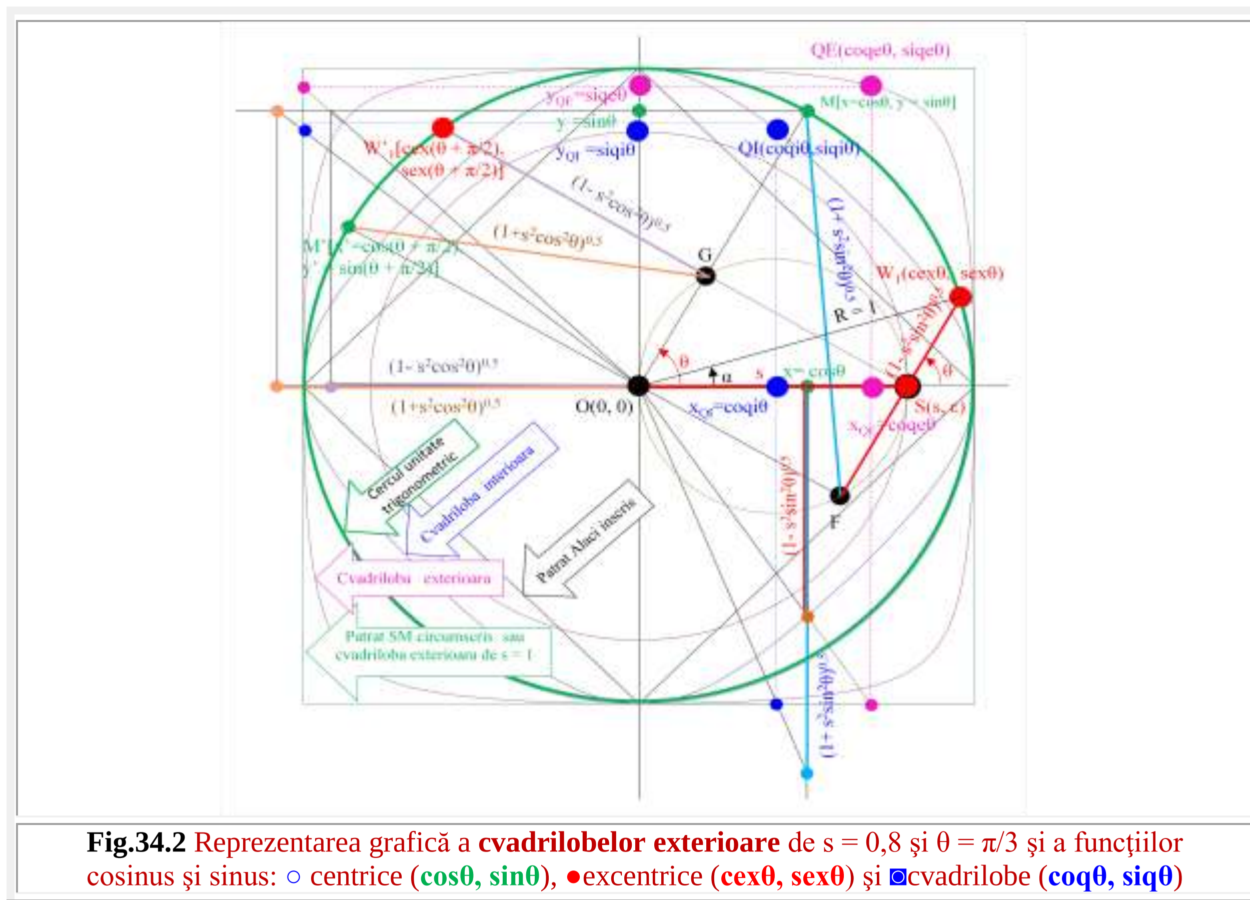


Fig.34.2 Reprezentarea grafică a **cvadrilobelor exterioare** de s = 0,8 şi θ = π/3 şi a funcţiilor cosinus şi sinus: ○ centrice (**cosθ, sinθ**), ●excentrice (**cexθ, sexθ**) şi ◙cvadrilobe (**coqθ, siqθ**)

Relaţiile parametrice de definiţie ale **quadrilobelor interioare** cercului unitate au următoarele relaţii de definiţie cu functiile cosinus quadrilob interior ***coqiθ*** şi sinus quadrilob interior ***siqiθ***

(34.3) $$\begin{cases} coqi\theta = \frac{\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}} \\ siqi\theta = \frac{\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2 cos^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases}$$

Se ştie că radicalul, din expresia lui siqθ şi a lui coqθ din relaţia (34.1), este, totodată, funcţia specială **delθ** sau **δ** ca şi funcţia eliptică **Jacobi** dn(u,k), pentru k = s, adică

(34.4) $$\boldsymbol{del\theta} = \sqrt{1 - s^2 sin^2\theta} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{deli\theta} = \sqrt{1 + s^2 sin^2\theta}$$

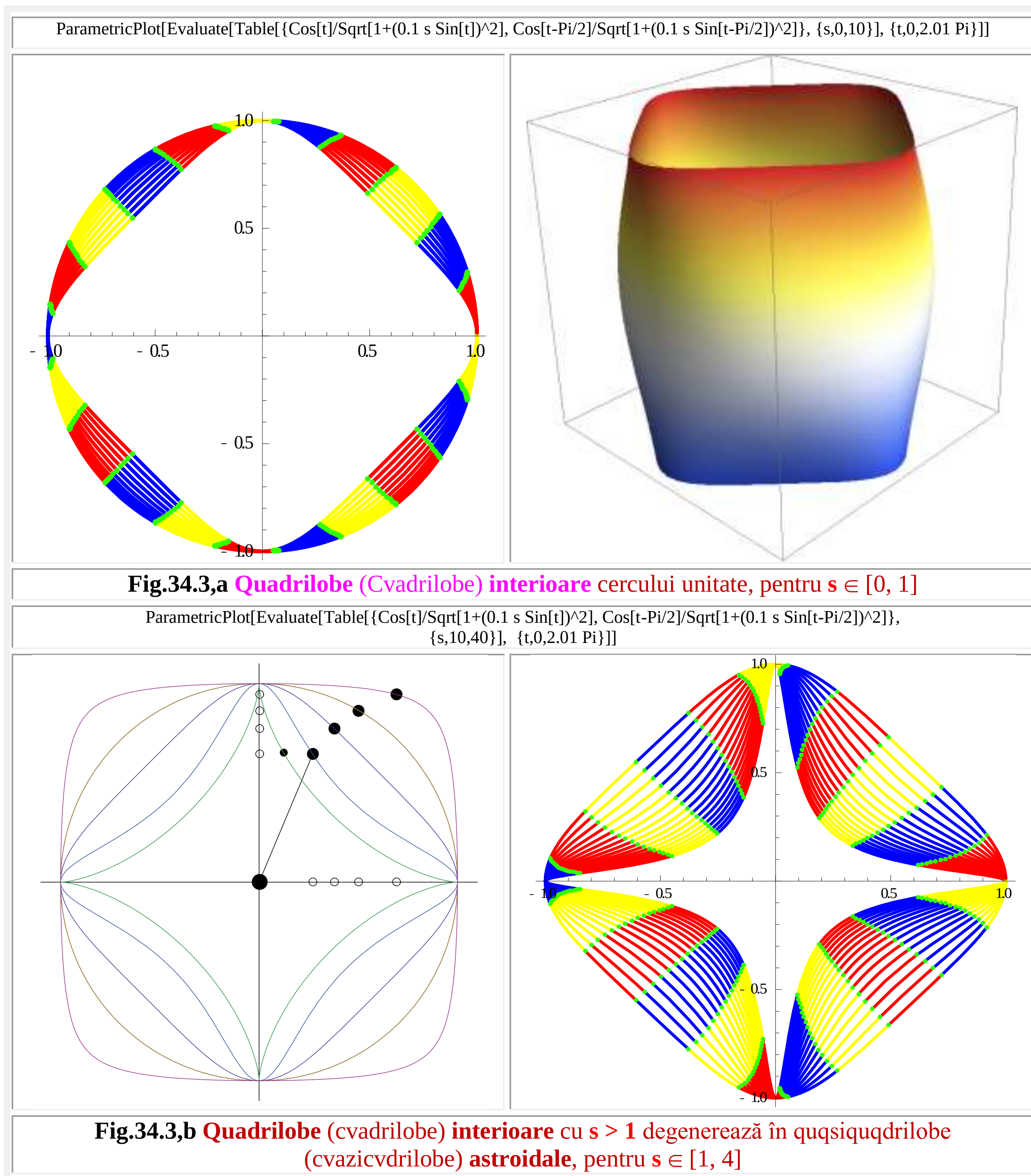


Fig.34.3,a Quadrilobe (Cvadrilobe) **interioare** cercului unitate, pentru **s** ∈ [0, 1]

Fig.34.3,b Quadrilobe (cvadrilobe) **interioare** cu **s > 1** degenerează în quqsiquqdrilobe (cvazicvdrilobe) **astroidale**, pentru **s** ∈ [1, 4]

Punctul generator **P** a **FCC** sinθ şi cosθ pe cercul unitate CU(1, O) este de coordonate polare centrice **P**(R = 1, θ) şi, în **figura 34.2**, este la **θ** = $\frac{\pi}{3}$, în timp ce, punctul generator **W**$_1$ al **FSM-CE cex**$_1$**θ** şi **sex**$_1$**θ** apare pe CU(1, O) la un unghi **α** la centrul O dat de relaţia sau **FSM-CE amplitudine excentrică aex θ**

(34.5) **α** = **aexθ** = θ – arcsin[**s**.sin(**θ** - **ε**)], care, pentru **θ** = $\frac{\pi}{3}$ şi **s** = 0,8 (**Fig. 34.2**), are valoarea de **α** = 0,28180472497614373 radiani, cea ce corespunde la **α** = 16,146221387977935^0 , adică 16^0 8' 46,397".

Graficele de variaţie ale unghiului la centru **α**(θ) sunt date în lucrările [47], [48] şi [49].

Unghiul **α** mai poate fi exprimat / obţinut şi prin relaţiile din **MC**

(34.6)
$$\begin{cases} \alpha = \arcsin[sex\theta] = \arcsin\{\sin[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]]\} = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)] \\ \alpha = \arccos[cex\theta] = \arccos\{\cos[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]]\} = \theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)] \\ \alpha = \arctan[tex\theta] = arctan\frac{sex\theta}{cex\theta} \end{cases}$$

Cele patru variante de exprimare a unghiului **α**(θ), din relaţiile (34.5) şi (34.6), sunt toate corecte, dar se evidenţiază superioritatea utilizării **FSM-CE** în acest scop, deoarece numai prin relaţia (34.**5**), a **FSM-CE** amplitudine excentrică **aexθ**, de variabilă excentrică, unghiul poate fi exprimat corect, în întreg domeniul, de la zero la 2π. Celelalte expresii, care utilizează **FCC,** pot exprima corect variaţia acestui unghi doar în domeniile de definiţie al acestor funcţii, care sunt **θ** ∈ [– π/2, + π/2] pentru arctan**α** şi arcsin**α** şi **θ** ∈ [0, π] pentru arccos**α**.

Faţă de punctul **P**(1, θ), punctele generatoare ale **FQL** interne sunt defazate în minus şi cele exterioare **FQQL** sunt defazate în plus / avans (**Fig.34.1,b, Fig.34.2** şi **Fig.34.13**).

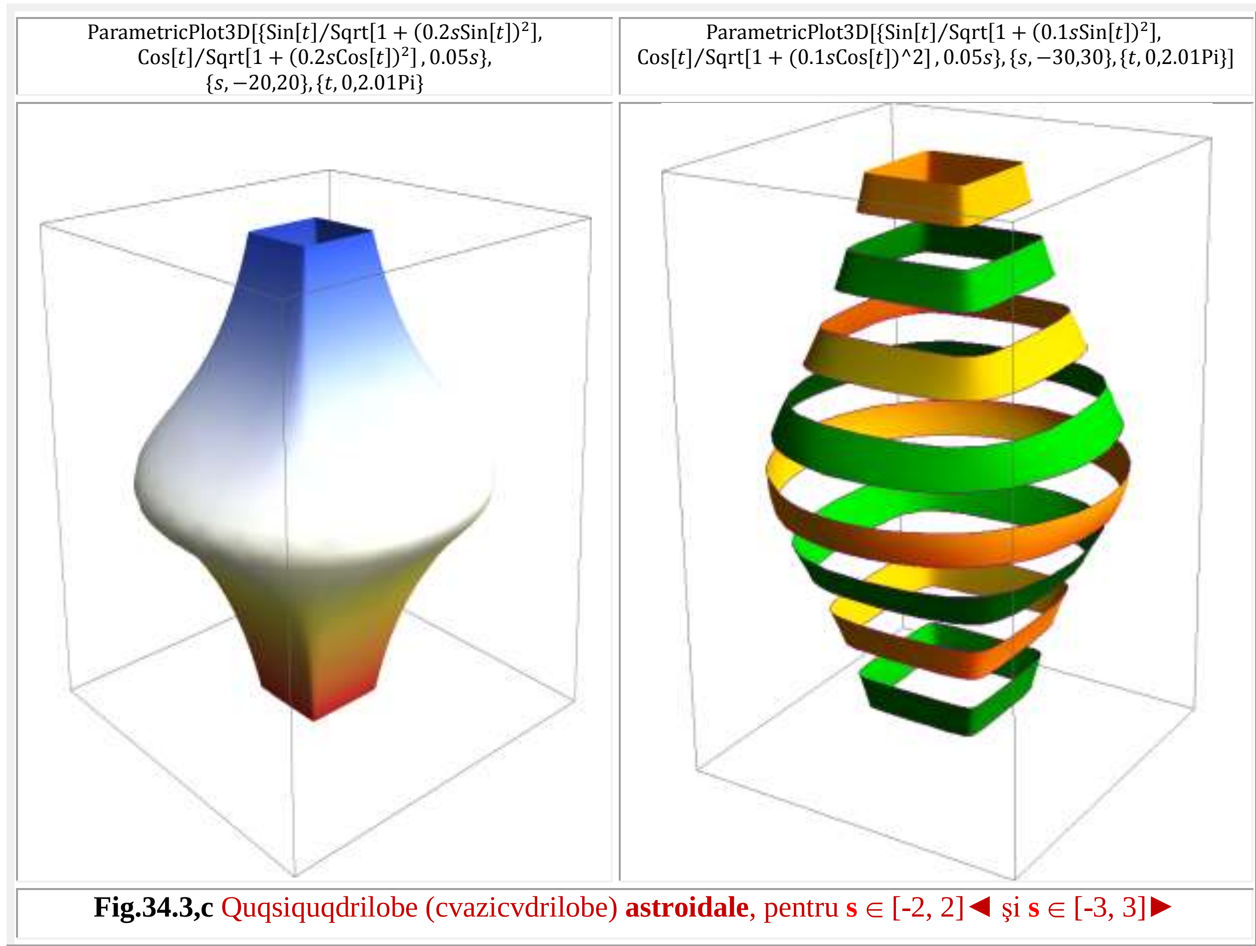


Fig.34.3,c Quqsiquqdrilobe (cvazicvdrilobe) **astroidale**, pentru **s** ∈ [-2, 2]◄ şi **s** ∈ [-3, 3]►

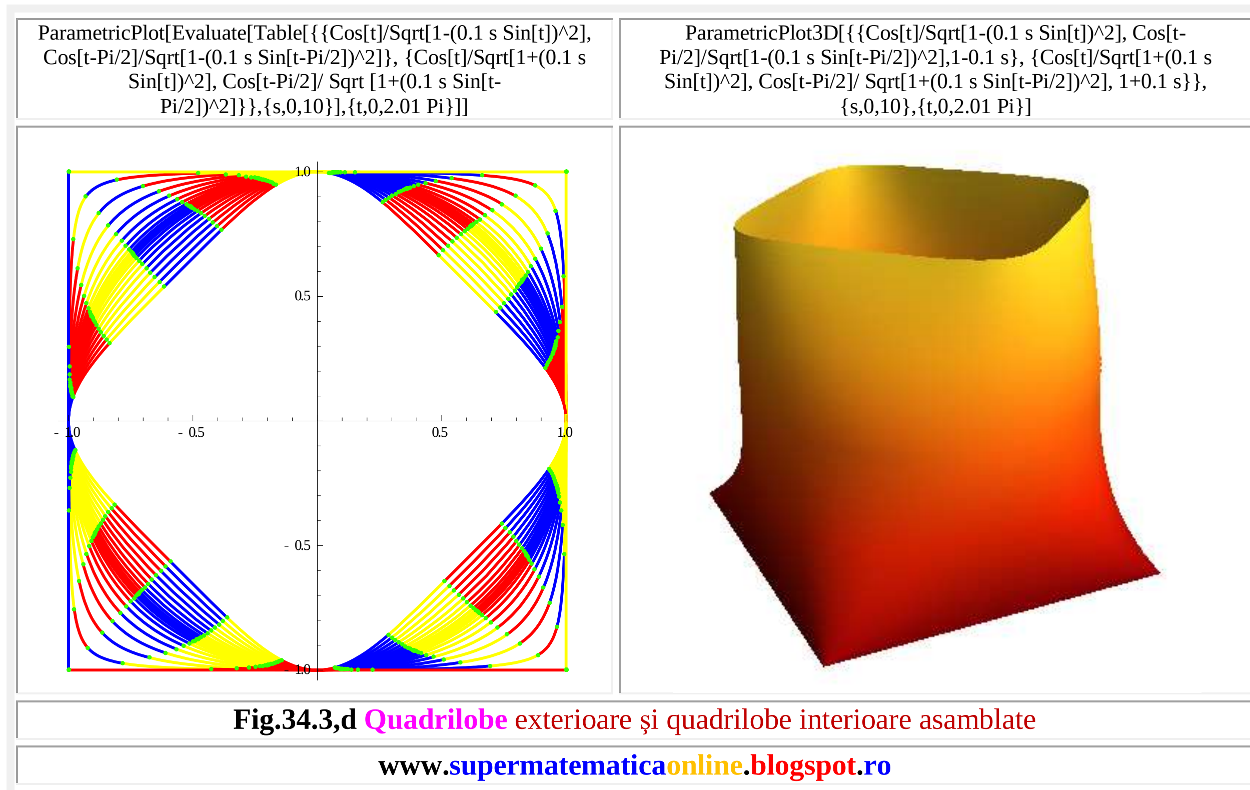


Fig.34.3,d Quadrilobe exterioare şi quadrilobe interioare asamblate

34.1.3 QUADRILOBE (CVADRILOBE) VALERIU ALACI

Lucrările reputatului matematician timişorean Prof. math. **Valeriu Alaci,** profesor al **Şcolii POLITEHNICE** din Timişoara**,** astăzi **Universitatea "POLITEHNICA"**, şeful Catedrei de Matematici, sunt unanim necunoscute peste ocean. Sperăm că, măcar în **România**, ele să fie cunoscute, măcar sau în special **funcţiile trigonometrice pătratic**e şi **funcţiile trigonometrice rombice**.

Bazaţi pe această presupunere, amintim că **funcţiile trigonometrice pătratic**e sunt definite pe un pătrat, cu laturile rotite cu un unghi de $\pi/4$ (45^0) faţă de axele unui reper / sistem cartezian drept, aşa cum se poate observa în **figura 34.2** şi **34.4,a**. A fost denumit pătrat **Alaci Valeriu**. Dar, între cerc şi pătrat mai pot fi o infinitate de curbe plane închise denumite quadrilobe **Alaci Valeriu** interioare cercului.

Ecuaţiile acestor quadrilobe **Valeriu Alaci** **interioare cerului unitate** sunt

(34.7)
$$\begin{cases} x = (1-s^2(1-\sqrt{2}/2))\left(\frac{\mathrm{Cos}[t]\mathrm{Cos}[\mathrm{Pi}/4]}{\sqrt{1-s^2\mathrm{Sin}[t]^2}} - \frac{\mathrm{Sin}[t]\mathrm{Sin}[\mathrm{Pi}/4]}{\sqrt{1-s^2\mathrm{Cos}[t]^2}}\right) \\ y = (1-s^2(1-\sqrt{2}/2))\left(\frac{\mathrm{Cos}[t]\mathrm{Sin}[\mathrm{Pi}/4]}{\sqrt{1-1s^2\mathrm{Sin}[t]^2}} + \frac{\mathrm{Sin}[t]\mathrm{Cos}[\mathrm{Pi}/4]}{\sqrt{1-s^2\mathrm{Cos}[t]^2}}\right) \\ z = s \end{cases}$$

Între cerc şi pătrat este o mare ablomeraţie/("inflaţie") de diverse funcţii matematice noi. Astfel, pe lângă quadrilobele interioare şi quadrilobele **Valeriu Alaci**, Prof.dr. **Malvina Baica,** membră a **Academiei de Ştiinte din New York** şi ing. **Mircea Cârdu** au introdus în matematica **funcţiile transtrigonometrice** (v. "**THE PARATRIGONOMETRY**" **AGIR** Publishing House, Bucharest, Romania, 2010) cosinus $ct_k\alpha$ şi sinus $st_k\alpha$ **transtrigonometrice**, pe care eu le-aş fi denumit **intratrigonometrice**; fiind ***între*** cerc şi pătrat. Ecuaţiile acestora sunt

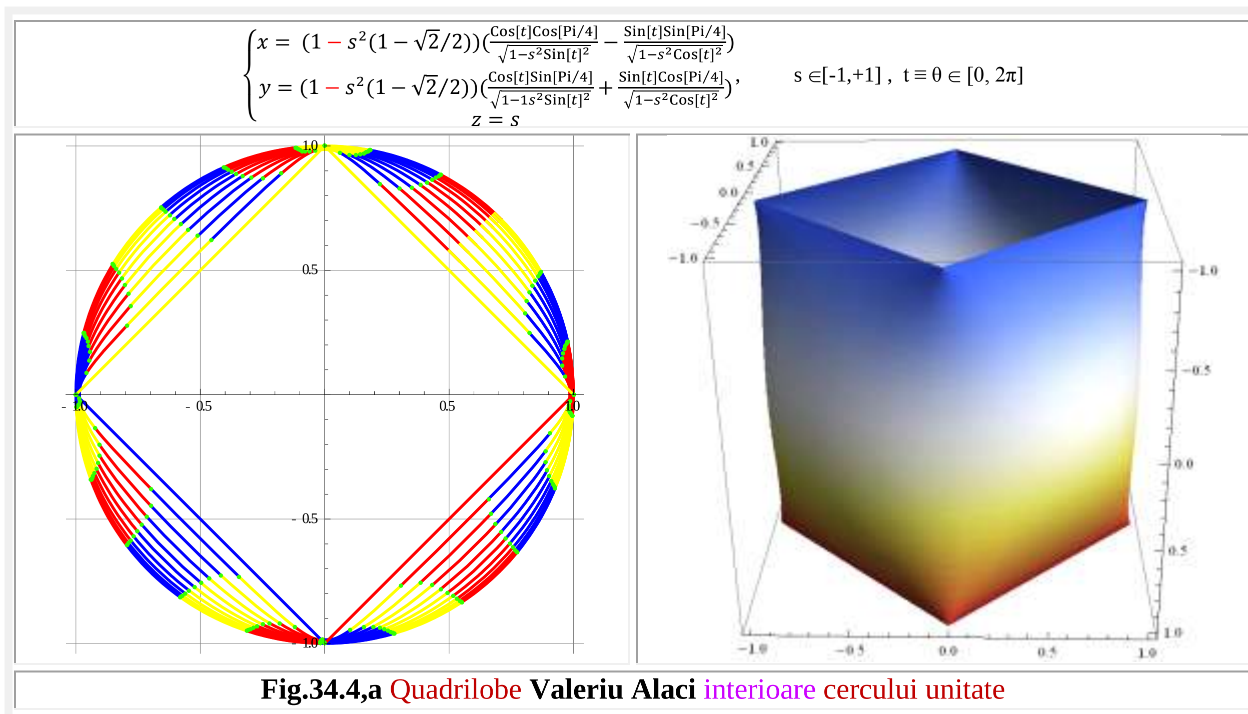


Fig.34.4,a Quadrilobe **Valeriu Alaci** interioare cercului unitate

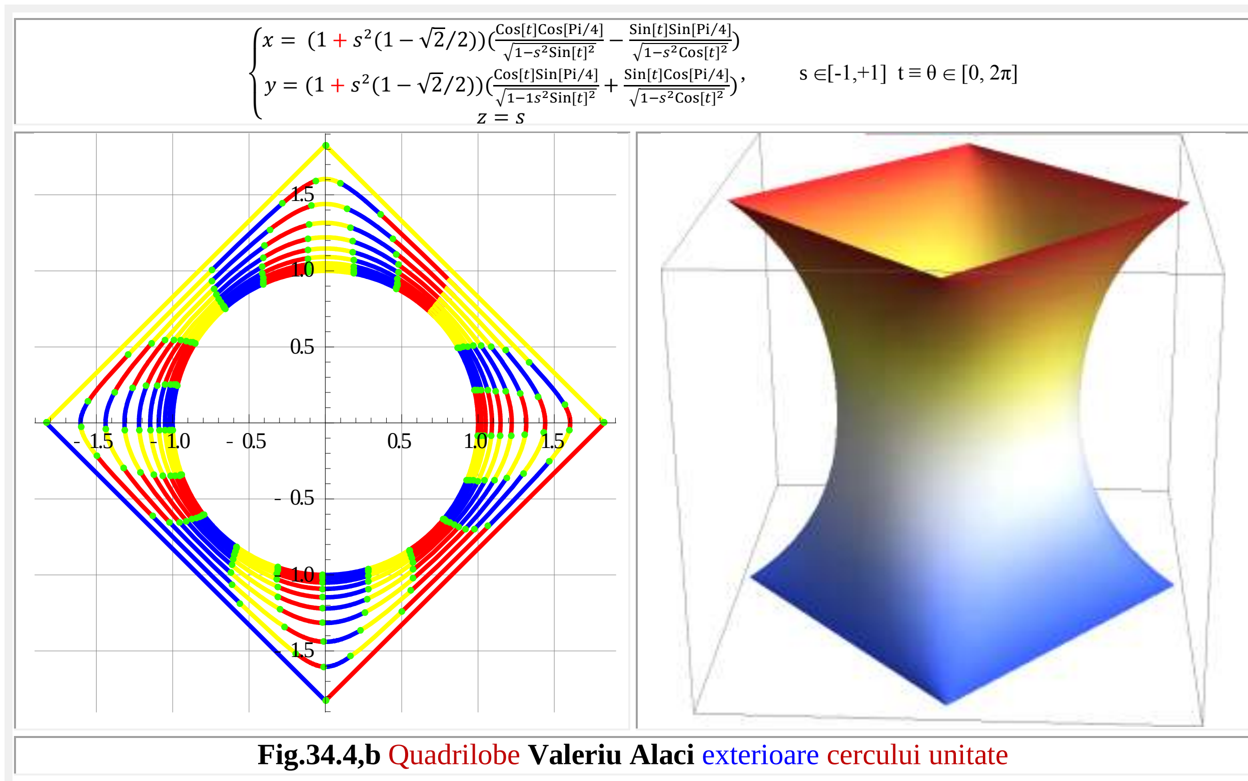


Fig.34.4,b Quadrilobe **Valeriu Alaci** exterioare cercului unitate

(34.8)
$$\begin{cases} ct_k\alpha = \pm(1+cot^k\alpha)^{\frac{-1}{k}} \\ st_k\alpha = \pm(1+ant^k\alpha)^{\frac{-1}{k}} \end{cases},$$

cu care pot fi corect plotate funcţiile doar în domeniul α ∈ [0, $\frac{\pi}{2}$], aşa cum rezultă din **figura 34.5,a**◄.

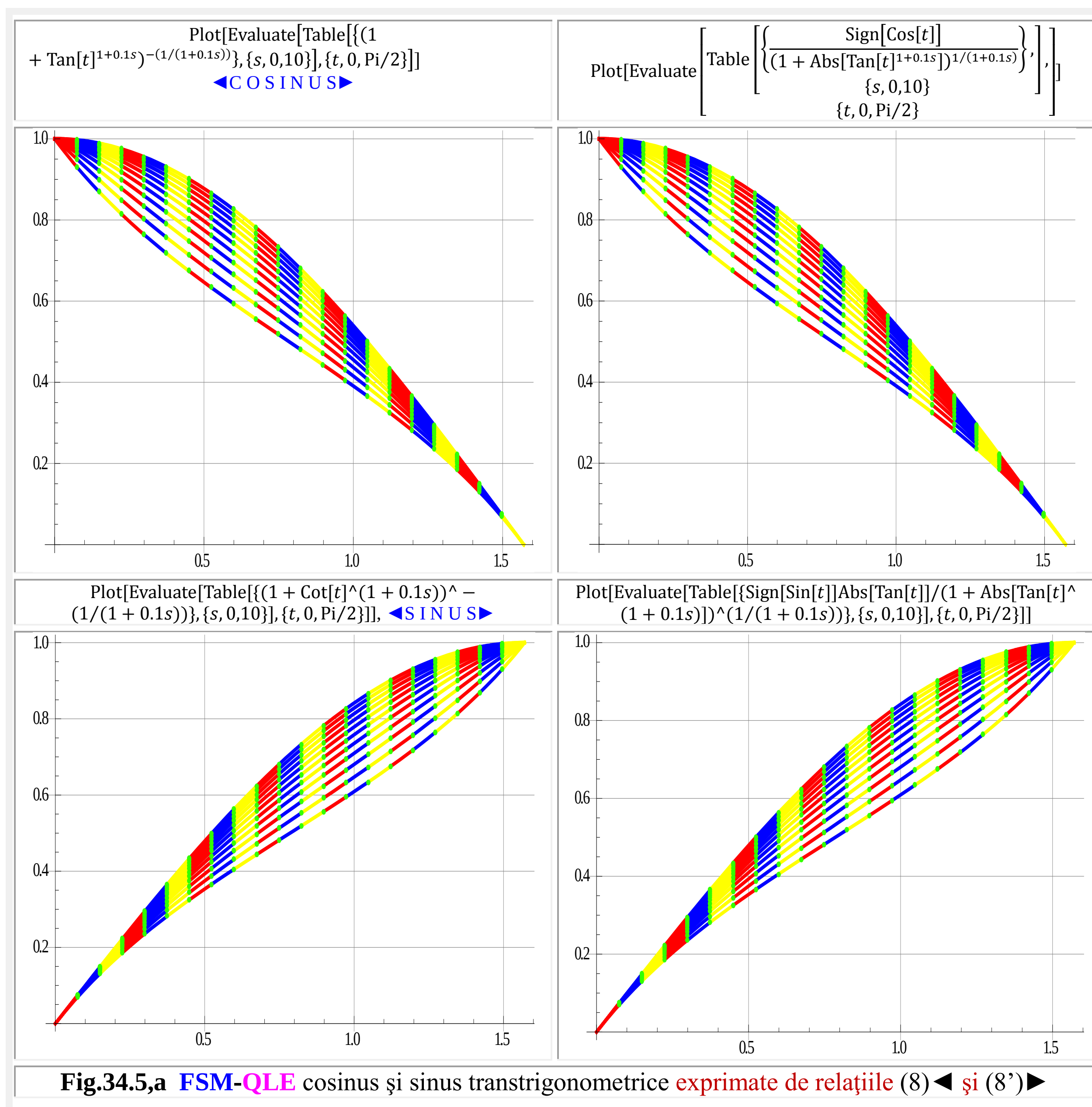


Fig.34.5,a FSM-QLE cosinus şi sinus transtrigonometrice exprimate de relaţiile (8)◄ şi (8')►

Ele pot fi plotate în înteregul domeniu α ∈ [0, 2 π] utilizând formulele plotabile ale autorului (34.8'), adică

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi},	Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi},

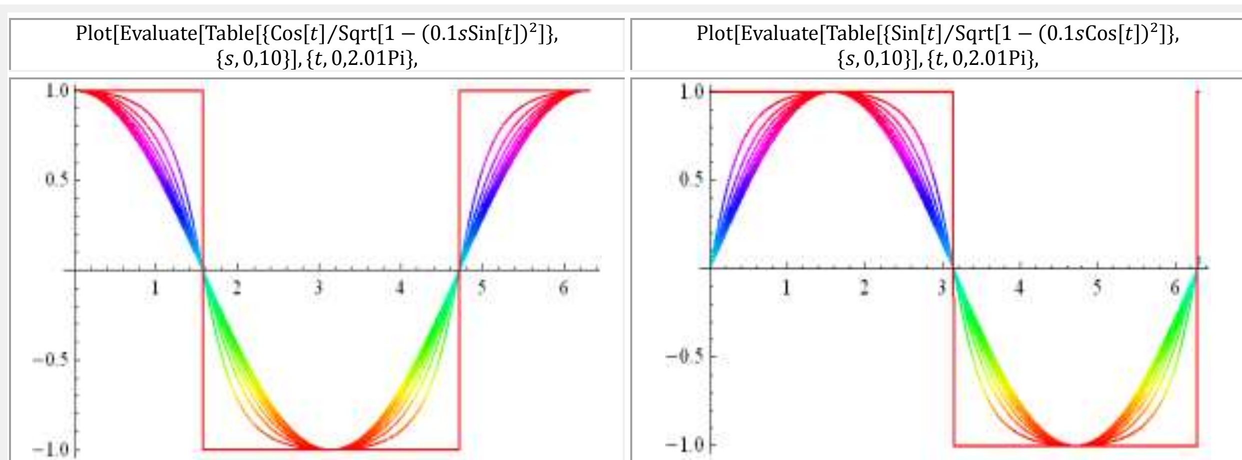


Fig.34.5,b FSM-QLE cosinus coqθ şi sinus siqθ cvadrilobice excentrice exterioare cercului unitate

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi},	Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[t])^2]}, {s, 0,10}], {t, 0,2.01Pi},

Plot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 + (0.4sSin[t])^2]}, {s, 0,50}], {t, 0,2.01Pi}	Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 + (0.4sCos[t])^2]}, {s, 0,50}], {t, 0,2.01Pi}

Fig.34.5,c FSM-QLE cosinus coqθ şi sinus siqθ cvadrilobice excentrice interioare cercului unitate

(34.8’) $\begin{cases} ct_k x = \frac{Sign[cosx]}{(1+Abs[tan^k x])^{1/k}} \\ st_k x = \frac{Sign[sinx]Abs[tanx]}{(1+Abs[tan^k x])^{1/k}}, \end{cases}$

utilizate comparativ cu (34.8) în **figura 34.5,a►**.

Curbele închise, reprezentate de aceste ecuaţii parametrice, nu sunt quadrilobe, deoarece numai pentru s = k = 0 curba este continuă (cerc), pentru restul valorilor, în vârfurile de α = 0 + K $\frac{\pi}{2}$, ele prezintă puncte unghiulare, cu derivate diferită la stânga şi la dreapta punctului, deci nu respectă condiţia a 2) – a.

Pentru k = 1 se obţin funcţiile pătratice **Valeriu Alaci** şi pentru k = 2 se obţin funcţiile trigonometrice centrice sau **Euler (Fig.34.5,c)**.

Funcţiile (34.8) şi (34.8’) sunt echivalente, dovadă că ele genereaza aceleaşi curbe (identice) în 2D, în domeniul α ≡ x ∈ [0, π/2], aşa cum este ilustrat în **figura 34.5,a**. Diferenţa consistă în aceea că (34.8’) permite reprezentarea funcţiilor nu numai în domeniul anterior amintit, ci pe toată axa reală, aşa cum rezultă din **figurile 34.6.**

În **figurile 34.5,b** şi **34.5,c** sunt prezentate funcţiile cosinus şi sinus quadrilobe, exterioare (**Fig.34.5,b**) şi interioare (**Fig.34.5,c**) şi curbele limită, în care degenerează, pentru valorile limită ale excentricităţii liniare numerice s = 0 → cerc şi s = 1 → pătrat b (**Fig.34.6,a◄** şi **Fig.34.6,b ◄**) şi corespondentele lor în 2D (**Fig.34.6,a►** şi **Fig.34.6,b ►**)).Funcţiile quadrilobe interioare sunt prezentate pentru s∈ [0, 1] în **figura 34,5,c ▲** sus şi pentru s∈ [0, 1] în **figura 34,5,c** jos▼ .

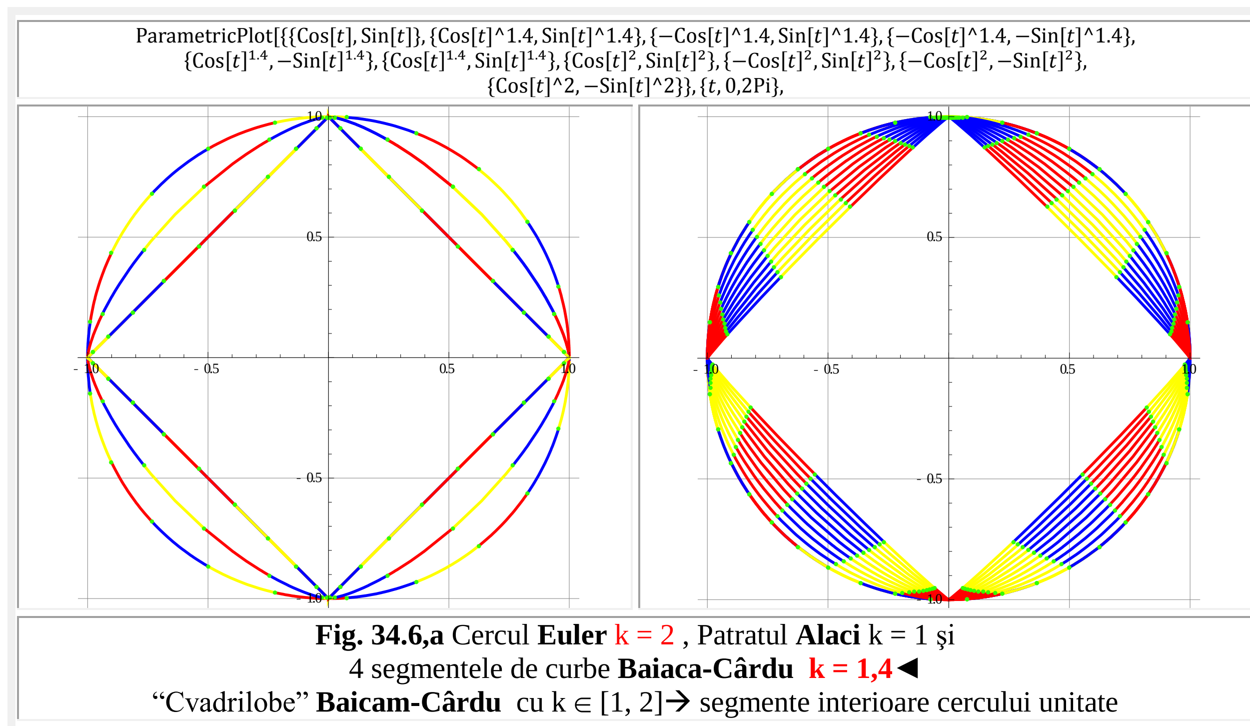


Fig. 34.6,a Cercul **Euler** k = 2 , Patratul **Alaci** k = 1 şi
4 segmentele de curbe **Baiaca-Cârdu** **k = 1,4◄**
“Cvadrilobe” **Baicam-Cârdu** cu k ∈ [1, 2]→ segmente interioare cercului unitate

Quadrilobele Valeriu Alaci din **figura 34.4,a,** se observă fără dificultate, că sunt interioare cercului unitate. Prin schimbarea semnului plus cu semnul minus în expresiile lui x(t) şi y(t), se obţin quadrilobele **Alaci Valeriu** **exterioare** cu ecuaţiile

(34.9) $$\begin{cases} x = (1+s^2(1-\sqrt{2}/2))\left(\frac{\text{Cos}[t]\text{Cos}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1-1s^2\text{Sin}[t]^2}} - \frac{\text{Sin}[t]\text{Sin}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1-1s^2\text{Cos}[t]^2}}\right) \\ y = (1+s^2(1-\sqrt{2}/2))\left(\frac{\text{Cos}[t]\text{Sin}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1-1s^2\text{Sin}[t]^2}} + \frac{\text{Sin}[t]\text{Cos}[\text{Pi}/4]}{\sqrt{1-1s^2\text{Cos}[t]^2}}\right) \\ z = s \end{cases}$$

şi cu graficele din **figura 34.4,b**.

Quadrilobele definite de ecuaţiile parametrice (34.8) pot fi denumite qvasiquadrilobe **Malvina Baica - Mircea Cârdu** şi au graficele din **figura 34.6,c**.

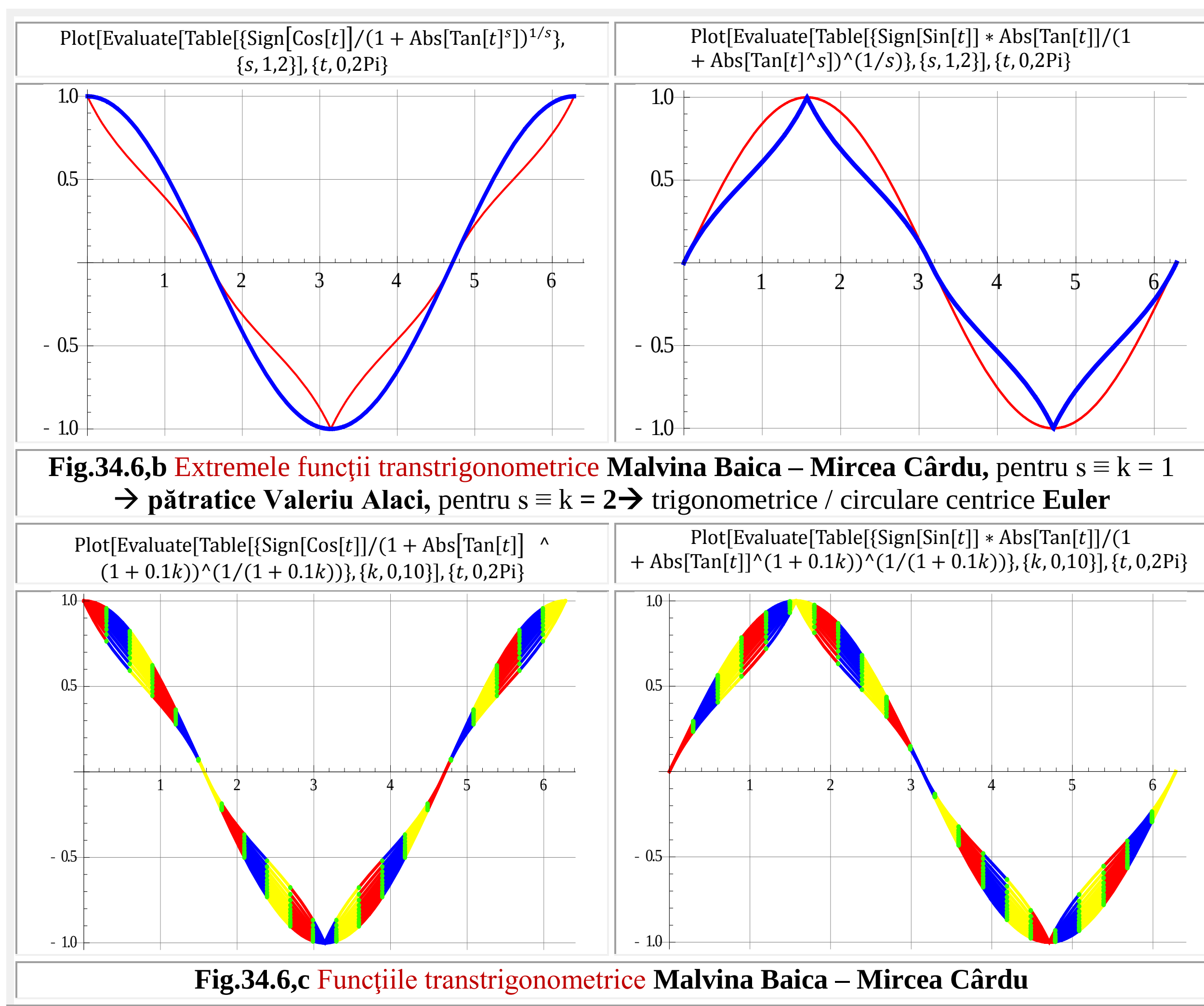


Fig.34.6,b Extremele funcţii transtrigonometrice **Malvina Baica – Mircea Cârdu,** pentru s ≡ k = 1 → **pătratice Valeriu Alaci,** pentru s ≡ k = **2→** trigonometrice / circulare centrice **Euler**

Fig.34.6,c Funcţiile transtrigonometrice **Malvina Baica – Mircea Cârdu**

34.1.4 QUAZIQUADRILOBE (CVAZICVADRILOBE)

Prin depăşirea valorii de **s = 1,** a excentricităţii liniare numerice (**Fig.34.7,a**), ca şi prin combinarea / schimbarea semnelor de sub radical ale funcţiei speciale **delθ** şi a termenilor din expresiile parametrice ale **FSM–QL,** pot fi obţinute multe alte ecuaţii parametrice ale unor curbe plane închise, reunite sub denumirea de **quasiquadrilobe (cvazicvadrilobe).**

Figurile 34.7,a, 34.7,b, 34.7,c şi **34.7,d** prezintă unele dintre aceste quasiquadrilobe, înteresante prin formele corpurilor obţinuete în 3 D. Altele, prin forma unor curbe din 2D (**Fig. 34.7,a◄**).

Obiectul / corpul **supermatematic** din **figura 7,c**, asemănator cu un con, cu baza un hexagon, poate fi denumit "**con quasiquadrilobic** (**cvazicvadrilobic**), iar cilindrul din **figura 34.7,b**, poate fi denumit **cilindru quasiquadrilobic**.

Curbe interesante asemănătoare unor curbe de histereză sunt prezentate în **figura 34.8** stânga **◄**, iar unele artistice moderne în dreapta **figurii 34.8**.

Curbele din **figura 34.7,b** sunt reprezentate de ecuaţiile parametrice ca sume ale cosinusurilor şi, respectiv, sinusurilor cvadrilobe exterioare şi interioare, adică

$$\begin{cases} x = coq\theta + coqi\theta \\ y = siq\theta + siqi\theta \end{cases}$$

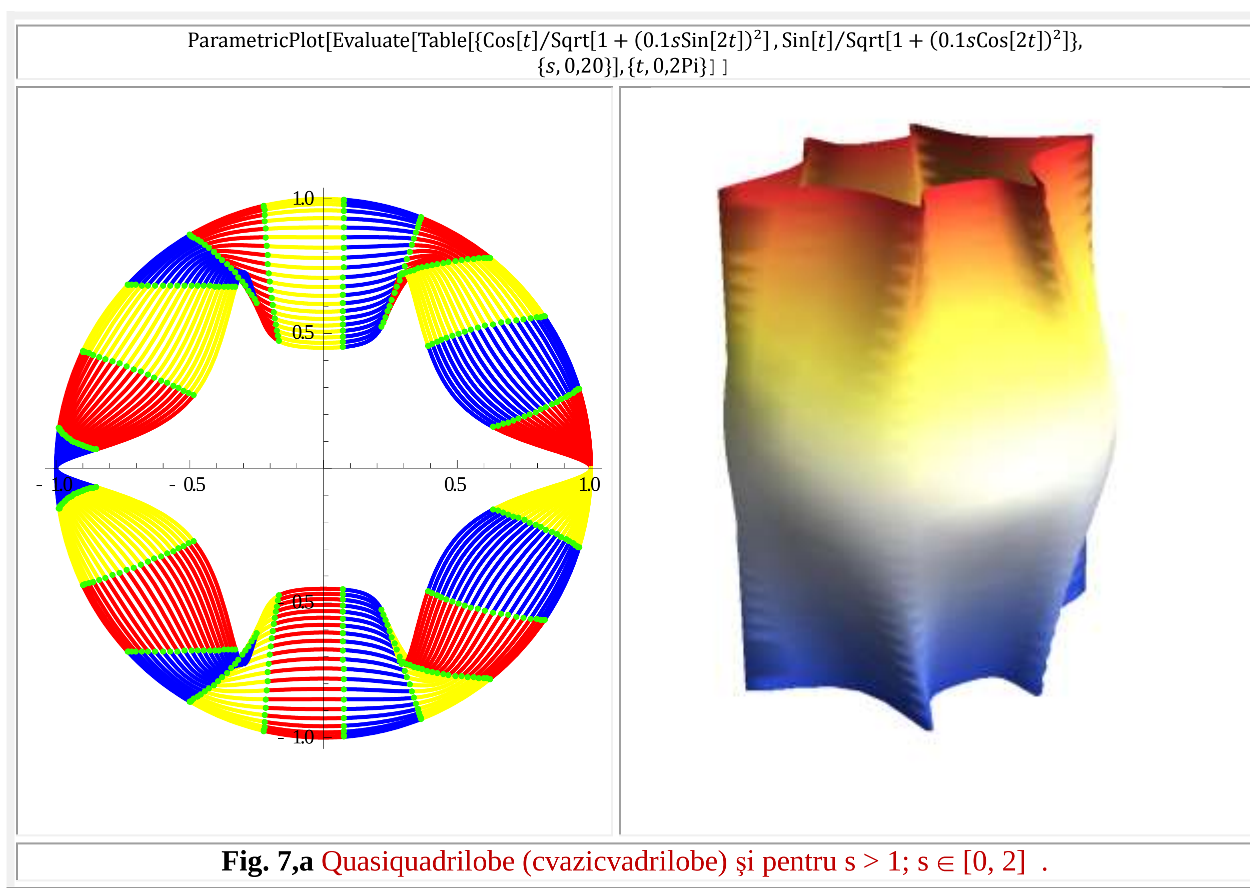


Fig. 7,a Quasiquadrilobe (cvazicvadrilobe) şi pentru s > 1; s ∈ [0, 2] .

În **figura 34.9,b ▲◄**sunt prezentate funcţiile **sinus autoinduse**

(34.10) **sina(x, m = 8)** = sin(sin(sin(sin(sin(sin(sinsinx))))))).

Întâmplare face ca o variantă a funcţiei sinus cvadrilobic, denumit sinus quadrilobic modificat şi notat **siqmθ** şi anume

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1 − (sSin[t])^2] + Cos[t]/Sqrt[1 + (sSin[t])^2],
Sin[t]/Sqrt[1 − (sCos[t])^2] + Sin[t]/Sqrt[1 + (sCos[t])^2]}, {s, 0,1}], {t, 0,2Pi}]]
```

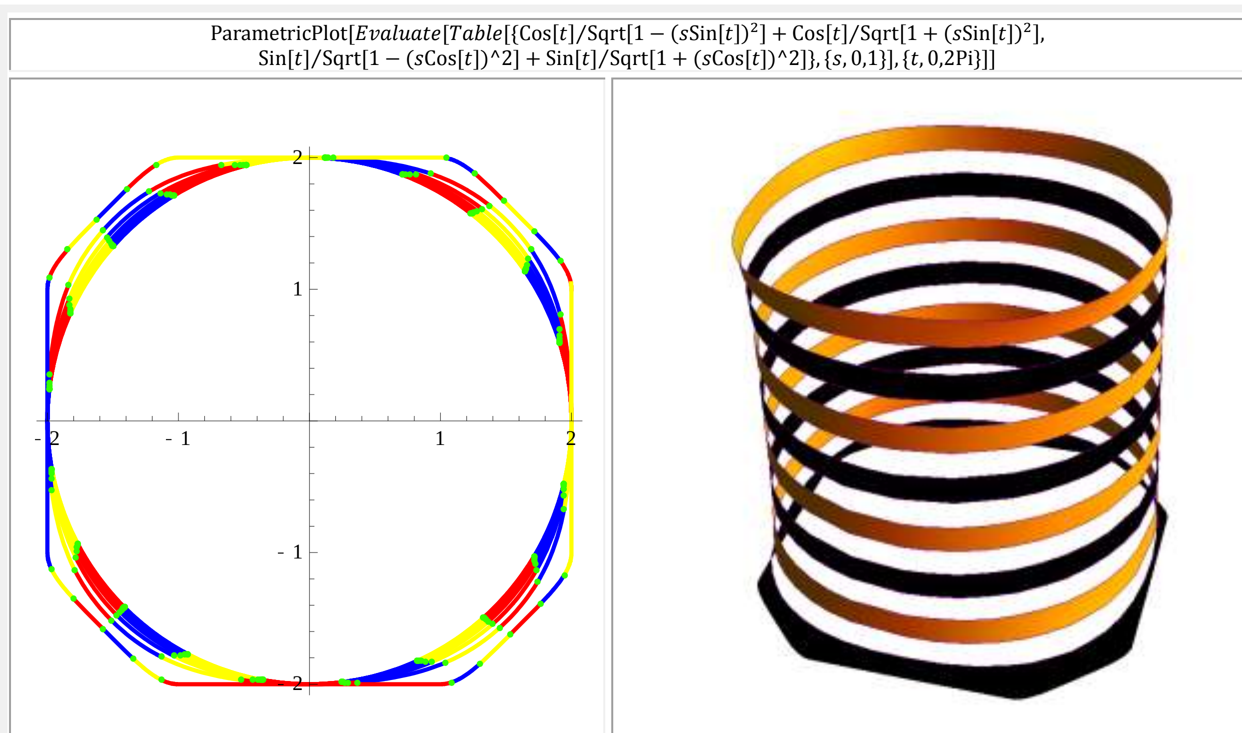


Fig. 34.7,b Quasiquadrilobe (cvazicvadrilobe) cu termeni modificaţi

```
ParametricPlot3D[{0.1s(Cos[t]/Sqrt[1 − (0.1sSin[t])^2] + Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[t])^2]),
0.1s(Sin[t]/Sqrt[1 − (0.1sCos[t])^2] + Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[t])^2]),0.4s}, {s, 0,10}, {t, 0,2Pi}]
```

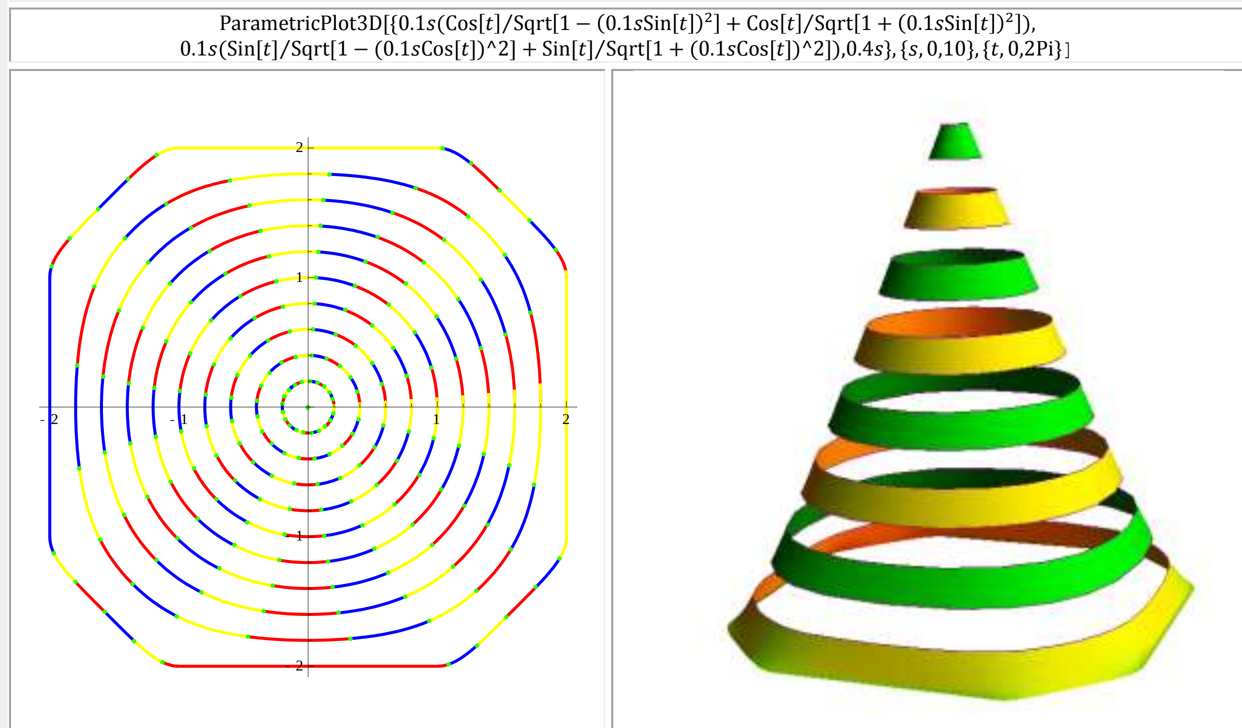


Fig. 34.7,c Quadrilobe şi **qusiquadrilobe** interioare şi exterioare reprezentate împreună

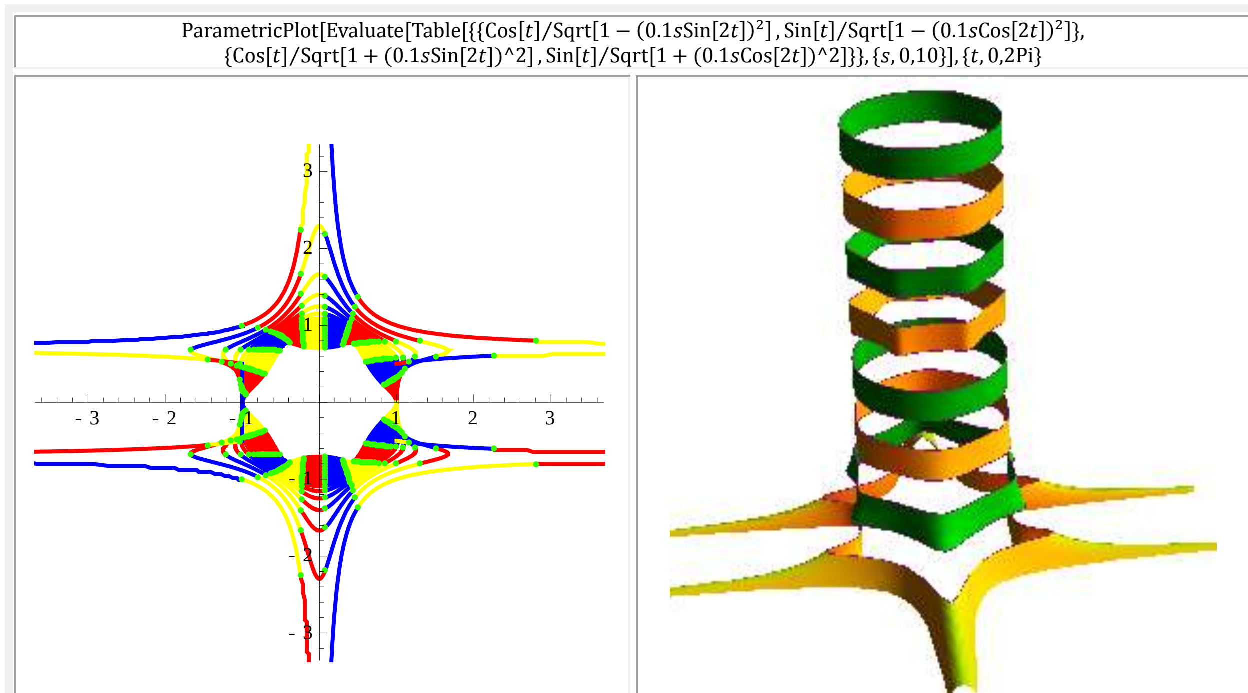


Fig. 34.8 **Quasiquadrilobe (Cvazicvadrilobe)** diverse

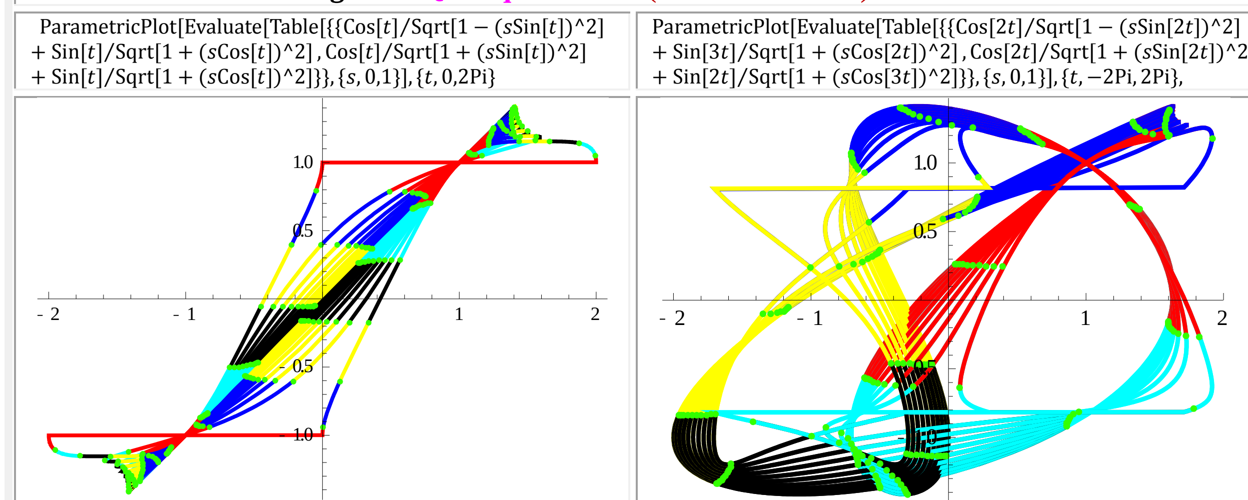


Fig. 34.9,a **Quasiquadrilobe (Cvazicvadrilobe)** diverse

(34.10’) $$\textbf{siqm}\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+(s.\sin[t])^2}}$$

să poată imita, destul de bine, dar pentru valori diferite **m** ≠ **s**, funcţiile autoinduse (34.10), prin marirea lui **s**, şi să poată, fără dificultate, să exprime funcţii sinus autoinduse de un grad de multiplicitate **m = s** cu mult mai mare. În **figura 34.9,b** ▲► m = 20.

Plot[{Sin[t], Sin[Sin[t]], Sin[Sin[Sin[t]]], Sin[Sin[Sin[Sin[t]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[t]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[t]]]]]], Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[Sin[t]]]]]]]}, {t, 0,2Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 + (0.2sSin[t])^2]}, {s, 0,20}], {t, 0,2.01Pi}]]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 + (0.25sSin[t])^2]}, {s, 0, 7}], {t, 0,2.01Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{Sin[t]/Sqrt[1 + (0.2sSin[t])^4]}, {s, 0,20}], {t, 0,2.01Pi}

Fig. 34.9.b Quasiquadrilobe (Cvazicvadrilobe) diverse, care pot exprima **funcţii autoinduse**, cum este sin(sin(sin(…sint))) ◄▲

34.2 RAZELE POLARE ALE QUADRILOBELOR (QLE) EXTERIOARE ŞI ALE CVADRILOBELOR INTERIOARE (QLI)

Ca oricare altă rază polară şi acestea se pot obţine prin însumarea vectorială a proiecţiilor razei pe cele două axe ale reperului cartezian drept, adică

(34.11)
$$\begin{cases} r_{ql} = \sqrt{coq^2\theta + siq^2\theta} = \sqrt{\frac{sin^2\theta}{1-s^2cos^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{1-s^2sin^2\theta}} \\ r_{qli} = \sqrt{coqi^2\theta + siqi^2\theta} = \sqrt{\frac{sin^2\theta}{1+s^2cos^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{1+s^2sin^2\theta}} \end{cases}$$

În această **figură 34.10**, graficele funcţiilor **supermatematice** quadrilobe excentrice exterioare **FSM-QEE coq** şi **siq** au fost reluate pentru a putea fi mai facil comparate cu graficele celorlalte funcţii **quadrilobe** cu graficele, în coordonate polare centrice, din **figura 34.6,a,** pentru cele două tipuri de cvadrilobe, de excentricitatea numerică sbunitară şi, în **figura 34.6,b** şi pentru excentricităţi liniare spraunitare.

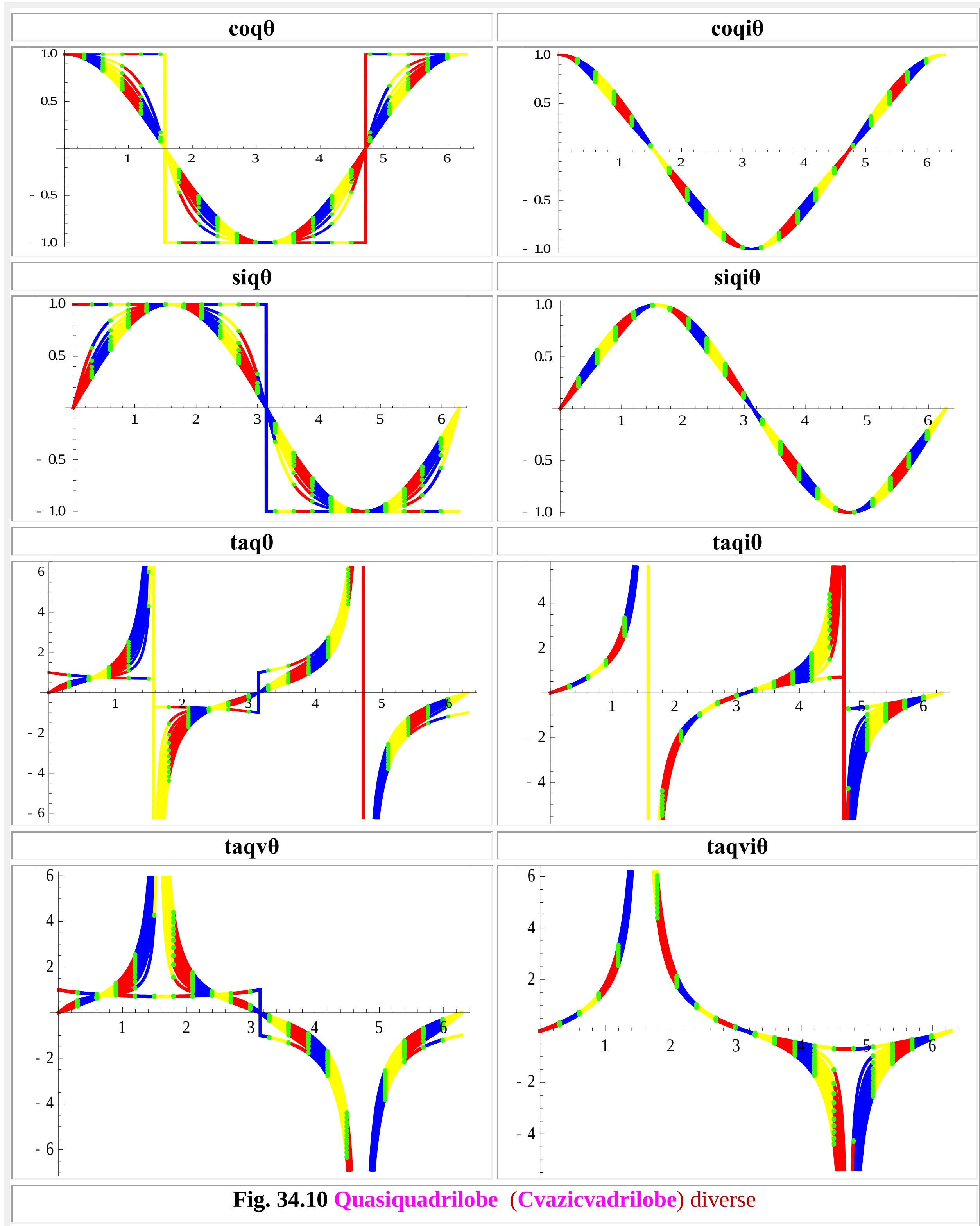


Fig. 34.10 **Quasiquadrilobe (Cvazicvadrilobe)** diverse

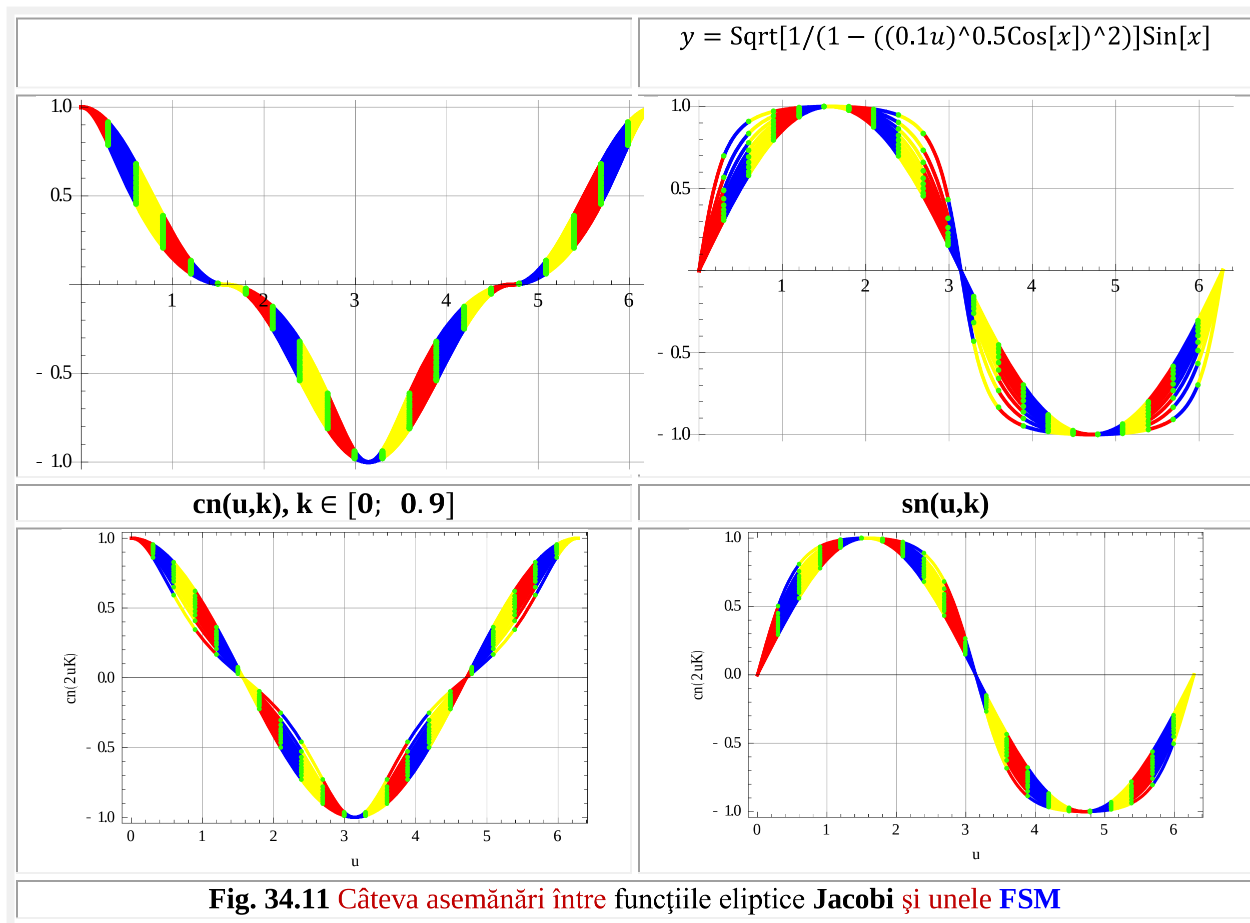


Fig. 34.11 Câteva asemănări între funcţiile eliptice **Jacobi** şi unele **FSM**

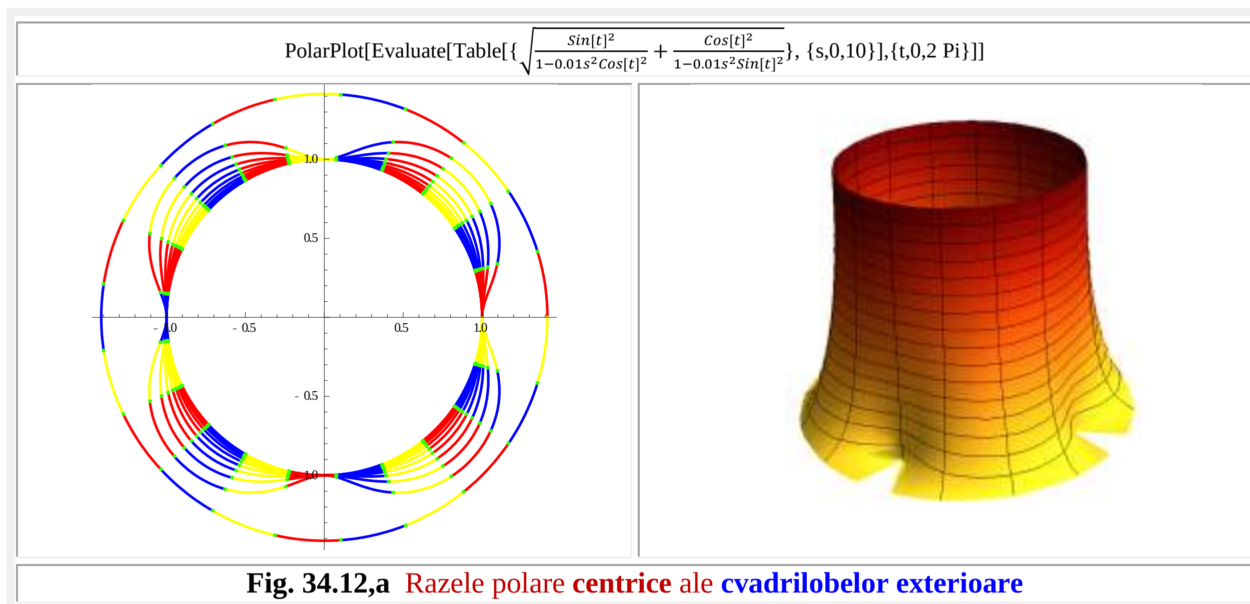


Fig. 34.12,a Razele polare **centrice** ale **cvadrilobelor exterioare**

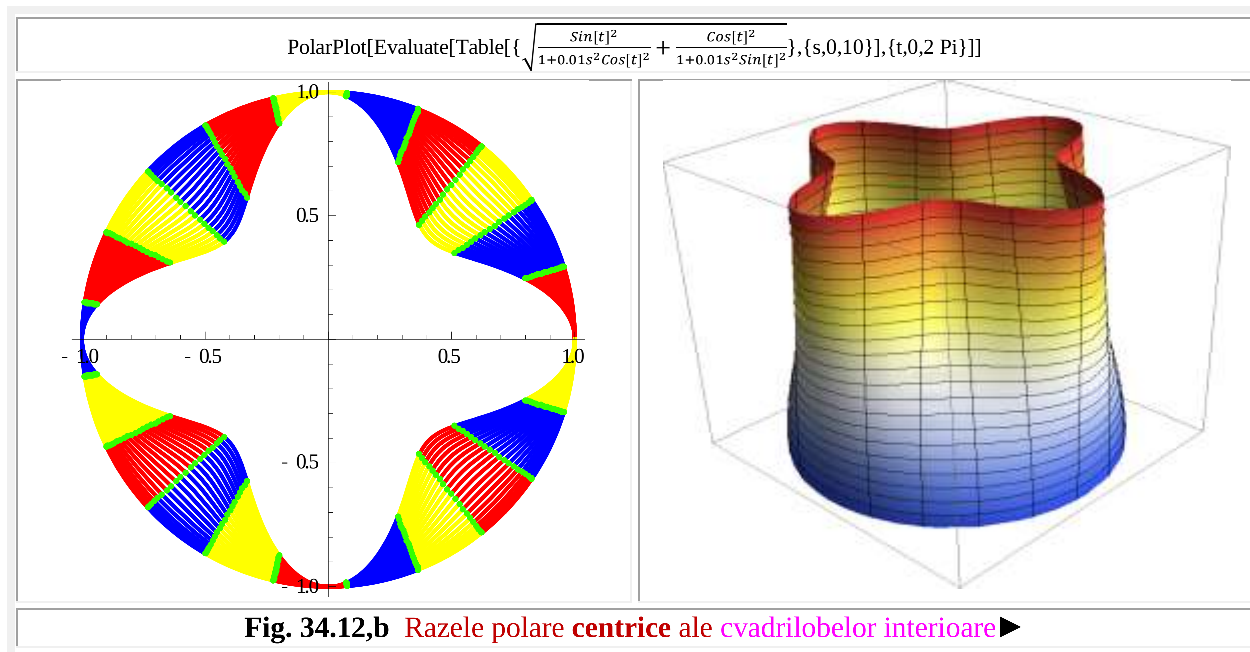
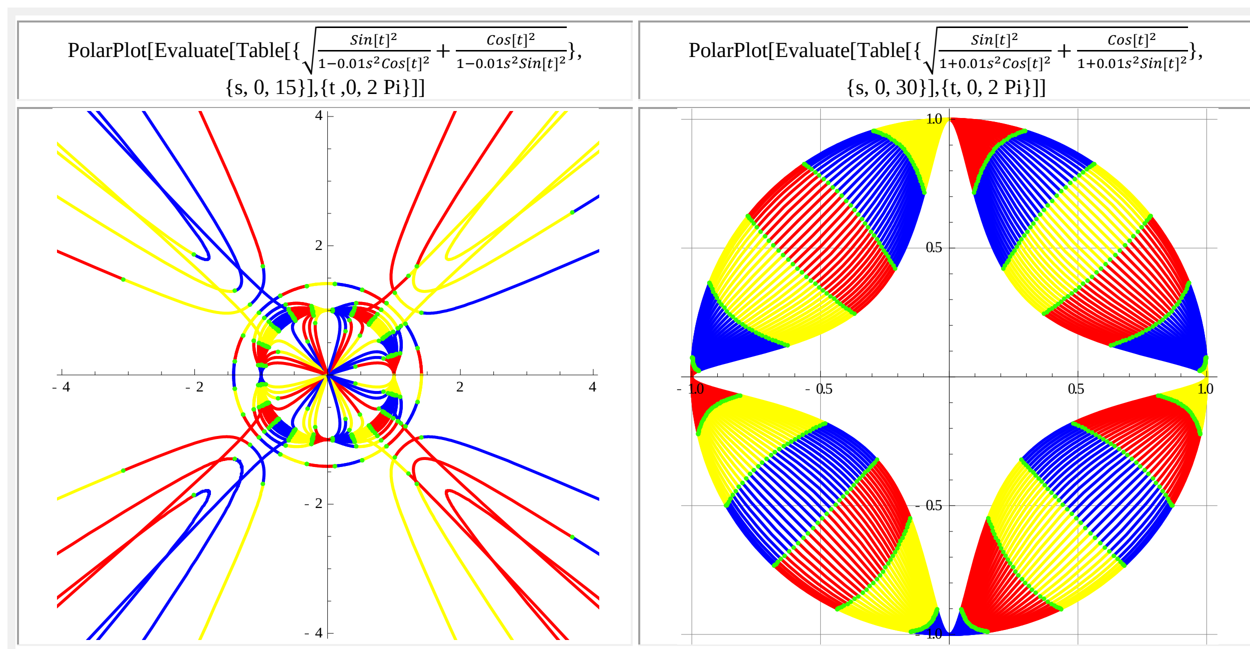


Fig. 34.12,b Razele polare **centrice** ale cvadrilobelor interioare▶

$$(34.12)\qquad \begin{cases} taq = \dfrac{coq\theta}{siq\theta} = \dfrac{sin\theta}{cos\theta}\sqrt{\dfrac{1-s^2sin^2\theta}{1-s^2cos^2\theta}} \\ taqi = \dfrac{coqi\theta}{siqi\theta}\sqrt{\dfrac{1+s^2sin^2\theta}{1+s^2cos^2\theta}} \end{cases}$$

cu graficele din **figura 34.6**



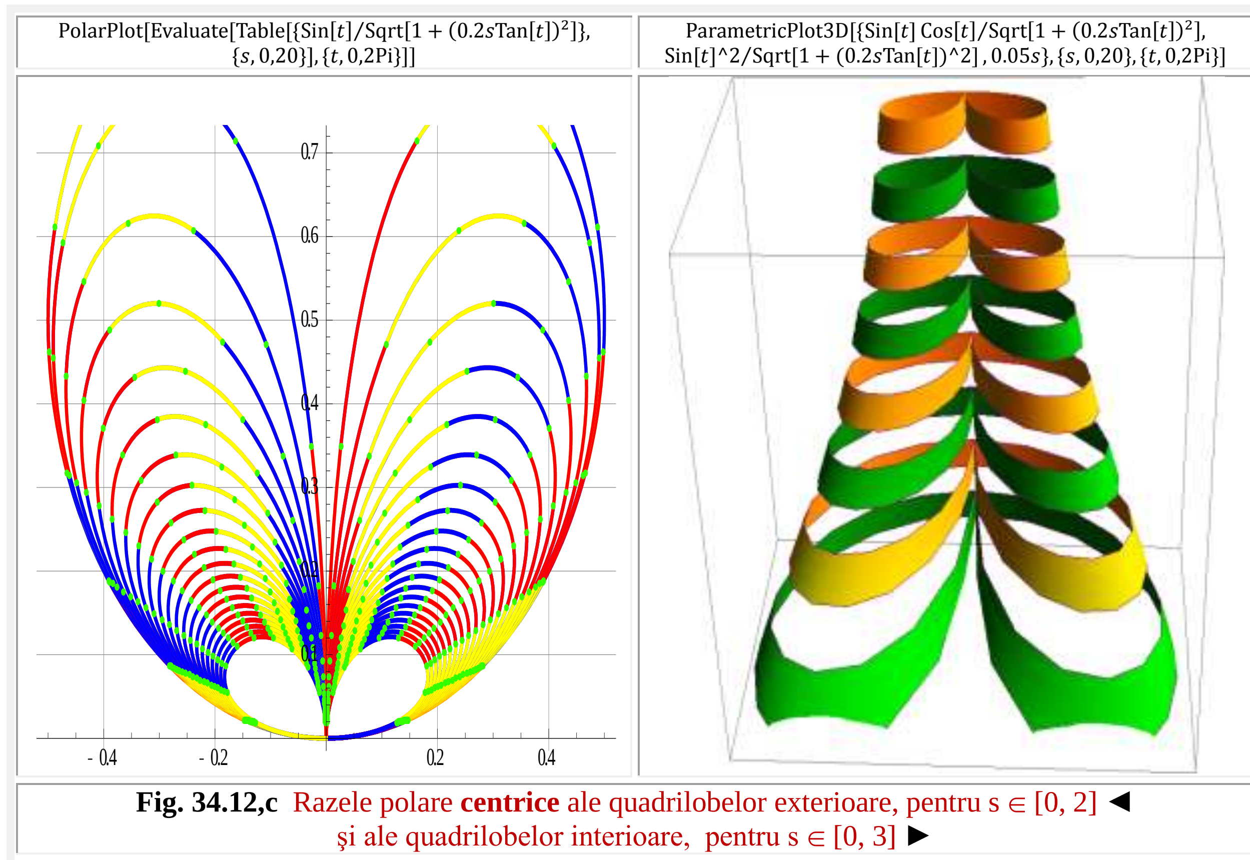


Fig. 34.12,c Razele polare **centrice** ale quadrilobelor exterioare, pentru s ∈ [0, 2] ◄
şi ale quadrilobelor interioare, pentru s ∈ [0, 3] ►

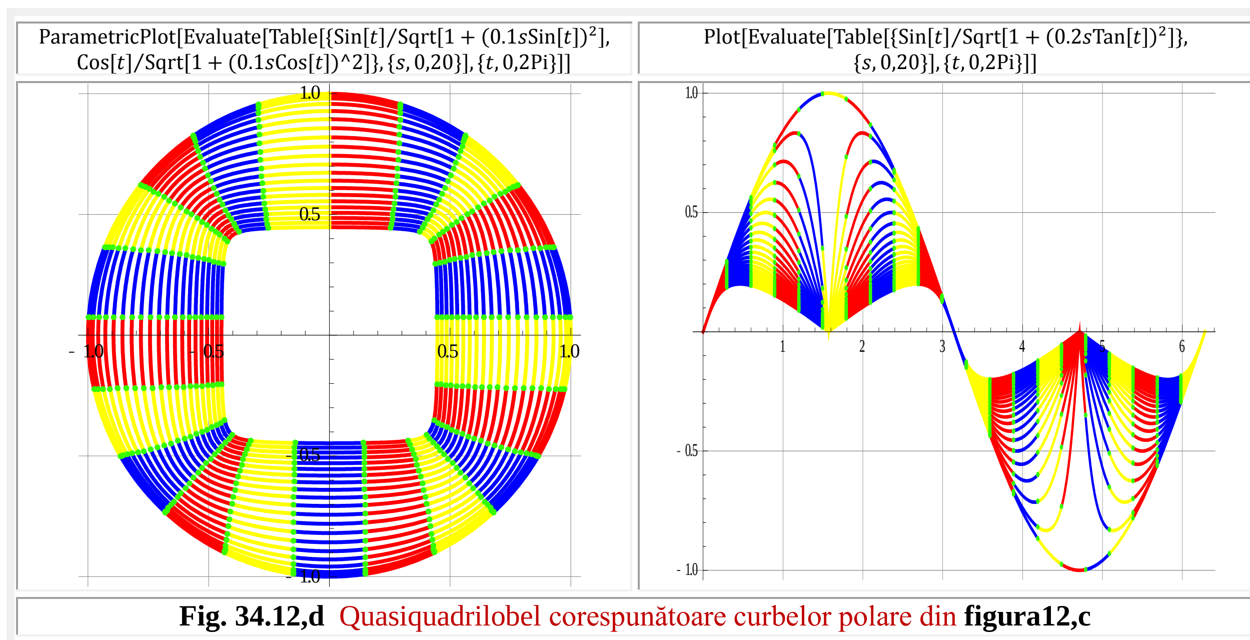


Fig. 34.12,d Quasiquadrilobel corespunătoare curbelor polare din **figura12,c**

Unghiurile la centrul O(0, 0), la care apar aceste raze polare, sunt

$$(34.13)\quad \begin{cases} \alpha_{qe} = \arctan\left[\frac{sin\theta}{cos\theta}\sqrt{\frac{1-s^2sin^2\theta}{1-s^2cos^2\theta}}\right] \\ \alpha_{qi} = \arctan\left[\frac{coqi\theta}{siqi\theta}\sqrt{\frac{1+s^2sin^2\theta}{1+s^2cos^2\theta}}\right] \end{cases}$$

Graficele funcţiilor cosinus şi sinus cvadrilobe, exterioare (stânga ◄) şi interioare (dreapta ►) cercului unitate, sunt prezentate în **figura 34.6** pentru s ∈ [0, 1], iar în **figura 34.11** sunt prezentate graficele unor **FSM** şi a unor **funcţii eliptice Jacobi**, pentru evidenţierea unor asemănări grafice.

În **figura 34.12,a** sunt prezentate curbele închise generate de razelor polare centrice, date de relaţiile (34.7) ale cvadrilobelor exterioare. Se observă că ele diferă semnificativ de forma quadrilobelor exterioare cercului unitate (**Fig. 34.3,a**), atât în 2D cât şi, evident, în 3 D. Acest fapt se dotoreşte faptului că razele polare sunt la un unghi la centru θ, egal cu unghiul la excentrul E(e, ε), în timp ce punctele care generează cvadrilobele exterioare sunt defazate în avans faţă de unghiul polar θ al razelor polare (34.7), aşa cum s-a mai afirmat şi cum se poate observa din **figura 34.1,b** şi **figura 34.2**.

34.3.FSM-QL RADIAL EXCENTRICE $req_{1,2}\,\theta$ şi $Req\alpha_{1,2}$ EXTERIOARE CERCULUI UNITATE

Printre **FSM-CE**, funcţiile **radial excentrice** de variabilă excentrica $rex_{1,2}\theta$ şi de variabilă centrică Rexα reprezintă distanţaele $r_{1,2} = |\overline{SW_{1,2}}|$ în planul cercului unitate de la excentrul **S(s, ε)** la punctele $\mathbf{W_{1,2}}$ de intersecţie a cercului cu dreapta excentrică $d = d^+ \cup d^-$, (**Fig. 34.13,a** ◄) turnantă în jurul lui **S**, exprimate prin unghiul la excentru **θ** şi, respectiv, unghiul α la centrul **O(0, 0).** Indicele **1** este pentru determinarea principală, prin intersecţia cu d^+ şi indicele **2** pentru determinarea secundară de intersecţie cu d^-.

Fig. 13,a Desene explicative pentru funcţii radiale excentriec **circulare rex** ◄ şi

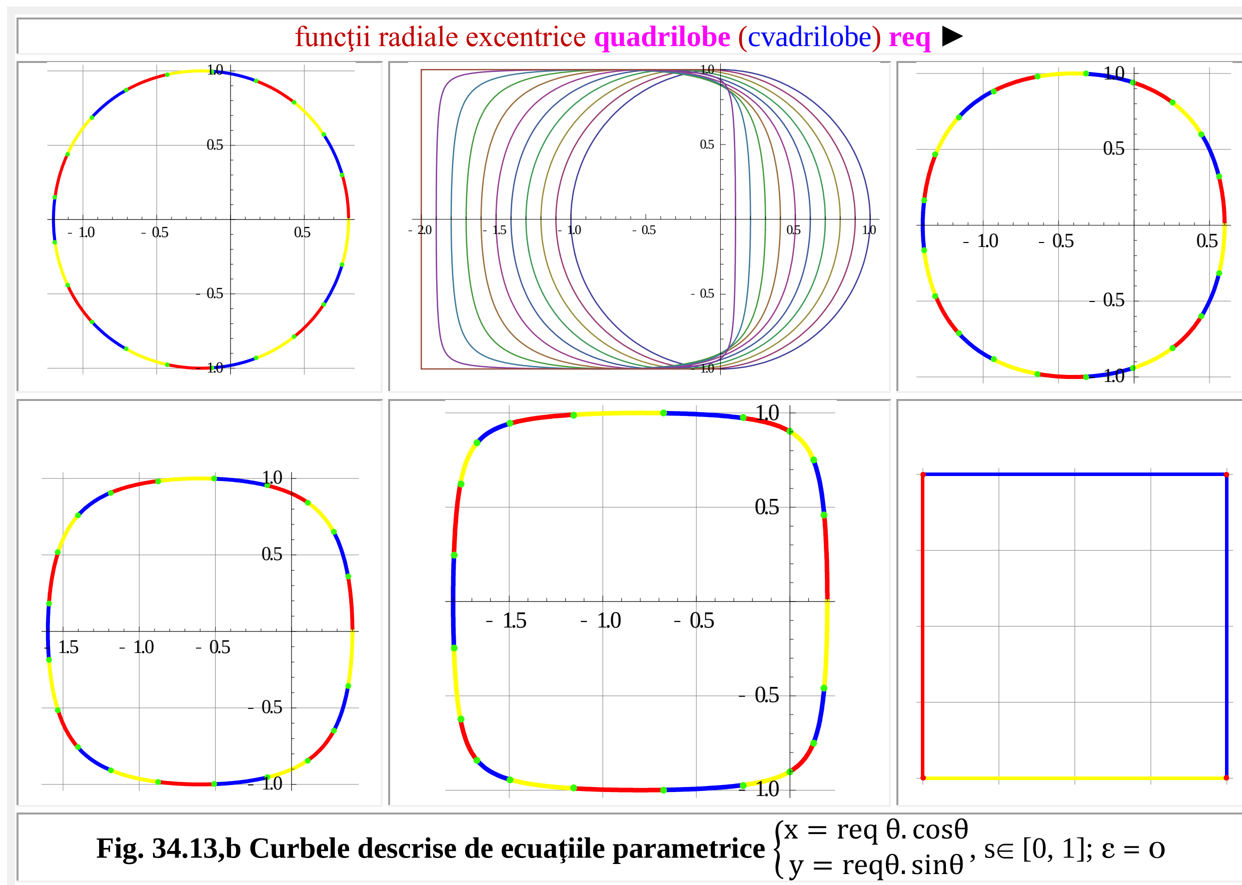
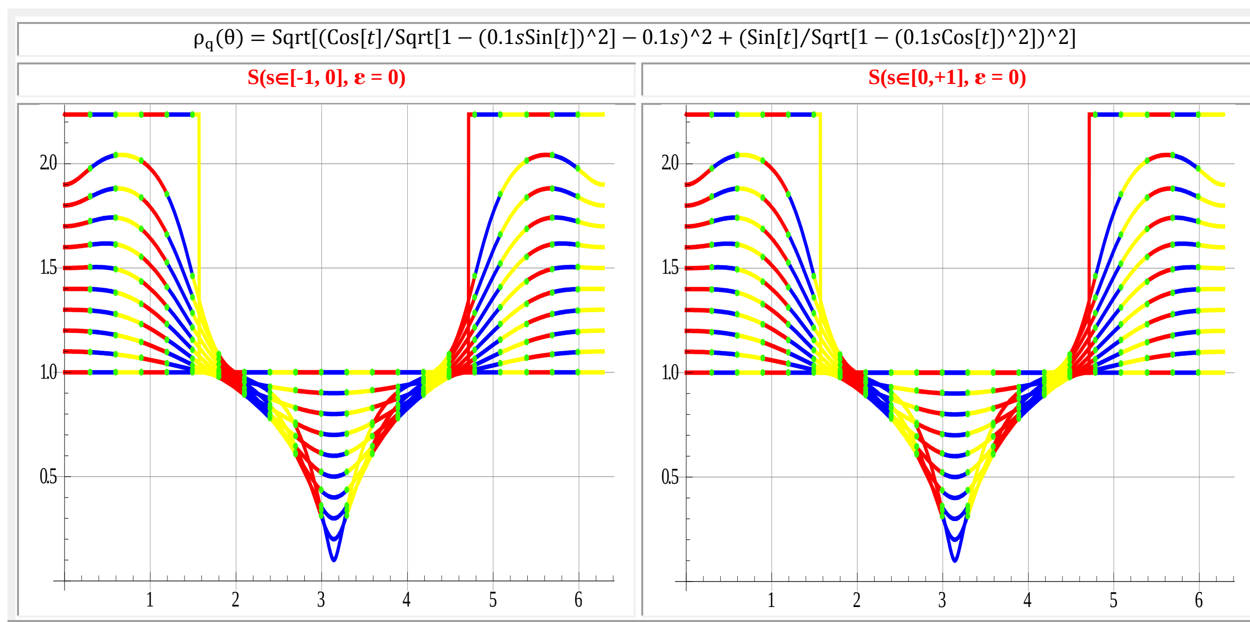


Fig. 34.13,b Curbele descrise de ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x = \text{req}\,\theta.\cos\theta \\ y = \text{req}\theta.\sin\theta \end{cases}$, s∈ [0, 1]; ε = o



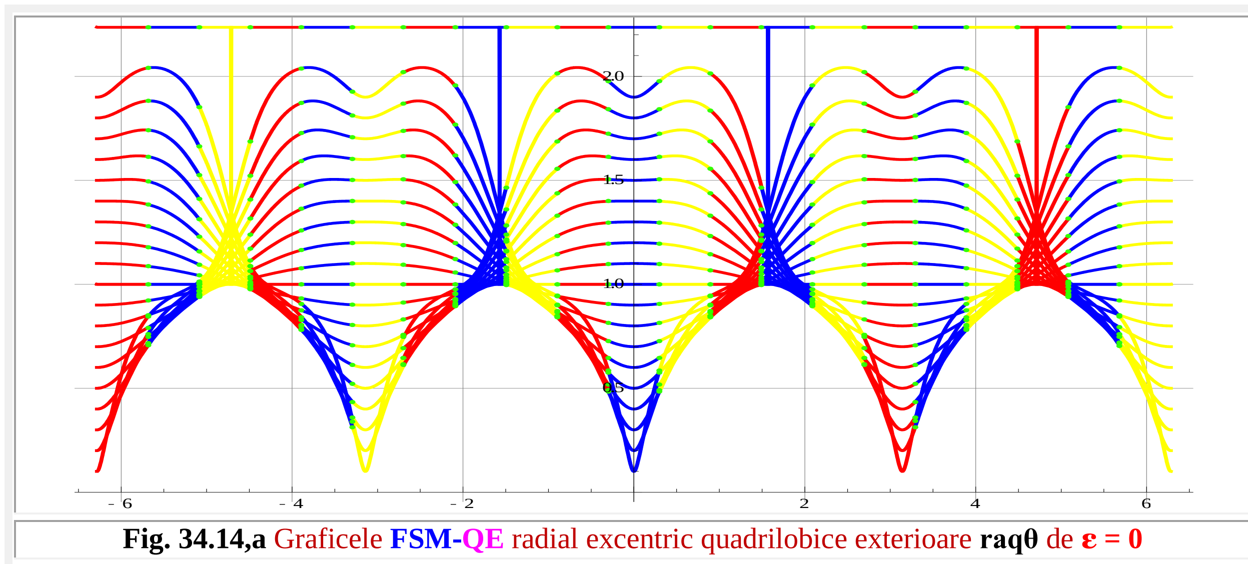


Fig. 34.14,a Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice exterioare **raqθ** de **ε = 0**

În **matematica centrică (MC),** în coordonate **polare**, cercul de rază R, centrat în originea unui reper polar O(0,0), putea fi descris, faţă de centrul lui M (0, 0) ≡ O(0, 0) de ecuaţia vectorială (**Fig. 34.13,a** ◄)

(34.14) $\vec{\rho}(\alpha) = \vec{R}$ = R radα,

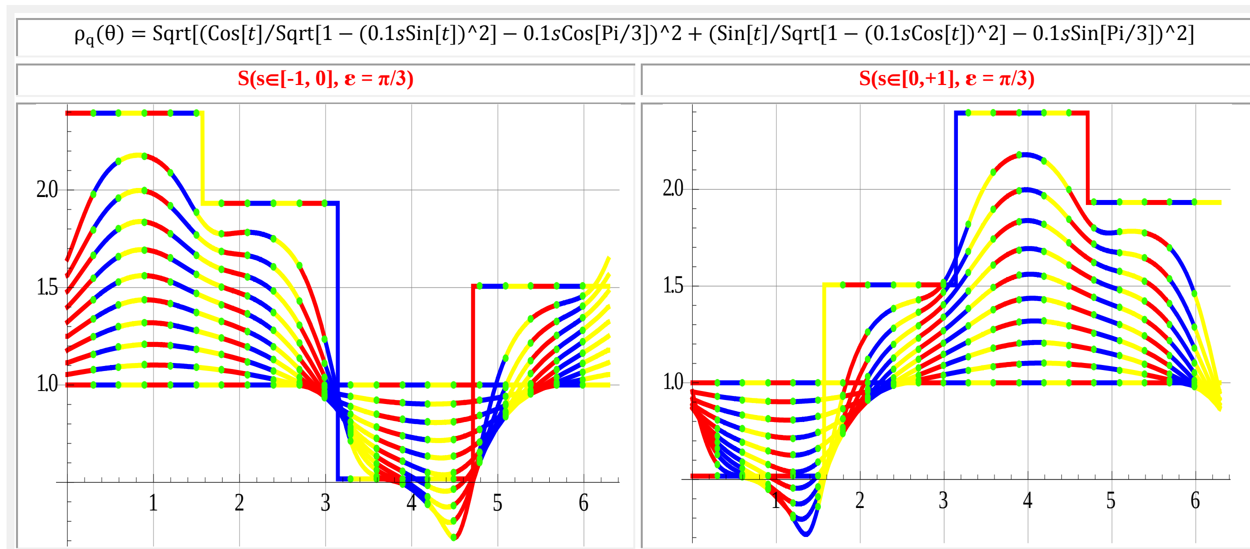
iar, acum, în **matematica excentrică** (ME) şi în **supermatematică** (**SM**), faţa de un punct oarecare E(e,ε) din planul cercului, denumit, după cum aţi dedus deja, **excentru real**, de ecuaţia vectorială

(34.15) $\vec{\rho}(\theta) = R.\boldsymbol{rex\theta}.rad\theta$ = R[-s cos(θ − ε) +$\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}$].radθ, **s** = **e**/R,

prin unghiul / **variabila excentrică θ**, faţă de **E(e,ε)** şi cu ecuaţia vectorială

(34.16) $\vec{\rho}(\theta)$ = R.**Rexα**. radθ

prin **variabila centrică α** sau unghiul **α** la centrul O(0, 0).



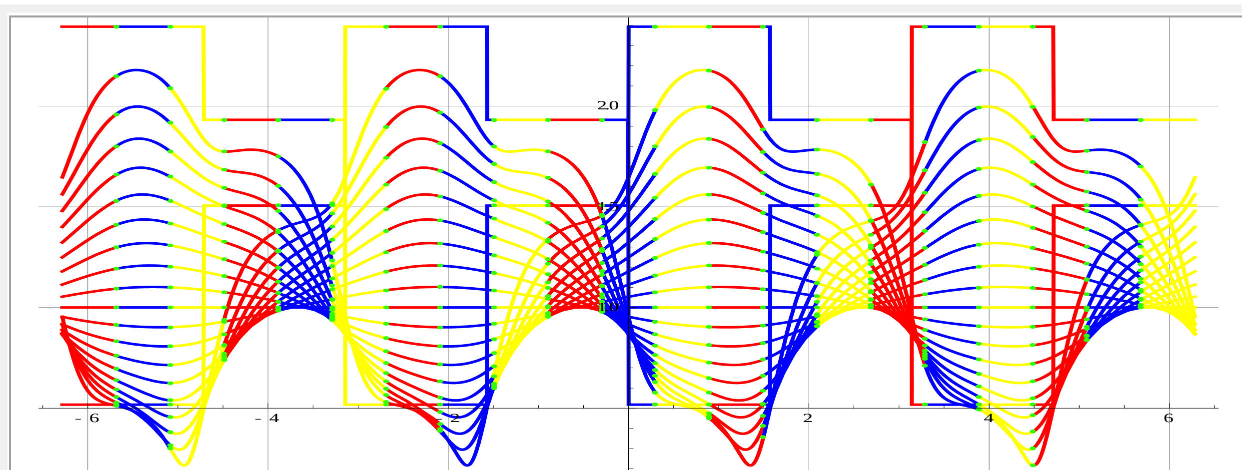


Fig. 34.14,b Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice **raqθ** de **ε =** $\frac{\pi}{3}$

În mod asemănător, prin definirea **funcţiilor supermatematice** quadrilobe excentrice **FSM-QLE** şi a quadrilobelor, ecuaţiile lor în coordonate polare se pot defini fie faţă de centrul O(0,0), fie de excentrul **E(e, ε)** sau **S(s, ε)** **(Fig. 34.13,a►).**

Definite prin variabila excentrică **θ** ele au ecuaţiile

(34.17) $\quad \text{req}\theta = \pm\sqrt{(coq\theta + s\,cos\varepsilon)^2 + (siq\theta + s.sin\varepsilon)^2}$

şi pentru **ε = 0** au graficele din **figura 34.14,a** iar, pentru **ε =** $\frac{\pi}{3}$, în **figura 34.14,b.**

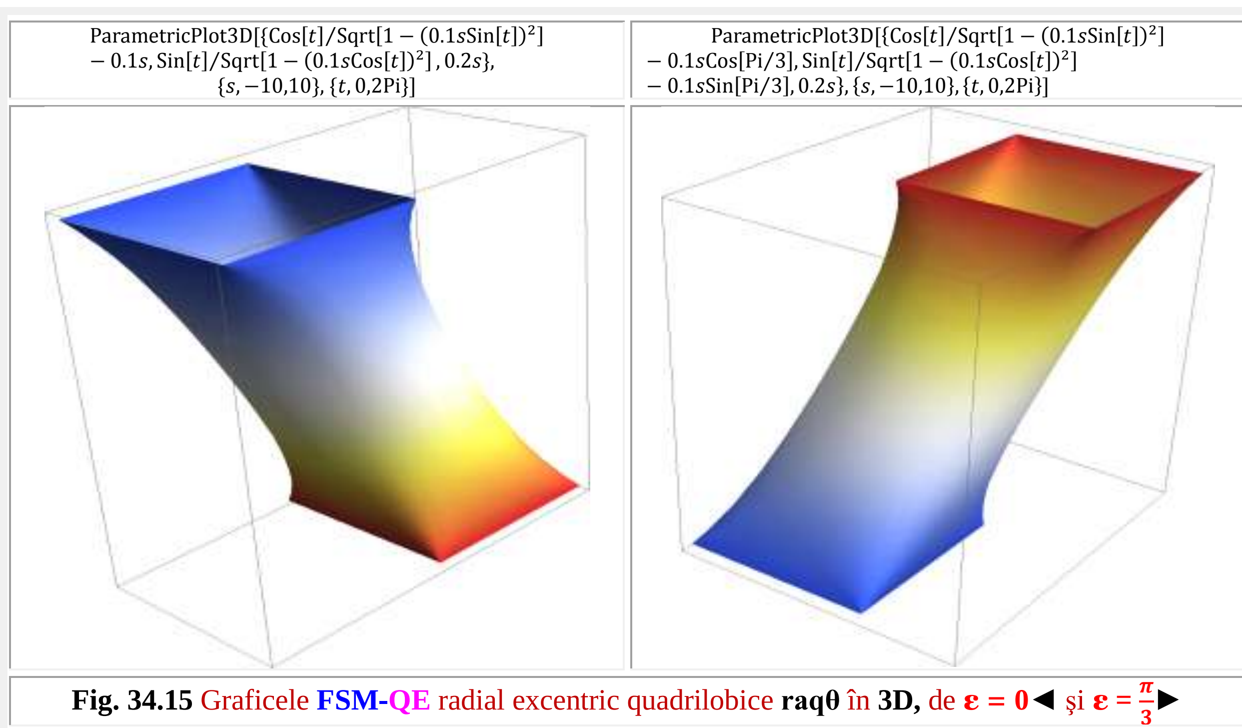


Fig. 34.15 Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice **raqθ** în **3D,** de **ε = 0◄** şi **ε =** $\frac{\pi}{3}$**►**

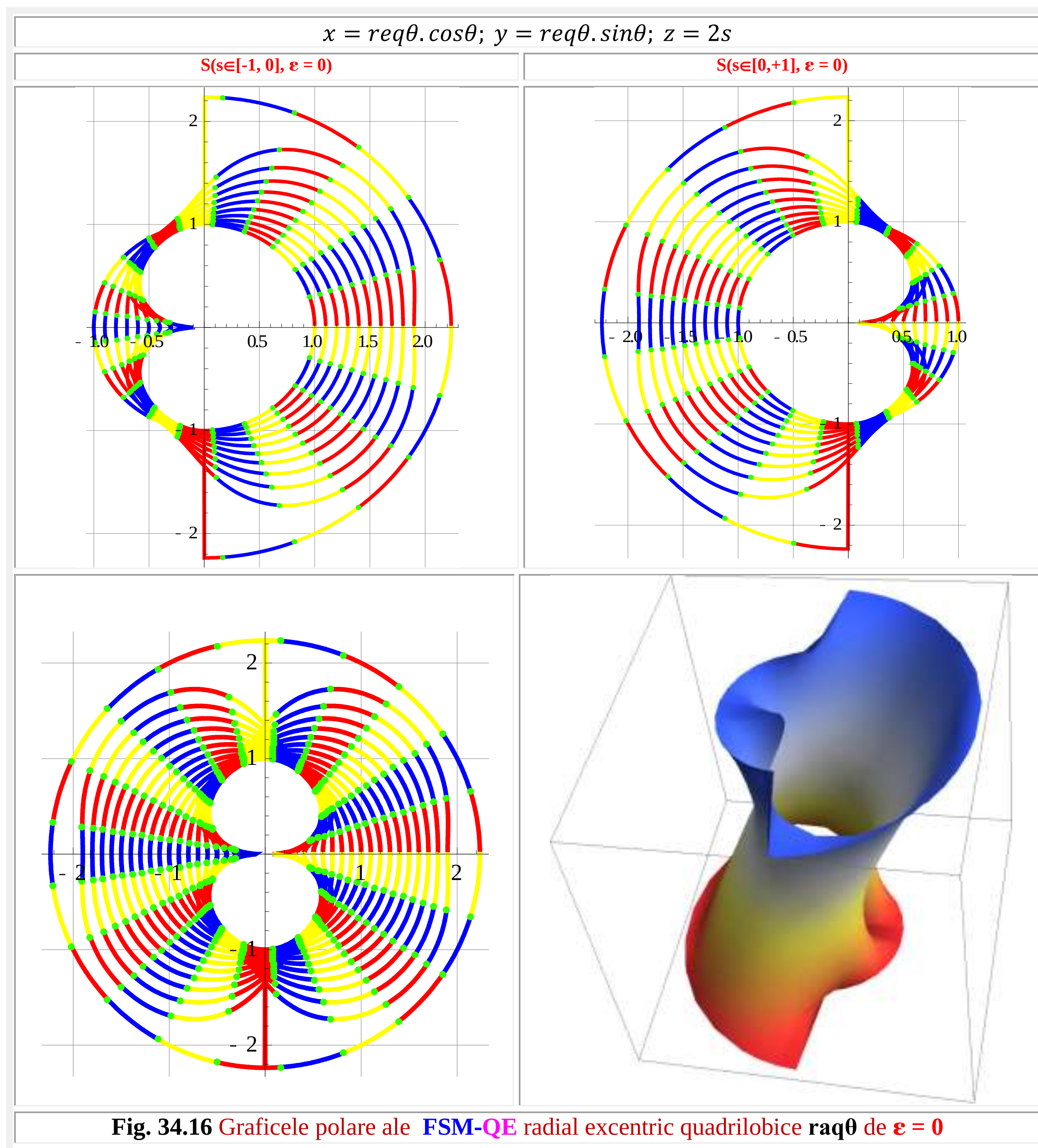


Fig. 34.16 Graficele polare ale **FSM-QE** radial excentric quadrilobice **raqθ** de **ε = 0**

Reprezentarea polară cu ecuaţia (34.13) ca şi prin ecuaţiile parametrice bazate pe ea, dau evident curbele plane închise quadrilobe (cvadrilobe) care sunt însă deplasate pe direcţia excentricităţii **s** : a axei x pentru **ε = 0** şi în diagonală pentru **ε = π/3** , aşa cum se prezintă situaţia în **figura 13,b** în 2D şi în **figura 34.15** în 3D.

În **figura 34.16** sunt prezentate graficele polare ale **FSM-QLE**

34.4 FSM-QL RADIAL EXCENTRICE reqi$_{1,2}$ θ şi Reqiα$_{1,2}$ INTERIOARE CERCULUI UNITATE

Funcţiile supermatematice radiale excentrice quadrilobe (cvadrilobe) interioare cercului unitate (**FSM-QEI**) **reqiθ** sunt reprezentate / schiţate geometric în **figura 34.17**, impreună cu cele exterioare cercului unitate reqθ şi cu cele circulare excentrice rexθ.

Pe de alta parte, ele nu sunt, strict vorbind, quadrilobe (cvadrilobe), deoarece aşa cum se poate observa în **figura 34.18**, în care, pentru **s = 1**, curba plană închisă nu mai este un pătrat perfect, ci cu colţurile rotunjite, iar pentru s > 1 degenereaza în astroide.

(34.18) deliθ = $\sqrt{1 + s^2 sin^2(\theta - \varepsilon)}$

Fig. 34.17 Desene explicative pentru funcţii radiale excentriec **circulare** resθ şi funcţii radiale excentrice **quadrilobe** (cvadrilobe) exterioare **reqθ** şi interioare cercului unitate **reqiθ** de variabile excentrice θ

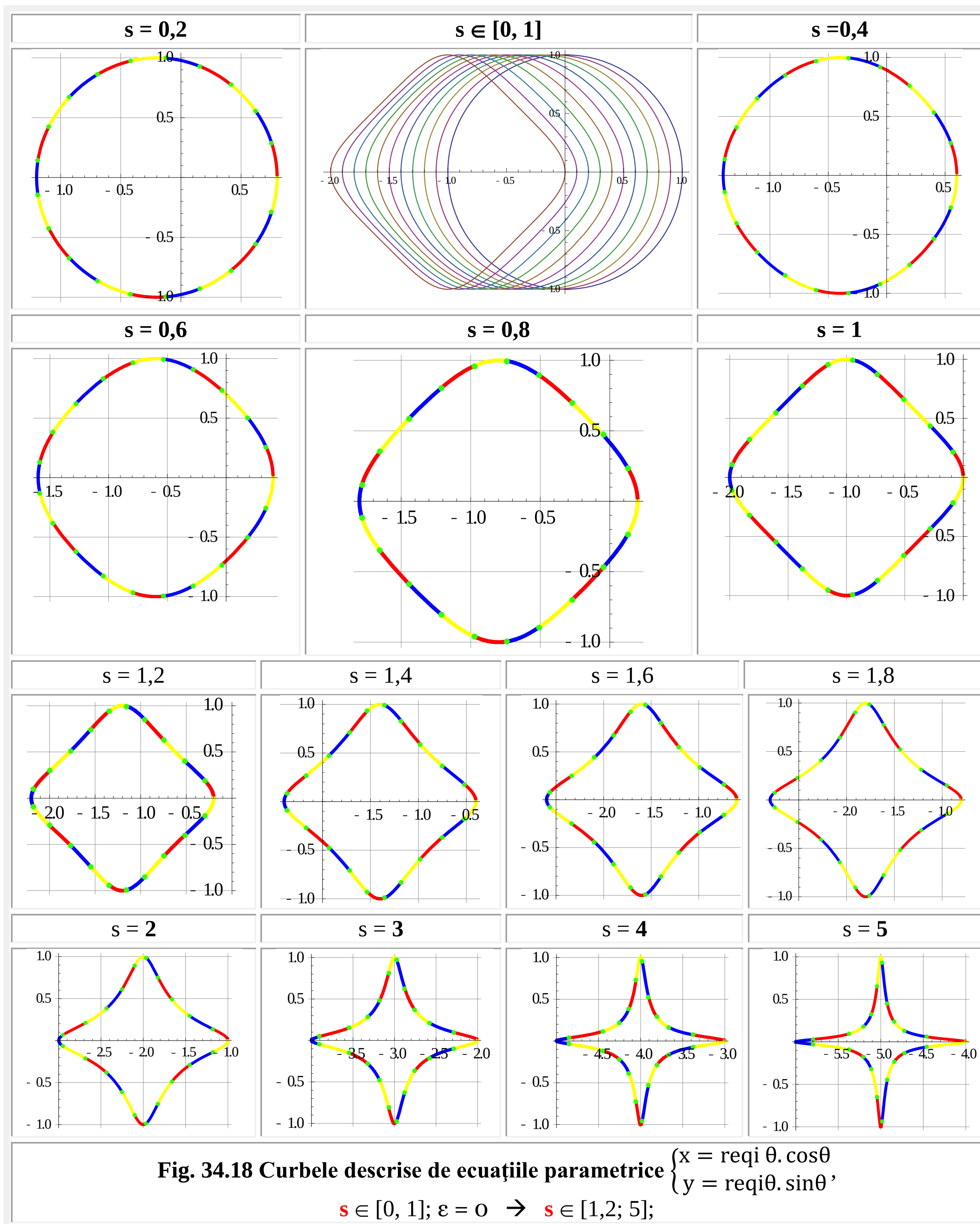


Fig. 34.18 Curbele descrise de ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x = reqi\ \theta.\cos\theta \\ y = reqi\theta.\sin\theta \end{cases}$,

s ∈ [0, 1]; ε = o → s ∈ [1,2; 5];

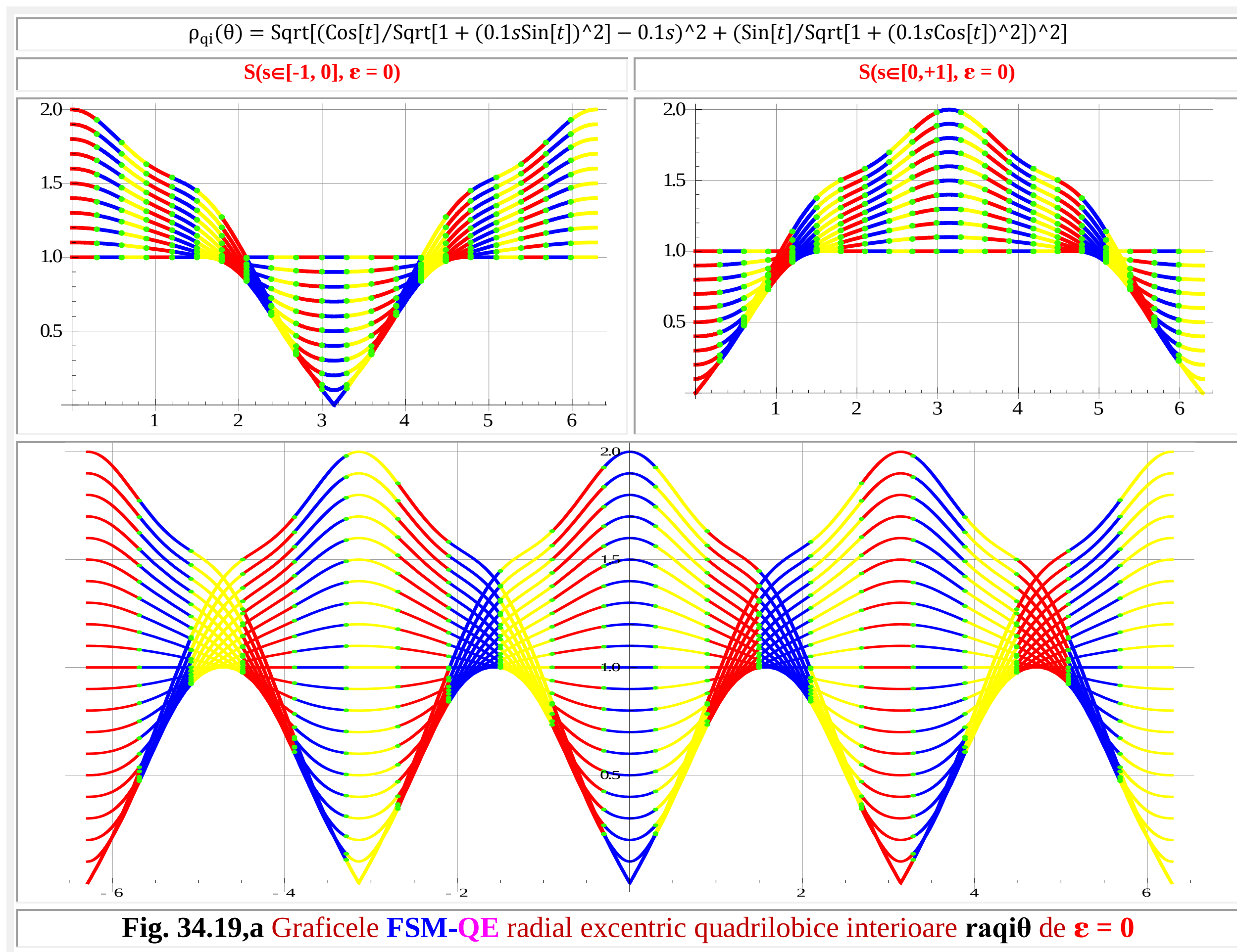
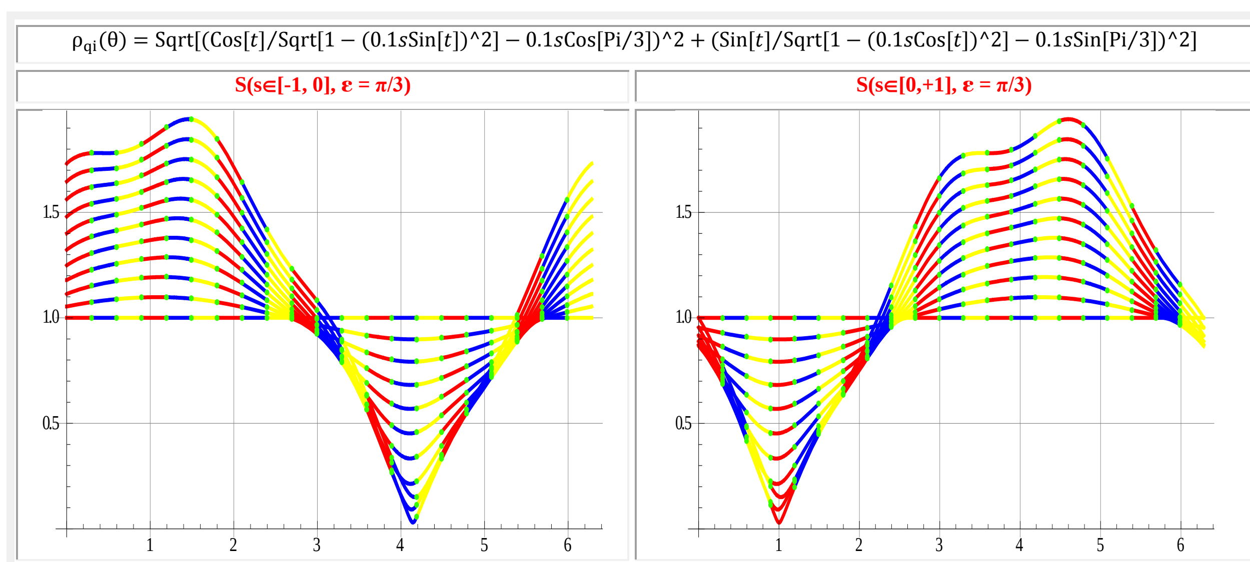


Fig. 34.19,a Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice interioare **raqiθ** de **ε = 0**



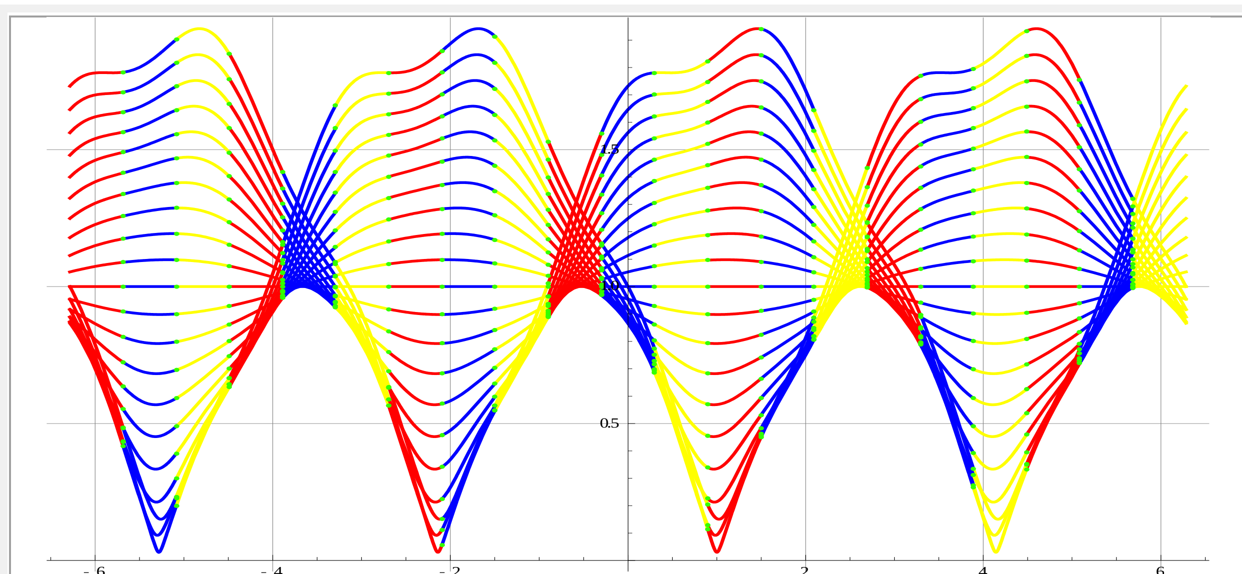
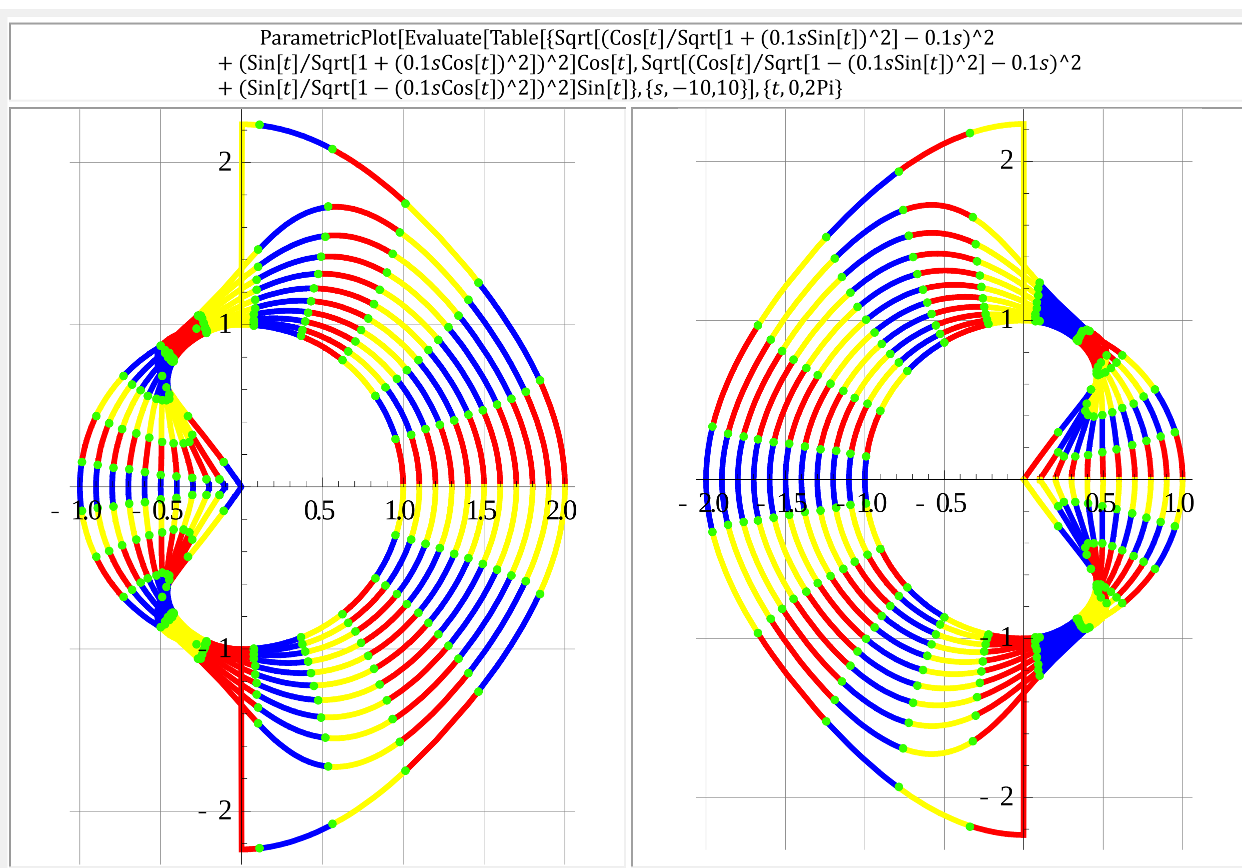


Fig. 34.19,b Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice **raqiθ** de **ε** = $\frac{\pi}{3}$



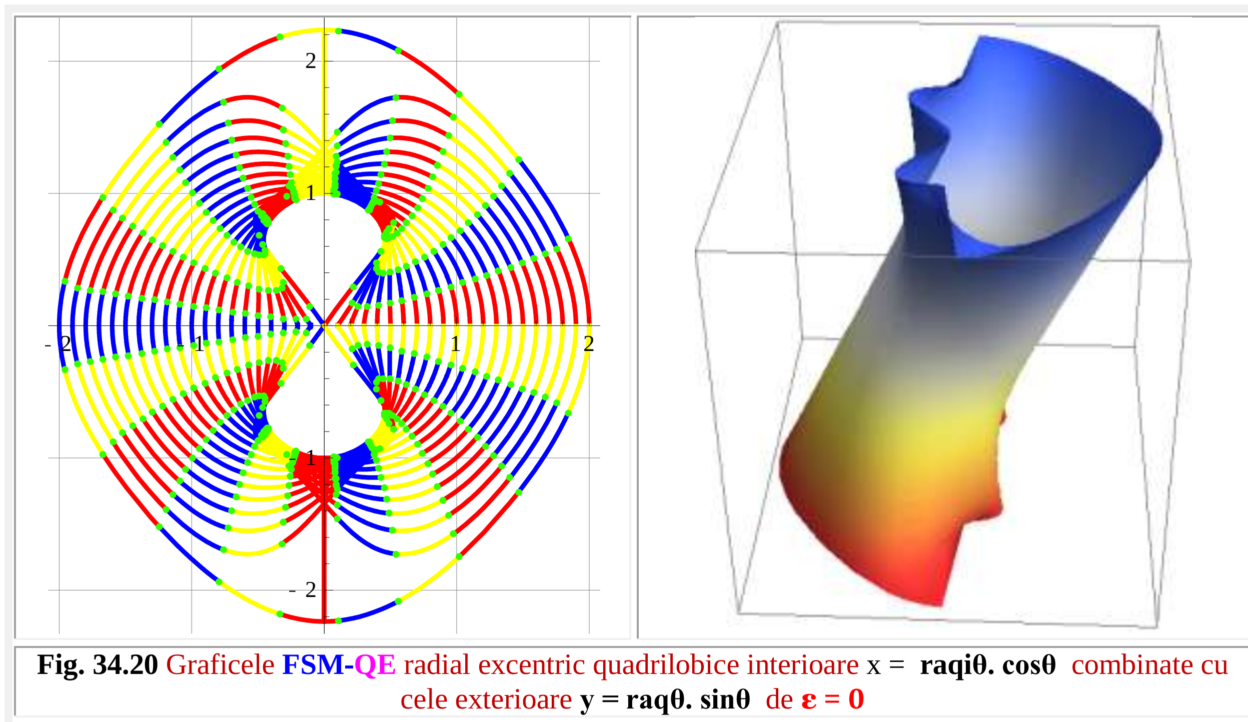
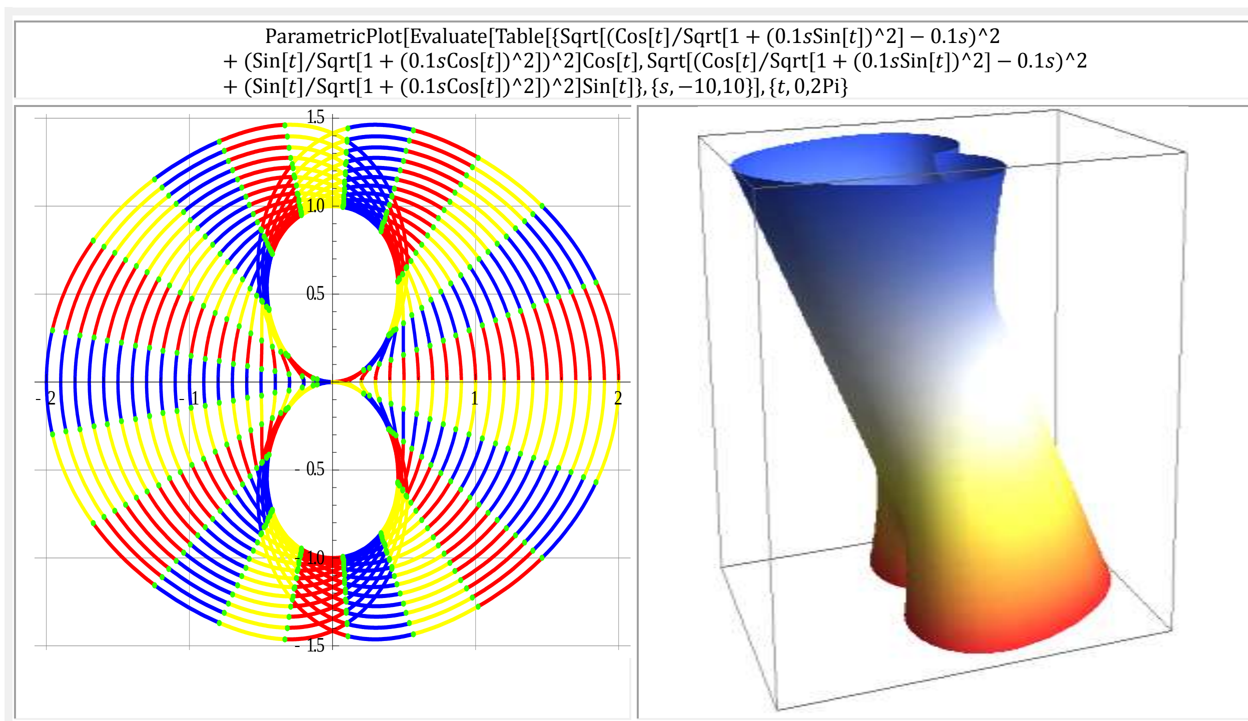


Fig. 34.20 Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice interioare x = **raqiθ. cosθ** combinate cu cele exterioare **y = raqθ. sinθ** de **ε = 0**



ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sqrt[(Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[t])^2] − 0.1s)^2 + (Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[t])^2])^2]Cos[t], Sqrt[(Cos[t]/Sqrt[1 + (0.1sSin[t])^2] − 0.1s)^2 + (Sin[t]/Sqrt[1 + (0.1sCos[t])^2])^2]Sin[t]}, {s, −10,10}], {t, 0,2Pi}

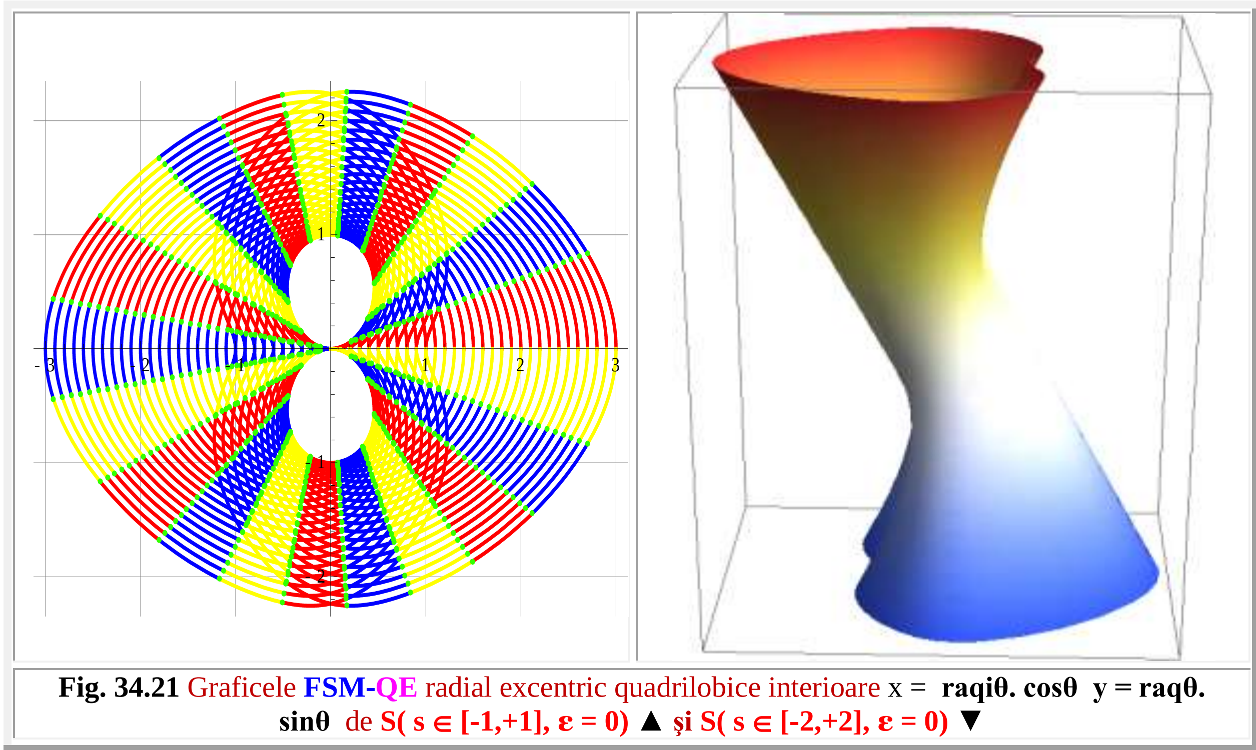


Fig. 34.21 Graficele **FSM-QE** radial excentric quadrilobice interioare x = **raqiθ. cosθ y = raqθ. sinθ** de **S(s ∈ [-1,+1], ε = 0) ▲ şi S(s ∈ [-2,+2], ε = 0) ▼**

Ecuaţiile funcţiilor radiale excentrice quadrilobe interioare sunt deduse ca sumă vectorială a funcţiilor

(34.19) $$\begin{cases} \text{coqi}\theta - \text{s}\cos\varepsilon \\ \text{siqi}\theta - \text{s.}\sin\varepsilon \end{cases},$$

şi reprezintă distanţă de la excentrul S(s, ε) la punctul Q_i de pe cvadriloba interioară cercului, adică

(34.20) $$\rho_{qi} = \text{raqi}\theta = \sqrt{(\text{coqi}\theta - \text{s.}\cos\varepsilon)^2 + (\text{siqi}\theta - \text{s.}\sin\varepsilon)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+(s^2.\sin(\theta-\varepsilon))\text{^}2}} - \text{s.}\cos\varepsilon\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+(s^2.\cos(\theta-\varepsilon))\text{^}2}} - \text{s.}\cos\varepsilon\right)^2}$$

cu graficele funcţiilor din **figura 34.19,a** pentru un excentru S(s ∈ [0,1]; ε = 0) şi din **figura 34.19,b** pentru **S(s ∈ [0,1]; ε = $\frac{\pi}{3}$)**

În **figura 34.20** sunt prezentate graficele polare ale **FSM-QE** radial excentric quadrilobice **combinate; interioare cu x = raqiθ cosθ şi** exterioare cercului unitate **cu y = reqθ.sinθ,** de **S(s ∈ [-1, +1] ; ε = 0)**.

În **figura 34.21** sunt prezentate aceleaşi curbe închise, dar numai pentru funcţii cvadrilobe interioare.

Deoarece imaginile curbelor în 2 D pot să inducă în eroare, au fost prezentate şi în 3D.

Motto: "**Mecanica** este paradisul ştiinţelor matematice, deoarece prin ea se ajunge la fructele matematicii "
Leonardo da Vinci

"Ori de câte ori aud de "cvadridimensional" matematicienii sunt scuturaţi de un frison mistic.."
Albert Einstein

Motto "Excentricitatea este originalitate fără sens".
Citat de John S. Blackie

" Nu şi cea geometrică, care-i izvorul creaţiei şi dimensiunea de formare a **supermatematicii**"
Autorul

Capitolul 35

EXCENTRICITATEA MINIMUM A PATRA DIMENSIUNE A SPAŢIULUI 3D

35.1INTRODUCERE

"Matematica pură este ştiinţa în care noi nu ştim despre ce vorbim şi nici dacă este adevărat ceea ce spunem." spunea **Bertrand Russell**. Că avea dreptate, se va vedea imediat din următoarele definiţii date dimensiunii în diverse dicţionare şi alte lucrări ştiinţifice şi, în special, din declaraţiile fantasmagorice date celei de a patra dimensiuni: **excentricitatea**. În realitate nu e "**imposibilă**", ci este o dimensiune ca oricare alta, aşa cum se va putea constata / vedea în continuare !.

DIMENSIÚNE, *dimensiuni*, s. f. **1.** Mărime (**lungime, lățime sau înălțime**) necesară la determinarea întinderii figurilor și a corpurilor (geometrice). ◊ Expr. (Fam.) *A patra dimensiune* = **ceva imposibil**, ceva neconceput încă de mintea omenească. ♦ Spec. Mărime fizică considerată din punctul de vedere al legăturii dintre unitatea sa de măsură și unitățile mărimilor fundamentale ale unui sistem de unități de măsură. **2.**Mărime, măsură, proporție. [Pr.: *-si-u-*] – Din fr. **dimension,** lat. **dimensio, -onis.** Sursa: DEX '98 (1998) ;

DIMENSIÚNE s. **1.** mărime, măsură, proporție, (înv.) mărie, mărire, (fam.) calibru. *(Are o ~ mare.)* **2.** v. *format*. **3.** volum, (fam.) gabarit. *(X are o ~ apreciabilă.)* Sursa: Sinonime (2002)

DIMENSIÚNE ~i *f.* 1) Orice mărime care poate fi măsurată. 2) *fig.* Număr care exprimă legătura dintre o unitate derivată și unitățile fundamentale din care derivă. ◊ **A patra ~** fapt inexistent, **imposibil**. [Art. **dimensiunea;** G.-D. **dimensiunii;** Sil. **-si-u-**] /<fr. *dimension,* lat.*dimensio, ~onis* Sursa: NODEX (2002) | ;

DIMENSIÚNE *s.f.* **1.** Întindere care poate fi măsurată. ♦ (*Fiz.*) Număr care exprimă legătura dintre o unitate derivată și unitățile fundamentale din care derivă. **2.** Mărime, întindere, proporție. [Pron. -*si-u-*. / cf. lat. *dimensio*, fr. *dimension*]. Sursa: DN (1986) |;

DIMENSIÚNE *s. f.* 1. întindere care poate fi măsurată. 2. număr care exprimă legătura dintre o unitate derivată și unitățile fundamentale din care derivă. 3. mărime, întindere, proporție. ♦ a patra ~ = **ceva imposibil**. (< fr. *dimension*, lat. *dimensio*). Sursa: MDN (2000) ;

DIMENSIUNE f. întinderea unui corp în toate sensurile: **lungime, lărgime și înălțime sau adâncime**. Sursa: Șăineanu, ed. a VI-a (1929) | Adăugată de LauraGellner |

În **fizică** și **matematică**, **spațiul Minkowski** (sau **spațiul - timp Minkowski**) este contextul matematic în care se formulează cel mai convenabil teoria relativității restrânse a lui Einstein. În acest context, cele **trei dimensiuni obișnuite** ale spațiului sunt combinate cu o **a patra dimensiune, a timpului**, pentru a forma o varietate tetradimensională menită a reprezenta spațiul - timp. Spațiul **Minkowski** își trage numele de la matematicianul german **Hermann Minkowski**.

În **fizica teoretică**, spațiul **Minkowski** este adesea comparat cu un spațiu euclidian. În timp ce spațiul euclidian are doar dimensiuni spațiale, un spațiu Minkowski are și o dimensiune temporală. Astfel, grupul simetric al unui spațiu euclidian este grupul euclidian, iar pentru un spațiu Minkowski este grupul Poincaré.

35.2 SPAŢIUL MATEMATICII EXCENTRICE

Spaţiul **matematicii excentrice** (**ME**) şi, totodată, al **supermatematicii** (**SM**) nu necesită o a patra dimensiune temporală, ci una obişnuită, liniară **e**, denumită **excentricitate liniară reală** ca una din coordonatele polare ale unui punct real **E**(e, ε) sau, **S**(**s, ε**) într-un cerc unitate (**s** = **e** /R), extrem de important din plan, la fel de important ca şi originea **O(0, 0)**, punct denumit **excentru**.

A fost denumit **excentru** deoarece a fost expulzat din centrul **O** şi centrul cercului trigonometric în care l-a plasat **Euler** ca pol, la definirea funcţiilor trigonometrice ca funcţii circulare pe cercul unitate CU(**O**,1).

Dacă **E**(e, ε) sau, **S**(**s, ε**) sunt puncte fixe, adică **e**, **s** şi ε sunt constante, ca şi x, y, z, θ, φ, ψ, atunci ele sunt doar **coordonate** ale unor puncte fixe. În schimb, dacă ele sunt variabile, de abia atunci ele devin **dimensiuni** ale spaţiului. Aşa cum sunt x, y şi z în ecuaţiile parametrice ale unor obiecte geometrice 3D ca, de exemplu, **sfera**

(1) (35.1) $\begin{cases} x = cosu.cosv \\ y = sinu.cosv, \; u \in [0, 2\pi]; \; v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ z = sinv \end{cases}$

şi **torul**

(2) (35.2) $\begin{cases} x = (3 + cosu)cosv \\ y = (3 + cosu)sinv, \; u \in [0, 2\pi]; \; v \in [0, 2\pi] \\ z = sinu \end{cases}$

reprezentate în **figura 35.1,a**.

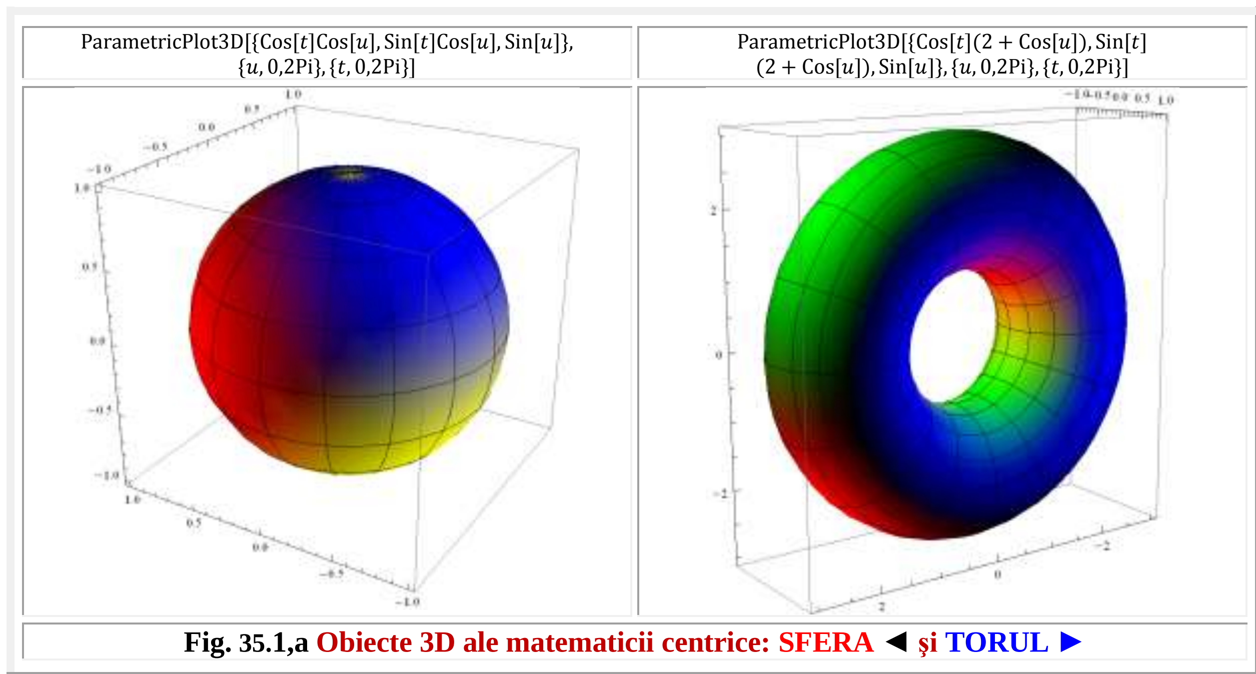


Fig. 35.1,a Obiecte 3D ale matematicii centrice: SFERA ◄ şi TORUL ►

Este suficient să apară o a 4-a dimensiune, **excentricitatea reala e** sau cea **numerică s** = $\frac{e}{R}$ pentru ca aceste obiecte să poată fi transformate sau **metamorfozate**, aşa cum se prezintă situaţia în **figura 35.1,b**:

- Sfera în cub;
- Torul circular din matematica centrică (**MC**) în tor de formă pătrat şi de secţiune pătrată din **SM**

Transformarea se face în etape / trepte:

1) **Întâi,** funcţiile cosinus şi sinus centrice **(cosα, sinα)** se transformă în **funcţii supermatematice circulare excentrice** (**FSM**-**CE**) **cexθ** şi **sexθ;**
2) Cu ajutorul acestora şi al noilor **FSM**-**CE** se obţin noi curbe închise în **2D**, ca de exemplu **quadrilobele** (cvadrilobele) care constituie şi o transformare continua a cercului în patrat;

3) Pe aceste noi curbe se definesc noi **FSM-CE** ca de exemplu **funcţiile quadrilobe** (cvadrilobe) **coqθ** şi **siqθ** precum şi **taqθ,** tacvθ, **ctqθ** şi **ctqvθ**;
4) Pe baza acestora, în 3D, se definesc transformările continue ale sferei într-un cub **(Fig.1,b$_1$◄)** perfect ca şi a torului circular în tor pătrat **(Fig.1,b$_1$►)**;

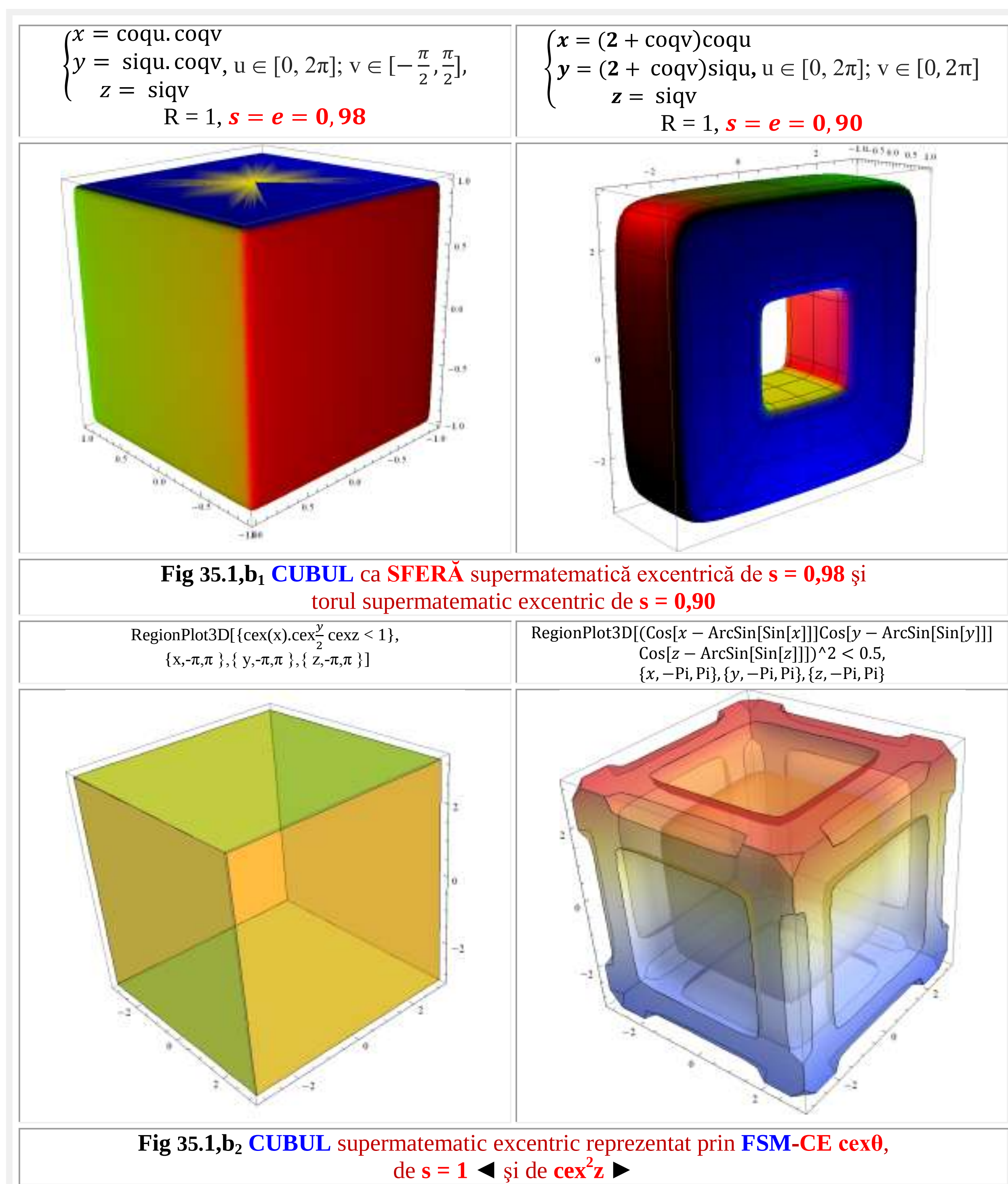


Fig 35.1,b$_1$ CUBUL ca **SFERĂ** supermatematică excentrică de **s = 0,98** şi torul supermatematic excentric de **s = 0,90**

Fig 35.1,b$_2$ CUBUL supermatematic excentric reprezentat prin **FSM-CE cexθ**, de **s = 1** ◄ şi de **cex^{2}z** ►

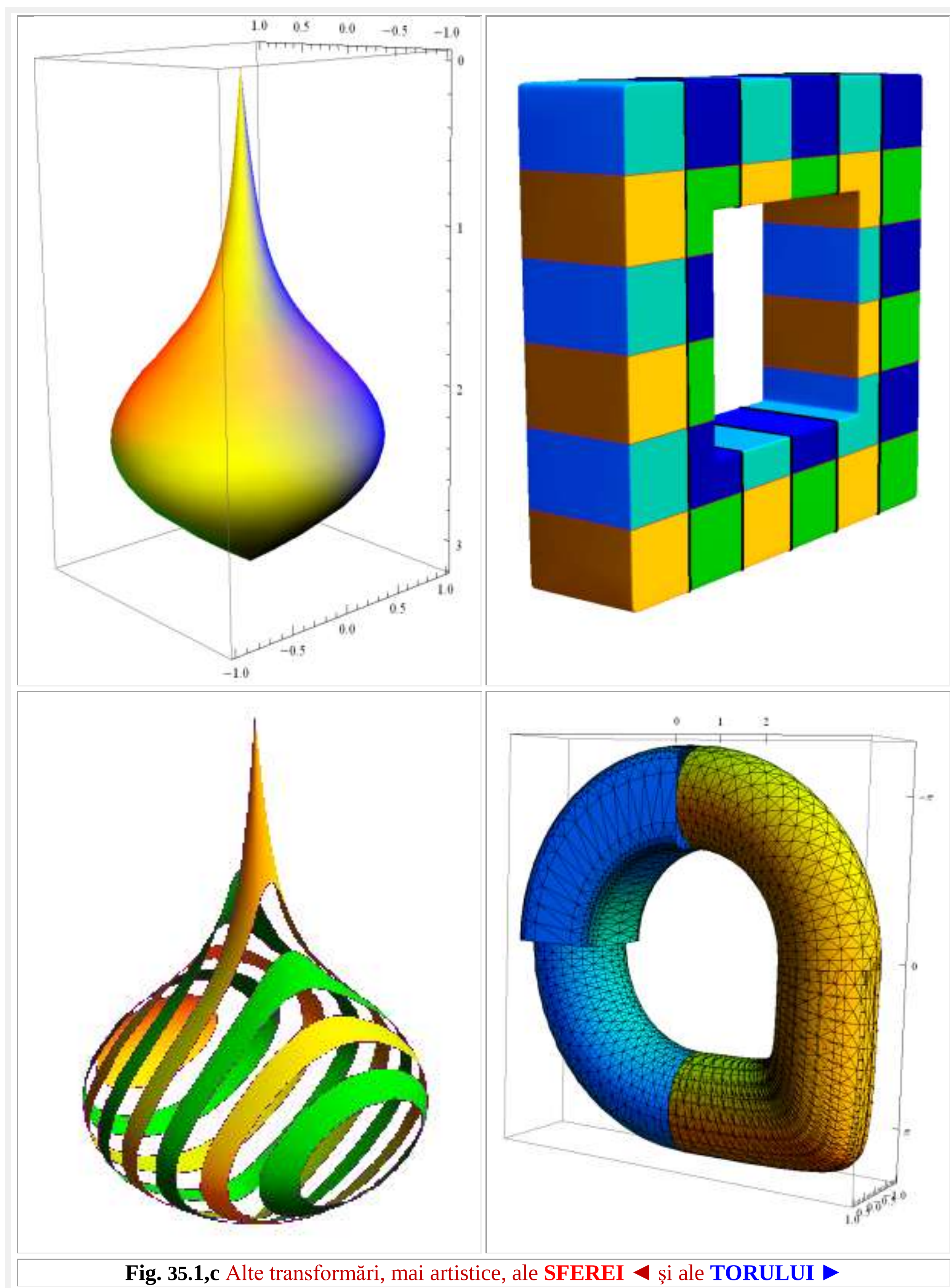


Fig. 35.1,c Alte transformări, mai artistice, ale **SFEREI ◄** şi ale **TORULUI ►**

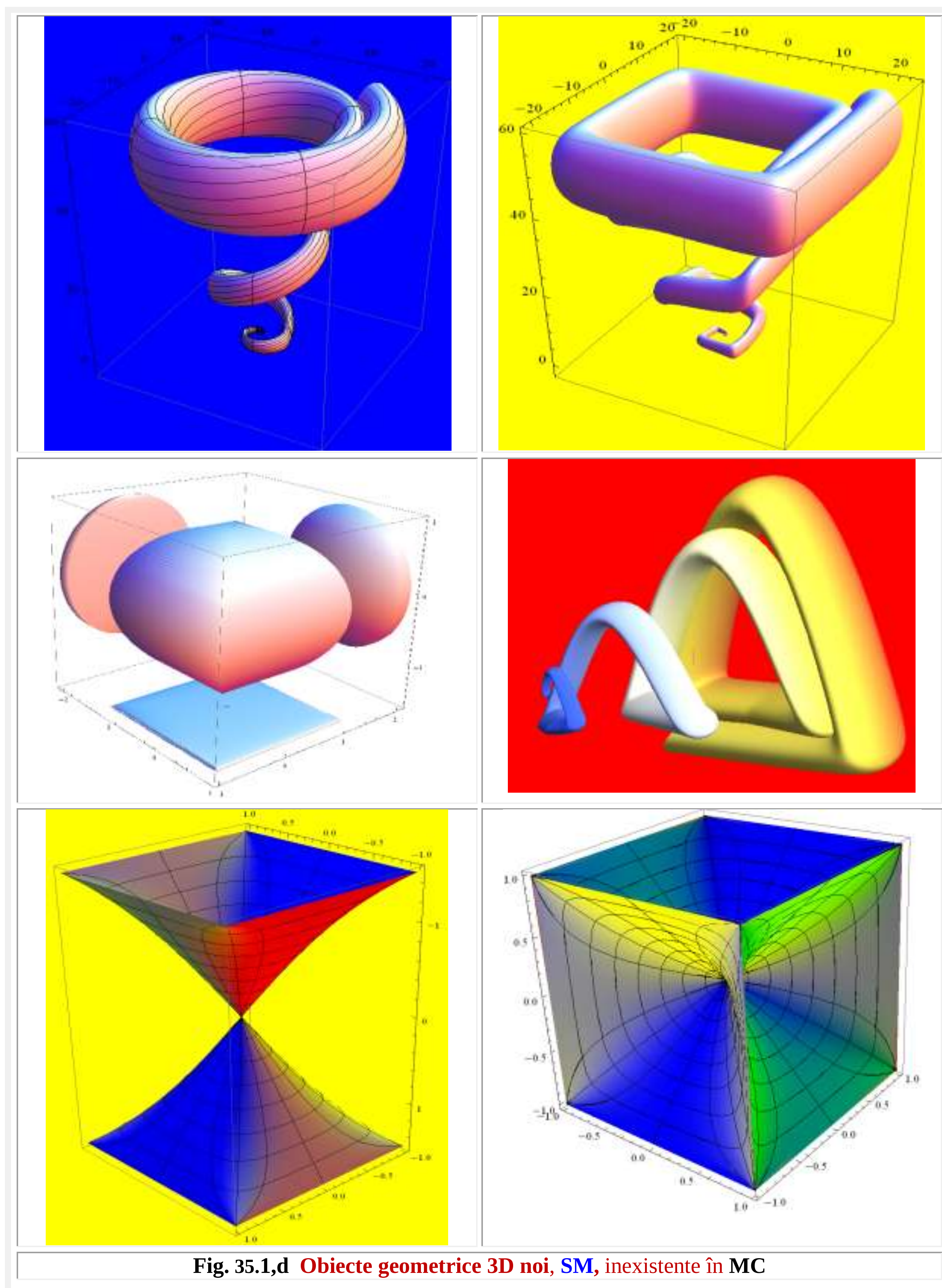


Fig. 35.1,d **Obiecte geometrice 3D noi**, **SM,** inexistente în **MC**

În **figura 35.1,b$_1$** reprezentarea obiecteor **3D** s-a executat cu ajutorul ecuaţiilor parametrice şi cu funcţii quadrilobe (cvadrilobe), dar sunt multe alte posibilităţi, dintre care una, în **RegionPlot**, cu funcţii cosinus excentrice, sunt prezentate în **figura 35.1,b$_2$** ◄, iar dacă **cexz → cex^{2}z** se obţine obiectul cubic tehnic din dreapta **figurii 35.1,b$_2$**► cu un alt cub mai mic în interior.

Dacă sfera şi cubul perfecte sunt obiecte cunoscute în **MC** şi-i aparţin, obiectele intermediare care nu mai sunt sferă perfectă şi încă n-au devenit cub perfect, aparţin noii matematici, **matematicii excentrice** (**ME**), fiind considerate **obiecte hibride** [sau **hibridate** (super)**matematic**] şi sunt denumite **quadrilobizi** (cvadrilobizi) sau quadriloboizi (cvadriloboizi) şi aparţin **ME**. Toate, reunite împreună, aparţinând **SM**, deoarece **SM** = **MC** ∪ **ME** şi, ca urmare, **MC** = **SM(e = s = 0).**

Matematica ordinară, pe care acum suntem obligaţi s-o **denumim centrică** (**MC**), a fost enorm sărăcită şi redusă la câte o singură entitate matematică din infinitatea de entităţi existente în **matematica excentrică** (**ME**) şi, totodată, în **supermatematică** (**SM**). Păcat ! Aşa s-au pierdut ***peste 300 de ani*** de matematică adevărată ! Ani fără adevărata matematică (**SM),** matematica întregită, copletă, cu infinit mai multe posibilităţi de exprimare decât sărăcita **MC**. De aceea, **SM** a fost considerată matematica viitorului, matematica mileniului III, afirmaţie făcută de profesori de matematică americani în "LAUDATIO" şi prezentată cu ocazia decernarii "**Diplomei AGIR**" în domeniul **tehnologiei informaţiei** pe anul 2012, lucrării "**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE**" ediţia a-2-a, în 2 volume, Editura POLITEHNICA din Timişoara, 2012, cu **914** pagini (486 Vol. I şi 428 Vol. II).

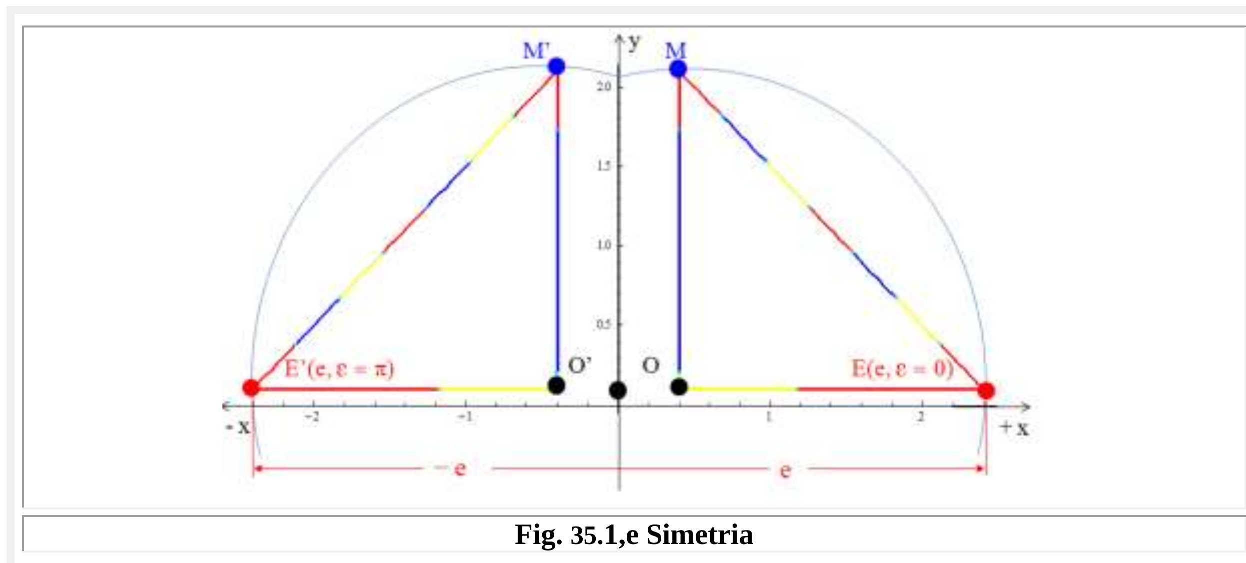


Fig. 35.1,e Simetria

Se înţelege simplu că **MC** este un caz particular de **e = 0** al **SM** şi, totodată, că pentru fiecare punct din plan există câte o **matematică excentrică**.

Este important de reţinut că pentru **E(e, ε)** sau **S(s, ε) puncte fixe** într-un plan, adică excentrincitatea efectivă / reala **e** sau cea numerică **s** şi excentricitatea unghiulara **ε** sunt constante, atunci, în spaţiul 3 D, există următoarele dimensiuni:

- **Dimensiuni de localizare centrice X, Y, Z,**
- **Dimensiuni de localizare excentrice e / s** ;
- **Dimensiuni de orientare centrice Φ, Θ, Ψ**
- **Dimensiuni de orientare excentrice ε**

Şi, ca urmare, e / s şi ε sunt a 4-a şi, respectiv, a 5-a dimensiune a spaţiului 3D prin care se pot obţine simetriile unor elemente, cum este punctul fix **E(e, ε = 0)** de pe axa X şi, totodată, a triunghiului din **figura 35.1,e**, sau a altor figuri geometrice**.**

Dacă **x, y, z** sunt variavilele, ca şi **E** şi **S** din ecuaţiile parametrice prezentate în **figura 35.1,b$_2$**, de exemplu, atunci ele devin **dimensiunile de formare** (ale unui obiect, a cărui poziţie în spaţiul **3D** este determinată de coordonatele X, Y, Z, constante). În acest caz apar, **în plus,** următoarele dimensiuni de formare şi de deformare ale obiectelor geometrice:

- **Dimensiuni de formare liniare centrice x(t), y(t), z(t);**
- **Dimensiuni liniare de formare şi de deformare excentrice, e(t) / s(t);**
- **Dimensiuni unghiulare de formare centrice φ(t), θ(t), ψ(t);**
- **Dimensiuni unghiulare de formare şi de deformare excentrice ε(t).**

Aşa a fost posibilă apariţia unor obiectele geometrice noi, precuma cele prezentate în **figurile 35.1,c** şi **35.1,d.**

Acestă revoluţie în matematică s-a născut **din nimic**, cum s-a exprimat **Iànos Bolyai** la descoperirea / crearea **geometriei neeuclidiene**, mai precis, prin deplasarea / expulzarea unui singur punct din plan şi, prin aceasta, a introducerii unor noi dimensiuni în plan: **excentricitatea liniară** reală **e** sau numerică **s** şi a **excentricităţii unghiulare ε**. Deci, ca şi **x, y, z excentricitatea liniară reală e,** ca şi cea **numerică s,** sunt posibile şi uşor de conceput !

Consecinţele ? Sunt greu de estimat, doar după **40 … şi ceva de ani** de la apariţia **SM**.

Multiplicarea la infinit a tuturor entităţilor din **MC** este una dintre cele mai importante.

Şi mai importante sunt noile entităţi **SM** ce apar. O pleiadă de funcţii matematice noi: de variabilă **excentrică θ** (aex**θ**, bex**θ**, cex**θ**, dex**θ**, …, rex**θ, **tex**θ,** texv**θ** ş.m.a) precum şi cele de variabilă **centrică α** (Aex***α***, Bex***α***, Cex***α***, Dex***α***, …, Rex***α*** **,** Tex***α*** **,** Texv***α*** ş.m.a). O pleiada de curbe noi, o pleiada de corpuri **3D** noi, unele chiar cu veleităţi artistice, cum sunt cele prezentate în **figura 1,c;** cele din stânga ◄fiind derivate din SFERĂ iar cele din dreapta figurii ► fiind derivate din tor.

Alte obiecte 3D (**Fig. 35.1,d**) ca **elice conice** **circulare** ▲◄, **pătratice** ▲► sau **triunghiulare** (mijloc, dreapta ▬►) ca şi **sfero-cubul** ▬◄ sunt inexistente în **MC**, în sensul că nu aveau sau nu se cunoşteau ecuaţiile lor de definire şi nici transformarea continuă a cercului în pătrat, cu obiectele intermediare (s ∈ [-1,1] \ 0) denumite **quadrilobe**, **trilobe** sau **multilobe**, a sferei în cub, a conului în piramidă, cu obiectele intermediare denumite **conopiramide**, sau în prismă, a cilindrului circular in cilindru patrat sau în prismă triunghiulară.

Obiectele geometrice hibride noi apărute sunt conopiramida (**Fig. 35.1,d▼◄**), sferocubul ▬◄ , cilindrul pătratocilindric, cilindrul cilindro triunghiular, cubul românesc (**Fig. 35.1,d▼►**) format din şase piramide cu vârful comun, astfel că are volum zero, ca urmare, fiind **cel mai uşor cub din lume** ş.m.a..

35.3 MULTIPLICAREA DIMENSIONALĂ A SPAŢIILOR

În filozofie şi fizică categoria **spaţiului** exprimă poziţia (localizarea →[X, Y, Z] şi orientarea → [Θ, Φ, Ψ], distanţa, mărimea, forma, întinderea şi ordinea **obiectelor** coexistente în lumea reală.

Concepţia atomistă despre spaţiu şi timp (care stă şi la baza geometriei lui **Euclid**) a fost dezvoltată în filozofia modernă de către **Newton**. Pentru **Newton** spaţiul şi timpul sunt absolute, obiective şi universale, deci independente de materia în mişcare. Dacă se înlocuieşte cuvântul **obiect** cu **obiect virtual** sau **entitate**, atunci definiţia devine valabilă şi în matematică. În **matematica centrică** (**MC**).

Teoria relativității lui **Einstein** (numită şi teoria fizică a spaţiului şi timpului) a demonstrat că proprietățile spațio-temporale (lungimea corpurilor și durata evenimentelor) depind de viteza de deplasare a sistemelor materiale și că structura sau proprietățile continuului spațio-temporal variază în funcție de concentrarea maselor substanței și de intensitatea câmpului gravitațional generat de către acestea.

Adică, obiectele virtuale îşi modifică forma şi dimensiunile, în funcţie de un nou parametru sau dimensiune a spaţiului. Această dimensiune nouă, sau, mai precis, nou introdusă în ştiinţă, este ***excentricitatea***.

Filozofi ca **Berkeley**, **Hume**, **Mach**, **Bergson** neagă obiectivitatea spaţiului şi timpului, punându-le în dependenţă de conştiinţa omului sau ca forme subiective ale trăirilor sale subiective.

Hegel consideră spaţiul şi timpul ca fiind două categorii ale ideii absolute. Adică, noţiuni matematice. Mai precis, ale matematicii excentrice (**ME**), deoarece, numai în acest domeniu, obiectele îşi modifică forma şi dimensiunile în funcţie de noua dimensiune a spaţiului, **excentricitatea**.

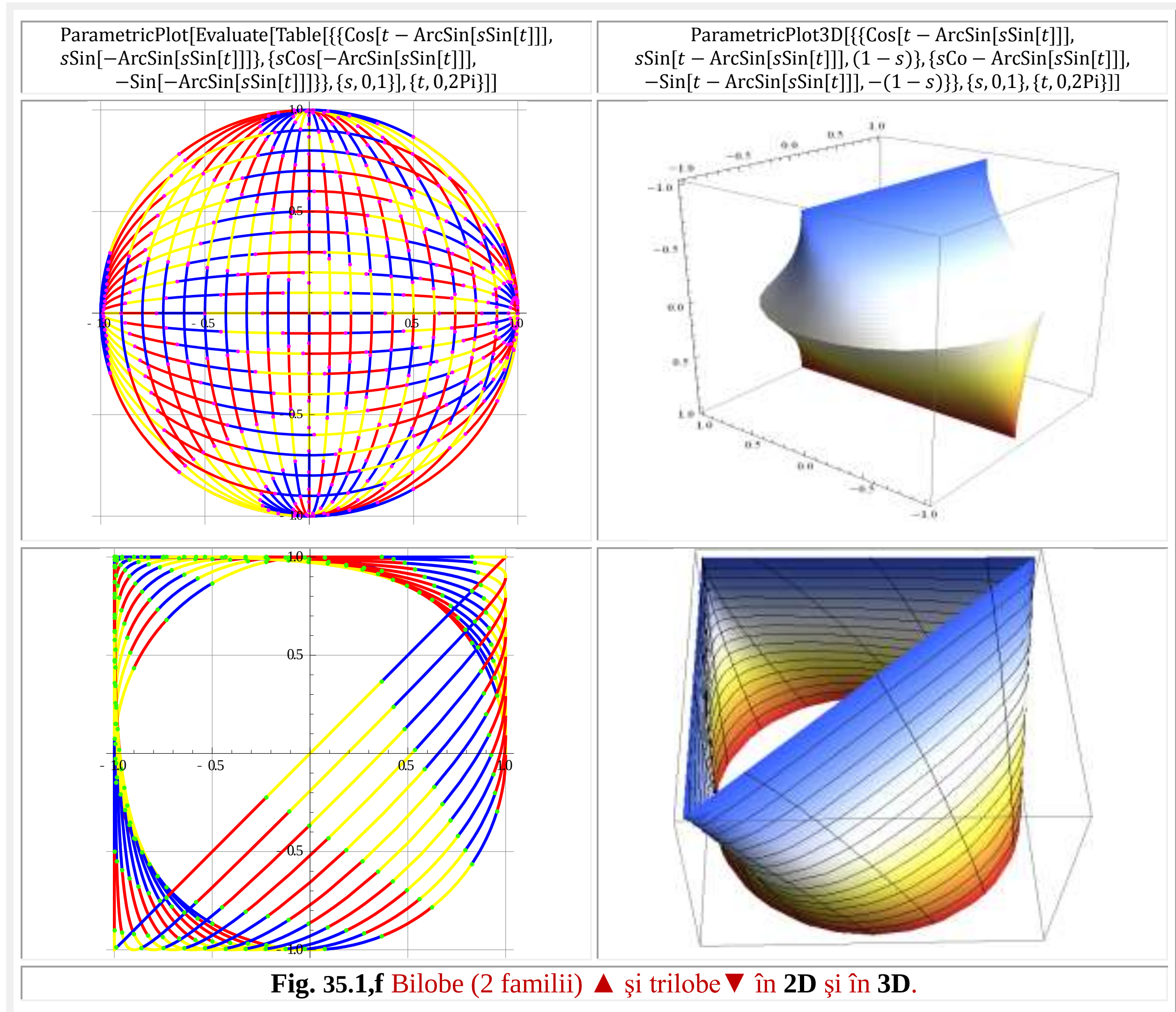


Fig. 35.1,f Bilobe (2 familii) ▲ şi trilobe▼ în **2D** şi în **3D**.

Şi, mai precis, un obiect, ca de exemplu, sfera, care, prin adăugarea unui parametru în plus (**excentricitatea variabilă**) la ecuaţiile sale parametrice

(3) (35.3) $$\begin{cases} x = R.cosu.cosv + X \\ y = R.\sin u.cosv + Y\ , pentru\ u\ \in [0, 2\pi]\ şi\ v \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \\ z = R.sinv + Z \end{cases}$$

ele devin ecuaţiile parametrice ale **excentricelor sferice**, care transformă continuu sfera perfectă în cubul perfect, dacă **excentricitatea liniară reală e ∈ [0, R]** sau **s ∈ [0, 1].** Şi devine cub perfect când **e** este egală cu raza **R** a sferei sau când **excentricitatea liniară** **<u>numerică</u>** **s**, definită de raportul **s =** $\frac{e}{R}$ ia valoarea 1. X, Y, şi Z indică poziţia sferei in spaţiul 3D. Dacă sunt toate nule, sfera este centrată în originea sistemului de coordonate O(0,0,0), aşa cum se prezintă situaţia în **figura 35.2,b**.

Între aceste două valori extreme, adică pentru **s** ∈ (**0, 1**) sau **e** ∈ (0, R) se obţin obiecte de alte forme, intermediare între sferă şi cub **(Fig. 35.2,a)**, obiecte specifice **matematicii excentrice**, denumite şi

obiecte hibride, printre care se numară şi **sfero-cubul**, **cono-piramida**, **tubul cilindro-pătratic**, **cilindrii de secţiuni variabile**, ş.m.a.

Ecuaţiile **excentricelor sferice** sunt

(4) (35.4) $\begin{cases} x = R.\operatorname{coq}(\alpha, e).\operatorname{coq}(\beta, e) \\ y = R.\operatorname{siq}(\alpha, e).\operatorname{coq}(\beta, e) \\ z = R.\operatorname{siq}(\beta, e) \end{cases}$ $, pentru\ \alpha \in [0, 2\pi]\ şi\ \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], iar\ \boldsymbol{e} \in [0, R],$

în care, funcţiile **circulare centrice** **cos**(α, e) şi **sin**(α, e) de variabile centrice α şi β trec în **funcţii circulare excentrice** corespondente **cex**θ şi **sex**θ, sau in funcţii quadrilobe **coqθ** şi siqθ , aşa cum s-a mai afirmat anterior, denumite cosinus şi sinus excentrice şi, respectiv cosinus şi sinus quadrilobe.

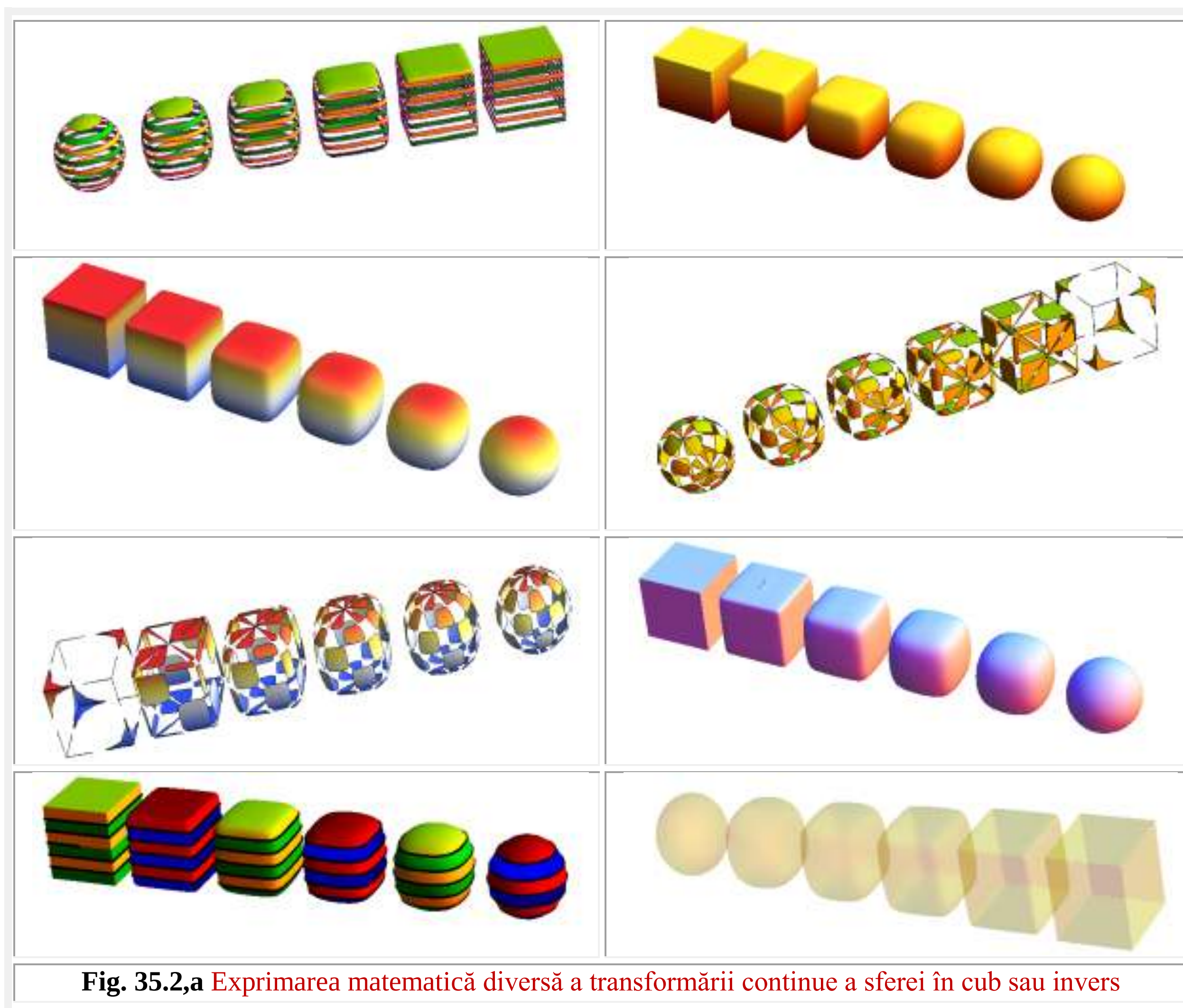


Fig. 35.2,a Exprimarea matematică diversă a transformării continue a sferei în cub sau invers

Adică

(5) (35.3) $\begin{cases} \cos(\alpha, e) = cex[\theta(\alpha), e] = \cos[\theta - \arcsin[\boldsymbol{s}.\sin(\theta - \boldsymbol{\varepsilon})]] \\ \sin(\alpha, e) = sex[\theta(\alpha), e] = \sin[\theta - \arcsin[\boldsymbol{s}.\sin(\theta - \boldsymbol{\varepsilon})]] \end{cases}$

(5') (35.5') $\begin{cases} \operatorname{coq}(\alpha, e) = \frac{cos[\theta]}{del(\theta,\ \boldsymbol{E})} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - \boldsymbol{s}^2.\sin^2(\theta - \boldsymbol{\varepsilon})}} \\ \operatorname{siq}(\alpha, e) = \frac{sin[\theta]}{del(\theta + \frac{\pi}{2},\ \boldsymbol{E})} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 - \boldsymbol{s}^2.\cos(\theta - \boldsymbol{\varepsilon})}} \end{cases}$

Evident că, în acelaşi mod, în **2D**, cercul se transformă continuu în pătratul perfect, de latură L = 2R. Dacă **unicele** curbe închise, cercul şi pătratul, rezultate pentru **s** = 0 şi, respectiv, **s** = ± 1 sunt arhicunoscute în domeniul matematicii centrice (**MC**), nu acelaşi lucru se întâmplă pentru **infinitatea** de curbe închise, din domeniul **matematicii excentrice** (**ME**), obţinute pentru **s** ∈ (0, 1), denumite **excentrice circulare** sau, în acest caz, **quadrilobe** (cvadrilobe). În alte cazuri: bilobe ▲, trilobe ▼(**Fig. 35.1f**),… şi multilobe provenite din cerc în **2D**.

Acum, se poate observa că, pentru a trece de la cerc şi sferă, la pătrat şi cub, sau invers (**Fig.2,a**), obiecte matematice virtuale, proprii **MC,** este neapărat necesar să se treacă, fără probleme, pe neobservate, prin domeniul **ME** al **supermatematicii** (**SM**), de aceea se afirmă că, **SM** este o reuniune a celor două matematici, adică **SM = MC ∪ ME** şi că graniţele dintre liniar şi neliniar au fost şterse !!.

Deoarece, **MC** este proprie sistemelor **liniare, perfecte, ideale**, iar **ME** celor **neliniare, imperfecte, reale** se observă facil că, prin reuniunea lor, intr-un singur tot (**SM**), graniţele dintre liniar şi neliniar, dintre perfect şi imperfect, dintre ideal şi real se şterg şi dispar. Spre bucuria inginerilor care, s-au confruntat în permanenţă cu necesitatea soluţionării unor ecuaţii şi / sau sisteme neliniare, nevoiţi să apeleze la fel de fel de metode de aproximare.

Totodată, în **MC** nu există decât câte **o singură entitate** din fiecare entitate matematică centrică, pe când, în **ME** numărul lor este **infinit**. Pentru fiecare punct dintr-un plan, în care poate fi plast un punct, denumit **ex-centru**, sau **excentru,** există câte o matematică excentrică (**ME**). A fost numit astfel, pentru că a fost expulzat din centrul cercului **C**(0,0) şi originea O(0,0) a unui reper, unde l-a plasat **Euler,** împreună cu un pol **P**(0, 0), a unei semidrepte, deci **3 puncte suprapuse**, sau coincidente, care au **sărăcit** enorm matematica, aşa cum s-a mai afirmat, dar "***repetiţia este mama învăţăturii***" !.

Excentrul **E**(**e, ε**) este corespunzător unui cerc de rază oarecare **R** şi **S**(s, ε) este corespunzător unui cerc de raza R = 1, adică cercul unitate sau trigonometric. Coordonatele polare unghiulare **ε**, ale excentrelor **E** şi **S**, reprezintă **excentricitatea unghiulară**, fiind aceeaşi în ambele situaţii / cazuri.

Exista o transformare (h)omotetică, transformare care suprapune cercul de raza R oarecare, concentric cu cercul unitate de raza R =1, peste cel unitate. Aceasta este o transformare ce scalează obiectele în funcţie de un centru de (h)omotetie **H** şi un raport k.

35.4 HIBRIDAREA (SUPER)MATEMATICĂ

Câteva idei despre spaţiu, culese de pe diverse website-uri, sunt următoarele:

"*Spaţiul* este o entitate abstractă care reflectă o formă obiectivă de existenţă a materiei. Apare ca o generalizare şi abstractizare a ansamblului de parametri prin care se realizează **deosebirea între diferite sisteme** ce constituie o stare a universului.

SPAŢIUL, este o formă obiectivă şi universală a existenţei materiei, inseparabilă de materie, care are aspectul unui întreg neîntrerupt cu trei dimensiuni şi exprimă ordinea coexistenţei obiectelor lumii reale, poziţia, distanţa, mărimea, forma şi întinderea.

În concluzie, se poate afirma că spaţiul apare ca o sinteză, ca o generalizare şi abstractizare a constatărilor cu privire la o stare, la un moment dat, a universului.

În cadrul mecanicii clasice, noţiunea de spaţiu este aceea a modelului spaţiului euclidian tridimensional (E3 / 3D) omogen, izotrop, infinit.

Când discutăm despre spaţiu, primul gând este îndreptat spre **poziţie**, adică noţiunea de poziţie este direct asociată noţiunii de spaţiu. **Poziţia** este exprimată în raport cu un sistem de referinţă (reper) sau mai scurt printr-un sistem de coordonate constante (**X**, Y, Z şi **Θ, Φ, Ψ**), pentru o poziţie fixă în spaţiu şi mobilă dacă sunt funcţii de t."

Să fie oare complete aceste definiţii ?

Un obiect tridimensional are în spaţiu E^3 **6 grade de libertate**, constituite din cele **3 translaţii**, pe direcţiile **X**, Y şi Z şi din **3 rotaţii,** notate cu **θ, φ, ψ**, respectiv, cu **A, B** şi **C,** în tehnologie şi în robotică, în jurul axelor **X**, Y şi Z.

Un obiect poate fi "realizat" sau, mai precis, reprodusă imaginea lui în spaţiul virtual, când apare în 3D, pe ecranul monitorului unui computer, prin folosirea unor programe tehnice (CAD) sau matematice comerciale (MATHEMATICA, MATLAB, MATHCAD, MAPLE, DERIVE, ş,a.) sau speciale, care folosesc **FSM-Excentrice, Elevate** sau/şi **Exotice -** la descrierea obiectelor, cum sunt **Realan10**, **Realan11** (concepute de Dr. Ing. **Dan Micşa**) şi **SM-CAD-CAM**.

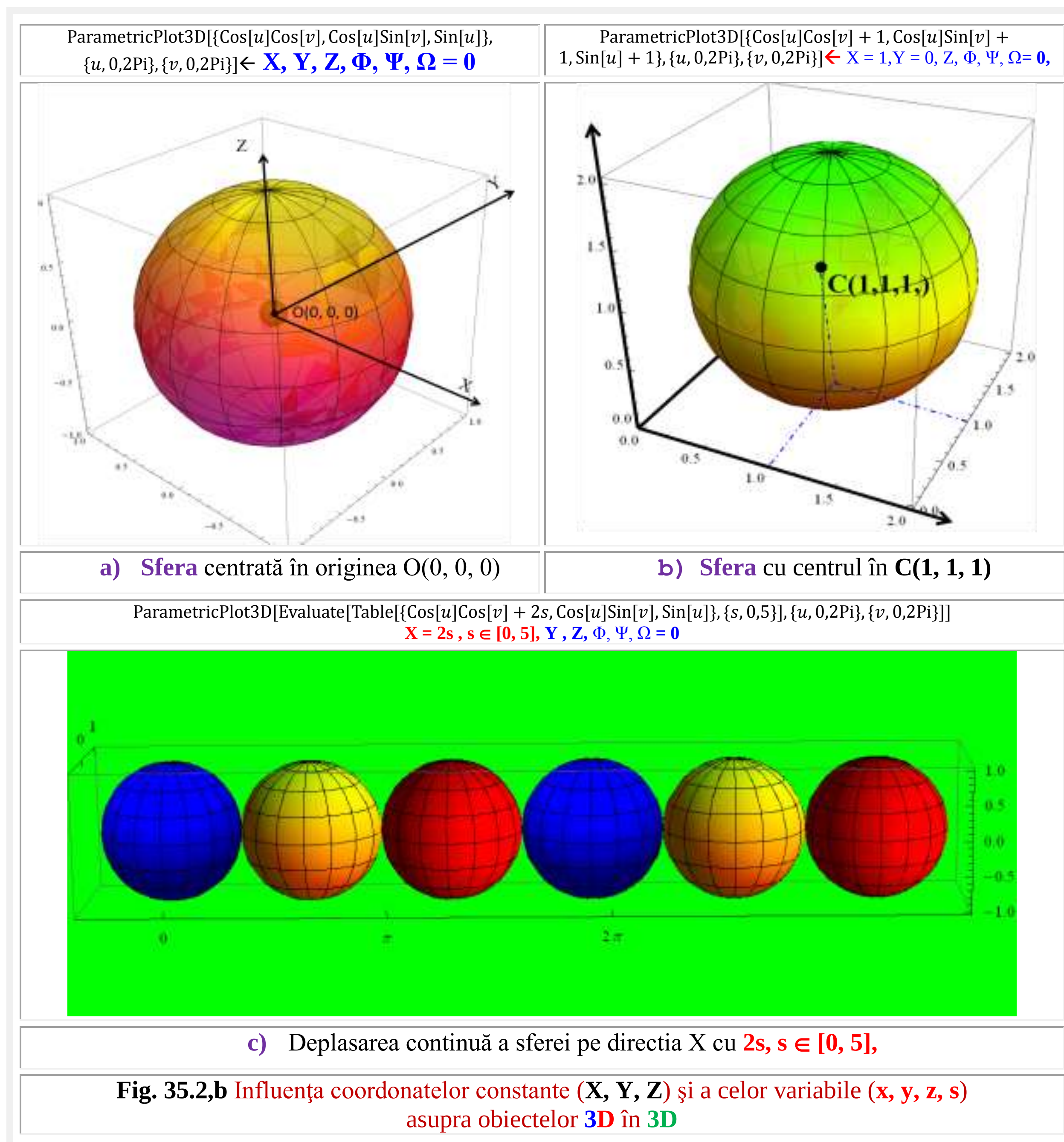


Fig. 35.2,b Influenţa coordonatelor constante (**X, Y, Z**) şi a celor variabile (**x, y, z, s**) asupra obiectelor **3D** în **3D**

Prin **modificarea excentricităţii,** deci **variabile**, obiectele cunoscute şi formate în domeniul centric al supermatematicii (**SM**), adică, în matematica centrică (**MC**), pot fi **deformate** în domeniul excentric al **SM**, adică, în matematica excentrică (**ME**) şi transformate iniţial în obiecte hibride, proprii **ME**, ca, apoi, să fie retransformate în obiecte de alt gen, cunoscute în **MC**. Operaţie care poate fi

denumită **transmutanţă (super)matematică**. Ca de exemplu, deformarea unui **con** perfect (e = 0) în **cono-piramide** [e ∈ (0, 1)] cu baza un pătrat perfect şi vârful conic, care constituie obiectele hibride, situate între con şi piramidă, pâna la **transmutaţia** / transformarea ei într-o **piramidă** perfectă (e = ± 1) cu baza un pătrat perfect.

Pentru înţelegerea mai profundă a fenomenelor să ne închipuim dimensiunile liniare X, Y, Z şi cele unghiulare Φ, Ψ, Ω ca mărimi / dimensiuni **constante** care exprimă, de exemplu poziţia unei sfere într-un anumit loc al spaţiului 3D.Astfel, X, Y şi Z exprimă **localizarea** sferei în spaţiul 3D, mai precis a centrului ei de simetrie, iar Φ, Ψ şi Ω exprimă orientarea ei, adică, rotaţiile ei faţă de cele 3 axe (**Fig.2,b ▲**), mai greu vizibile pentru sfera şi mult mai uşor pentru cub. Dimensiunile x, y, z sunt mărimi variabile ce descriu prin ecuaţiile parametrice (3) şi parametrii u şi v obiectul matematic denumit SFERĂ.

Dacă pe directia x apare o noua diensiune variabilă, cum este **excentricitatea numerica s** ∈ [**0, 10**], atunci sfera primeşte o deplasare / **mişcare** continuă pe direcţia X (**Fig.35.2,b▼**).

Obiectul poate fi realizat, în fapt, prin diversele metode de prelucrare mecanice [v. **Mircea Şelariu**, Cap.17 **Dispozitive de prelucrare**, PROIECTAREA DISPOZITIVELOR, EDP, Bucureşti, 1982, coordonator **Sanda-Vasii Roşculeţ**] de **formare** (turnare, sinterizare), **deformare** (la cald şi la rece), **dizlocare** (decupare, aşchiere, eroziune, netezire) şi **agregare** (sudare şi lipire).

În toate cazurile, sunt necesare **mişcări** ale sculei şi/sau ale piesei, respectiv, ale spotului luminos care delimiteaza pe ecran un pixel şi trece de la un pixel la altul.

Mişcarea este strâns legată de spaţiu şi de timp.

Mişcarea mecanică poate fi **de**

- **Poziţionare/amplasare** a unui obiect în spaţiu;
- **Simetrizarea** unor elemente şi figuri geometrice;
- **Formare** în timp a corpurilor şi, implicit, a obiectelor ;
- **Schimbarea** în timp a **poziţiei** obiectelor, sau a părţior sale, denumite corpuri, în raport cu alte corpuri, alese drept sisteme de referinţă;
- **Schimbarea** în timp a **formei** entităţilor matematice din **MC** şi **deformarea** lor prin **hibridare** supermatematică cu **s ∈ (-1, +1) \ 0** şi transferarea lor în domeniul **ME**.
- **Transmutanţa** sau transformarea unei entităţi din **MC** în altă entitate cunoscută în **MC** (**cerc → pătrat**, **cerc →triunghi**, **sferă →cub**, **con → piramidă** ş.m.a. **pentru s = ± 1**)

Spaţiul reflectă raportul de coexistenţă dintre obiecte şi fenomene, sau părţi ale acestora, indicând:

- **întinderea** / mărimea lor, denumită **dimensiune de gabarit;**
- **locul** obiectelor, prin coordonatele **liniare X, Y, Z**, în spatiul 3D, denumite **dimensiuni de localizare**
- **orientarea** obiectelor, în spaţiul 3D, prin coordonatele **unghiulare Φ, Θ, ψ** denumite dimensiuni de orientare (spre deosebire de cele de formare şi de deformare **rotaţie** $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{t})$, **precesie** $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ şi **nutaţie** $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t})$)
- **poziţiile** relative sau distanţele dintre obiecte, denumite **dimensiuni de poziţionare**, dacă se referă la localizarea şi orientarea absolută şi/sau relativa a obiectelor, iar dacă se referă la părţi ale acestora, numite corpuri, atunci sunt denumite **dimensiuni de coordonare;**
- **forma** obiectelor şi, respectiv, evoluţia fenomenelor, denumite **dimensiuni de formare x(t), y(t), z(t), e(t)**, care definesc, totodata, şi ecuaţiile de definire a obiectelor;
- **deformarea** obiectelor şi modificarea evoluţiei fenomenelor, denumite **dimensiuni de deformare** sau **excentricităţi e(t) sau s(t)**, ca urmare a **hibridării matematice** şi a **transmutaţiei (super)matematice**.

Ultima dimensiune a spaţiului, **excentricitatea**, făcând posibilă apariţia **matematicii excentrice (ME)** şi realizând trecerea simplă din domeniul **matematicii centrice** (**MC**) în cel al **matematicii excentrice**, din domeniul perfect în cel real, precum şi saltul de la o singură entitate matematică, existentă în matematica şi domeniul **centric**, la o **infinitate** de entităţi, de acelaşi gen, dar deformate din ce în ce mai pronunţată, odată cu creşterea valorii excentricităţii numerice, până la **transformarea** lor în alte

genuri de obiecte, existente în domeniul centric (**transmutaţie (super)matematică)** sau inexistente în MC (**hibridare**).

Un exemplu, care merită repetat (pentru că “*repetiţia este mama învăţăturii”* şi poate că aşa **excentricitatea**, ca cel puţin a 4-a dimensiune a spaţiului, ajunge la urechile sau ochii celor care cred ei că decid în ştiinţă în ţara tuturor posibilităţilor ratate), devenit deja clasic, este deformarea continuă a unei sfere până la transformarea ei într-un cub (**Fig.2,a**).

Prin utilizarea aceloraşi **dimensiuni de formare** (ecuaţii parametrice), atât pentru sferă cât şi pentru cub, doar excentricitatea modificându-se, pentru **e = s = 0** se obţine o **sferă** şi pentru **e** = ± R sau **s** $= \frac{e}{R} =$ **±1** se va obţine un **cub perfect**, adică pentru s ∈ (-1 ∨ 1) se obţin entităţi / **obiecte transmutate**.

Pentru e ∈ (– R, + R) \ 0 se obţin entităţi ***inproprii*** **matematicii centriece** (**MC**), anterior inexistente în matematică, sau, mai precis, în **matematica centrică** (MC), ***proprii*** noii matematici, **matematicii excentrice** (**ME**).

Aşa cum s-a mai prezentat, **dreapta** este un **spaţiu unidimensional,** iar în supermatematică **(SM)**, o **strâmbă** de excentricitate zero.

Creşterea excentricităţii, de la zero la unu, transformă **linia dreaptă** într-o **linie frântă**, ambele existând şi sunt cunoscute în matematica centrică, nu şi restul strâmbelor (**transmutate**), care sunt proprii **matematicii excentrice**, putând fi generate de **FSM-CE** amplitudine excentrică

y = k.x, → y[x, S(s, ε)] = k.**aex [*θ*, S(s, ε)]** + C, pentru M_0 (0, 0).

Linia frântă este cunoscută în matematica centrică (**MC**), dar fără să i se cunoască ecuaţiile ei ! Ceea ce nu mai este cazul în **SM** şi, evident, şi în **ME.**

Un fenomen asemănător este considerat că ar avea loc şi în fizică: din vid apar continuu particule de un anumit tip şi se reîntorc din nou în vidul cosmic. Aceleaşi sau altele ? Adică **hibridate** sau **transmutate** ?

Cosmologia are o teorie ce se aplică întregului Univers, formulată de **Einstein** în 1916: **relativitatea generală**. Ea afirmă că forţa de gravitaţie, ce se exercită asupra obiectelor, acţionează şi asupra structurii spaţiului, care îşi pierde cadrul rigid şi imuabil, devenind maleabil şi curb, în funcţie de materia sau energia pe care le conţine. Adică, **spaţiul se deformează !** ***(*** *Acest lucru vă spune / sugerează ceva în legătura cu “curbarea spaţiului”?* ***).***

Continuum-ul spaţiu-timp, al relativităţii generale, nu este conceput fără conţinut, deci nu admite vidul! Cum spunea şi **Einstein** ziariştilor, care îl rugau să le rezume teoria sa: "*Înainte,* ***se credea că****, dacă toate lucrurile ar dispărea din Univers, timpul şi spaţiul* ***ar rămâne*** *totuşi. În teoria relativităţii, timpul şi spaţiul dispar, odată cu dispariţia celorlalte lucruri din univers."*

Să considerăm din nou ecuaţiile (5’) care transformă continuu cercul în pătrat

(35.5’)
$$\begin{cases} \text{coq}(\alpha, e) = x(t) = \frac{cost}{del(t,\ \boldsymbol{E})} = \frac{\cos t}{\sqrt{1-\boldsymbol{s}^2.\sin^2(t-\boldsymbol{\varepsilon})}} \\ \text{siq}(\alpha, e) = y(t) = \frac{sint}{del(t+\frac{\pi}{2},\ \boldsymbol{E})} = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\boldsymbol{s}^2.cos^2(t-\boldsymbol{\varepsilon})}} \end{cases}$$

Pentru t = **s** → 0 (**CERC**) ele devin

(5”)(35.5”)
$$\begin{cases} x\,(0) = \pm 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

iar pentru t → 0 şi S(s = 1, ε = 0) (**PĂTRT**) ele sunt

(5’”)(35.5’”)
$$\begin{cases} x\,(0) = 1 \\ y(0) = \frac{0}{0} = \lim_{t,s\to 0}[\frac{\sin t}{\sqrt{1-\boldsymbol{s}^2.co\,s^2(t-\boldsymbol{\varepsilon})}}] = 1 \end{cases}$$

Prin urmare, cercul **degenerează** în punctul P_C (±1, 0), iar pătratul în punctul M_P (1, 1).

Ceea ce susţine teoria autorului din **SUPERMATEMATICA**. Vol. I, **Editura Matrix Rom**, Bucureşti, 2015, **Cap. 1 Introducere**, prin care expansiunea universului este un proces de dezvoltare a ordinii în haosul absolut, o trecere progresivă a spaţiului haotic în ordine din ce în ce mai pronunţată şi / sau învers, transformarea progresivă a ordinii în haos; **ordinea perfectă** şi **haosul perfect** fiind una şi aceeaşi entitate; o sferă absolut transparentă, deci invizibilă şi, ca urmare, de rază nedeter-minată / nedefinită.

În măsura în care, pornind dintr-un centru, sau mai precis dintr-un **excentru**, dintr-un punct oarecare, haosul absolut (absolut **transparent**, invizibil şi de dimensiuni nedeterminate, care-i universul invizibil), începe să se transforme progresiv în ordine, din ce în ce mai pronunţată, într-un **univers vizibil**, din ce în ce mai ordonat, mai vast şi mai complex, moment care poate fi denumit oricum, **moment iniţial**, **moment de amorsare**, etc., dar pe care savanţii l-au denumit **Big Bang**.

Altfel spus, universul vizibil se propagă în cel invizibil, sau şi mai precis, universul invizibil se transformă în cel vizibil, pierde din invizibilitate, pe seama ordonării lui progresive.

Tot aşa cum, un cristal invizibil, care nu-i altceva decât **nisip** într-o anumită formă de organizare / ordonare, acelaşi nisip precum cel din oala de lut, devine parţial vizibil, în zonele în care este puternic agresat / lovit.

Este evident că în universul invizibil, oricât de mare / întins ar fi el, nu există nici timp şi nici spaţiu. Deoarece sfera universului invizibil are un caracter anfoter, fiind şi haos şi ordine absolute în acelaşi timp, în el spaţiul nu există din cauza haosului şi timpul nu poate exista din cauza ordinii perfecte; timpul fiind perceput numai dacă spaţiul este ocupat (**vizibil** ocupat) şi scurgerea lui este sesizabilă numai prin schimbarea a ceea ce îl ocupă. Această sferă nevăzută, absolut transparentă pare a fi un "**nimic**". Dar, din acest "**nimic**" s-a născut intregul univers vizibil. Acest "**nimic**" este, de fapt, "**totul**".

În concluzie, spaţiul, cu timpul, se **formează** şi se **deformează**, adică, **excentricitatea** spaţiului, de o anumită valoare, duce la **formare**a spaţiului, apoi, prin modificarea valorii ei, spaţiul se **deformează** / modifică. Forma modificată a spaţiului este dependentă de valoarea excentricităţii, care devine o nouă dimensiune a spaţiului: **dimensiunea de deformare**.

Energia şi masa materiei să crească odată cu creşterea excentricităţii ? Sau invers ? Excentricitatea să determine valoarea masei şi a energiei prezente / localizate într-un anumit loc în spaţiu ?

Instalarea unei piese de prelucrat (obiect de prelucrat) în spaţiul de lucru al unei maşini-unelte moderne, cu comenzi numerice de conturare (**CNC**), este foarte asemănătoare cu "**instalarea**" unui obiect matematic în spaţiul euclidian tridimensional R^3. De aceea, vom folosi unele noţiuni din domeniul tehnologic.

În **tehnologie**, **instalarea** este operaţia premergătoare prelucrării; numai un obiect / piesă instalat/ă poate fi prelucrat/ă. Ea presupune următoarele faze sau operaţii tehnologice, în această succesiune / ordine; numai înfăptuirea unei faze, facând posibilă trecerea la realizarea fazei următoare:

1. ORIENTAREA, este acţiunea, sau operaţia, prin care elementele geometrice ale obiectului de lucru (semifabricat sau piesă), care sunt baze de referinţă tehnologice de orientare, prescurtat, **baze de orientare (BO)**, primesc o **direcţie** bine determinată, faţă de direcţiile unui sistem de referinţă.

În tehnologie, faţă de direcţiile unor mişcări principale şi/sau secundare de lucru, şi/sau faţă de direcţiile mişcărilor de reglare diemnsională a sistemului tehnologic.

Drept **baze de orientare (BO)** pot servi :

3) **Un plan** al obiectului, respectiv o suprafaţă plană a piesei, dacă ea există, caz în care, această suprafaţă, determinată de trei puncte de contact dintre obiect şi dispozitiv, este denumită bază de referinţă tehnologică de orientare de **aşezare (BOA)**, sau, pe scurt, **bază de aşezare (BA)**, fiind determinată, teoretic, de cele trei puncte comune de contact ale piesei cu dispozitivul, care are sarcina de a realiza instalarea piese în cadrul maşinii de lucru. Drept **BA**, în principiu, se alege suprafaţa plană cea mai întinsă a piesei, dacă nu există altfel de raţiuni / condiţii de poziţie, sau de la care suprafaţa rezultată în urma prelucrării are impusă precizia cea mai înaltă, sau condiţii de paralelism a **BA** cu **baza de cotare sau de proiectarte** (elementul geometric al piesei de la care se dă cota / dimensiunea, pe desenul de execuţie al piesei, pentru suprafaţa de prelucrat).

Punând condiţia păstrării contactului piesă / dispozitiv pe **BA**, obiectul / piesa pierde 3 grade de libertate din cele 6, dintre care, **o translaţie** pe direcţia, s-o numim **Z**, perependiculară pe **BA** (plană) şi două rotaţii: în jurul axelor **X**, notată în tehnologie cu **A** şi în jurul axei **Y**, notată în tehnologie cu **B.**

Obiectul / piesa se mai poate roti în jurul axei **Z,** rotaţie notată cu **C** şi se poate translata pe **BA** pe direcţiile **X** şi Y, păstrând în permanenţă contactu cu **BA**.

De la această suprafaţă se stabileşte, în tehnologie, coordonata **Z**, de exemplu, ca distanţă dintre **BOA** şi **baza tehnologică de prelucrare (BTP)**, sau, pe scurt, **bază de prelucrare (BP)**, adică planul pe care îl va genera scula de prelucrat pe piesă.

Dacă o suprafaţă se prelucrează integral / complet (prin frezare, de exemplu, cu freze de mari dimensiuni, printr-o singură trecere), atunci celelalte coodonate / dimensiuni **y** şi **x** pot fi stabilite cu foarte mare aproximaţie, întrucât ele nu influentează precizia realizării suprefeţei plane, la distanţa **Z** de **BA**, rezultate în urma prelucrării piesei şi denumită **bază tehnologică de prelucrare (BTP)**, sau, pe scurt, **bază de prelucrare (BP)**. A cărei cerinţă tehnologică este să fie paralelă cu **BOA** şi să fie situată la distanţa **Z** de aceasta. Dimensiunea **Z** fiind, în acest caz, o **dimensiune de formare** a piesei, pe de o parte şi **dimensiune de coordonare**, în acelaşi timp, pentru poziţia relativă sculă-piesă, iar, d.p.d.v. tehnologic, una dintre **dimensiunile de reglare dimensională** a sistemului tehnologic **MDPS** (**M**aşină-**D**ispozitiv-**P**iesă-**S**culă). Matematic exprimat, două suprafeţe plane situate la distanţa **z**, ca urmare, paralele între ele.

2) **O dreaptă** aparţinând obiectului, dacă aceasta există, ca axe şi / sau muchii, ca intersecţie de suprafeţe plane în matematică.

În tehnologie, muchiile se evită, datorită neregularităţii lor, adică, a abaterilor de la forma geometrică liniară, a semifabricatelor, ca şi a pieselor, în urma prelucrării semifabricatelor lor.

În tehnologie, această dreaptă este determinată de cele două puncte de pe o suprafaţă a piesei, alta decât BA, comună piesei şi dispozitivului, care realizează baza de orientare de dirijare a piesei şi a dispozitivului, ca elemente dedublate, dreaptă denumită bază de orientare de dirijare (**BOD**), sau pe scurt baza de dirijare (**BD**). Denumire care derivă din faptul că, aceste două elemente de dirijare, dirijează / ghidează mişcarea obiectului / piesei în vederea localizarii lui, dacă în tot timpul mişcării, se menţine contactul piesă-dispozitiv pe BOA şi pe BD.

În acest fel **BD** preia 2 grade de libertate ale obiectului: translaţia pe o direcţie perpendiculară pe dreapta determinată de cele două puncte de contact piesa /dispozitiv, ce materializează **BD**, translaţie pe direcţia **Y**, de exemplu, dacă **BD** este paralelă, întotdeauna, cu **BA** din planul **XOY** şi rotaţia în jurul axei **Z**, notată în tehnologie cu **C**.

Drept **BOD** se alege, în principiu, din motive lesne de înţeles, suprafaţa cea mai lungă a piesei, dacă nu există alte raţiuni impuse, prin desenul de execuţie al piesei.

De la **BOD** poate fi stabilită / măsurată cota / dimensiunea **y**, paralelă cu **BOA** şi perpendiculară pe **BOD**, ca de exemplu, perpendiculară pe **z**, fiindcă **BOD** este paralelă cu **BOA.**

Astfel, dacă cele două puncte aparţin unei obiect paralelipipedic, mărginit, deci, de suprafeţe plane, şi **BOD** este paralelă cu **BOA**, păstrând contactul piesă-dispozitiv pe cele două baze, printr-o mişcare de translaţie, piesa mai poate fi doar translatată, în dispozitiv, pe direcţia **X**, până când tamponează un **element de localizare**.

1) De la acesta, denumit element de localizare, respectiv **baza tehnologică de localizare** (**BTL**), sau, pe scurt, **baza de localizare** (**BL**) poate fi stabilită coordonata / dimensiunea **X** perpendiculară simultan pe **Y** şi **Z**. Dar fără să fie coordonate / dimensiuni / segmente concurente într-un punct comun **O(X,Y,Z)** ca în matematică, decât, dacă **BOD** şi **BTL** coboară la nivelul **BOA** şi, în plus, **BTL** se deplasează spre **BOD** şi va fi conţinută şi în ea, ambele urmând să fie conţinute în **BOA**, astfel că, punctul **O(X,Y,Z)** ca şi **BTL** va fi un vârf al piesei paralelipipedice, conţinut simultan în planul **BOA**, dreapta **BD** în punnctul **BL**, rezultând, în acest caz că **O(X,Y,Z) ≡ BL**.

Dacă, localizarea (tamponarea) se realizează printr-o mişcare de translaţie, aşa cum s-a presupus anterior, ea mai poarta denumirea de **localizare prin translaţie (LT)**.

Dacă, localizarea (tamponarea) se realizează printr-o mişcare de rotaţie a obiectului, atunci este denumită **localizare prin rotaţie** (**LR**). În acest caz **BD** poate fi, sau este, de obicei, o axă a unei suprafeţe de rotaţie (cilindrice sau sferice) a obiectului, denumită **baza de orientare de centrare** (**BOC**) în jurul căreia, obiectul se roteşte, până când, un alt corp al piesei, tamponează elementul de localizare prin rotaţie. Sau, până când un fixator pătrunde într-un orificiu perpendicular pe **BOC** sau într-un canal paralel cu **BOC.**

Obiectele care nu prezintă **elemente / baze de orientare**, cum ar fi sfera în matematică şi bilele de rulment în tehnologie, de exemplu, sunt **obiecte neorientabile.**

4 LOCALIZAREA, este operaţia sau acţiunea de stabilire a **locului**, în spaţiul euclidian tridimensional E^3, al unui punct **O(X,Y,Z)** caracteristic al obiectului, ce aparţine unui element de referinţă de orientare al acestuia, de la care se stabilesc coordonatele / dimensiunile liniare **X, Y, Z** faţă de un sistem de referinţă dat, sau, în tehnologie, faţă de scula de prelucrare.

Punctul **O(x,y,z)** al obiectelor **neorientabile** este centrul de simetrie al acestora, iar al pieselor orientabile, precum cele paralelipipedice, în tehnologie, de exemplu, punctul **O(X,Y,Z)** este **diseminat** în trei puncte distincte, pentru fiecare coordonată în parte **Ox ⊂ BL** pentru **X** , **Oy ⊂ BD** pentru Y şi **Oz ⊂ BA** pentru **Z**, aşa cum s-a explicat anterior.

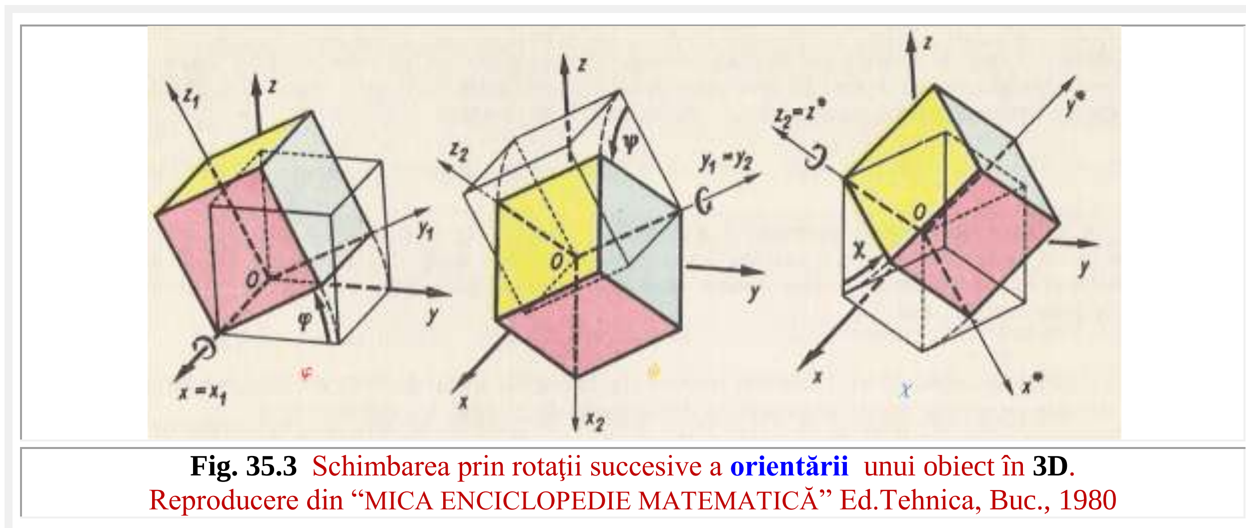


Fig. 35.3 Schimbarea prin rotaţii succesive a **orientării** unui obiect în **3D**.
Reproducere din "MICA ENCICLOPEDIE MATEMATICĂ" Ed.Tehnica, Buc., 1980

In tehnologie, succesiunea orientare → localizare este obligatorie; numai un obiect orientat poate fi apoi localizat. Ca şi în matematică, dealtfel. Intâi se alege un sistem de referinţă solidar cu obiectul (O, X, Y, Z) apoi, unul invariant (O, x, y, z) ce coincide, iniţial, cu celălalt, în spaţiul 3D sau euclidian tridimensional E^3 şi apoi se operează diverse transformări de translaţii şi/sau de rotaţii aşa cum se poate observa cu rotaţiile unui cub, prezentate în **figura 35.3.**

Reuniunea dintre **orientare** şi **localizare** reprezintă cea mai importantă acţiune / operaţie tehnologică, denumită **poziţionare**, adică:

ORIENTAREA ∪ LOCALIZAREA = POZIŢIONARE

Dacă **poziţionarea** obiectului este realizată / desăvârşită / implinită, atunci, poate fi menţinută poziţia relativă piesă / dispozitiv prin operaţia de **fixare** a piesei în dispozitiv.

În continuare pot fi stabilite cotele / dimensiunile dintre sculă şi piesă, astfel, încât să se obţină piesa la dimensiunile şi preciziile impuse prin desenul de execuţie al piesei.

Această operaţie tehnologică este denumită **reglare dimensională.** Cu aceasta, operaţia de instalare este incheiată şi prelucrarea piesei poate să înceapă.

Ca urmare, **instalarea** unui obiect este o reuniune a **poziţionarii** cu **fixarea** şi cu **reglarea dimensională**, adică:

INSTALARE = POZIŢIONARE ∪ FIXARE ∪ REGLARE (dimensională)

În tehnologie, **fixarea** se poate realiza prin **forţă** (de fixare) sau prin **formă** (care impiedică deplasarea piesei în timpul preucrării).

În matematică, fixarea se "realizează" prin **convenţie**. **Zicând** că sistemul (**O, x, y, z**) este legat de piesă el nu se mai poate deplasa relativ faţă de ea (dezlega), ci numai împreună cu obiectul, deci sunt "fixate" unele de altele (*Uşor le e lor, matematicienilor* !).

Astfel, în matematică, fixarea obiectelor, faţă de sistemele de referinţă, se subînţelege, sau se realizează de la sine, ea nu mai există, pentru că în matematică nu există "**forţe matematice**"; ele fiind

proprii mecanicii, în speţă dinamicii ei şi nici scule de prelucrare, nici diverse dimensiuni de coordonare, de reglare dimensională, de prelucrare ş.a.

De aceea, în matematica centrică (**MC**), există doar 3 dimensiuni liniare **X**, **Y**, şi **Z** care sunt, totodată, şi dimensiuni de formare (**x**, **y**, **z** şi **e**) a obiectelor 3D, prin ecuaţiile lor parametrice, de exemplu.

Ca urmare, în această matematica centrică (**MC**), entităţi ca dreapta, pătratul, cercul, sfera, cubul ş.a. sunt unice, pe când, în matematica excentrică **(ME)** şi, implicit în supermatematică **(SM)**, ele sunt multiplicate la infinit prin **transmutaţie** şi prin **hibridare**, posibile prin introducerea noii dimensiuni a spaţiului **excentricitatea liniară e** şi cea **unghiulară ε.**

Transmutaţia (super)matematică poate fi definită ca procesul matematic de **transformare** / **încrucişare** a două entităţi matematice din **MC**. Adică, de trecere continuă de la o entitate oarecare, existentă în **MC**, la o altă entitate, existentă în **MC**, printr-o infinitate de entităţi **hibride**, proprii doar **ME**. Altfel spus, transformarea unei entităţi matematice **centrice** în altă entitate matematică **centrică** este o **transmutanţă**, acţiune devenită posibilă prin trecerea printr-o infinitate de entităţi în cadrul **matematicii excentrice,** entităţi denumite **hibride**, ca urmare a utilizării funcţiilor **supermatematice**.

35.5 CURBAREA SPAŢIULUI MULTIDIMENSIONAL

Mişcarea relativă a două sisteme este ilustrată în **figura 35.4,a**. Dacă e_z, ε_z şi ε_x sunt nule, atunci vectorul deplasare relativă $\vec{e} = \vec{v}.t$ a sistemului cu originea în **E**, faţă de cel cu originea în O (0, 0) este pe direcţia axei x > 0 şi acest caz este denumit **aranjement standard**[60] **(Fig. 35.4,b).** Viteza $\vec{v}$ este considerată constantă şi toate rotaţiile sunt nule, ca sistemele să fie inerţiale.

Coordonatele spaţio-temporale considerate a fi (x, y, z şi **t**), acum se observă clar (**Fig. 35.4,b**) că ele sunt, de fapt, (x, y, z şi **e**), adică, excentricitatea variabilă este a 4-a dimensiune a spaţiului tridimensional (3D) şi nu mai este necesar să se afirme că timpul este spaţiu.

Din **figura 35.4,b** se deduce clar că toate mărimile din sistemul **O**(0, 0) şi din sistemul **E(e = v.t, ε = 0)** se pot exprima facil cu **FSM-CE**, ca şi toate mărimile din **figura 35.4,a**, cu condiţia ca toate excentricităţile unghiulare (ε_x şi ε_z) să fie constante şi **e** = **v**.t, în care, **v** = constant.

Constituirea geometriilor neeuclidiene de către **Lobacevski**, **Bolyai**, **Gauss**, **Riemann**, ş.a. a contribuit la formarea concepţiei, conform căreia, proprietăţile geometrice spaţiale nu sunt pretutindeni aceleaşi, fiind determinate de proprietăţile lui fizice. Spaţiul este deci **neomogen şi anizotrop**. Teoria relativităţii lui **Einstein**, a demonstrat că proprietăţile spaţio-temporale (lungimea corpurilor şi durata fenomenelor → v.**Fig. 35.1.12**), depind de viteza de deplasare a sistemelor materiale şi că structura sau proprietăţile continuului spaţio-temporal variază în funcţie de concentrarea **maselor substanţei** şi de **intensitatea câmpului** gravitaţional generat de către acestea. De aceea, ea a fost numită şi **teoria fizică** a spaţiului şi timpului. Dacă acesta ar fi spaţiul **matematicii excentrice** (**ME**), atunci, se poate **adăuga** că, în acest spaţiu, toate entităţile sau figurile geometrice se pot **metamorfoza**, **transmuta** şi **hibrida** prin existenţa **excentricităţii ca o nouă dimensiune a acestui spaţiu**, sau, mai precis, ca **noi** dimensiuni ale lui.

Excentricitate pote fi considerată un amănunt, dar nu este ! Şi, chiar dacă ar fi, "Nu neglijaţi amănuntele. Amănuntele crează perfecţiunea şi perfecţiunea nu-i un amănunt !" ne-a îndemnat, cu aproape **500** de ani înainte, **Michelangelo Buonarroti**.

Excentricitate reală poate fi distanţa de la punctul **E(e,ε)** până la un punct **O(0,0)**, considerat centru, ca în matematica excentrică (**ME**). O diferenţă de potenţial în electricitate, o diferenţă de presiune, în hidraulică, datorită căreia fluidul se deplasează într-un sens sau altul într-o conductă. Fără această excentricitate-- diferenţă de presiune, mişcarea nefiind posibilă; fluidul staţionând. Diferenţa dintre originile a două sisteme inerţiale, sau spaţiul deplasării relative a acestora (e = **s.t**), aşa cum se consideră în continuare, caz în care excentricitatea este o mărime variabilă care creşte continuu, în care raportul **s** = $\frac{v}{c}$ a fost denumit **excentricitate numerică**.

Fără existenţa unei excentricităţi originare oarecare, apariţia şi mişcarea în univers n-ar fi fost posibilă. “Amănutele crează perfecţiunea şi perfecţiunea nu-i un amănunt !” Cât de mult adevăr în spusele lui **Michelangelo Buonarroti !**.

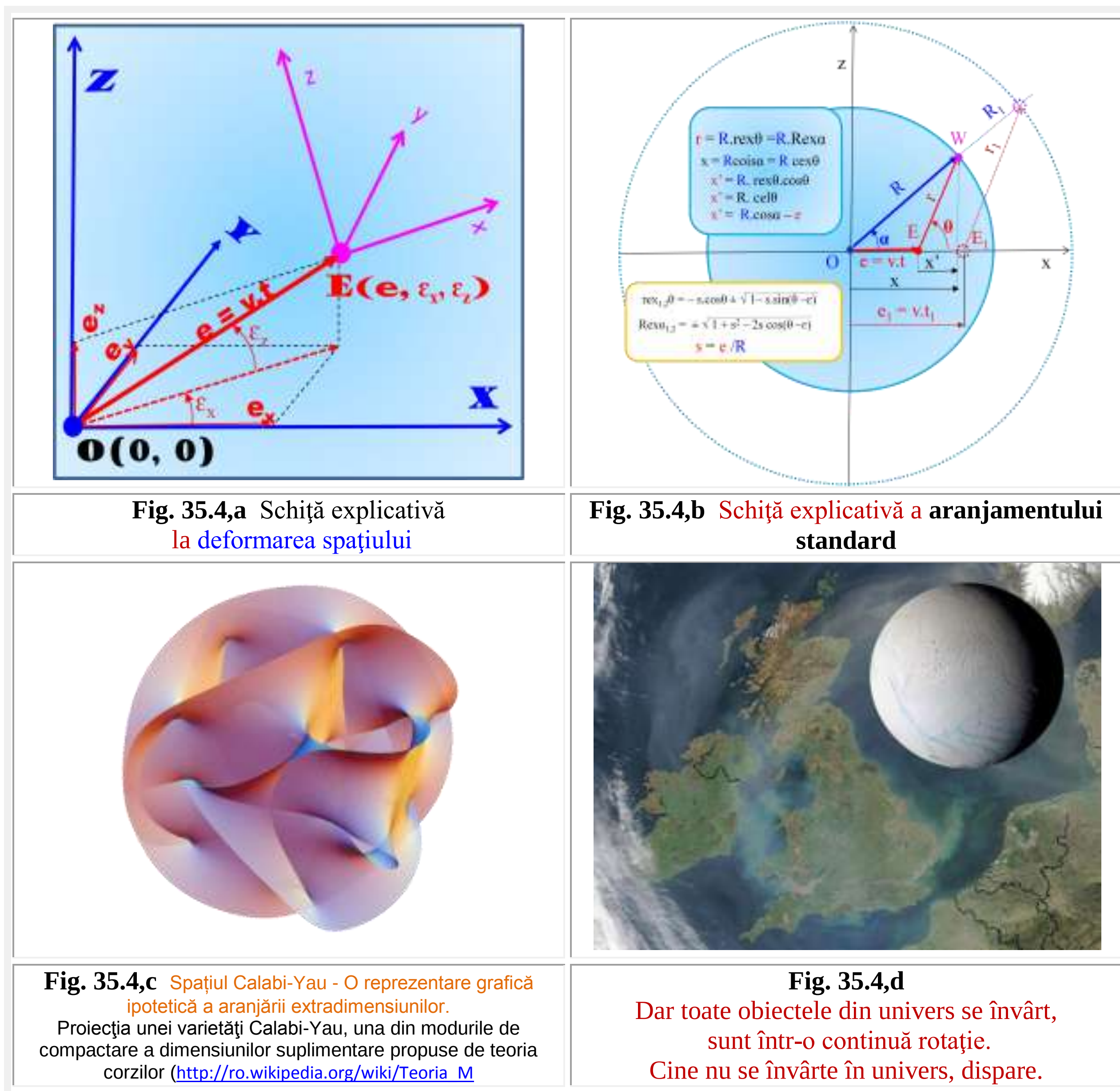


Fig. 35.4,a Schiţă explicativă la deformarea spaţiului

Fig. 35.4,b Schiţă explicativă a **aranjamentului standard**

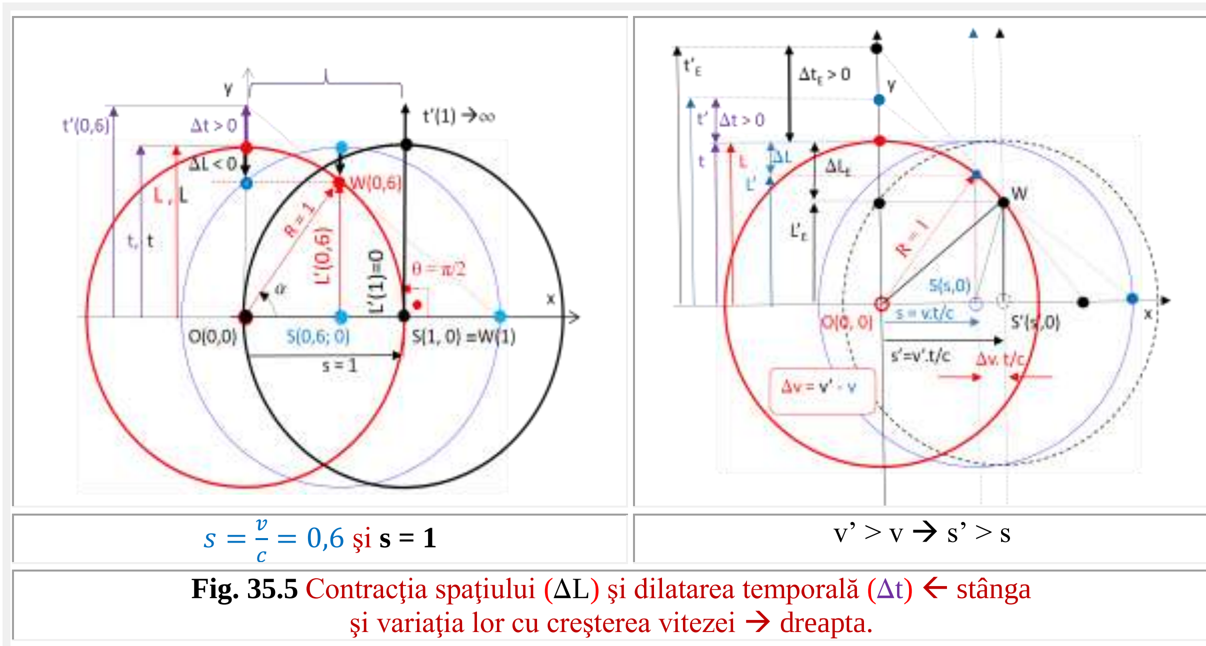
Fig. 35.4,c Spaţiul Calabi-Yau - O reprezentare grafică ipotetică a aranjării extradimensiunilor. Proiecţia unei varietăţi Calabi-Yau, una din modurile de compactare a dimensiunilor suplimentare propuse de teoria corzilor (http://ro.wikipedia.org/wiki/Teoria_M

Fig. 35.4,d Dar toate obiectele din univers se învârt, sunt într-o continuă rotaţie. Cine nu se învârte în univers, dispare.

În **figura 35.5** este schiţată situaţia a două sisteme inerţiale, iniţial suprapuse în O(0, 0), sau a unui sistem considerat fix în originea O(0, 0) şi al doilea, care se deplasează, pe direcţia axei x (**ε = 0**), cu viteza **v**, o fracţiune din viteza **c** a luminii în vid, astfel că, deplasarea relativă a celor doua sisteme **s** = $\|OS\|$, este dată de o nouă dimensiune a spaţiului **e**, adică e = **s.t** = $\frac{v}{c}t$, care este excentricitatea liniară reală variabilă **e** iar **s** este excentricitatea liniară numerică, ambele, aici, considerate constante.

Acesta este spaţiul 2D **excentric**, notat **2DE** cu **3** dimensiuni: x, y şi e = $\frac{v}{c}t$, în care **e** variază uniform, în raport cu timpul **t**. Dacă **E** se deplasează pe o direcţie de orientare **ε** faţă de axa x, **ε = ct,** situaţia nu se schimbă**,** decât dacă deplasarea se realizează şi pe direcţia **z**, caz în care ne situăm în spatiul

3D excentric, spaţiu **3D** cu **patru** dimensiuni: x, y, z şi **e**, notat **3DE**, dacă **ε** = ct şi cu 5 dimensiuni dacă **ε** este şi ea variabilă **ε** = ε (t) . Excentricitatea unghiulară fiind **ε**.



$s = \frac{v}{c} = 0{,}6$ şi **s = 1**

v' > v → s' > s

Fig. 35.5 Contracţia spaţiului (ΔL) şi dilatarea temporală (Δt) ← stânga şi variaţia lor cu creşterea vitezei → dreapta.

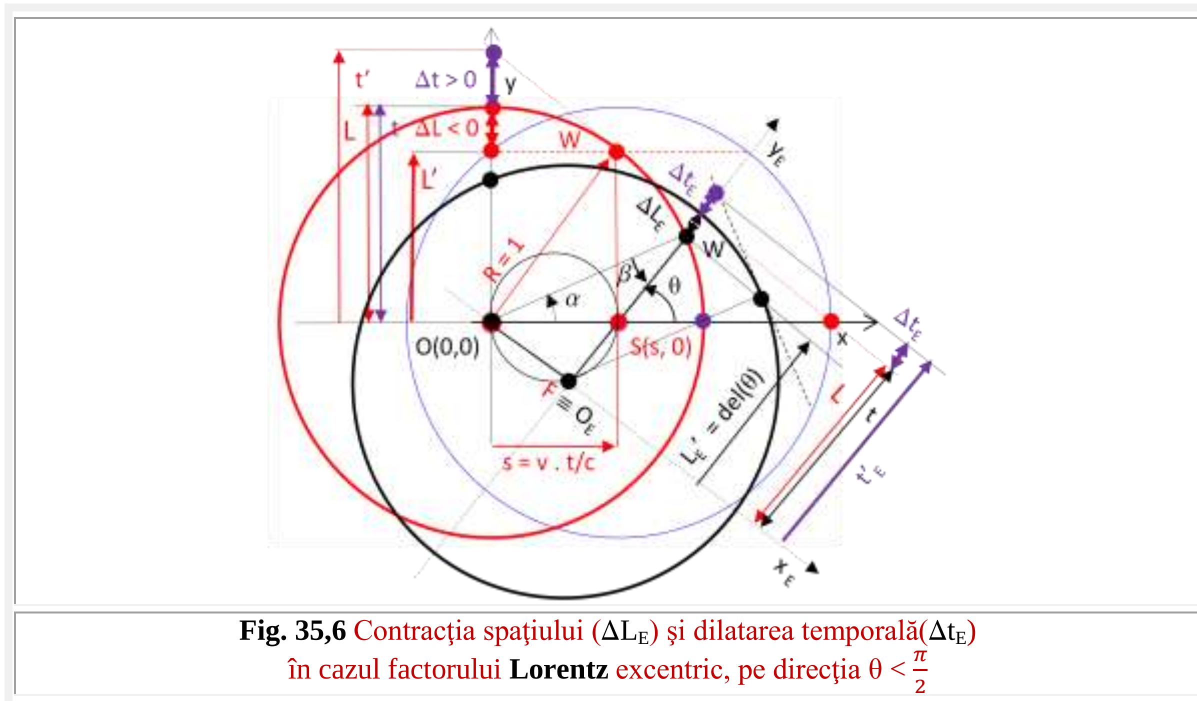
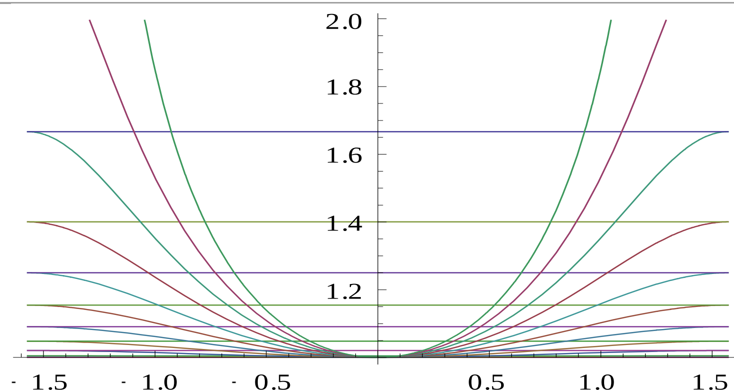


Fig. 35,6 Contracţia spaţiului (ΔL_E) şi dilatarea temporală(Δt_E) în cazul factorului **Lorentz** excentric, pe direcţia $\theta < \frac{\pi}{2}$

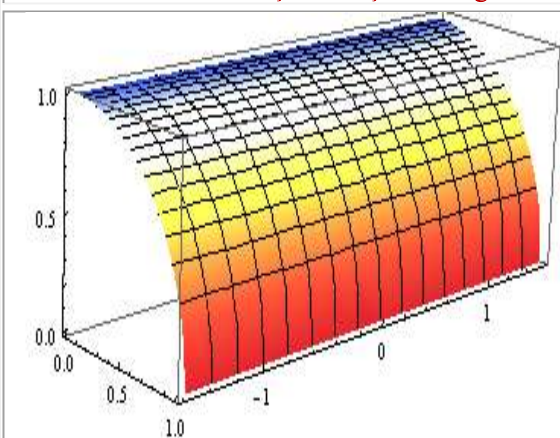
In **figura 35.5**, sunt reprezentate contracţia spaţiului (**ΔL < 0**) şi dilatarea temporală (**Δt > 0**) pentru un unghi la excentrul **S** de θ = π/2 şi pentru unitatea de lungime L = R = 1 şi respectiv, unitatea de timp t = R = 1 → **e** = **s**. Acestea sunt

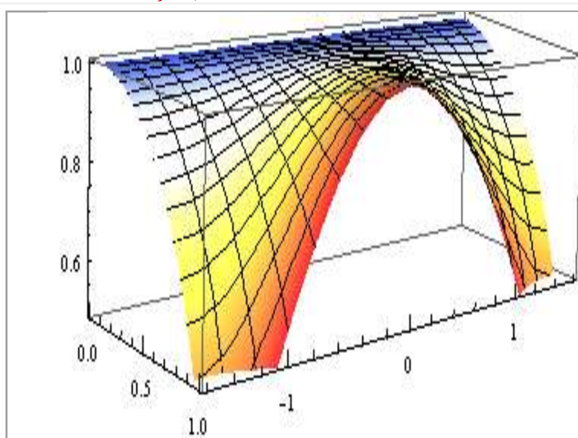
(6) $$\begin{cases} \Delta L = L' - L = L\left(\sqrt{1 - s^2 sin^2\frac{\pi}{2}} - 1\right) = L\left(del\frac{\pi}{2} - 1\right) = L\left(\sqrt{1-s^2} - 1\right) < 0 \\ \Delta t = t' - t = t\left(\frac{1}{\sqrt{1 - s^2 sin^2\frac{\pi}{2}}} - 1\right) = t\left(\frac{1}{del\frac{\pi}{2}} - 1\right) = t\left(\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} - 1\right) > 0 \end{cases}$$.

Factorul **Lorentz centric Λ(s),** constant pentru un anumit s şi
factorul **Lorentz excentric** Λ_E (s, θ), variabil în funcţie de θ pentru un anumit s
$\Lambda_E \leq \Lambda$, $\theta = \pm\frac{\pi}{2} \rightarrow \Lambda_E = \Lambda$



Variaţia unităţii de lungime L datorită contracţiei, în cele două cazuri





$\Lambda(s = \frac{v}{c})$ | Λ_E **(s, θ)**

Fig. 35.7 Factorii **Lorentz** centric **Λ** şi excentric Λ_E

În aceeaşi figură, în partea dreptă, este prezentată accentuarea dilatării timpului şi a contracţiei temporale la o creştere a viteze de la **v** la **v'**.

Se observă şi din figură că, pentru **v = c → s = 1** şi ΔL → – L, adică lungimea se reduce la zero (L'→ 0, ΔL = L' - L = 1) şi timpul se dilată nemărginit t' = Δt → ∞.

În relaţiile anterioare, factorul **Lorentz**, notat în mod obişnuit cu γ, aici a fost notat cu **Λ** (litera grecească **Λ** fiind mai apropiată de iniţiala numelui lui **Lorentz** decât gama - γ) şi are expresia

(7)(35.7) $$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} > 1$$

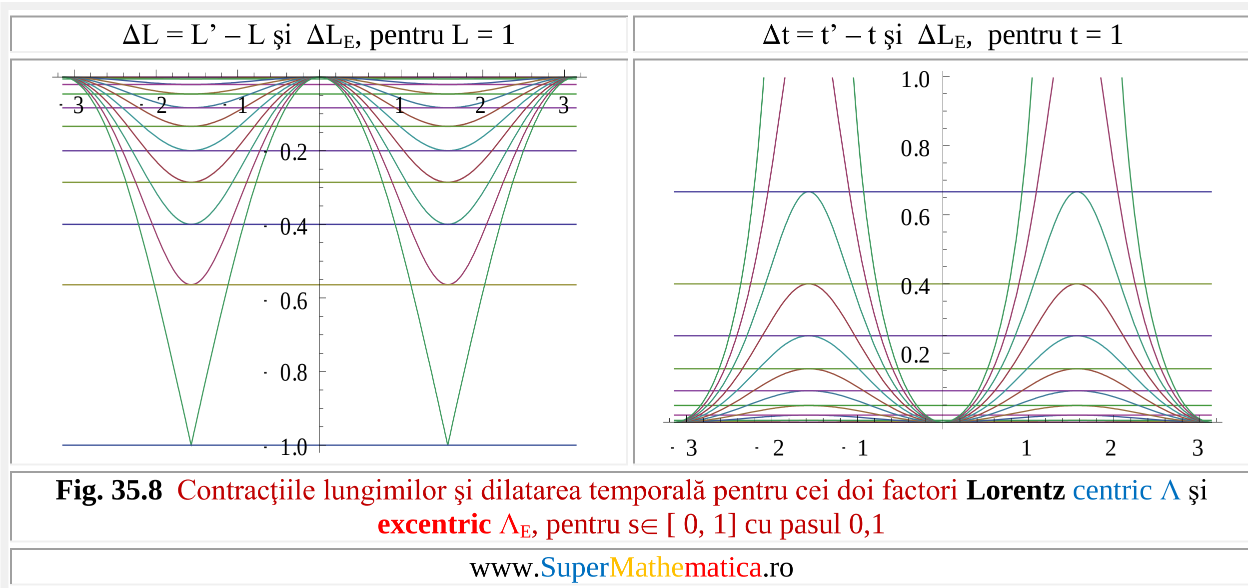


Fig. 35.8 Contracţiile lungimilor şi dilatarea temporală pentru cei doi factori **Lorentz** centric Λ şi **excentric** Λ_E, pentru s∈ [0, 1] cu pasul 0,1

www.SuperMathematica.ro

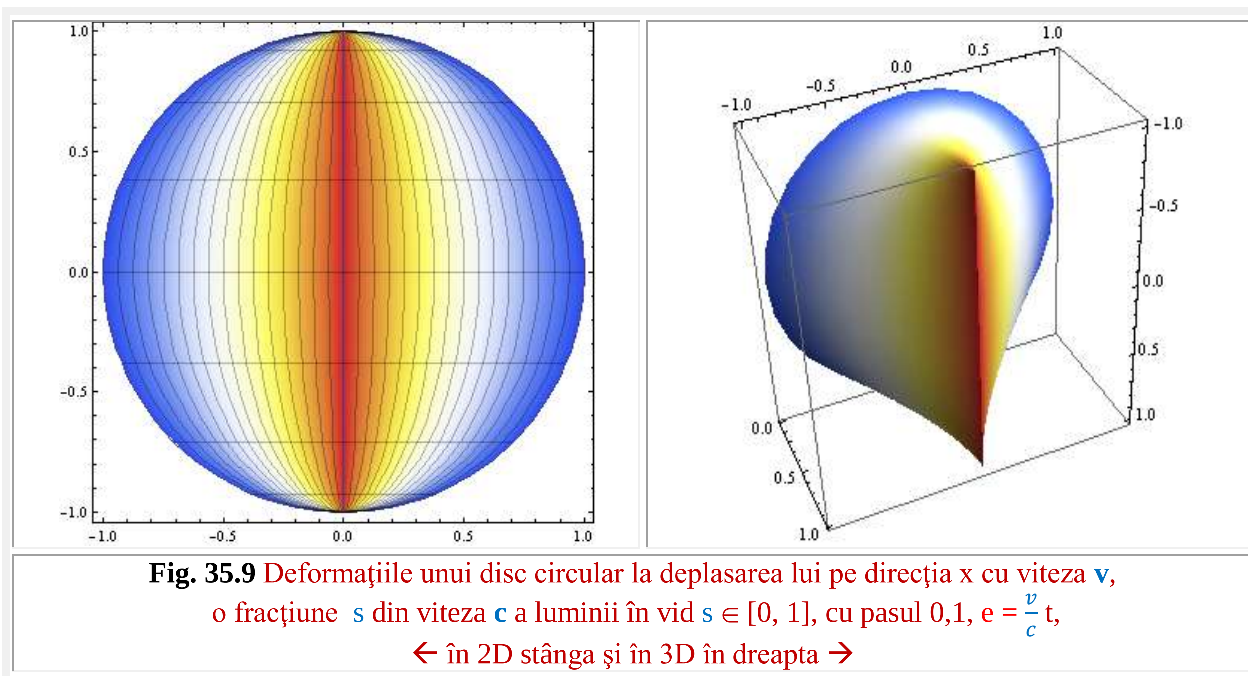


Fig. 35.9 Deformaţiile unui disc circular la deplasarea lui pe direcţia x cu viteza **v**, o fracţiune s din viteza **c** a luminii în vid s ∈ [0, 1], cu pasul 0,1, e = $\frac{v}{c}$ t,
← în 2D stânga şi în 3D în dreapta →

Pentru o anumită valoare a vitezei **v = ct.,** rezultă o excentricitate numerică **s** = ct. şi, ca urmare, şi un factor **Lorentz** constant, pentru care contracţia spaţiului şi, mai precis, a unitaţii de lungime L pe direcţia **y** (**Fig. 6**) este $\boldsymbol{L' = L/\Lambda}$ şi dilatarea temporală a unitaţii de timp t va fi **t' = Λ.t**.

Se poate deduce că aceste valori sunt invariante la sensul de deplasare (pozitiv pe semiaxa x^+ sau negativ pe direcţia semiaxei negative x^-, şi, evident, nici la unităţi de lungime şi timp **orientate** pe x, dar **marcate** pe sensurile pozitive sau negative ale direcţiei **y**, aşa cum se observă şi în **figura 8**. Pentru θ = ± $\frac{\pi}{2}$, $\Lambda = \Lambda_E$ astfel că ΔL = L' – L → minim şi Δt = t' – t → maxim posibil, pentru o anumită valoare a lui **s** ∈ [0, 1].

Deşi mărimile L, L', t, t' sunt reprezentate pe directia y, ele corspund deplasării relative ale sistemelor inerţiale pe direcţia axei **x**. Ca urmare, contracţia ΔL şi dilatarea Δt au loc pentru lungimi L şi lungimi de undă sau frecvenţe, care măsoară timpul, orientate tot pe direcţia de mişcare x.

Dacă, în relaţiile anterioare, unghiul θ este diferit de un unghi drept, atunci fenomenul de dilatare a timpului se accentuează, iar cel de contracţie a spaţiului se atenuează, odată cu scăderea lui θ (**Fig. 35.6** şi **Fig. 35.7**). Pentru direcţia de θ = 0, lungime L, care este orientată pe direcţia de deplasare x, nu-şi modifică lungimea, oricar ear fi raportul **s** al vitezelor (**Fig. 35.7**), astfel că L' = L şi atenuarea contracţiei lungimii este completă → Δl = 0, iar dilatarea temporală este maximă posibilă, deoarece t' → ∞.

Dacă unghiul $\theta = \frac{\pi}{2}$ însemnă mărimi **reprezentate** pe axa **y** dar **orientate** pe direcţia **x**, atunci θ = 0 poate înseamna aceleaşi marimi reprezentate pe direcţia **x** dar orientate pe direcţia transversală **y**.

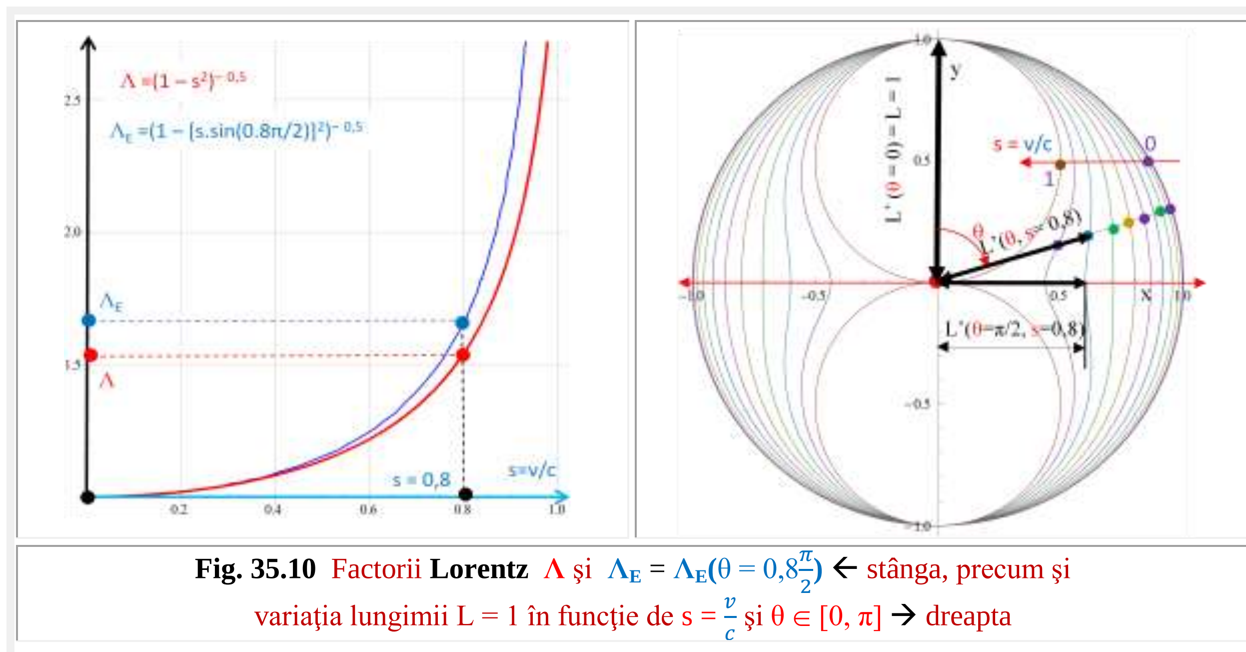


Fig. 35.10 Factorii **Lorentz** **Λ** şi **Λ_E** = $\Lambda_E(\theta = 0{,}8\frac{\pi}{2})$ ← stânga, precum şi variaţia lungimii L = 1 în funcţie de $s = \frac{v}{c}$ şi θ ∈ [0, π] → dreapta

Se poate obţine, astfel, un factor **Lorentz** variabil **Λ_E**, denumit **factor Lorentz excentric**, variabil cu direcţia **θ** de orientare a mărimii, pentru a se deosebi de cel constant centric **Λ**. Expresia lui **Λ_E** este

(8)(35.8) $$\Lambda_E = \frac{1}{\sqrt{1-s^2sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}sin\theta\right)^2}} \in [\Lambda, 1], \text{ pentru } \theta \in [\frac{\pi}{2}, 0], \forall s = \frac{v}{c}\ [-1, 1]$$

În consecinţă, fenomenul de contracţie a lungimilor depinde de direcţia θ, de orientare în spaţiu a lungimii etalon, fiind **maximă** pe direcţia de mişcare relativă **x** de deplasare a sistemului inerţial mobil, adică $\theta = \frac{\pi}{2}$ → $\Lambda_E(\theta) = \Lambda$ şi **minimă** (zero) pe direcţia transversală y (**θ** = 0). Ca urmare, un disc circular, care se deplasează pe direcţia **x** cu viteza v, fracţiune $s = \frac{v}{c}$ din viteza **c** a luminii în vid (**Fig. 35.8**), se va turti pe directia **x**, astfel că, la atingerea vitezei absolute a luminii în vid, viteză **v = c → s = 1**, va deveni o bara de lungime $L_y = 2R$, pe direcţia transversală de mişcare y şi de dimensiune $L_x = 0$ pe direcţia de mişcare x. Pierzându-şi una dintre cele două dimensiuni, de fapt discul circular va dispărea.

Ecuaţia polară a obiectului de lungime L=1, care se deformează, contractându-se la L', odată cu creşterea vitezei relative s, de deplasare a sistemului inerţiale pe direcţia x (**v**↗ → **s** ↗), în aceste situaţii, este

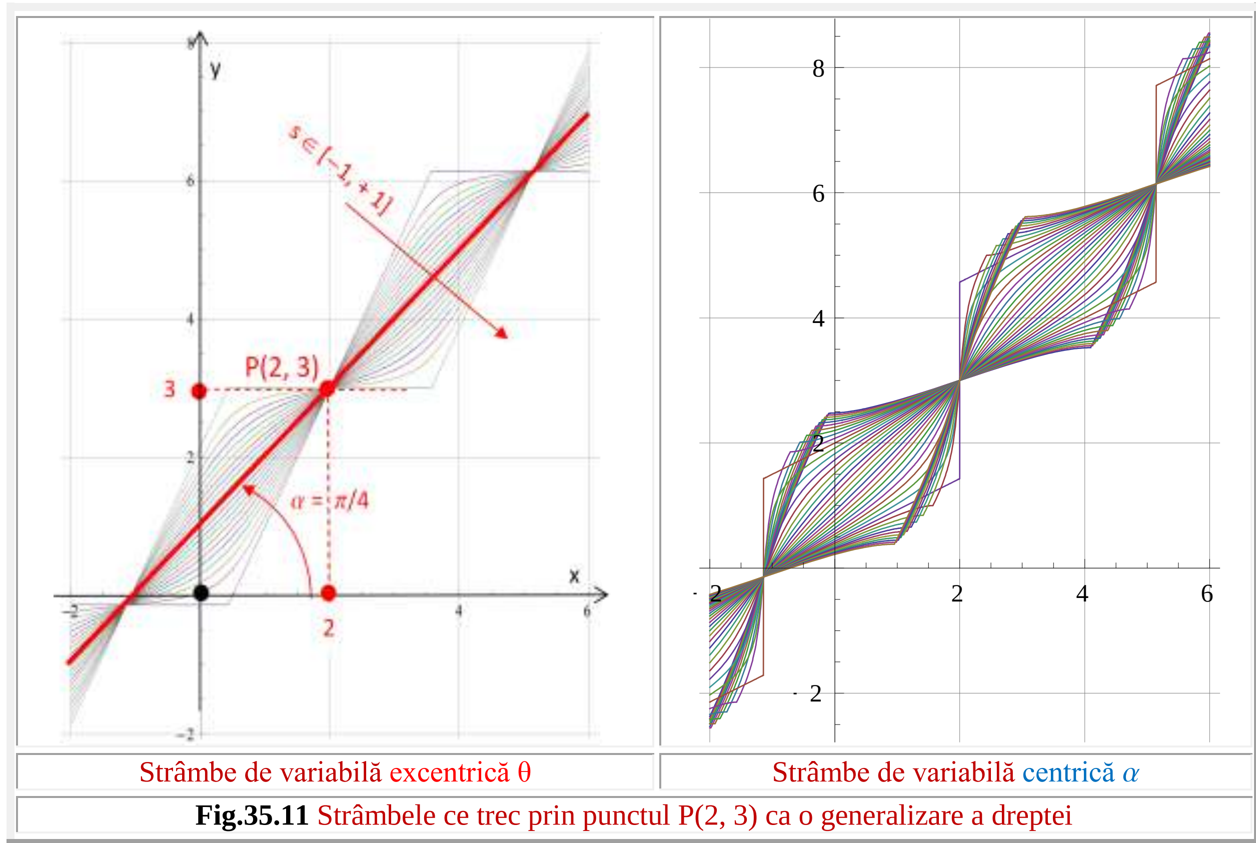
(9)(35.9) $$\rho = \sqrt{1 - s^2sin^2\theta},$$

iar, în coordonate parametrice, este

(1 0)(35.10) $$\begin{cases} x = cos\theta\sqrt{1 - s^2 sin^2\theta} \\ y = \ sin\theta\sqrt{1 - s^2 sin^2\theta} \end{cases}, \quad s \in [0,1], \ \ \theta \ \in [\,0, 2\pi],$$

cu graficele din **figurile 35.8**, **35.9** şi **35.10**.

Aşa cum s-a mai prezentat, **dreapta** este un **spaţiu unidimensional** şi, totodată, în supermatematică (**SM**), o **strâmbă** de excentricitate zero (**Fig. 35.1.20**).



Strâmbe de variabilă excentrică θ | Strâmbe de variabilă centrică α

Fig.35.11 Strâmbele ce trec prin punctul P(2, 3) ca o generalizare a dreptei

Creşterea excentricităţii de la zero la unu transformă **linia dreaptă** într-o **linie frântă**, ambele existând şi sunt cunoscute în matematica **centrică**, nu şi restul strâmbelor, care sunt proprii matematicii **excentrice**, fiind generate de **FSM-CE** amplitudine excentrică. Astfel, dreapta de coeficient unghiular m = tanα = tan$\frac{\pi}{4}$ = 1 care trece prin punctul P(2, 3) are ecuaţia

(11) $y - 3 = x - 2$,

iar familia de strâmbe, din aceeaşi familie cu dreapta, au ecuaţia

(12) $y\,[x, S(s, \varepsilon)] - y_0 = m\,\{aex\,[\theta, S(s, \varepsilon)] - x_0\}$,

(13) $y - y_0 = m\{\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]\} - x_0$, m = tanα = 1, P(2, 3), s ∈ [-1, +1],

în coordonate excentrice θ (Fig. 20 ← stânga) şi, în coordonate centrice α, ecuaţia este

(14) $y[x, S(s, \varepsilon)] - y_0 = m\,(Aex\,[\theta, S(s, \varepsilon)] - x_0)$,

(15) $y - y_0 = \ m\,\{\alpha + \arcsin\frac{s.\sin(\propto - \varepsilon)}{Rex\alpha} - x_0\}$, m = tan$\alpha$ = 1, P(2, 3), s ∈ [-1, +1],

(16) $y - y_0 = \ m\,\{\propto + arcsin\frac{s.\sin(\propto - \varepsilon)}{\sqrt{1+s^2-2s.\cos(\propto - \varepsilon)}} - x_0\}$.

Diferenţa, dintre cele două tipuri de strâmbe, de θ şi de α, este aceea, că cele de θ sunt continue numai pentru excentricitatea numerică din domeniul s ∈ [-1, 1], pe când cele de α sunt continue pentru toate valorile posibile a lui s, adică s ∈ [- ∞ , +∞].

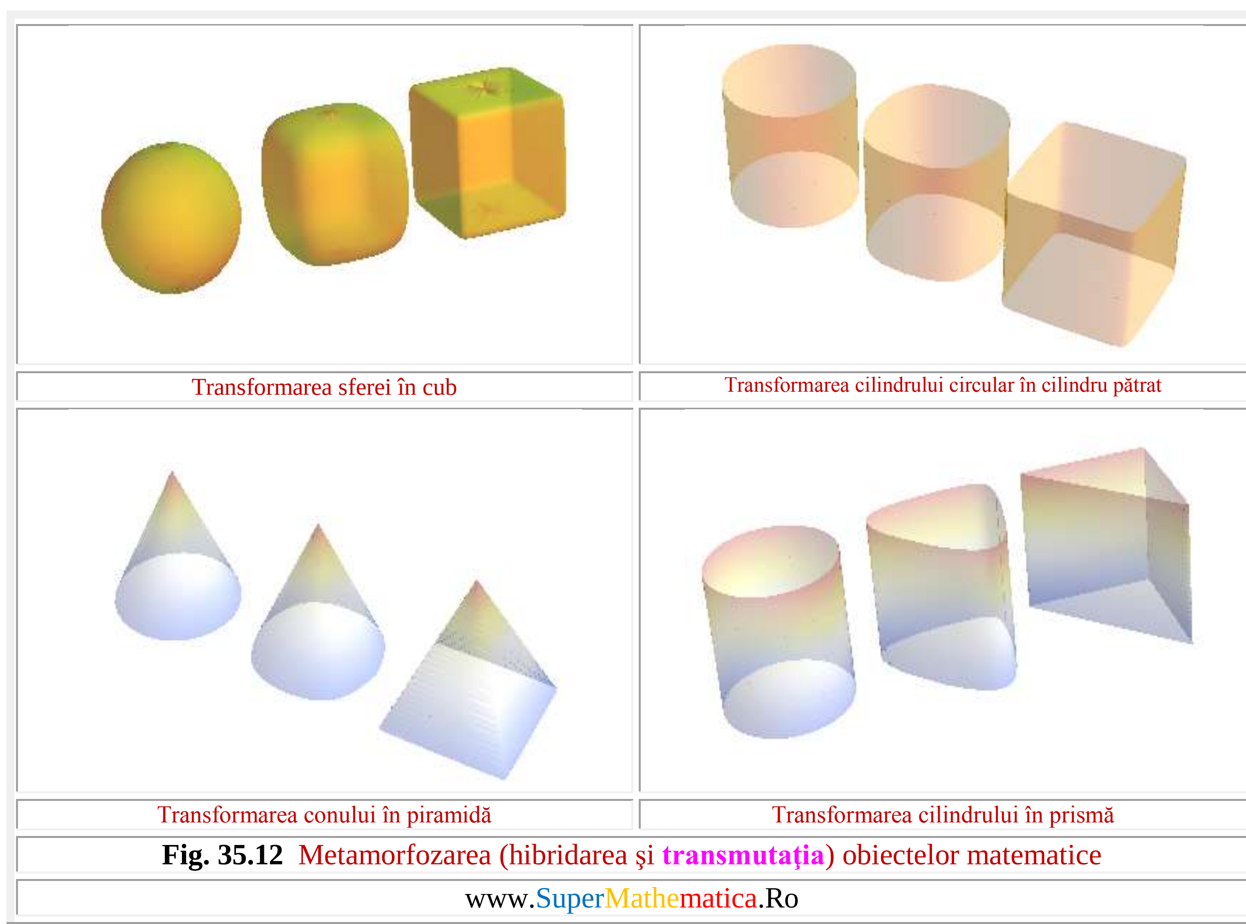
Linia frântă este cunoscută în matematica centrică (**MC**) dar fără să i se cunoască ecuaţiile ei ! Ceea ce nu mai este cazul în **SM** şi, evident, şi în **ME** ea se obţine pentru valoarea **s** = 1 a excentricităţii numerice (**Fig. 35.1.20**).

Un fenomen asemănător metamorfozării matematice, prin care din **MC** un obiect cunoscut trece prin matematica excentrică (**ME**) luând forme hibride şi se reîntoarce în matematica centrică (**MC**) ca un alt tip de obiect (Fig.**1.18**), este considerat că ar avea loc şi în fizică: din vid apar continuu particule de un anumit tip şi se reîntorc în vidul cosmic. Aceleaşi sau altele ?

Aşa cum s-a mai afirmat, **s** = **e** = 0 este lumea MC a liniarului, a entităţilor perfecte, ideale, în timp ce infinitatea de valori posibile atribuite excentricităţilor **s** şi **e**, nasc **ME** şi, totodată, lumi ce aparţin realului, lumii imperfecte, tot mai indepărtată de lumea ideală cu cât **s** şi **e** sunt mai îndepărtate de zero.

Ce se întâmpla dacă **e** = s → 0 ? Lumea reală, ca şi **ME** dispar şi cum lume ideală nu exista, dispare totul !

ÎN LOC DE CONCLUZII: METAMORFOZAREA PRIN HIBRIDARE ŞI TRANSMUTAŢIE (SUPER)MATEMATICE



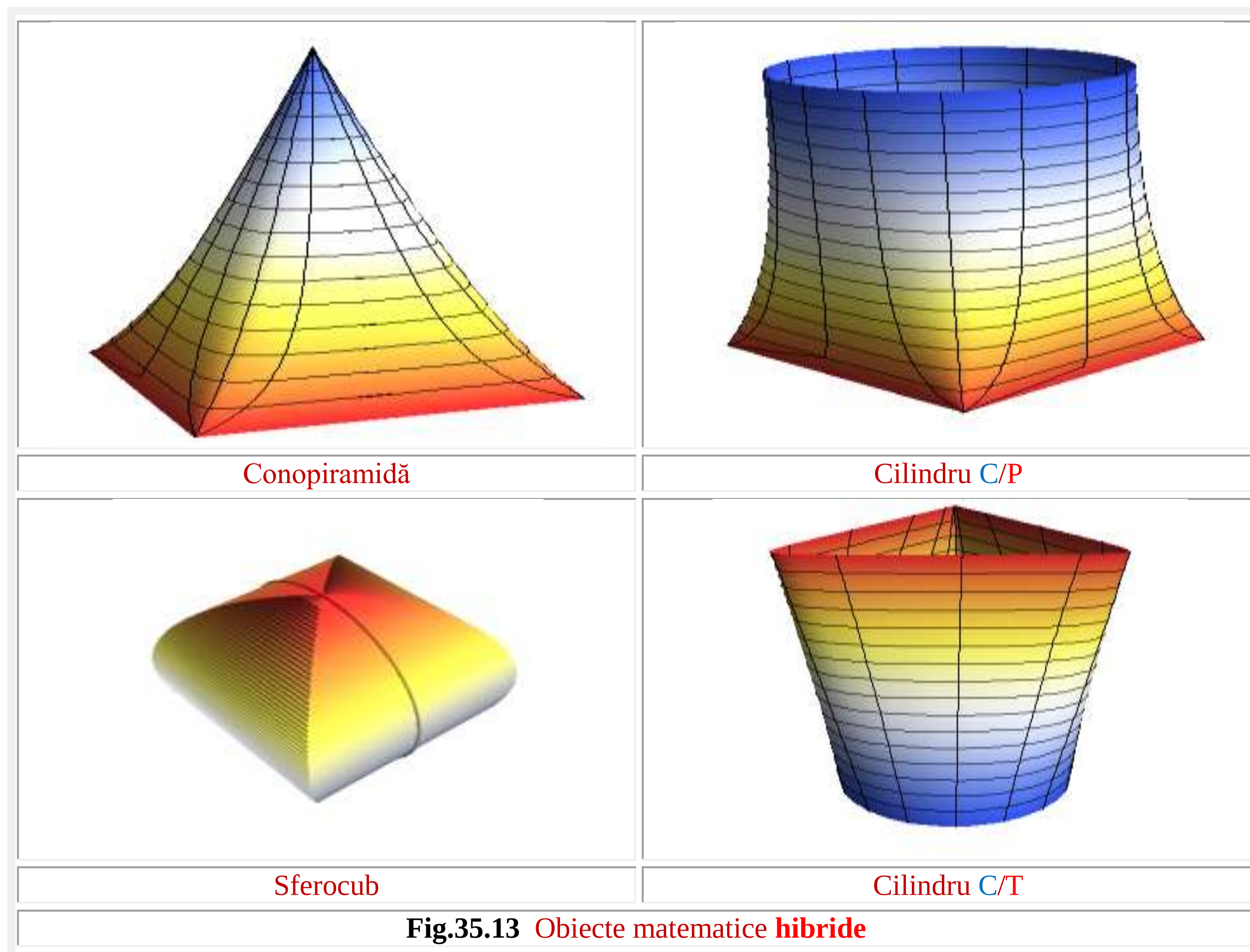
Transformarea sferei în cub | Transformarea cilindrului circular în cilindru pătrat

Transformarea conului în piramidă | Transformarea cilindrului în prismă

Fig. 35.12 Metamorfozarea (hibridarea şi **transmutaţia**) obiectelor matematice

www.SuperMathematica.Ro

În fiecare dintre cele patru desene, prezentate în **figura 35.12,** cele două obiecte extreme, proprii matematicii centrice **(MC**): **sferă-cub**, **cilindru-cub**, **con-piramidă** şi **cilindru-prismă** sunt transformate unele în altele, adică metamorfozate prin **transmutaţie (super)matematică**, în timp ce al 3-lea obiect, intermediar, existent doar în **matematica excentrică** (ME) a fost obţinut printr-o metamorfozare care este considerată o **hibridare (super)matematică.**



Conopiramidă	Cilindru C/P
Sferocub	Cilindru C/T

Fig.35.13 Obiecte matematice **hibride**

Alte obiecte **hibride supermatematice** proprii doar matematicii excentrice (**ME**) sunt prezentate în **figura 13** şi sunt denumite :

- Conopiramidă ▲◄;
- Cilindru circularopătrat ▲►;
- Sferocub▼◄;
- Cilindru circularotriunghiular.

În completarea spaţiului liber:



Fig.35.14 **TRICOLORUL**

INSIGNA SUPERMATEMATICII
CU
FUNCTII CIRCULARE EXCENTRICE

